Problemas de VC para EDVC elaborados por C. Mora, Tema 2

Ejercicio 1

Demostrar que la función $u(x,y) = \cosh y \operatorname{sen} x$ es armónica en el plano y construir otra función armónica $v(x,y)$ tal que $u(x,y) + iv(x,y)$ sea entera.

Solución 1

Comprobemos que $\Delta u(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = -\cosh y \operatorname{sen} x + \cosh y \operatorname{sen} x = 0.$$

Con lo cual u es armónica en el plano y así será parte real de una función holomorfa. Buscamos, pues, $v(x,y)$ diferenciable (y necesariamente armónica) tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = (x,y)$, sea holomorfa en el plano. Imponemos las condiciones de Cauchy-Riemann a f.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array}\right\}$$

De la primera sacamos $\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \cosh y \cos x$ e integrando, $v(x,y) = \operatorname{senh} x \cos x + \varphi(x)$ para una cierta φ diferenciable. Sustituyendo las expresiones de u, v en la segunda ecuación nos queda $-\operatorname{senh} y \operatorname{sen} x + \varphi'(x) = -\operatorname{senh} y \operatorname{sen} x$ con lo que $\varphi'(x) = 0$ y así φ es constante y podemos tomar $\varphi = 0$. Así, la función

$$f(z) = \cosh y \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh} y \cos x$$

es holomorfa en el plano. Vamos a expresarla en función de z.

$$\begin{aligned} \cosh y \operatorname{sen} x + i \operatorname{senh} y \cos x &= \frac{e^y + e^{-y}}{2} \operatorname{sen} x + i \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cos x = \\ \frac{e^{-i(iy)} + e^{i(iy)}}{2} \operatorname{sen} x - \frac{e^{-i(iy)} - e^{i(iy)}}{2i} \cos x &= \cos(iy) \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(iy) \cos x = \operatorname{sen}(x+iy) = \operatorname{sen} z. \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Determinar todos los polinomios armónicos u de la forma

$$u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

y calcular una función $v(x,y)$ tal que $u(x,y) + iv(x,y)$ sea entera.

Solución 2

Los números a, b, c, d son reales porque u es una función real. Imponemos primero la condición $\Delta u = 0$:

$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = (6ax + 2by) + (2cx + 6dy)$$

con lo cual

$$\Delta u = 0 \Leftrightarrow (3a + c)x + (b + 3d)y = 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3a + c = b + 3d = 0.$$

Así, podemos sustituir $c = -3a, \quad b = -3d$ y nos queda el polinomio

$$u(x,y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3$$

con $a, d \in \mathbb{R}$ arbitrarios. Buscamos ahora una función diferenciable (y necesariamente armónica) $v(x,y)$ tal que $u(x,y)+iv(x,y)$ satisfaga las condiciones de Cauchy-Riemann.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = 3ax^2 - 6dxy - 3ay^2 \Leftrightarrow v(x,y) = 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + \varphi(x) \\
\frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \Leftrightarrow 6axy - 3dy^2 + \varphi'(x) = 3dx^2 + 6axy - 3dy^2 \Leftrightarrow \varphi'(x) = 3dx^2
\end{aligned}$$

Con lo cual $\varphi(x) = dx^3 + cte.$ y así tomamos

$$v(x,y) = dx^3 + 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + cte.$$

Es fácil ver que eligiendo adecuadamente la constante se tiene que, para $z = x + iy$, es

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (a + id)z^3.$$

Ejercicio 3

Sean Ω un abierto conexo de $\mathbb{C}$ y u, v funciones armónicas en Ω. ¿Bajo qué condiciones es armónica uv? Demostrar que u^2 no puede ser armónica a menos que u sea constante. ¿Para qué funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es $|f|^2$ armónica?

Solución 3

Tenemos $\Delta u = \Delta v = 0$ en Ω. Queremos ver cuándo $\Delta(uv) = 0$. Se tiene

$$\frac{\partial^2(uv)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \frac{\partial^2(uv)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

con lo cual, usando que u, v son armónicas,

$$\Delta(uv) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Así pues,

$$uv \text{ es armónica} \iff \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

En particular,

$$u^2 \text{ es armónica } \Leftrightarrow \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow u \text{ es constante}$$

puesto que Ω es conexo.

Por último, sea $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces $|f|^2 = u^2 + v^2$ y sabemos que $\Delta u = \Delta v = 0$. Por tanto,

$$|f|^2 \text{ es armónica} \Leftrightarrow \Delta(u^2) + \Delta(v^2) = 0 \Leftrightarrow 2|\nabla u|^2 + 2|\nabla v|^2 = 0 \Leftrightarrow \nabla u = \nabla v = 0$$

Como Ω es conexo, esto equivale a que f sea constante.

Ejercicio 4

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Demostrar que si $|f|$ es constante entonces f es constante.

Solución 4

Pongamos $f = u + iv$. Nuestra hipótesis es que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $z = x + iy \in \Omega$ se cumple $|f(z)| = \sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2} = c$, equivalentemente,

$$u(x,y)^2 + v(x,y)^2 = \text{constante}$$

Derivando esta expresión nos queda

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

que expresada matricialmente es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En vistas a aplicar la regla de Cramer, calculamos el determinante de la matriz del sistema, que gracias a las condiciones de Cauchy-Riemann es

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2.$$

Si este determinante fuera distinto de cero, entonces $u = v = 0$, luego f es constante. Si, por el contrario, fuera igual a cero, entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, y volviendo a aplicar las condiciones de Cauchy-Riemann concluimos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Como Ω es conexo, entonces u, v son constantes y por tanto f es constante.

Ejercicio 5

Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y definimos $\Omega_1 = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$. Demostrar que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ si y sólo si $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, donde $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$.

Solución 5

Ante todo, Ω_1 es abierto porque la conjugación es un homeomorfismo. Observamos que g está bien definida en Ω_1 por la propia definición de Ω_1. Haciendo $u = \operatorname{Re} f$, $v = \operatorname{Im} f$ entonces $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$, y ya sabemos que

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Tenemos que

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y) = \hat{u}(x,y) + i\hat{v}(x,y) \text{ donde } \left.\begin{array}{c} \hat{u}(x,y) = u(x,-y) \\ \hat{v}(x,y) = -v(x,-y) \end{array}\right\}$$

Se tiene que $\hat{u}, \hat{v} \in \mathcal{C}^1(\Omega_1)$ por ser composición de funciones $\mathcal{C}^1$. Además, $\hat{u}, \hat{v}$ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann; en efecto, como u, v sí las cumplen, entonces

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[u(x,-y)\right] = \frac{\partial u}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y) \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[-v(x,-y)\right] = \frac{\partial v}{\partial y}(x,-y) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial \hat{u}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial \hat{v}}{\partial y}(x,y)$$

$$\left.\begin{array}{c} \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[-v(x,-y)\right] = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,-y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) \\ -\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y}\left[u(x,-y)\right] = \frac{\partial u}{\partial y}(x,-y) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial \hat{v}}{\partial x}(x,y) = -\frac{\partial \hat{u}}{\partial y}(x,y)$$

Luego $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. Así pues, hemos probado $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. Usamos esto para probar el recíproco. Si $g \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ entonces $\overline{g(\bar{z})} \in \mathcal{H}(\Omega)$. Pero $\overline{g(\bar{z})} = \overline{\overline{f(\bar{\bar{z}})}} = f(z)$.

Ejercicio 6

Determinar los valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para los que la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az^2 + bz\overline{z} + c\overline{z}^2$ es entera.

Solución 6

Haciendo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$ tenemos que $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, con

$$u(x,y) = (a+b+c)x^2 + (-a+b-c)y^2, \qquad v(x,y) = 2(a-c)xy$$

Luego claramente $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ y por tanto f es holomorfa si y sólo si satisface las condiciones de Cauchy-Riemann, que son

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} 2(a+b+c)x = 2(a-c)x \\ 2(a-c)y = -2(-a+b-c)y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} a+b+c = a-c \\ a-c = a-b+c \end{array}\right\}$$

y este sistema tiene como soluciones $a \in \mathbb{C}$, $b = c = 0$.

Si se han introducido los operadores $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$, una manera más rápida de resolver esto es calcular

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z, \overline{z}) &= bz + 2c\overline{z} \qquad \text{y así} \\ f &\in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \Leftrightarrow b = c = 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ cuya imagen está contenida en una recta. Probar que f es constante.

Solución 7

Expresemos en forma binómica $f = u + iv$. Que f esté contenida en una recta afín significa que existen $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y $c \in \mathbb{R}$ tales que

$$au(x,y) + bv(x,y) = c \quad \forall (x,y) \in \Omega$$

Derivando esta expresión respecto de x y respecto de y, y aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann, obtenemos

$$\begin{aligned} a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial v}{\partial x} &= 0\\ a\frac{\partial u}{\partial y}+b\frac{\partial v}{\partial y} &= 0;\ \text{por Cauchy-Riemann es} \qquad -a\frac{\partial v}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial x}=0. \end{aligned}$$

Expresado matricialmente

$$\begin{pmatrix} a & b\\ b & -a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Como $\det\begin{pmatrix} a & b\\ b & -a\end{pmatrix}=-a^2-b^2\neq 0$ al ser $(a,b)\neq(0,0)$ entonces $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}$. Aplicando otra vez las condiciones de Cauchy-Riemann obtenemos que $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$ y como Ω es conexo esto implica que u,v son constantes, y por tanto f es constante.

Se puede dar una demostración alternativa usando el teorema de la función inversa en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente manera. Consideramos f como función entre espacios vectoriales reales de dimensión dos, es decir, $f:\Omega\to\mathbb{R}^2$ con Ω un abierto de $\mathbb{R}^2$. Sabemos que entonces $f\in\mathcal{C}^1(\Omega,\mathbb{R}^2)$. Supongamos que existiese $z_0\in\Omega$ tal que $f'(z_0)\neq 0$ con $f'(z_0)$ en el sentido complejo. Entonces f en el sentido real tiene como derivada la matriz jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\\ \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial y} & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\\ -\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x} & \frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}\end{pmatrix}$$

gracias a las condiciones de Cauchy-Riemann; el hecho de que $f'(z_0)\neq 0$ nos dice que el determinante de esta matriz es distinto de cero, pues, es $\left(\frac{\partial \operatorname{Re} f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \operatorname{Im} f}{\partial x}\right)^2\neq 0$. O sea, la diferencial de $f:\Omega\to\mathbb{R}^2$ en z_0 es un isomorfismo de $\mathbb{R}^2$, luego por el teorema de la función inversa para $\mathbb{R}^n$, f tiene inversa local de clase 1 y por tanto es abierta en un entorno abierto $\mathcal{U}$ de z_0. Así, $f(\mathcal{U})$ es abierto y en particular, $f(\Omega)$ tiene interior no vacío, lo que contradice que $f(\Omega)$ esté contenida en una recta. Con lo cual, necesariamente $f'=0$, y como Ω es conexo, esto implica que f es constante.

Obsérvese que este último argumento es mucho más general, ya que prueba que toda función holomorfa que parta de un conexo, o es constante o su imagen tiene interior no vacío.

Ejercicio 8

Sean $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto conexo y $f = u + iv \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que para alguna $v_0 \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ la función $u + iv_0$ también es holomorfa en Ω. Probar que $v - v_0 \in \mathbb{C}$.

Solución 8

Por ser holomorfa la diferencia de funciones holomorfas, tenemos que la función $i(v - v_0)$ es holomorfa, y aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann concluimos que

$$\frac{\partial(v - v_0)}{\partial x} = \frac{\partial(v - v_0)}{\partial y} = 0$$

y como Ω es conexo, entonces $v - v_0$ es constante.

Ejercicio 9

Demostrar que si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ es tal que $\operatorname{Re} f$ depende sólo de la primera variable, entonces f es una función lineal afín.

Solución 9

Sea $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$, con u, v diferenciables, una de tales funciones. Aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann, y teniendo en cuenta que u no depende de y, obtenemos $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, lo que nos dice que v no depende de x. Con lo cual, podemos escribir

$$f(x, y) = u(x) + iv(y), \qquad \text{con } u, v \text{ diferenciables}$$

De nuevo, aplicando las condiciones de Cauchy-Riemann obtenemos que $u'(x) = v'(y)\ \forall (x, y) \in \mathbb{C}$. Fijada $y \in \mathbb{R}$, esto nos dice que u' es constante, digamos $a \in \mathbb{R}$. Fijada $x \in \mathbb{R}$, esto nos dice que v' es constante, y es la misma que u', o sea, a. Con lo cual, integrando,

$$\begin{aligned} u(x) &= ax + \alpha, \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \\ v(y) &= ay + \beta, \qquad \text{con } \beta \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Y haciendo $\gamma = \alpha + i\beta$ tenemos que $f(x, y) = u(x) + iv(y) = ax + \alpha + iay + i\beta$, o sea,

$$f(z) = az + \gamma$$

y así f es un polinomio complejo de grado menor o igual que 1.

Ejercicio 10

Mostrar que el "teorema del valor medio" no es cierto en variable compleja. En concreto, dada la función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \quad f(z) = z^3$, probar que no existe ningún $\xi \in [1, i]$ tal que $f(i) - f(1) = (i-1)f'(\xi)$.

Solución 10

Tenemos $f(z) = z^3, \quad f'(z) = 3z^2$. Supongamos que existiese tal punto $\xi \in [1, i]$. Entonces se cumpliría $i^3 - 1^3 = (i-1)3\xi^2$ y por tanto

$$|\xi|^2 = \left| \frac{-i-1}{3(i-1)} \right| = \frac{1}{3}$$

Ahora bien, como $\xi \in [1, i]$ entonces $\xi = 1 + t(i-1)$ para algún $t \in [0, 1]$, con lo cual $|\xi|^2 = (1-t)^2 + t^2 = 1 - 2t + 2t^2$. Observamos que la función real de variable real $g(t) = 1 - 2t + 2t^2$ tiene un mínimo en $t = 1/2$ y así $g(t) \geq g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$. Con lo cual $|\xi|^2 \geq \frac{1}{2}$ cualquiera que sea $\xi \in [1, i]$, lo que contradice $|\xi|^2 = \frac{1}{3}$.

Ejercicio 11

Suponiendo que $R > 0$ es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, determinar el radio de convergencia de las series $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$, donde $k \geq 1$ es natural.

Solución 11

Vamos a aplicar en todos ellos el criterio de la raíz. Tenemos que $R > 0$ es el radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, luego $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} > 0$. Con lo cual, aplicando el criterio de la raíz a cada una de las series obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n^k|} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{k}{n}} = \left(\frac{1}{R}\right)^k$$

Luego R^k es el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n^k z^n$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z^{kn}|} < 1 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,\left|z^k\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{R}\left|z^k\right| < 1 \Leftrightarrow \left|z^k\right| < R.$$

Luego $R^{\frac{1}{k}}$ es el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|\,|z|^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\,|z|^n = \begin{cases} \infty & \text{si } |z| > 1 \\ 0 & \text{si } |z| < 1 \end{cases}.$$

Luego 1 es el radio de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{n^2}$

Ejercicio 12

Determinar todas las series de potencias $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ que satisfacen cada una de las ecuaciones diferenciales

1. $u''(z) - \omega^2 u(z) = 0$ con $\omega > 0$
2. $u''(z) + \omega^2 u(z) = 0$ con $\omega > 0$

¿Cuál es el radio de convergencia?

Solución 12

1. Tenemos que $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, y si suponemos que el radio de convergencia es positivo, entonces podemos derivar término a término la serie, con lo cual

$$u''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}z^n.$$

Así, la condición $u'' - \omega^2 u = 0$ se traduce en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - \omega^2 a_n\right] z^n = 0.$$

Por la unicidad de la serie de potencias, necesariamente ha de ocurrir $(n+2)(n+1)a_{n+2} - \omega^2 a_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Esta fórmula de recurrencia vamos a resolverla independientemente para los n pares y para los n impares.
Tenemos que a_0 es dado, y un sencillo argumento de inducción prueba que

$$a_{2n} = \frac{\omega^{2n}}{(2n)!}a_0 \qquad \forall n \geq 0.$$

Análogamente, a_1 es dado, y por inducción se prueba que

$$a_{2n+1} = \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!}a_1 \qquad \forall n \geq 0.$$

Si suponemos que el radio de convergencia es positivo, podemos reordenar la serie y escribir

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{2n}}{(2n)!}a_0 z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!}a_1 z^{2n+1} = \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{a_1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = a_0 \cosh(wz) + \frac{a_1}{\omega} \operatorname{senh}(wz). \end{aligned}$$

Con lo cual la hipótesis efectuada sobre el radio de convergencia se cumple (de hecho, las funciones coseno hiperbólico y seno hiperbólico son enteras) y así todos los cálculos son correctos.

2. Es muy parecido al anterior. Tenemos que $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, y si suponemos que el radio de convergencia es positivo, entonces podemos derivar término a término la serie, con lo cual

$$u''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} z^n.$$

Así, la condición $u'' + \omega^2 u = 0$ se traduce en

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + \omega^2 a_n\right] z^n = 0.$$

Por la unicidad de la serie de potencias, necesariamente ha de ocurrir $(n+2)(n+1)a_{n+2} + \omega^2 a_n = 0$ para todo $n \geq 0$. Esta fórmula de recurrencia vamos a resolverla independientemente para los n pares y para los n impares.
Tenemos que a_0 es dado, y un sencillo argumento de inducción prueba que

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0 \qquad \forall n \geq 0.$$

Análogamente, a_1 es dado, y por inducción se prueba que

$$a_{2n+1} = (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_1 \qquad \forall n \geq 0.$$

Si suponemos que el radio de convergencia es positivo, podemos reordenar la serie y escribir

$$\begin{aligned} u(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} a_0 z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{2n}}{(2n+1)!} a_1 z^{2n} \\ &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega z)^{2n}}{(2n)!} + \frac{a_1}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\omega z)^{2n+1}}{(2n+1)!} = a_0 \cos(wz) + \frac{a_1}{\omega} \operatorname{sen}(wz). \end{aligned}$$

Con lo cual la hipótesis efectuada sobre el radio de convergencia se cumple (de hecho, las funciones coseno y seno son enteras) y así todos los cálculos son correctos.

Ejercicio 13

Demostrar que existe una única función holomorfa $u(z)$ definida por una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tal que $u' = u - 1$ y $u(0) = 2$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esa serie de potencias?

Solución 13

Tenemos $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si suponemos que el radio de convergencia es positivo, podemos derivar la serie término a término, y así

$$u'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n.$$

Con lo cual, la condición $u'(z) = u(z) - 1$ se traduce en

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - 1.$$

Por la unicidad de la serie de potencias, junto con la condición $u(0) = 2$ tenemos que los coeficientes han de satisfacer las siguientes relaciones:

$$\left.\begin{array}{l} a_0 = 2 \\ a_1 = a_0 - 1 \\ (n+1) a_{n+1} = a_n, \quad n \geq 1 \end{array}\right\}$$

Un sencillo argumento de inducción prueba que $a_n = 1/n!$ para todo $n \geq 1$, con lo cual

$$u(z) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + e^z$$

lo que da la unicidad de la u. La existencia se comprueba sencillamente viendo que de hecho esta u así definida tiene radio de convergencia positivo (de hecho, infinito: es una función entera) y satisface las relaciones requeridas; es decir, todos los pasos dados son reversibles.

Ejercicio 14

Se considera la función $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Se pide:

1. Demostrar que f es real en el intervalo $(-1, 1)$ si y sólo si $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$.

2. Comprobar que f es par si y sólo si $a_n = 0$ para todo n impar.

Solución 14

1. Si $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$ entonces para cada $t \in (-1,1)$ se tiene que $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{R}$. Recíprocamente, supongamos que f sea real en $(-1,1)$ y probemos por inducción que $a_n \in \mathbb{R}$ para todo $n \geq 0$.
   Para $n = 0$ es cierto pues al ser $0 \in (-1,1)$, entonces $\mathbb{R} \ni f(0) = a_0$.
   Lo suponemos cierto para todo $k \leq n$ y lo probamos para $n+1$. Definimos la función
   $$g(z) = \frac{1}{z^{k+1}} \left[f(z) - \sum_{n=0}^{k} a_n z^n \right]$$
   que es real en $(-1,1)$ porque f lo es y $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Además, es holomorfa en D pues admite el desarrollo de potencias
   $$g(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^{k-n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k+1} z^k$$
   Como es real en $(-1,1)$, en particular $g(0) \in \mathbb{R}$, y entonces $a_{n+1} = g(0) \in \mathbb{R}$ como queríamos.

2. Tenemos las siguientes equivalencias:
   $$\begin{aligned} f \text{ es par} \quad &\Leftrightarrow \quad f(z) = f(-z) \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-z)^n \Leftrightarrow \\ \sum_{n \text{ par}} a_n z^n + \sum_{n \text{ impar}} a_n z^n \quad &= \quad \sum_{n \text{ par}}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n \text{ impar}}^{\infty} a_n z^n \Leftrightarrow \sum_{n \text{ impar}} a_n z^n = 0 \end{aligned}$$
   Por la unicidad de las series de potencias, esto equivale a que $a_n = 0$ para todo n impar.