Problemas de VC para EDVC elaborados por C. Mora, Tema 1

Ejercicio 1

Escribir en forma binómica los siguientes números complejos:

$$i^n, \quad n \in \mathbb{Z}; \qquad \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}; \qquad \left(\sqrt{3}-i\right)^4 \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5; \qquad (1+i\sqrt{3})^{20}; \qquad e^{1/z}$$

Solución 1

- $i^n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 4 \\ i & \text{si } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{si } n \equiv 2 \pmod 4 \\ -i & \text{si } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$

- $$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n = \cos(\frac{\pi}{4}n) + i\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4}n)$$

- Por un lado
$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i$$
Por otro,
$$\left(\sqrt{3}-i\right)^4 = \left[2\left(\cos\frac{-\pi}{6} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-\pi}{6}\right)\right]^4 = 16\left(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-2\pi}{3}\right) = -8-8i\sqrt{3}$$
Con lo cual
$$\left(\sqrt{3}-i\right)^4\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5 = \left(-8-8i\sqrt{3}\right)i = 8\sqrt{3}-8i.$$

- $\left(1+i\sqrt{3}\right)^{20} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{20} = 2^{20}e^{i\frac{20\pi}{3}} = 2^{20}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2^{20}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}) = 2^{19}(-1+i\sqrt{3})$

- Haciendo $x = \mathrm{Re}\,z$, $y = \mathrm{Im}\,z$
$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{z}} &= e^{\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\left(\cos\frac{-y}{x^2+y^2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right) \\ &= e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cos\frac{y}{x^2+y^2} - ie^{\frac{x}{x^2+y^2}}\,\mathrm{sen}\,\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Calcular el módulo y el argumento principal de los siguientes números complejos:

$$\frac{i}{-2-2i}, \qquad \frac{-2}{1+\sqrt{3}i}, \qquad \frac{(1+i)^4}{\sqrt{2}}$$

Solución 2

Al calcular el argumento principal, primero calculamos el argumento módulo $2\pi\mathbb{Z}$.

-
$$\begin{aligned} \arg\frac{i}{-2-2i} &= \arg i - \arg(-2-2i) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z} = \frac{5\pi}{4} + 2\pi\mathbb{Z} \\ \text{Luego } \operatorname{Arg}\frac{i}{-2-2i} &= \frac{-3\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\left|\frac{i}{-2-2i}\right| = \frac{|i|}{|-2-2i|} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

-
$$\begin{aligned} \arg\frac{-2}{1+\sqrt{3}i} &= \arg(-2) - \arg(1+\sqrt{3}i) = \pi - \frac{\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi\mathbb{Z} \\ \text{Luego } \operatorname{Arg}\frac{-2}{1+\sqrt{3}i} &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\left|\frac{-2}{1+\sqrt{3}i}\right| = \frac{|-2|}{|1+\sqrt{3}i|} = \frac{2}{2} = 1$$

-
$$\begin{aligned} \arg\frac{(1+i)^4}{\sqrt{2}} &= 4\arg(1+i) - \arg(\sqrt{2}) = 4\frac{\pi}{4} - 0 + 2\pi\mathbb{Z} = \pi + 2\pi\mathbb{Z} \\ \text{Luego } \operatorname{Arg}\frac{(1+i)^4}{\sqrt{2}} &= -\pi \end{aligned}$$

$$\left|\frac{(1+i)^4}{\sqrt{2}}\right| = \frac{\sqrt{2}^4}{\sqrt{2}} = 2^{\frac{3}{2}}$$

Ejercicio 3

Describir el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ que verifican:

1. $|z-2| > |z-3|$
2. $\frac{1}{z} = \overline{z}$
3. $|z-1+i| = 1$
4. $|z-4i| + |z+4i| = 10$
5. $\mathrm{Re}(\overline{z} - i) = 2$
6. $|2z - i| \leq 4$
7. $z + \overline{z} = |z|^2$
8. $z - \overline{z} = i$
9. $\overline{z}^2 = z^2$

Solución 3

Escribamos $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$ y llamemos d a la distancia euclídea en $\mathbb{R}^2$.

1.
$$|z-2| > |z-3| \Leftrightarrow |z-2|^2 > |z-3|^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 > (x-3)^2 + y^2 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$$
Es el semiplano abierto $x > \frac{5}{2}$.

2.
$$\frac{1}{z} = \overline{z} \Leftrightarrow 1 = z\overline{z} \Leftrightarrow |z| = 1$$
Es la circunferencia unidad.

3.
$$|z-1+i| = 1 \Leftrightarrow d(z, 1-i) = 1$$
Circunferencia de centro $(1, -1)$ y radio 1.

4.
$$|z-4i|+|z+4i|=10 \Leftrightarrow d(z,4i)+d(z,-4i)=10$$

Se trata del lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos es constante. Esta es la definición clásica de elipse. Luego se trata de la elipse de focos $(0,4),(0,-4)$ y semieje mayor 10. De aquí se pueden sacar las demás constantes de la elipse. Naturalmente, todo esto se puede hacer en coordenadas y al final nos saldrá una cónica que se podría clasificar según los criterios de álgebra lineal.

5.
$$\mathrm{Re}(\overline{z}-i)=2 \Leftrightarrow x=2$$

Recta vertical $x=2$.

6.
$$|2z-i|\leq 4 \Leftrightarrow \left|z-\frac{i}{2}\right|\leq 2 \Leftrightarrow d(z,\frac{i}{2})\leq 2$$

Disco cerrado de centro $(0,\frac{1}{2})$ y radio 2.

7.
$$z+\overline{z}=|z|^2 \Leftrightarrow 2x=x^2+y^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=1$$

Circunferencia de centro $(1,0)$ y radio 1.

8.
$$z-\overline{z}=i \Leftrightarrow 2iy=i \Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$$

Recta horizontal $y=\frac{1}{2}$.

9.
$$\overline{z}^2=z^2 \Leftrightarrow (x-iy)^2=(x+iy)^2 \Leftrightarrow x^2-y^2-2ixy=x^2-y^2+2ixy \Leftrightarrow xy=0$$

luego las soluciones son los ejes del plano complejo, es decir, el conjunto

$$\{(0,y):y\in\mathbb{R}\}\cup\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}.$$

Ejercicio 4

Demostrar que $|\mathrm{Re}\, z|+|\mathrm{Im}\, z|\leq\sqrt{2}\,|z|$ para todo $z\in\mathbb{C}$.

Solución 4

Hagamos $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Se trata de probar que $|x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Veamos:

$$\begin{aligned} |x| + |y| &\leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \leq 2x^2 + 2y^2 \Leftrightarrow \\ 2|x||y| &\leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow (|x| - |y|)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

y esto último es cierto.

Ejercicio 5

Demostrar que si $|z| < 1$ entonces $|\operatorname{Im}(1 - \overline{z} + z^2)| < 3$.

Solución 5

$$\left|\operatorname{Im}(1 - \overline{z} + z^2)\right| \leq \left|1 - \overline{z} + z^2\right| \leq 1 + |z| + |z|^2 < 1 + 1 + 1 = 3.$$

gracias a que $|\overline{z}| = |z|$ y a que $|z|^2 = |z^2|$.

Ejercicio 6

Demostrar que $\left|e^{z^2}\right| \leq e^{|z|^2}$. ¿Cuándo se da la igualdad?

Solución 6

Haciendo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, y recordando que la exponencial real es estrictamente creciente, se tiene

$$\left|e^{z^2}\right| \leq e^{|z|^2} \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re} z^2} \leq e^{|z|^2} \Leftrightarrow \operatorname{Re} z^2 \leq |z|^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 \leq x^2 + y^2$$

y esto último es cierto. Además, de la manera que lo hemos demostrado, nos damos cuenta de que la igualdad se da si y sólo si $\operatorname{Im} z = 0$.

Ejercicio 7

Demostrar que $|e^{-2z}| < 1$ si y sólo si $\operatorname{Re} z > 0$.

Solución 7

$$\left|e^{-2z}\right| < 1 \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re}(-2z)} < 1 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(-2z) < 0 \Leftrightarrow -2\operatorname{Re} z < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z > 0$$

Ejercicio 8

Demostrar que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ entonces

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

para todo natural $n \geq 0$.

Si además $z^n = 1$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$, probar que $\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$.

Utilizar la primera igualdad para demostrar la siguiente "identidad trigonométrica de Lagrange"

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \qquad \forall \theta \in (0, 2\pi)$$

Solución 8

Tenemos que

$$(1-z)\sum_{k=0}^{n} z^k = \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} z^k - \sum_{k=1}^{n} z^k - z^{n+1} = 1 - z^{n+1}$$

y como $z \neq 1$, esto da la primera igualdad.

Como esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, si además suponemos que $z^n = 1$ para algún natural $n \geq 1$ entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z} = 0$$

Probemos ahora la identidad trigonométrica de Lagrange. Sea $\theta \in (0, 2\pi)$. Aplicando la primera igualdad a $z = e^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$:

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}},$$

y tomando partes reales obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta &= \operatorname{Re} \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} = \operatorname{Re} \frac{\left[1-e^{i(n+1)\theta}\right]\left[1-e^{-i\theta}\right]}{\left[1-e^{i\theta}\right]\left[1-e^{-i\theta}\right]} \\ &= \frac{1-\cos\theta+\cos n\theta-\cos\left[(n+1)\theta\right]}{2(1-\cos\theta)} = \frac{1}{2}+\frac{\cos n\theta-\cos\left[(n+1)\theta\right]}{2(1-\cos\theta)};\end{aligned}$$

con lo cual basta probar

$$\frac{\cos n\theta-\cos\left[(n+1)\theta\right]}{2(1-\cos\theta)} = \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}.$$

Veámoslo:

$$\begin{aligned}\frac{\cos n\theta-\cos\left[(n+1)\theta\right]}{2(1-\cos\theta)} &= \frac{\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right]}{2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}} \Longleftrightarrow \\ \left(\cos n\theta-\cos\left[(n+1)\theta\right]\right)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} &= (1-\cos\theta)\operatorname{sen}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\right] \Longleftrightarrow \\ (\cos n\theta-\cos n\theta\cos\theta+\operatorname{sen} n\theta\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} &= (1-\cos\theta)\left(\operatorname{sen} n\theta\cos\frac{\theta}{2}+\cos n\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right) \Longleftrightarrow \\ \operatorname{sen} n\theta\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} &= \operatorname{sen} n\theta\cos\frac{\theta}{2}-\cos\theta\operatorname{sen} n\theta\cos\frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

Si $\operatorname{sen} n\theta = 0$ la última igualdad es cierta. Si no, es equivalente a

$$\cos\theta\cos\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \cos\frac{\theta}{2}$$

lo cual es cierto por la fórmula del coseno de la diferencia.

Ejercicio 9

Sean $a, b, z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$. Demostrar que $|az+b| = \left|\overline{a}+z\overline{b}\right|$.

Solución 9

$$|az+b| = \left|\overline{az}+\overline{b}\right| = |z|\left|\overline{az}+\overline{b}\right| = \left|\overline{a}\,|z|^2+z\overline{b}\right| = \left|\overline{a}+z\overline{b}\right|$$

Ejercicio 10

Demostrar que si $|z| < 1$ y $|\alpha| < 1$ entonces

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| < 1.$$

Probar además que si $|z| = 1$ y $|\alpha| < 1$ entonces

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = 1.$$

Solución 10

Si $|z| < 1$ y $|\alpha| < 1$, se cumple que

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| < 1 \Leftrightarrow \frac{|z-\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}z|^2} < 1 \Leftrightarrow |z-\alpha|^2 - |1-\overline{\alpha}z|^2 < 0.$$

Pero

$$\begin{aligned} |z-\alpha|^2 - |1-\overline{\alpha}z|^2 &= \left(|z|^2 + |\alpha|^2 - \overline{z}\alpha - z\overline{\alpha}\right) - \left(1 + |\alpha|^2 |z|^2 - \overline{\alpha}z - \alpha\overline{z}\right) = \\ |z|^2 + |\alpha|^2 - 1 - |\alpha|^2 |z|^2 &= \left(1 - |z|^2\right)\left(|\alpha|^2 - 1\right) < 0 \text{ pues } |z|, \ |\alpha| < 1. \end{aligned}$$

Si ahora $|z| = 1$ y $|\alpha| < 1$, entonces

$$\left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = |\overline{z}| \left|\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}\right| = \left|\frac{z\overline{z}-\alpha\overline{z}}{1-\overline{\alpha}z}\right| = \left|\frac{1-\alpha\overline{z}}{1-\overline{\alpha}z}\right| = 1.$$

Ejercicio 11

¿Bajo qué condiciones tres puntos distintos del plano complejo están en una misma recta?

Solución 11

Sean $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tres puntos distintos. La recta (afín real) que pasa por z_1, z_2 es $\{z_1 + t(z_2 - z_1) : t \in \mathbb{R}\}$, con lo cual

$$z_1, z_2, z_3 \text{ están alineados} \Longleftrightarrow z_3 \in \{z_1 + t(z_2 - z_1) : t \in \mathbb{R}\} \Longleftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 12

Supongamos que $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ están a un mismo lado de una recta que pasa por el origen. Demostrar que $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ están también al mismo lado de otra recta que pasa por el origen. ¿Cuál es?

Solución 12

Sea $ax + by = 0$ la recta dada y escribamos en forma binómica $z_j = x_j + iy_j, \quad j = 1, 2$. Que z_1, z_2 estén a un mismo lado de la recta quiere decir que o bien

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &> 0, \quad ax_2 + by_2 > 0 \qquad \text{o bien} \\ ax_1 + by_1 &< 0, \quad ax_2 + by_2 < 0 \end{aligned}$$

Podemos suponer que ocurre lo primero, ya que $(-a)\,x + (-b)\,y = 0$ define la misma recta que $ax + by = 0$. En cualquier caso, necesariamente $z_j \neq 0$ y tenemos

$$\frac{1}{z_j} = \frac{x_j}{|z_j|^2} - i\frac{y_j}{|z_j|^2}, \quad j = 1, 2 \qquad \text{con lo que}$$

$$a\frac{x_j}{|z_j|^2} - b\frac{-y_j}{|z_j|^2} > 0$$

luego $\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}$ están a un mismo lado de la recta $ax - by = 0$.

Ejercicio 13

Sean $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ con $n \geq 2$ tales que $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$. Demostrar que para toda recta que pasa por el origen, o bien todos los puntos están sobre ella o bien existen dos puntos cada uno de ellos en uno de los dos semiplanos abiertos determinados por dicha recta.

Solución 13

Escribamos en forma binómica $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq n$. Sea $ax + by = 0$ la recta que pasa por el origen dada, y supongamos que no todos los puntos están sobre ella. Reordenando si hiciera falta, podemos suponer que la recta no pasa por z_1. Como $(-a)\,x + (-b)\,y = 0$ define la misma recta que $ax + by =$

0 podemos suponer que ocurre $ax_1 + by_1 > 0$. Queremos probar que existe $j \in \{2, \ldots, n\}$ tal que $ax_j + by_j < 0$. Si esto fuera falso tendríamos

$$\begin{aligned} ax_1 + by_1 &> 0 \\ ax_j + by_j &\geq 0, \quad 2 \leq j \leq n \qquad \text{y sumando} \\ a\sum_{j=1}^{n} x_j + b\sum_{j=1}^{n} y_j &> 0 \end{aligned}$$

lo que contradice $\sum_{j=1}^{n} z_j = 0$.

Ejercicio 14

Demostrar que si $z \in \mathbb{C}$ verifica $\operatorname{Re} z^n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $z \in \mathbb{R}$.

Solución 14

Escribiendo en forma polar $z = re^{it}$ con $t \in [-\pi, \pi)$ tenemos que $z^n = r^n e^{int}$ y por tanto $\operatorname{Re} z^n = r^n \cos(nt)$. La hipótesis nos dice que $\cos(nt) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, y, como vemos a continuación, esto implica $t = 0$, con lo cual $z \in \mathbb{R}$.

Así pues, vamos a probar que $\cos(nt) \geq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ implica $t = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} t \in [-\pi, \pi) \\ \cos t \geq 0 \end{array}\right\} \implies t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \text{ Entonces } 2t \in [-\pi, \pi)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2t \in [-\pi, \pi) \\ \cos 2t \geq 0 \end{array}\right\} \implies 2t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}). \text{ Entonces } 4t \in [-\pi, \pi)$$

$$\left.\begin{array}{r} 4t \in [-\pi, \pi) \\ \cos 4t \geq 0 \end{array}\right\} \implies 4t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}).$$

Un sencillo argumento de inducción prueba que $2^n t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ para todo $n \in \mathbb{N}$; o sea, $t \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [-\frac{\pi}{2^{n+1}}, \frac{\pi}{2^{n+1}})$, con lo que $t = 0$, como queríamos.

Obsérvese que este argumento demuestra también que si $\operatorname{Re} z^{2^n} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $z \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 15

Resolver $z^2 + z + 1 + i = 0$.

Solución 15

Aplicamos la fórmula de la ecuación de segundo grado, que es válida para cualquier cuerpo conmutativo:

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1+i)}}{2}$$

donde el símbolo $\sqrt{}$ indica cualquiera de las dos raíces cuadradas. Calculemos, pues, una raíz cuadrada de dicho número.

$$\sqrt{1 - 4(1+i)} = \sqrt{-3 - 4i} = \left(5e^{i\theta}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

donde θ es tal que $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{sen}\theta = -\frac{4}{5}$. Entonces $\theta \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ y así $\frac{\theta}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}) \subseteq (-\frac{\pi}{2}, 0)$. Con lo cual $e^{i\frac{\theta}{2}}$ está en el cuarto cuadrante y aplicando las fórmulas del seno y coseno del ángulo mitad,

$$\cos\frac{\theta}{2} = +\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Con lo cual $\sqrt{5}e^{i\frac{\theta}{2}} = 1 - 2i$ y así las soluciones de la ecuación son

$$z = \frac{-1 \pm (1-2i)}{2} = \begin{cases} -i \\ -1+i \end{cases}$$

Otra forma de calcular una raíz cuadrada de $-3-4i$ es buscar $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $(a+ib)^2 = -3-4i$, lo cual equivale a resolver el sistema (real) siguiente

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases}$$

Ejercicio 16

Encontrar los vértices de un heptágono regular de centro $1+i$ y uno de cuyos vértices es $1 - \sqrt{3} + 2i$.

Solución 16

Hacemos una traslación de vector $-(1+i)$ y calculamos primero los vértices de un heptágono regular de centro 0 y uno de cuyos vértices $-\sqrt{3}+i = 2e^{i5\pi/6}$. Se trata sencillamente de hacer seis giros sucesivos de centro el origen y amplitud $\frac{2\pi}{7}$. Son, pues,

$$2e^{i\frac{5\pi}{6}}e^{i\frac{2k\pi}{7}}, \quad k = 0, \ldots, 6$$

Deshaciendo la traslación, concluimos que los vértices del heptágono que nos piden son

$$1 + i + 2e^{i(\frac{5}{6}+\frac{2k}{7})\pi}, \quad k = 0, \ldots, 6$$

Ejercicio 17

Probar que para todo natural $m \geq 2$ se verifica

$$\prod_{k=1}^{m-1} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{m} = \frac{m}{2^{m-1}}$$

[Pista: factorizar el polinomio $z^m - 1$ para llegar a $m = \prod_{k=1}^{m-1}(1-e^{i2k\pi/m})$ y evaluar $m\bar{m}$]

Solución 17

Las raíces de la ecuación $z^m = 1$ son $e^{i2k\pi/m}, \quad k = 0, \ldots, m-1$ con lo cual

$$z^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1}(z - e^{i\frac{2k\pi}{m}}).$$

Como también $z^m - 1 = (z-1)(z^{m-1} + \cdots + z + 1)$ entonces

$$z^{m-1} + \cdots + z + 1 = \prod_{k=1}^{m-1}(z - e^{i\frac{2k\pi}{m}})$$

y en particular, haciendo $z = 1$, obtenemos

$$m = \prod_{k=1}^{m-1}(1 - e^{i\frac{2k\pi}{m}}).$$

Como $m \in \mathbb{R}$ entonces $m = \bar{m} = \prod_{k=1}^{m-1}(1 - e^{-i\frac{2k\pi}{m}})$ y así

$$m^2 = m\bar{m} = \prod_{k=1}^{m-1}(1-e^{i\frac{2k\pi}{m}})(1-e^{-i\frac{2k\pi}{m}}) = \prod_{k=1}^{m-1}(2-2\cos\frac{2k\pi}{m}) = 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1}(1-\cos\frac{2k\pi}{m})$$

y aplicando la fórmula de seno del ángulo mitad nos queda

$$m^2 = 2^{m-1}\prod_{k=1}^{m-1} 2\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m} = 2^{2(m-1)}\prod_{k=1}^{m-1}\operatorname{sen}^2\frac{k\pi}{m}.$$

Como el seno es positivo en $(0, \pi)$, tomando raíces cuadradas concluimos el resultado.

Ejercicio 18

Calcular las siguientes raíces y expresarlas en forma binómica

$$(2i)^{1/2} \qquad (1 - i\sqrt{3})^{1/2} \qquad (-1)^{1/3} \qquad 8^{1/6} \qquad (-16)^{1/4}$$

Solución 18

$$(2i)^{\frac{1}{2}} = \left(2e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = 1 + i \\ \sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{-3\pi}{4}) = -1 - i \end{cases}$$

$$(1 - i\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = \left(2e^{i\frac{-\pi}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{-\pi}{6}) = \frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}} = \sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{5\pi}{6}) = -\frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \left(e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{3}} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ e^{i\pi} = \cos\pi + i\operatorname{sen}\pi = -1 \\ e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{-\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$8^{\frac{1}{6}} = \left(8e^{i\cdot 0}\right)^{\frac{1}{6}} = \begin{cases} \sqrt{2}e^{i\cdot 0} = \sqrt{2}(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{2}e^{i\pi} = \sqrt{2}(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi) = -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt{2}(\cos\frac{-2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{-2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{6}}{2} \\ \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}} = \sqrt{2}(\cos\frac{-\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{-\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

$$(-16)^{\frac{1}{4}} = \left(16e^{i\pi}\right)^{\frac{1}{4}} = \begin{cases} 2e^{i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ 2e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ 2e^{-i\frac{3\pi}{4}} = 2(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{-3\pi}{4}) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \\ 2e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2(\cos\frac{-\pi}{4} + i\operatorname{sen}\frac{-\pi}{4}) = \sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

Cuando se trata de hallar una raíz n-ésima con n par, los cálculos pueden agilizarse teniendo en cuenta que si w es raíz n-ésima de z entonces $-w$ también lo es.

Ejercicio 19

Probar que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y $a \in \mathbb{R}$ entonces $|z^a| = |z|^a$.

Solución 19

$$|z^a| = \left|e^{a\operatorname{Log} z}\right| = \left|e^{a(\log|z| + i\operatorname{Arg} z)}\right| = \left|e^{a\log|z|}\right| \left|e^{ia\operatorname{Arg} z}\right| = \left|e^{a\log|z|}\right| = e^{a\log|z|} = |z|^a .$$