Universidad Complutense de Madrid

Beca de Colaboración

Números singulares, clases de Schatten-von Neumann, números de entropía y conceptos relacionados

Alba Segurado López

Trabajo dirigido por Fernando Cobos Díaz

Directorio de Publicaciones del Departamento de Análisis Matemático
Sección 1, Número 75, Vol. 182.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Esta memoria es el producto de la Beca de Colaboración (referencia 14360) en el Departamento de Análisis Matemático. Ha sido supervisada por el Profesor Fernando Cobos.

En el Capítulo 2, revisamos diversos resultados básicos sobre operadores compactos entre espacios de Hilbert. Después introducimos los números singulares y mostramos algunas de sus propiedades.

El Capítulo 3 se dedica a las clases de Schatten-von Neumann. Es decir, para $0 < p \leq \infty$, estudiamos el espacio $S_p(\mathcal{H})$ formado por todos los operadores compactos T en $\mathcal{H}$ cuya sucesión de números singulares $(s_n(T))$ pertenece a l_p.

Posteriormente, en el Capítulo 4, aplicamos los resultados anteriores para describir el comportamiento asintótico de los autovalores de operadores integrales débilmente singulares.

Por último, en el Capítulo 5, consideramos el caso de operadores compactos en espacios cuasi-Banach. Introducimos los números de entropía y estudiamos su relación con los autovalores del operador y con los números de aproximación.

Los tres primeros capítulos se basan en las notas del curso de doctorado *Espacios de Banach y teoría de operadores* (Universidad Autónoma de Madrid, curso 1991-1992) del Profesor Cobos. Su contenido está tomado en parte de las monografías de Gohberg y Krein ([10]), Simon ([19]), Pietsch ([18]), König ([12]), y de los artículos de Cobos y Kühn ([4]) y de Cobos, Janson y Kühn ([3]). El contenido del Capítulo 5 se basa en el libro de Edmunds y Triebel ([8]).

Para terminar, vamos a establecer la notación que emplearemos en adelante. Denotamos por $\mathcal{L}(X,Y)$ al conjunto de operadores lineales y acotados de X en Y. Cuando $X = Y$, escribimos simplemente $\mathcal{L}(X)$. Además, U_X denota la bola unidad en el espacio X. Escribiremos $rg(T)$ para indicar el rango del operador T.

Capítulo 2

Números singulares

En este capítulo, vamos a definir los números singulares $(s_n(T))$ de un operador compacto entre dos espacios de Hilbert. Probaremos un teorema que afirma que todo operador T con estas características se puede expresar como

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n \rangle y_n,$$

donde (x_n) e (y_n) son sistemas ortonormales. Estudiaremos las propiedades que tiene esta sucesión, y esto nos permitirá definir en el próximo capítulo las clases de Schatten-von Neumann.

2.1. Teorema espectral para operadores compactos

En esta sección, probaremos el teorema espectral para operadores compactos y autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Este teorema muestra una expresión sencilla, en función de sus autovalores, de un operador con estas características. Además, dará lugar a un teorema más general que probaremos en la siguiente sección. A partir de este último, definiremos los números singulares, un concepto central en esta memoria.

Comencemos recordando la definición de operador compacto.

Definición 1 *Sean X e Y espacios de Banach, sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se dice que T es compacto si $\overline{T(U_X)}$ es compacto en Y.*

Escribiremos $\mathcal{K}(X,Y)$ para denotar el conjunto de todos los operadores compactos de X en Y. Recordemos que el espacio $(\mathcal{K}(X,Y), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, y que un operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es compacto si la imagen de toda sucesión acotada en X por T posee una subsucesión convergente. Los autovalores de un operador compacto T se pueden ordenar en una sucesión

$(\lambda_n(T))_n$, de manera que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y cada autovalor se repite tantas veces como indica su multiplicidad. Si T tiene un número finito de autovalores, completamos la sucesión con ceros.

Un resultado que nos será útil en adelante es el siguiente:

Proposición 2 *Sea $T \in \mathcal{L}(X)$ un operador compacto y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n(T) \neq 0$. Entonces, existe un subespacio n-dimensional $X_n \subset X$, invariante por T, tal que $T|_{X_n}$ tiene precisamente los autovalores $\lambda_1(T), \lambda_2(T), ..., \lambda_n(T)$.*

Como ya hemos dicho, trabajaremos con operadores compactos sobre un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$. Para el caso de espacios de Banach, si el operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ es compacto, entonces transforma sucesiones débilmente convergentes en sucesiones convergentes. Para el caso de espacios de Hilbert, tenemos:

Teorema 3 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. T es compacto si, y sólo si, siempre que $(x_n) \xrightarrow{w} x$, se tiene que $(T(x_n)) \longrightarrow Tx$.*
Demostración. *Dando por hecho el resultado anterior, basta comprobar que la condición es suficiente. Razonamos por contradicción. Si T no es compacto, entonces existe una sucesión $(x_n) \subset U_{\mathcal{H}}$ tal que $(T(x_n))$ no tiene una subsucesión convergente. Ahora, por el teorema de Alaoglu, la sucesión (x_n) posee una subsucesión débilmente convergente $(x_{n'})$. Por hipótesis, la sucesión $(T(x_{n'}))$ debería ser convergente, lo que contradice el que T no sea compacto.* ■

Recordemos ahora la definición del operador adjunto T' de un operador T y la de operador autoadjunto:

Definición 4 *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. El operador adjunto de T, T', es aquél que a cada $y \in \mathcal{H}$ le asocia el único vector $T'y$ tal que $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T'y\rangle$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

El operador T se dice autoadjunto si $T' = T$.

Observemos que, si T es autoadjunto, entonces

$$\langle Tx, x\rangle = \langle x, T'x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle},$$

de donde, si T es autoadjunto, entonces $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Es claro que el recíproco también es cierto.

Por otro lado, dado $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, se tiene que

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

Pero, si T es autoadjunto, entonces $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$. Además, los autovalores de los operadores autoadjuntos tienen propiedades especiales:

Teorema 5 *Los autovalores de un operador autoadjunto son números reales, y autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*
Demostración. *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ con $T = T'$, sea λ un autovalor de T. Entonces, existe $x \in \mathcal{H}$, $x \neq 0$, tal que $Tx = \lambda x$. Se tendrá entonces que*

$$\langle Tx, x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda \|x\|^2,$$

y este número es real, pues T es autoadjunto. Por tanto, debe ser $\lambda \in \mathbb{R}$.

Por otro lado, si $Ty = \mu y$, con $\mu \neq \lambda$, entonces

$$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle - \langle x, \mu y\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle x, Ty\rangle = \langle Tx, y\rangle - \langle Tx, y\rangle = 0,$$

de donde $\langle x, y\rangle = 0$, es decir, $x \perp y$. ■

Para establecer el teorema espectral necesitaremos los dos resultados que siguen:

Teorema 6 *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces, $\|T\|$ ó $-\|T\|$ es un autovalor de T.*
Demostración. *Si $T = 0$, el resultado es trivial. Supongamos entonces $T \neq 0$. Dado que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : \|x\| = 1\}$, existirá una sucesión (x_n) en la esfera unidad de $\mathcal{H}$ tal que $(|\langle Tx_n, x_n\rangle|) \longrightarrow \|T\|$. Es decir,*

$$(\langle Tx_n, x_n\rangle) \longrightarrow \|T\| \text{ ó } (\langle Tx_n, x_n\rangle) \longrightarrow -\|T\|.$$

Supongamos que converge a $\|T\|$. Entonces,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|Tx_n - \|T\| x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\|T\| \langle Tx_n, x_n\rangle + \|T\|^2 \\ &\leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_n, x_n\rangle \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

de donde $(Tx_n - \|T\| x_n) \longrightarrow 0$.

Dado que T es compacto, existe alguna subsucesión $(Tx_{n'})$ que converge a algún $y \in \mathcal{H}$. Como consecuencia de la desigualdad triangular, se tiene que, entonces, $(\|T\| x_{n'}) \longrightarrow y$, es decir, $(x_{n'}) \longrightarrow \frac{1}{\|T\|} y$. Por continuidad de T, $y = \lim Tx_{n'} = \frac{1}{\|T\|} Ty$, y así $\|T\| y = Ty$.

Sólo falta comprobar que $y \neq 0$. Pero $\|y\| = \|T\| \lim \|x_{n'}\| = \|T\| \neq 0$. ■

Lema 7 *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ y sea M un subespacio invariante por T, es decir, tal que $T(M) \subset M$. Entonces, $M^{\perp}$ es invariante por T'. En particular, si T es autoadjunto, entonces $M^{\perp}$ es invariante por T también.*
Demostración. *Sea $y \in M^{\perp}$. Entonces, dado $x \in M$, $\langle x, T'y\rangle = \langle Tx, y\rangle = 0$, pues $T(M) \subset M$. Así, $T'y \in M^{\perp}$, de donde $T'\left(M^{\perp}\right) \subset M^{\perp}$.* ■

Veamos ya el teorema espectral para el caso autoadjunto.

Teorema 8 *Sea T un operador compacto autoadjunto sobre $\mathcal{H}$. Existe un sistema ortonormal $x_1, x_2, ...$ de autovectores de T con autovalores correspondientes $\lambda_1, \lambda_2, ...$ tal que, para cada $x \in \mathcal{H}$, es*

$$Tx = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Si la sucesión (λ_n) es infinita, entonces converge a cero.

Demostración. *Pongamos $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ y $T_1 = T$. Por el Teorema 6, T_1 tiene un autovalor λ_1 con $|\lambda_1| = \|T_1\|$. Sea x_1 un autovector unitario. Pongamos ahora $\mathcal{H}_2 = \{x_1\}^{\perp}$, que es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}_1$. El Lema 7 garantiza que $T(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{H}_2$. Sea T_2 la restricción de T a $\mathcal{H}_2$. Claramente, T_2 es un operador compacto y autoadjunto en $\mathcal{H}_2$, de donde, si es no nulo, tendrá un autovalor λ_2 con $|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T_1\| = |\lambda_1|$. Sea x_2 un autovector unitario asociado a λ_2 (y, si $\lambda_1 = \lambda_2$, ortogonal a x_1). Entonces, el conjunto $\{x_1, x_2\}$ es ortonormal. Sea $\mathcal{H}_3 = \{x_1, x_2\}^{\perp}$. Entonces, $\mathcal{H}_3$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_3 \subset \mathcal{H}_2$, y, nuevamente por el Lema 7, $T(\mathcal{H}_3) \subset \mathcal{H}_3$. Repetimos el argumento con $T_3 = T|_{\mathcal{H}_3}$, que vuelve a ser un operador compacto autoadjunto en $\mathcal{H}_3$.*

Continuando así, el proceso o bien se para por ser $T_n = 0$ para algún n, o bien se obtiene una sucesión (λ_n) de autovalores de T y un sistema ortonormal de autovectores $\{x_1, x_2, ...\}$ tales que $|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\| \leq \|T_n\| = |\lambda_n|$ para $n = 1, 2, ...$ Si (λ_n) es una sucesión infinita, entonces $(\lambda_n) \longrightarrow 0$, ya que T es compacto y por tanto su espectro $\sigma(T)$ no tiene puntos de acumulación salvo quizás el 0.

Veamos ahora que T se puede representar de la forma indicada:

Caso 1: *$T_{n+1} = 0$ para algún n.*

Sea $y_n = x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j$. Es claro que $y_n \in \{x_1, x_2, ...\}^{\perp}$, de donde

$$0 = T_{n+1} y_n = Tx - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, x_j \rangle x_j,$$

y así $Tx = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, x_j \rangle x_j$.

Caso 2: *$T_n \neq 0$ para todo n.*

Sea, como antes, $y_n = x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j \in \{x_1, x_2, ...x_n\}^{\perp}$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left\| Tx - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x, x_j \rangle x_j \right\| &= \|T_{n+1} y_n\| \leq \|T_{n+1}\| \|y_n\| \\
&= |\lambda_{n+1}| \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, x_j \rangle x_j \right\| \\
&\leq 2 |\lambda_{n+1}| \|x\| \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

y así $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n$.

Con esto terminamos la demostración. ■

Haremos ahora una serie de observaciones.

1. *Si* $\lambda \neq 0$ *es autovalor de* T*, entonces* $\lambda = \lambda_n$ *para algún* n*:* En otro caso, sea v un autovector asociado a λ. Por el Lema 7, v debe ser ortogonal a cada x_n, de donde

$$\lambda v = Tv = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v, x_n \rangle x_n = 0.$$

   Esto es imposible, ya que $\lambda \neq 0$ y $v \neq 0$.

2. *Si* λ *es un autovalor de* T*, entonces*

$$mult(\lambda, T) = \dim(\ker(T - \lambda I)),$$

   o en otras palabras, la multiplicidad algebraica coincide con la geométrica: Basta comprobar que

$$\ker\left((T - \lambda I)^2\right) \subset \ker(T - \lambda I).$$

   Sea $x \in \ker\left((T - \lambda I)^2\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda I) x\|^2 &= \langle (T - \lambda I) x, (T - \lambda I) x \rangle = \left\langle x, (T - \lambda I)' (T - \lambda I) x \right\rangle \\ &= \left\langle x, \left(T' - \overline{\lambda} I\right) (T - \lambda I) x \right\rangle = \left\langle x, (T - \lambda I)^2 x \right\rangle \\ &= \langle x, 0 \rangle = 0. \end{aligned}$$

3. *Cada autovalor* λ_j *se repite en la sucesión* (λ_n) *tantas veces como indica su multiplicidad:* Observemos que, sea la sucesión finita o infinita, cada autovalor se repite un número finito de veces (si es infinita, porque converge a 0 y es decreciente). Supongamos que $\lambda_j = \lambda_{n_i}$ para $i = 1, 2, ..., p$. Entonces, $\ker(T - \lambda_j I) = span\left\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_p}\right\}$: en otro caso, es decir, si $span\left\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_p}\right\} \subsetneq \ker(T - \lambda_j I)$, entonces existiría $v \neq 0$, $v \in \ker(T - \lambda_j I)$, tal que $v \in \left\{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_p}\right\}^{\perp}$. Pero también sería v ortogonal a x_r para los demás valores de r, pues $v \in \ker(T - \lambda_j I)$ y $\lambda_j \neq \lambda_r$. Por tanto,

$$\lambda_j v = Tv = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle v, x_n \rangle x_n = 0,$$

   lo que es imposible por ser λ_j y v no nulos.

4. *El conjunto* $\{x_1, x_2, ...\}$ *es una base ortonormal de* $\overline{\operatorname{Im}(T)} = \ker(T)^{\perp}$. *Además, para cada* $x \in \mathcal{H}$ *se tiene*

$$x = P_0 x + \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n,$$

donde P_0 *es la proyección ortogonal sobre* $\ker(T)$. En primer lugar, probamos que $\overline{\operatorname{Im}(T)} = \ker(T)^{\perp}$.

- *Si* M *es un subespacio cerrado de* H, *entonces* $M^{\perp\perp} = M$. Recordemos que, si M es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, entonces

  $$\mathcal{H} = M + M^{\perp}.$$

  Sea $x \in M$. Entonces, para cada $z \in M^{\perp}$, es $\langle x, z \rangle = 0$, luego $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp} = M^{\perp\perp}$. Recíprocamente, si $x \in M^{\perp\perp}$, entonces se tiene que $x = y + z$ para algún $y \in M \subset M^{\perp\perp}$ y algún $z \in M^{\perp}$. Por tanto, $z = x - y \in M^{\perp\perp}$, es decir, $z \in M^{\perp} \cap M^{\perp\perp} = \{0\}$. Así $x = y \in M$.

- *Si* J *es un conjunto arbitrario, entonces* $J^{\perp} = \left(\overline{J}\right)^{\perp}$.

- $\ker(T) = \operatorname{Im}(T')^{\perp}$. Se tiene

  $$\begin{aligned} x \in \ker(T) &\iff \langle Tx, y \rangle = \langle x, T'y \rangle = 0 \forall y \in \mathcal{H} \\ &\iff x \in \operatorname{Im}(T')^{\perp}. \end{aligned}$$

Por tanto, como $\overline{\operatorname{Im}(T)}$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}$, se tiene que

$$\overline{\operatorname{Im}(T)} = \left(\overline{\operatorname{Im}(T)}\right)^{\perp\perp} = \left(\operatorname{Im}(T)^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\operatorname{Im}(T')^{\perp}\right)^{\perp} = \ker(T)^{\perp}.$$

Veamos ahora que $\{x_1, x_2, ...\}$ es una base ortonormal de $\overline{\operatorname{Im}(T)}$. Para cada k, se tiene que $Tx_k = \lambda_k x_k$, de donde $x_k = \frac{1}{\lambda_k} T x_k \in \operatorname{Im}(T)$. Así, $\{x_1, x_2, ...\}$ es una sucesión ortonormal dentro del espacio de Hilbert $\overline{\operatorname{Im}(T)}$. Además, si $x \in \mathcal{H}$, entonces

$$Tx = \lim_n \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle x, x_k \rangle x_k,$$

luego *span* $\{x_1, x_2, ...\}$ es denso en $\overline{\operatorname{Im}(T)}$. Por tanto, es una base ortonormal.

Por último, comprobamos que

$$x = P_0 x + \sum_n \langle x, x_n \rangle x_n$$

para todo $x \in \mathcal{H}$. Sabemos que $\mathcal{H} = \ker T \oplus \ker T^{\perp}$, luego, para todo $x \in \mathcal{H}$, es $x = P_0 x + Qx$, donde Q es la proyección ortogonal sobre $\ker(T)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im}(T)}$. Como $\{x_1, x_2, ...\}$ es una base ortonormal de $\overline{\operatorname{Im}(T)}$, obtenemos lo que queríamos.

5. *Para obtener una representación del operador compacto autoadjunto T como en el teorema, procedemos como sigue*: Sea $\{\mu_1, \mu_2, ...\}$ el conjunto de los autovalores no nulos de T, ordenados de modo que se tenga que $|\mu_1| > |\mu_2| > \cdots$. Elegimos, para cada j, una base B_j de $\ker\left(T - \mu_j I\right)$, que es un espacio de dimensión finita por la compacidad de T. Sea $\{x_1, x_2, ...\}$ la sucesión obtenida al numerar la base de $\ker(T - \mu_1 I)$, luego la de $\ker(T - \mu_2 I)$, etc. Entonces, $\{x_1, x_2, ...\}$ es un sistema ortonormal de autovectores de T. Hacemos, para cada n, λ_n el autovalor asociado a x_n.

2.2. Descomposición polar de operadores compactos

En esta sección, como ya hemos anunciado antes, definiremos los números singulares de un operador compacto entre dos espacios de Hilbert. Además, probaremos el teorema de descomposición polar de operadores compactos, una herramienta clave para lo que sigue. Este teorema afirma que podemos expresar un operador compacto T entre dos espacios de Hilbert como composición de $|T|$ y una isometría parcial $\mathcal{U}$, y también $|T|$ como composición de T y $\mathcal{U}'$.

Estudiaremos primero un tipo especial de operadores, que son los operadores positivos.

Definición 9 *Un operador $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ se dice positivo si $\langle Tx, x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathcal{H}$.*

Observemos que un operador positivo siempre es autoadjunto: en la definición queda implícito que $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ para todo $x \in \mathcal{H}$. Además, si T es compacto y positivo, entonces todos sus autovalores son no negativos: si $Tx = \lambda x$, entonces $\langle Tx, x\rangle = \lambda \|x\|^2 \geq 0$, de donde $\lambda \geq 0$. Recíprocamente, si T es un operador compacto y autoadjunto y todos sus autovalores son no negativos, entonces T es positivo: aplicando el teorema espectral, para cada $x \in \mathcal{H}$, es $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n$, luego

$$\begin{aligned} \langle Tx, x\rangle &= \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle x_n, P_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n \right\rangle \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle \overline{\langle x, x_n\rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left|\langle x, x_n\rangle\right|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

pues (λ_n) es la sucesión de autovalores de T (y, por tanto, $\lambda_n \geq 0$ para todo n) y $\{x_1, x_2, ...\}$ es un sistema ortonormal de autovectores.

Además, un operador positivo T se puede elevar a cualquier potencia. En particular, existe un único operador positivo $T^{1/2}$ tal que $\left(T^{1/2}\right)^2 = T$. Vamos a comprobar esto en el caso de que T sea compacto; en esta situación, $T^{1/2}$ además de ser positivo, será compacto. Por el teorema espectral,

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Pongamos

$$T^{1/2}x = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle x, x_n \rangle x_n.$$

Como $(\lambda_n) \longrightarrow 0$, también $\left(\sqrt{\lambda_n}\right) \longrightarrow 0$, y así $T^{1/2}$ es el límite de una sucesión de operadores de rango finito, es decir, $T^{1/2}$ es un operador compacto. El argumento de antes muestra que $T^{1/2}$ es positivo. Además,

$$\begin{aligned}
\left(T^{1/2}\right)^2 x &= T^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \langle x, x_n \rangle x_n\right) \\
&= \sum_{n,m=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left\langle \sqrt{\lambda_m} \langle x, x_m \rangle x_m, x_n \right\rangle x_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n = Tx.
\end{aligned}$$

Por último, veamos que $T^{1/2}$ es el único operador con la propiedad de que su cuadrado es T. Sea B otro operador compacto y positivo con esta propiedad. Dado cualquier $\lambda > 0$, se tiene

$$\left(T^{1/2} + \lambda I\right)\left(T^{1/2} - \lambda I\right) = T - \lambda^2 I = (B + \lambda I)(B - \lambda I),$$

y como $-\lambda$ no es autovalor de $T^{1/2}$ ni de B, $-\lambda \in \rho\left(T^{1/2}\right)$ y $-\lambda \in \rho(B)$. Por tanto, $\ker\left(T^{1/2} - \lambda I\right) = \ker(B - \lambda I)$. Entonces, el proceso descrito en el teorema espectral da la misma representación para $T^{1/2}$ y para B, y así $T^{1/2} = B$.

A partir del siguiente teorema definiremos los números singulares:

Teorema 10 *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador compacto. Entonces existen una sucesión de números reales no negativos $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq 0$ y sistemas ortonormales $\{x_n\}$ en $\mathcal{H}_1$ e $\{y_n\}$ en $\mathcal{H}_2$ tales que, para todo $x \in \mathcal{H}_1$, es*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n.$$

Además, la sucesión (λ_n) converge a 0 si es infinita.

Demostración. *Si $T = 0$, el resultado es trivial. Supongamos entonces $T \neq 0$; consideramos el operador $T'T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1)$. Este operador también es positivo:*

$\langle T'Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2 \geq 0$. Podemos escribir, entonces, para cada $x \in \mathcal{H}_1$,

$$T'Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle x, x_n\rangle x_n,$$

donde $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq 0$ y $\{x_n\}$ es un sistema ortonormal en $\mathcal{H}_1$. Observemos que $\ker T = \ker(T'T)$: si $T'Tx = 0$, entonces

$$0 = \langle T'Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2,$$

luego $Tx = 0$, y la otra inclusión es trivial.

Sea, para cada n, $y_n := \frac{1}{\sqrt{\mu_n}} Tx_n$. La sucesión $\{y_n\}$ es ortonormal en $\mathcal{H}_2$, ya que

$$\begin{aligned} \langle y_n, y_m\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\mu_n \mu_m}} \langle Tx_n, Tx_m\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu_n \mu_m}} \langle T'Tx_n, x_m\rangle \\ &= \frac{\mu_n}{\sqrt{\mu_n \mu_m}} \langle x_n, x_m\rangle = \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $x \in \mathcal{H}_1$ existe un único $u \in \ker T'T = \ker T$ tal que

$$x = u + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle x_n,$$

de donde

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n\rangle Tx_n = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\mu_n} \langle x, x_n\rangle y_n,$$

como queríamos probar. ■

Observemos que $(\lambda_n) = \left(\sqrt{\mu_n}\right)$ es la sucesión de autovalores de $(T'T)^{1/2}$, donde cada autovalor aparece repetido de acuerdo con su multiplicidad y todos están ordenados de forma no creciente.

Definición 11 *Llamaremos a esta sucesión (completada con ceros si es finita) la sucesión de números singulares de T. A λ_n se le llama el n-ésimo número singular de T: $s_n(T) = \lambda_n\left((T'T)^{1/2}\right)$.*

Por tanto, el teorema que acabamos de probar afirma que, si $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, entonces

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n\rangle y_n. \tag{2.1}$$

Además, como $(s_n(T)) \longrightarrow 0$,

$$T = \lim_n \sum_{j=1}^{n} s_j(T) \langle \cdot, x_j\rangle y_j.$$

Escribiremos, en adelante, $|T| = (T'T)^{1/2}$.

A la representación (2.1) se le llama representación de Schmidt del operador T.

Para probar el teorema de descomposición polar, vamos a estudiar algunas propiedades de las isometrías parciales.

Definición 12 *Sean $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ espacios de Hilbert. Sea $M \subset \mathcal{H}_1$ un subespacio cerrado y sean $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ y $N = \mathcal{U}(M)$. Se dice que $\mathcal{U}$ es una isometría parcial de M sobre N si $\|\mathcal{U}x\| = \|x\|$ para todo $x \in M$ y $\mathcal{U}x = 0$ si $x \in M^{\perp}$.*

Observemos que N es un subespacio cerrado de $\mathcal{H}_2$.

Teorema 13 *Sea $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *$\mathcal{U}$ es una isometría sobre $\mathcal{H}_2$ y sobreyectiva.*
2. *$\mathcal{U}$ es sobreyectiva y $\langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}y \rangle = \langle x, y \rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}_1$.*
3. *$\mathcal{U}$ es invertible y $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}'$.*

Demostración. *Probaremos 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.:*

1. $\Rightarrow$ **2.** *Por la identidad de polarización, se tiene que*

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}y \rangle &= \frac{1}{4}\left[\|\mathcal{U}x+\mathcal{U}y\|^2 - \|\mathcal{U}x-\mathcal{U}y\|^2 + i\,\|\mathcal{U}x+i\mathcal{U}y\|^2 - i\,\|\mathcal{U}x-i\mathcal{U}y\|^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\|\mathcal{U}(x+y)\|^2 - \|\mathcal{U}(x-y)\|^2 + i\,\|\mathcal{U}(x+iy)\|^2 - i\,\|\mathcal{U}(x-iy)\|^2\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right] \\
&= \langle x, y \rangle .
\end{aligned}$$

2. $\Rightarrow$ **3.** *Como $\mathcal{U}' \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, basta comprobar que $\mathcal{U}\mathcal{U}' = I_{\mathcal{H}_1}$ y que $\mathcal{U}'\mathcal{U} = I_{\mathcal{H}_2}$. Ahora,*

$$\langle \mathcal{U}'\mathcal{U}x, y \rangle = \langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}y \rangle = \langle x, y \rangle ,$$

luego $\langle \mathcal{U}'\mathcal{U}x - x, y \rangle = 0$ para todo $y \in \mathcal{H}_1$, y así $\mathcal{U}'\mathcal{U}x = x$. Por otro lado, sean $z, w \in \mathcal{H}_2$. Como, por hipótesis $\mathcal{U}$ es sobreyectiva, existe $v \in \mathcal{H}_1$ tal que $\mathcal{U}v = w$. Así,

$$\langle \mathcal{U}\mathcal{U}'z, w \rangle = \langle \mathcal{U}\mathcal{U}'z, \mathcal{U}v \rangle = \langle \mathcal{U}'z, v \rangle = \langle z, \mathcal{U}v \rangle = \langle z, w \rangle ,$$

de donde $\mathcal{U}'\mathcal{U}z = z$.

3. $\Rightarrow$ **1.** *Sea $x \in \mathcal{H}_1$. Entonces,*

$$\|\mathcal{U}x\|^2 = \langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}x \rangle = \langle x, \mathcal{U}'\mathcal{U}x \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2 ,$$

como queríamos. ■

De este resultado deducimos que, si $\mathcal{U}$ es una isometría parcial sobreyectiva, entonces $\mathcal{U}'$ tiene las mismas propiedades. Pero también es cierto que, si $\mathcal{U}$ es una isometría parcial (no necesariamente sobreyectiva), entonces $\mathcal{U}'$ también es una isometría parcial: supongamos que

$$\mathcal{U} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$$

es una isometría parcial sobre M con $\mathcal{U}(M) = N$. Entonces,

$$\mathcal{U} : M \longrightarrow N$$

es una isometría sobreyectiva, de donde

$$(\mathcal{U}|_M)' : N \longrightarrow M$$

también lo es. Sea Q la proyección ortogonal sobre N y sea P la proyección ortogonal sobre M. Si probamos que $(\mathcal{U}|_M)' Q = \mathcal{U}'$, entonces se tendrá que $\mathcal{U}'$ es una isometría parcial, ya que, si $z \in N$, entonces

$$\|\mathcal{U}'z\| = \left\|(\mathcal{U}|_M)' Qz\right\| = \left\|(\mathcal{U}|_M)' z\right\| = \|z\|,$$

y, si $z \in N^\perp$, entonces

$$\|\mathcal{U}'z\| = \left\|(\mathcal{U}|_M)' Qz\right\| = \left\|(\mathcal{U}|_M)' 0\right\| = 0,$$

y además

$$\mathcal{U}'(M) = (\mathcal{U}|_M)' Q(M) = (\mathcal{U}|_M)'(M) = N.$$

Veamos entonces que $(\mathcal{U}|_M)' Q = \mathcal{U}'$:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{U}x, z\rangle &= \langle \mathcal{U}Px, z\rangle = \langle Q\mathcal{U}Px, z\rangle = \langle \mathcal{U}Px, Qz\rangle = \left\langle Px, (\mathcal{U}|_M)' Qz\right\rangle \\ &= \left\langle x, P(\mathcal{U}|_M)' Qz\right\rangle = \left\langle x, (\mathcal{U}|_M)' Qz\right\rangle, \end{aligned}$$

lo que muestra la igualdad.

Para probar el teorema de descomposición polar, sólo falta recordar la desigualdad de Bessel:

Teorema 14 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y sea $\{e_n\}$ un sistema ortonormal en $\mathcal{H}$. Entonces, para todo $x \in \mathcal{H}$, es*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Veamos, para terminar esta sección, el teorema de descomposición polar.

Teorema 15 *Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Existe una isometría parcial $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ de $(\ker T)^{\perp}$ en $\overline{\operatorname{Im} T}$ tal que $T = \mathcal{U}\,|T|$ y $|T| = \mathcal{U}'T$.*

Demostración. *Aplicando el teorema espectral,*

$$T'Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \langle x, x_n \rangle x_n,$$

$$|T|\, x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n,$$

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n,$$

donde $y_n = \frac{1}{\lambda_n} T x_n$. Sabemos también que $\{x_n\}$ es una base ortonormal de

$$\overline{\operatorname{Im} T'T} = (\ker T'T)^{\perp} = (\ker T)^{\perp},$$

de donde

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle x_n$$

para todo $x \in (\ker T)^{\perp}$. Definimos entonces el operador $\mathcal{U} : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ dado por

$$\mathcal{U}x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n.$$

Por la desigualdad de Bessel,

$$\|\mathcal{U}x\| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \leq \|x\|,$$

de donde $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Además, si $x \in (\ker T)^{\perp}$, entonces

$$\|\mathcal{U}x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} = \|x\|.$$

Por otro lado, si $x \in (\ker T)^{\perp\perp} = \ker T$ (pues $\ker T$ es un subespacio cerrado), entonces $\langle x, x_n \rangle = 0$ para todo n, luego $\mathcal{U}x = 0$ para $x \in \ker T$. Por tanto, $\mathcal{U}$ es una isometría parcial de $(\ker T)^{\perp}$ en $\overline{span \{y_n\}} = \overline{\operatorname{Im} T}$.

Veamos por último que $T = \mathcal{U}\,|T|$ y que $|T| = \mathcal{U}'T$. Primero calculamos $\mathcal{U}'$:

$$\langle \mathcal{U}x, y \rangle = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle y_n, y \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, y_n \rangle} = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n \rangle x_n \right\rangle$$

para $x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2$. *Así,* $\mathcal{U}'y = \sum_{n=1}^{\infty} \langle y, y_n \rangle x_n$, *de donde*

$$\mathcal{U}\,|T|\,x = \mathcal{U}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n = Tx,$$

$$\mathcal{U}'Tx = \mathcal{U}'\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n = |T|\,x,$$

como queríamos probar. ■

Observación 16 *Claramente, si* T *es positivo, entonces* $s_n(T) = \lambda_n(T)$, *y si* T *es autoadjunto, entonces* $s_n(T) = |\lambda_n(T)|$.

2.3. Propiedades de los números singulares

En esta sección, vamos a estudiar algunas propiedades de los números singulares y también las relaciones de estos números con los autovalores. Para ello, introduciremos dos nuevos tipos de números: los números de aproximación y los números de Gelfand del operador. En el caso de operadores compactos entre espacios de Hilbert estas tres sucesiones coinciden. No obstante, en el último capítulo trabajaremos con operadores en espacios de Banach y cuasi-Banach, y, en ese caso, las tres sucesiones, en general, son distintas.

Las propiedades de los números singulares que vamos a probar aquí nos serán útiles para definir las clases de Schatten-von Neumann en el próximo capítulo. Propiedades importantes son la desigualdad de Weyl, que relaciona la sucesión de autovalores con la de números singulares, y la de Ky Fan, que se interpretará como la desigualdad triangular en el próximo capítulo.

Comenzamos entonces definiendo los números de aproximación y los números de Gelfand.

Definición 17 *Sean* X *e* Y *espacios de Banach y sea* $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Las sucesiones*

$$a_n(T) := \inf \{\|T - T_n\| : T_n \in \mathcal{L}(X, Y), rg\,(T_n) < n\},$$

$$c_n(T) := \inf \{\|T|_{X_n}\| : X_n \subset X, codim\,(X_n) < n\}$$

se llaman los números de aproximación y los números de Gelfand del operador T, *respectivamente.*

De la definición se deduce directamente que

$$a_1(T) = \|T\| \geq a_2(T) \geq a_3(T) \geq \cdots \geq 0,$$

$$c_1(T) = \|T\| \geq c_2(T) \geq c_3(T) \geq \cdots \geq 0.$$

Además, se tiene que $c_n(T) \leq a_n(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$: si T_n tiene rango menor que n, entonces el subespacio $X_n := \ker T_n$ es de codimensión menor que n. Por tanto,

$$c_n(T) \leq \|T|_{X_n}\| \leq \|T - T_n\|$$

para todo T_n de rango menor que n.

El primer resultado de esta sección afirma que, en espacios de Hilbert complejos, estas tres sucesiones coinciden.

Proposición 18 *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ un operador compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $c_n(T) = a_n(T) = s_n(T)$.*

Demostración. *En primer lugar, comprobamos que $a_n(T) \leq c_n(T)$. Sea $X_n \subset \mathcal{H}_1$ de codimensión menor que n, y sea P_n la proyección ortogonal sobre $X_n^{\perp}$. Definimos $T_n := TP_n$; claramente, T_n tiene rango menor que n, y así $a_n(T) \leq \|T - T_n\| \leq \|T|_{X_n}\|$. Como hemos visto antes, $a_n(T) \leq c_n(T)$, y, por tanto, $a_n(T) = c_n(T)$.*

Veamos ahora que $a_n(T) \leq s_n(T)$ para todo n. Sabemos, por el teorema espectral, que

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n \rangle y_n$$

para determinados sistemas ortonormales $\{x_n\}$ en $\mathcal{H}_1$ e $\{y_n\}$ en $\mathcal{H}_2$. Definimos

$$T_n x := \sum_{j=1}^{n} s_j(T) \langle x, x_j \rangle y_j;$$

por la desigualdad de Bessel, $a_n(T) \leq \|T - T_n\| = s_n(T)$.

Por último, probamos que $s_n(T) \leq a_n(T)$. Sea $T_n \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ de rango $m < n$. Como consecuencia del teorema de representación de Riesz, debe ser

$$T_n x = \sum_{r=1}^{n} \langle x, v_r \rangle w_r.$$

Consideramos el sistema de m ecuaciones y $n > m$ incógnitas dado por

$$\sum_{j=1}^{m} \langle x_j, v_r \rangle \xi_j,$$

para $r = 1, ..., m$. Ya que hay más incógnitas que ecuaciones, existe una solución $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ no trivial con $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 = 1$. Elegida esta solución, definimos

$$x_0 := \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j;$$

es claro que $\|x_0\| = 1$, *y además*

$$T_n x_0 = \sum_{r=1}^{m} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \xi_j x_j, v_r \right\rangle w_r = \sum_{r=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \langle x_j, v_r \rangle \right) w_r = 0,$$

de donde

$$\begin{aligned} \|T - T_n\| &\geq \|(T - T_n) x_0\| = \|T x_0\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} s_j(T) \xi_j y_j \right\| \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} s_j^2(T) \left|\xi_j\right|^2 \right)^{1/2} \geq s_n(T), \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se debe a la monotonía de la sucesión de números singulares. Por tanto, $s_n(T) \leq a_n(T)$, *como queríamos.* ■

Más adelante (en el Lema 72), probaremos que los números de aproximación satisfacen las siguientes propiedades: si $S, T \in \mathcal{L}(A, B)$ y $R \in \mathcal{L}(B, C)$, donde A, B y C son espacios de Banach, entonces, para todos $k, l \in \mathbb{N}$, se tiene que

$$a_{k+l-1}(RS) \leq a_k(R)\, a_l(S)$$

y que

$$a_{k+l-1}(S + T) \leq a_k(S) + a_l(T).$$

Deducimos de aquí que los números singulares satisfacen las siguientes desigualdades: para todo $n \in \mathbb{N}$ y para cualesquiera $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, $R \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$ y $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$,

$$s_n(RTS) \leq \|R\|\, s_n(T)\, \|S\|,$$

y para $n, m \in \mathbb{N}$ y $S, T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$,

$$s_{n+m-1}(S + T) \leq s_n(S) + s_m(T).$$

No obstante, estas desigualdades no son ciertas en general para los autovalores de un operador. Estudiaremos ahora la relación que existe entre los autovalores de un operador compacto entre espacios de Hilbert y sus números singulares.

Teorema 19 *Sea* $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$, *se tiene que*

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(T)| \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(T).$$

En particular,

$$|\lambda_n(T)| \leq \left(\prod_{j=1}^{n} s_j(T) \right)^{1/n}.$$

Demostración. *Si $\lambda_n = 0$, es claro que la desigualdad se cumple. Supongamos entonces que $\lambda_n \neq 0$. Entonces, existe un subespacio n-dimensional $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ tal que $T(\mathcal{H}_n) \subset \mathcal{H}_n$ y tal que*

$$T_n = T|_{\mathcal{H}_n} : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathcal{H}_n$$

verifica que $\lambda_j(T_n) = \lambda_j(T)$ para todo $j \in \{1, 2, ..., n\}$. Consideramos la descomposición polar de T_n: $T_n = \mathcal{U}|T_n|$. Como $\mathcal{H}_n$ es de dimensión finita, se tiene que

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(T)| &= \prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(T_n)| = |\det T_n| = |\det \mathcal{U}\,|T_n|| \\ &= |\det \mathcal{U}|\,|\det |T_n||\,.\end{aligned}$$

Ahora, como $\mathcal{U}$ es una isometría, todos sus autovalores tienen módulo 1, y así $|\det \mathcal{U}| = 1$. Por tanto,

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(T)| = |\det |T_n|| = \prod_{j=1}^{n} s_j(T_n)\,.$$

Consideramos ahora la inclusión $i : \mathcal{H}_n \hookrightarrow \mathcal{H}$ y la proyección ortogonal $P : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}_n$. Claramente, $T_n = PTi$, de donde

$$s_j(T_n) = s_j(PTi) \leq \|P\|\, s_j(T)\, \|i\| = s_j(T)\,.$$

Por tanto,

$$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(T)| \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(T)\,,$$

como queríamos. ■

Este teorema es un caso particular de la desigualdad de Weyl. Para demostrarla, necesitamos los siguientes lemas:

Lema 20 *Sean $a_1, ..., a_n$ números positivos, sean $p_1, ..., p_n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Entonces,*

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i p_i.$$

Demostración. *Esta prueba, salvo alguna modificación, aparece en [9]. Sea $a > 0$; consideramos el conjunto*

$$\Delta = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n : a_i \geq 0 \ \forall i, p_1 a_1 + p_2 a_2 + ... + p_n a_n = a\}\,.$$

Este conjunto es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$. Sea, para $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

$$\pi(x) = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_n^{p_n}.$$

Como la función π es continua en Δ, alcanzará su máximo en algún punto $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$. Además, como $\pi(a, a, ..., a) = a > 0$, se tendrá que $\pi(c) > 0$, y así debe ser cada $c_i > 0$.

Fijemos ahora i, j distintos, y consideremos los puntos $q, r \in \mathbb{R}^n$ dados por

$$\begin{aligned} q_i &= 0, q_j = \frac{p_i}{p_j}c_i + c_j, q_k = c_k \quad (k \neq i, j) \\ r_j &= 0, r_i = \frac{p_j}{p_i}c_j + c_i, r_k = c_k \quad (k \neq i, j). \end{aligned}$$

Entonces, $q, r \in \Delta$, y así $[q, r] \in \Delta$.

Por otro lado, definimos la función

$$f : [0, 1] \longrightarrow [q, r],$$

dada por $f(t) = (1 - t)q + tr$. Es decir, f es el segmento que une r y q. Además, se tiene que $c \in [q, r]$, puesto que

$$f\left(\frac{c_i}{c_i + \frac{p_j}{p_i}c_j}\right) = c$$

y también que

$$b := \frac{c_i}{c_i + \frac{p_j}{p_i}c_j} \in [0, 1].$$

Por tanto, la función $g(t) = \pi(f(t))$ tiene un máximo en el punto b.

Ahora bien,

$$\begin{aligned} g(t) &= \pi((1 - t)q + tr) \\ &= \left(\prod_{k \neq i} c_k^{p_k}\right) t^{p_i} \left(\frac{p_j}{p_i}c_j + c_i\right)^{p_i} (1 - t)^{p_j} \left(\frac{p_i}{p_j}c_i + c_j\right)^{p_j}, \end{aligned}$$

luego, haciendo

$$A = \left(\prod_{k \neq i} c_k^{p_k}\right) \left(\frac{p_j}{p_i}c_j + c_i\right)^{p_i} \left(\frac{p_i}{p_j}c_i + c_j\right)^{p_j},$$

se tiene que

$$\frac{dg}{dt}(t) = At^{p_i - 1}(1 - t)^{p_j - 1}(p_i(1 - t) - p_j t),$$

de donde

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt}(b) &= Ab^{p_i - 1}\left(\frac{\frac{p_j}{p_i}c_j}{c_i + \frac{p_j}{p_i}c_j}\right)^{p_j - 1}\left(p_i\left(\frac{\frac{p_j}{p_i}c_j}{c_i + \frac{p_j}{p_i}c_j}\right) - p_j\frac{c_i}{c_i + \frac{p_j}{p_i}c_j}\right) \\ &= Ab^{p_i - 1}\left(\frac{\frac{p_j}{p_i}c_j}{c_i + \frac{p_j}{p_i}c_j}\right)^{p_j - 1} \frac{p_j}{c_i + \frac{p_j}{p_i}c_j}(c_j - c_i) = 0 \iff c_j = c_i. \end{aligned}$$

Por tanto, el máximo se debe alcanzar en el punto $(a, a, ..., a)$, y así

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} a_i p_i,$$

como queríamos. ■

Lema 21 *Sean $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n \geq 0$ y $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ números no negativos arbitrarios tales que*

$$\prod_{j=1}^{k} \alpha_j \leq \prod_{j=1}^{k} \beta_j$$

para $k = 1, 2, ..., n$. Entonces,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j^p$$

para todo $p > 0$.

Demostración. *Supongamos que el resultado es cierto para $p = 1$. Entonces, dado $p > 0$, si*

$$\prod_{j=1}^{k} \alpha_j \leq \prod_{j=1}^{k} \beta_j,$$

entonces se tendrá que

$$\prod_{j=1}^{k} \alpha_j^p \leq \prod_{j=1}^{k} \beta_j^p,$$

y así, aplicando el resultado con $p = 1$ y α_j^p, β_j^p, tendremos

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^p \leq \sum_{j=1}^{n} \beta_j^p.$$

Luego basta probar el resultado para $p = 1$. Por otro lado, como en el teorema anterior, podemos suponer $\alpha_n > 0$, y, por tanto, $\beta_j > 0$ para todo $j = 1, 2, ..., n$.

Sean, para $i = 1, ..., n$,

$$p_i = \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \right)^{-1}$$

y $a_i = \frac{\beta_i}{\alpha_i}$. Por el Lema 20,

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\beta_i}{\alpha_i} \right)^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \right)^{-1} \frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \beta_i}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_j}.$$

Por tanto, si probamos que

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)^{p_i} \geq 1,$$

habremos terminado. Pero probar esto equivale a probar que $\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} \geq 1$, *y*

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i} &= \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_1\beta_2\cdots\beta_k}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k}\right)^{\alpha_k-\alpha_{k-1}} \\ &= \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)^{\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\right)^{\alpha_2-\alpha_3}\cdots\left(\frac{\beta_1\beta_2\cdots\beta_n}{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}\right)^{\alpha_n-\alpha_{n+1}},\end{aligned}$$

donde $\alpha_{n+1} = 0$. *Ahora, por hipótesis, cada uno de estos cocientes es mayor o igual que 1, y todos los exponentes son positivos, y así todo el producto es mayor o igual que 1, como queríamos.* ■

Demostraremos ahora la desigualdad de Weyl. Se puede dar una prueba constructiva de esta desigualdad para $1 \leq p < \infty$, empleando el teorema espectral, pero nosotros la probaremos directamente.

Teorema 22 *Sea* $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y todo* $0 < p < \infty$, *se tiene*

$$\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j(T)|^p \leq \prod_{j=1}^{n}s_j(T)^p.$$

Demostración. *Sabemos ya que*

$$\prod_{j=1}^{k}|\lambda_j(T)| \leq \prod_{j=1}^{k}s_j(T)$$

para $k = 1, 2, \ldots$ *Por el Lema 21, esto implica que*

$$\sum_{j=1}^{n}|\lambda_j(T)|^p \leq \prod_{j=1}^{n}s_j(T)^p,$$

como queríamos. ■

Seguimos con nuestro estudio de los números singulares. Otra propiedad que verifican es la siguiente:

Proposición 23 *Sean* $S, T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$,

$$\prod_{j=1}^{n}s_j(ST) \leq \prod_{j=1}^{n}s_j(S)\,s_j(T).$$

Demostración. *Como antes, podemos suponer $s_n(ST) \neq 0$, porque en otro caso el resultado se da trivialmente. Mediante el teorema de descomposición polar, hallamos una isometría parcial $\mathcal{V} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $|ST| = \mathcal{V}ST$. Sea ahora $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{H}$ tal que $|ST|$ tiene en $\mathcal{H}_n$ los autovalores $(\lambda_j(|ST|))_{j=1}^n = (s_j(ST))_{j=1}^n$, sea P la proyección ortogonal sobre $\mathcal{H}_n$ y sea Q la proyección ortogonal sobre $T(\mathcal{H}_n)$. Entonces,*

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^n s_j(ST) &= \prod_{j=1}^n \lambda_j(|ST|) = \prod_{j=1}^n |\lambda_j(\mathcal{V}ST)| = |\det(P\mathcal{V}STP)| \\ &= |\det(P\mathcal{V}SQQTP)| = |\det(P\mathcal{V}SQ)|\,|\det(QTP)| \\ &= \det(|P\mathcal{V}SQ|)\det(|QTP|) \\ &= \prod_{j=1}^n s_j(P\mathcal{V}SQ)\prod_{j=1}^n s_j(QTP) \le \prod_{j=1}^n s_j(S)\prod_{j=1}^n s_j(T),\end{aligned}$$

donde la igualdad en la tercera fila se debe al teorema de descomposición polar. Observemos, asimismo, que sólo hemos trabajado con determinantes de rango finito. ∎

Para terminar esta sección, probaremos otra propiedad de los números singulares y la desigualdad de Ky Fan.

Proposición 24 *Sean $S, T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, sea $n \in \mathbb{N}$ y sean $0 < p, q, r < \infty$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Entonces,*

$$\left(\sum_{j=1}^n s_j(ST)^r\right)^{1/r} \le \left(\sum_{j=1}^n s_j(S)^p\right)^{1/p}\left(\sum_{j=1}^n s_j(T)^q\right)^{1/q}.$$

Demostración. *Sabemos ya que*

$$\prod_{j=1}^k s_j(ST) \le \prod_{j=1}^k s_j(S)\,s_j(T)$$

para $k = 1, 2, ..., n$. Por el Lema 21, sabemos que esto implica

$$\sum_{j=1}^n s_j(ST)^r \le \sum_{j=1}^n s_j(S)^r\,s_j(T)^r.$$

Ahora, por hipótesis, $\frac{1}{p/r} + \frac{1}{q/r} = 1$, luego, aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n s_j(ST)^r &\le \sum_{j=1}^n s_j(S)^r\,s_j(T)^r \\ &\le \left(\sum_{j=1}^n s_j(S)^p\right)^{r/p}\left(\sum_{j=1}^n s_j(T)^q\right)^{r/q},\end{aligned}$$

como queríamos. ∎

Demostramos ahora la desigualdad de Ky Fan.

Teorema 25 *Sean $S, T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(S+T) \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(S) + \sum_{j=1}^{n} s_j(T).$$

Demostración. *Usando el teorema espectral, sabemos que*

$$|S+T|\, x = \sum_{j} s_j(S+T) \langle x, x_j \rangle x_j$$

para algún sistema ortonormal $\{x_j\}$ en $\mathcal{H}$. Además, por el teorema de representación polar, existe una isometría $\mathcal{U}$ sobre $\overline{span\{x_j\}}$ tal que

$$(S+T)\, x = \mathcal{U}\, |S+T|\, x = \sum_{j} s_j(S+T) \langle x, x_j \rangle \mathcal{U} x_j.$$

Sea P la proyección ortogonal sobre $span\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Entonces,

$$(S+T)\, x_i = s_i(S+T)\,\mathcal{U} x_i,$$

de donde

$$\langle (S+T)\, x_i, \mathcal{U} x_i \rangle = s_i(S+T),$$

y así

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} s_i(S+T) &= \sum_{i=1}^{n} \langle (S+T)\, x_i, \mathcal{U} x_i \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle (S+T)\, P x_i, \mathcal{U} P x_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \langle P\mathcal{U}'(S+T)\, P x_i, x_i \rangle = tr\left(P\mathcal{U}'(S+T)\, P\right) \\
&= tr\left(P\mathcal{U}'SP\right) + tr\left(P\mathcal{U}'TP\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(P\mathcal{U}'SP\right) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\left(P\mathcal{U}'TP\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} s_j\left(P\mathcal{U}'SP\right) + \sum_{j=1}^{n} s_j\left(P\mathcal{U}'TP\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} s_j(S) + \sum_{j=1}^{n} s_j(T),
\end{aligned}$$

donde la penúltima desigualdad se debe a la desigualdad de Weyl con $p = 1$. ■

Capítulo 3

Clases de Schatten-von Neumann

En lo que sigue, trabajaremos, por comodidad, con espacios de Hilbert separables.

Definición 26 *Para $0 < p < \infty$, la p-clase de Schatten-von Neumann se define por*

$$S_p(\mathcal{H}) = \left\{ T \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) : \sigma_p(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(S)^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

Como comprobaremos más adelante, para $1 \leq p < \infty$, $(S_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$ es un espacio de Banach. Si $0 < p < 1$, $(S_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$ es un espacio cuasi-Banach. Al espacio S_2 le llamamos el espacio de operadores de Hilbert-Schmidt; los operadores de S_1 se llaman operadores nucleares. Además, como

$$s_n(RTS) \leq \|R\| \, s_n(T) \, \|S\|,$$

$S_p(\mathcal{H})$ es siempre un ideal de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

En este capítulo, caracterizaremos los espacios $S_p(\mathcal{H})$ y estudiaremos sus espacios duales. Además, trataremos de desarrollar la misma teoría para formas multilineales mediante interpolación entre los espacios S_1 y S_∞.

3.1. Caracterizaciones y extensiones de $S_1(\mathcal{H})$ y $S_2(\mathcal{H})$

En primer lugar, recordemos la identidad de Parseval:

Teorema 27 *Sea B una base ortonormal de un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Entonces, para todo $x \in \mathcal{H}$, es*

$$\|x\|^2 = \sum_{v \in B} |\langle x, v \rangle|^2 .$$

Caractericemos ahora los operadores del espacio $S_2(\mathcal{H})$:

Teorema 28 *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. El operador T es un operador de Hilbert-Schmidt si, y sólo si, para alguna base ortonormal $\{e_n\}$ de $\mathcal{H}$, se tiene*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 < \infty. \tag{3.1}$$

Además,

$$\sigma_2(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2\right)^{1/2}.$$

Demostración. *Observemos, en primer lugar, que la cantidad $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ no depende de la base ortonormal elegida: sea $\{w_n\}$ otra base ortonormal. Entonces, por la identidad de Parseval,*

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle Te_n, w_m\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle e_n, T'w_m\rangle|^2 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T'w_m\rangle|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|T'w_m\|^2.
\end{aligned}$$

Por tanto, si T tiene la propiedad (3.1) para una base ortonormal, entonces la tiene para cualquier otra base ortonormal.

Una vez hecha esta observación, consideremos un operador T con la propiedad (3.1). Para comprobar que $T \in S_2(\mathcal{H})$, primero debemos mostrar que es compacto. Pero, si probamos que sus números de aproximación tienden a 0, tendremos que T es el límite de una sucesión de operadores de rango finito, y, por, tanto, compacto. Ahora,

$$\begin{aligned}
a_n(T) &= c_n(T) = \inf\{\|T|_{X_n}\| : X_n \subset \mathcal{H}, co\dim X_n < n\} \\
&\leq \left\|T|_{span\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}^{\perp}}\right\|.
\end{aligned}$$

Sea $x \in span\{e_1, e_2, ..., e_n\}^{\perp}$ con $\|x\| \leq 1$. Entonces,

$$x = \sum_{j=n}^{\infty} \langle x, e_j\rangle e_j \quad con \quad \|x\| = \left(\sum_{j=n}^{\infty} |\langle x, e_j\rangle|^2\right)^{1/2} \leq 1,$$

de donde

$$\begin{aligned}\|Tx\| &= \left\|\sum_{j=n}^{\infty}\langle x,e_j\rangle Te_j\right\| \leq \sum_{j=n}^{\infty}|\langle x,e_j\rangle|\,\|Te_j\| \\ &\leq \left(\sum_{j=n}^{\infty}|\langle x,e_j\rangle|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{j=n}^{\infty}\|Te_j\|^2\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sum_{j=n}^{\infty}\|Te_j\|^2\right)^{1/2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Por tanto, T es compacto.

Para comprobar que $T \in S_2(\mathcal{H})$, sólo falta mostrar que $\sigma_2(T) < \infty$. Sea

$$T(\cdot) = \sum_n s_n(T)\langle \cdot, x_n\rangle y_n$$

la representación espectral de T; completemos $\{x_n\}$ hasta obtener una base ortonormal de $\mathcal{H}$, es decir, añadamos a $\{x_n\}$ una base ortonormal del subespacio $\ker T'T = \ker T$ para obtener la base $\{\widehat{x}_m\}$ de $\mathcal{H}$. Entonces, por la observación que hemos hecho al comienzo,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|T\widehat{x}_n\|^2.$$

Pero $T\widehat{x}_n = 0$ si $\widehat{x}_n \in \ker T$, luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T\widehat{x}_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\|s_n(T)y_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}s_n(T)^2,$$

de donde

$$\sigma_2(T) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}s_n(T)^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2\right)^{1/2} < \infty.$$

Probaremos ahora el recíproco. Sea $T \in S_2(\mathcal{H})$, y sea

$$T(\cdot) = \sum_n s_n(T)\langle \cdot, x_n\rangle y_n$$

su representación espectral. Entonces, dada la base ortonormal $\{e_n\}$ de $\mathcal{H}$, se tiene

$$\begin{aligned}\|Te_n\|^2 &= \langle Te_n, Te_n\rangle \\ &= \left\langle \sum_k s_k(T)\langle e_n,x_k\rangle y_k, \sum_k s_k(T)\langle e_n,x_k\rangle y_k\right\rangle \\ &= \sum_k s_k(T)^2|\langle e_n,x_k\rangle|^2,\end{aligned}$$

luego, aplicando la identidad de Parseval,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 &= \sum_k s_k(T)^2 \sum_n |\langle e_n, x_k\rangle|^2 \\ &= \sum_k s_k(T)^2 \|x_k\|^2 = \sigma_2(T)^2 < \infty,\end{aligned}$$

como queríamos. ■

En el caso en que $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \mu)$, donde (Ω, μ) es un espacio de medida σ-finito, los operadores de Hilbert-Schmidt se caracterizan del siguiente modo:

Teorema 29 *Sean $\mathcal{H} = L_2(\Omega, \mu)$ y $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$T \in S_2(\mathcal{H})$.*
2. *Existe un núcleo $K \in L_2(\Omega^2, \mu^2)$ tal que*

$$Tf(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y)\, d\mu(y)$$

en μ-casi todo punto para toda $f \in \mathcal{H}$.

Además, si 1. ó 2. se cumplen, entonces $\sigma_2(T) = \|K\|_{L_2}$ y $(\lambda_n(T_K)) \in l_2$.
Demostración. 1.⇒2. *Sea $T \in S_2(\mathcal{H})$ con descomposición espectral*

$$T(\cdot) = \sum_n s_n(T) \langle \cdot, f_n\rangle g_n$$

para algunos sistemas ortonormales $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ en $L_2(\Omega, \mu)$ y tal que se tenga $\sum_n s_n(T)^2 < \infty$. Pongamos

$$K(x, y) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} s_n(T) \overline{f_n(y)} g_n(x).$$

Esta serie converge en $L_2(\Omega, \mu)$. Además,

$$\begin{aligned}\|K(x, y)\|_{L_2} &= \lim_{N\to\infty} \left\| \sum_{n=1}^{N} s_n(T) \overline{f_n(y)} g_n(x) \right\|_{L_2} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} s_n(T)^2 \right)^{1/2} = \sigma_2(T).\end{aligned}$$

Por último,

$$Tf = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} s_n(T) \langle f, f_n\rangle g_n,$$

de donde

$$\begin{aligned}\int_\Omega K(x,y)\, f(y)\, d\mu(y) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)\, g_n(x) \int_\Omega \overline{f_n(y)} f(y)\, d\mu(y) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} s_n(T)\, g_n(x) \langle f, f_n\rangle = Tf(x).\end{aligned}$$

2.⇒1. *Es claro que T, el operador asociado al núcleo K, es acotado y que $\|T\| \le \|K\|_{L_2}$. Sea $\{f_n\}$ una base ortonormal de $L_2(\Omega,\mu)$. Definimos, para $n, m \in \mathbb{N}$,*

$$f_n \otimes \overline{f_m}(x,y) = f_n(x)\, \overline{f_m(y)}.$$

Entonces, $\left\{f_n \otimes \overline{f_m}\right\}$ es una base ortonormal del espacio $L_2(\Omega^2, \mu^2)$. Además, por la identidad de Parseval,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \|Tf_n\|^2 &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} |\langle Tf_n, f_m\rangle|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \left|\left\langle K, f_m \otimes \overline{f_n}\right\rangle\right|^2 \\ &= \|K\|_{L_2}^2 < \infty,\end{aligned}$$

y así, por el teorema anterior, $T \in S_2(\mathcal{H})$. Además, la sucesión de autovalores de T pertenece a l_2 por la desigualdad de Weyl. ■

Para describir los operadores de S_1, consideramos

$$N_1 = \left\{ T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) : Tx = \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r \langle x, v_r\rangle\, w_r, \sum_{r=1}^{\infty} |\mu_r|\, \|v_r\|\, \|w_r\| < \infty \right\}$$

y

$$\tau_1(T) = \text{ínf} \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} |\mu_r|\, \|v_r\|\, \|w_r\| : T = \sum_{r=1}^{\infty} \mu_r v_r \otimes w_r \right\}.$$

Teorema 30 $S_1 = N_1$ *y* $\sigma_1 = \tau_1$.
Demostración. *Sea $T \in S_1$ y sea*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n\rangle\, y_n$$

su representación espectral. Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\, \|x_n\|\, \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) = \sigma_1(T) < \infty,$$

luego $T \in N_1$ y $\tau_1(T) \le \sigma_1(T)$.

Por otro lado, de la definición de N_1 se sigue fácilmente que los operadores de rango finito son densos en N_1. Así, basta ver que, si T tiene rango finito, entonces

$$\sigma_1(T) \leq \tau_1(T).$$

Dado un operador $T \in N_1$ y un valor $\varepsilon > 0$, podemos hallar una representación nuclear

$$Tx = \sum_n \mu_n \langle x, v_n \rangle w_n,$$

con $\sum_n |\mu_n| \|v_n\| \|w_n\| \leq (1+\varepsilon)\tau_1(T)$. Por el teorema de representación polar, existe una isometría parcial $\mathcal{U}$ tal que $|T| = \mathcal{U}T$, luego

$$\sigma_1(T) = \sum_n s_n(T) = \sum_n \lambda_n(|T|) = \sum_{r=1}^{\infty} \langle |T| z_r, z_r \rangle,$$

donde $\{z_r\}$ es una base ortonormal. Así,

$$\begin{aligned}
\sigma_1(T) &= \sum_r \left\langle \sum_n \mu_n \langle z_r, v_n \rangle \mathcal{U}w_n, z_r \right\rangle = \left| \sum_n \sum_r \langle z_r, \overline{\mu_n} v_n \rangle \langle \mathcal{U}w_n, z_r \rangle \right| \\
&= \left| \sum_n \sum_r \overline{\langle \overline{\mu_n} v_n, z_r \rangle} \langle \mathcal{U}w_n, z_r \rangle \right| = \left| \sum_n \langle \mathcal{U}w_n, \overline{\mu_n} v_n \rangle \right| \\
&\leq \sum_n \|\mathcal{U}w_n\| \|\overline{\mu_n} v_n\| = \sum_n |\mu_n| \|v_n\| \|w_n\| \leq (1+\varepsilon)\tau_1(T).
\end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $\varepsilon \longrightarrow 0$, concluimos que

$$\sigma_1(T) \leq \tau_1(T),$$

lo que termina la demostración. ■

Estudiemos ahora las extensiones de estas clases al caso de operadores entre espacios de Banach. Sea E un espacio de Banach.

Definición 31 *Un operador $T \in \mathcal{L}(E)$ se dice p-sumante si existe una constante $c > 0$ tal que, para cada sucesión finita $(x_i)_{i=1}^n$ en E, se tiene que*

$$\left(\sum_{j=1}^n \|Tx_j\|^p \right)^{1/p} \leq c \left[\sup_{\substack{f \in E^* \\ \|f\|=1}} \left(\sum_{j=1}^n |f(x_j)|^p \right)^{1/p} \right].$$

A la menor de las constantes $c > 0$ que satisfacen esta desigualdad cualquiera que sea la sucesión finita $(x_i)_{i=1}^n$ se le denota por $\Pi_p(T)$.

Se puede comprobar que el conjunto $\Pi_p(E)$ de todos los operadores p-sumantes en E es un ideal normado por $\Pi_p(T)$.

Teorema 32 *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable. Entonces, se tiene que $\Pi_2(\mathcal{H}) = S_2(\mathcal{H})$, con igualdad de normas.*
Demostración. *Sea $T \in S_2$ y sea*

$$T(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle \cdot, x_n \rangle y_n$$

su representación espectral. Para cualquier conjunto finito $(v_j)_{j=1}^{k}$, se tiene

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \|Tv_j\|^2 &= \sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle v_j, x_n \rangle y_n \right\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(T))^2 |\langle v_j, x_n \rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (s_n(T))^2 \sum_{j=1}^{k} |\langle v_j, x_n \rangle|^2 \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} (s_n(T))^2 \right) \left(\sup_{\substack{f \in \mathcal{H}^* \\ \|f\|=1}} \sum_{j=1}^{n} |f(v_j)|^2 \right),
\end{aligned}$$

luego $T \in \Pi_2(\mathcal{H})$ y $\Pi_2(T) \leq \sigma_2(T)$.

Recíprocamente, sea $T \in \Pi_2(\mathcal{H})$ y sea $\{e_n\}$ una base ortonormal de $\mathcal{H}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|^2 \leq \Pi_2(T)^2 \sup_{\substack{f \in \mathcal{H}^* \\ \|f\|=1}} \left(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2 \right).$$

Por tanto, si $f(\cdot) = \langle \cdot, y \rangle$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle e_j, y \rangle|^2 \leq \|y\|^2 = \|f\|^2 \leq 1,$$

luego

$$\sum_{j=1}^{n} \|Te_j\|^2 \leq \Pi_2(T)^2$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Así,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 \leq \Pi_2(T)^2,$$

y, por tanto, $T \in S_2(\mathcal{H})$ y

$$\sigma_2(T) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|Te_j\|^2 \right)^{1/2} \leq \Pi_2(T),$$

como queríamos. ■

Si generalizamos la definición de N_1 a espacios de Banach, obtenemos

$$N_1(E) = \left\{ Tx = \sum f_n(x) x_n : \sum \|f_n\| \|x_n\| < \infty \right\}$$

y

$$\tau_1(T) = \text{ínf} \left\{ \sum \|f_n\| \|x_n\| : Tx = \sum f_n(x) x_n \right\}.$$

Podría pensarse que $N_1(E)$ coincide con

$$\mathcal{L}_1^c(E) = \left\{ T \in \mathcal{L}(E) : \|T\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) < \infty \right\},$$

puesto que, al menos si $E = \mathcal{H}$, esto ocurre trivialmente. No obstante, sólo se tiene en general una inclusión: $\mathcal{L}_1^c(E) \subset N_1(E)$. Para probarlo, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 33 *Sea $T \in \mathcal{L}(E)$ de rango n. Entonces,*

$$\tau_1(T) \leq n \|T\|.$$

Demostración. *Sea $M = \operatorname{Im} T$, que es un subespacio de rango n. Consideramos una base de M de vectores unitarios $\{w_1, w_2, ..., w_n\}$. Entonces, usando el teorema de Hahn-Banach, podemos encontrar funcionales $\{f_1, f_2, ..., f_n\} \subset E^*$ tales que $f_j(w_r) = \delta_{jr}$ y $\|f_j\| = 1$.*

Sea $w \in M$. Entonces,

$$w = \sum_{j=1}^{n} \mu_j w_j,$$

y así

$$f_r(w) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j f_r(w_j) = \mu_r,$$

luego

$$w = \sum_{j=1}^{n} f_j(w) w_j$$

para $w \in M$. En particular,

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} f_j(Tx) w_j,$$

luego

$$\tau_1(T) \leq \sum_{j=1}^{n} \|f_j(T)\| \|w_j\| \leq \|T\| \sum_{j=1}^{n} \|f_j\| \|w_j\| = n \|T\|,$$

como queríamos. ■

Veamos ya la prueba del teorema que hemos enunciado antes:

Teorema 34 *$\mathcal{L}_1^c(E) \subset N_1(E)$.*
Demostración. *Sea $T \in \mathcal{L}_1^c(E)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos hallar un operador $T_n \in \mathcal{L}(E)$ de rango $rg(T_n) \leq 2^n - 2$ tal que*

$$\|T - T_n\| \leq 2a_{2^n-1}(T).$$

Sea, para cada $n \in \mathbb{N}$, $S_n = T_n - T_{n-1}$, donde $T_0 = 0$. Entonces, la serie $\sum S_n$ converge absolutamente a T. Además, por la definición de τ_1, para cada $n \in \mathbb{N}$, es

$$\tau_1\left(\sum_{j=1}^{n} S_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \tau_1(S_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau_1(S_j),$$

luego

$$\tau_1(T) = \tau_1\left(\sum_{j=1}^{\infty} S_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau_1(S_j).$$

Por otro lado, como

$$\begin{aligned} \|T_n - T_{n+1}\| &\leq \|T_n - T\| + \|T - T_{n+1}\| \leq 2a_{2^n-1}(T) + 2a_{2^{n+1}-1}(T) \\ &\leq 4a_{2^n-1}(T), \end{aligned}$$

aplicando el lema anterior,

$$\tau_1(T_n - T_{n+1}) \leq 4a_{2^n-1}(T)\, rg(T_n - T_{n+1}),$$

y así

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \tau_1(T_n - T_{n+1}) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{2^n-1}(T)\, rg(T_n - T_{n+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{2^n-1}(T)\left(2^n - 2 + 2^{n+1} - 2\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} 4a_{2^n-1}(T)\left(2 \cdot 4 \cdot 2^{n-1}\right) \\ &= 32\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}a_{2^n-1}(T). \end{aligned}$$

Estudiemos ahora cada término de esta suma: para $n = 1$, sumamos $a_1(T)$; para $n = 2$, sumamos

$$2a_3(T) \leq a_2(T) + a_3(T);$$

para $n = 3$,

$$4a_7(T) \leq a_4(T) + a_5(T) + a_6(T) + a_7(T).$$

En general, sumamos

$$2^{n-1}a_{2^{n-1}}(T) \leq a_{2^{n-1}}(T) + a_{2^{n-1}+1}(T) + \cdots + a_{2^n-1}(T),$$

de donde

$$\tau_1(T) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau_1(T_n - T_{n+1}) \leq 32 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(T) = 32 \|T\|_1,$$

y así $T \in N_1(E)$. ■

3.2. Caracterizaciones de $S_p(\mathcal{H})$

Vamos ahora a probar algunas caracterizaciones de $S_p(\mathcal{H})$.

Teorema 35 *Sea* $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, *y sea* $p \geq 2$. *Entonces,* $T \in S_p(\mathcal{H})$ *si, y sólo si,* $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p < \infty$ *para toda base ortonormal* $\{e_n\}$ *en* $\mathcal{H}$. *Además,*

$$\sigma_p(T) = \sup\left\{ \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^p\right)^{1/p} : \{e_n\} \text{ base ortonormal en } \mathcal{H} \right\}.$$

Demostración. *Supongamos primero que* $T \in S_p(\mathcal{H})$, *y sea*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n \rangle y_n$$

la descomposición espectral de T. *Sea* $\{e_n\}$ *una base ortonormal en* $\mathcal{H}$. *Entonces, por la desigualdad de Hölder (con exponente* $p/2$*),*

$$\begin{aligned} \|Te_n\|^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^2 |\langle e_n, x_j \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^2 |\langle e_n, x_j \rangle|^{4/p} |\langle e_n, x_j \rangle|^{2-4/p} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p |\langle e_n, x_j \rangle|^2\right)^{2/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_n, x_j \rangle|^2\right)^{1-2/p} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p |\langle e_n, x_j \rangle|^2\right)^{2/p} \|e_n\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p |\langle e_n, x_j \rangle|^2\right)^{2/p}, \end{aligned}$$

donde en la última línea hemos aplicado la desigualdad de Bessel. De aquí deducimos que

$$\|Te_n\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T)^p |\langle e_n, x_j \rangle|^2,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}s_j(T)^p\left|\langle e_n,x_j\rangle\right|^2=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(T)^p\sum_{n=1}^{\infty}\left|\langle e_n,x_j\rangle\right|^2\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}s_j(T)^p\|x_j\|^2=\sigma_p(T)^p,\end{aligned}$$

donde hemos aplicado la identidad de Parseval en la última línea.

Recíprocamente, si $T\in\mathcal{K}(\mathcal{H})$ cumple que, para toda base ortonormal $\{e_n\}$ es $\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^p<\infty$, sea, como antes,

$$Tx=\sum_{j=1}^{\infty}s_j(T)\langle x,x_j\rangle y_j$$

la descomposición espectral de T. Entonces,

$$\infty>\sum_{n=1}^{\infty}\|Tx_n\|^p=\sum_{n=1}^{\infty}\|s_n(T)y_n\|^p=\sum_{n=1}^{\infty}s_n(T)^p,$$

luego

$$\sigma_p(T)\leq\sup\left\{\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^p\right)^{1/p}:\{e_n\}\ \text{base ortonormal en }\mathcal{H}\right\}.$$

Esto termina la demostración. ■

Otra caracterización de los operadores positivos de $S_p(\mathcal{H})$ es la siguiente:

Teorema 36 *Sea T un operador compacto y positivo, y sea $p\geq 1$. Entonces, $T\in S_p(\mathcal{H})$ si, y sólo si, $\sum\left|\langle Tu_n,u_n\rangle\right|^p<\infty$ para todo conjunto ortonormal $\{u_n\}$. Además,*

$$\sigma_p(T)=\sup\left\{\left(\sum\left|\langle Tu_n,u_n\rangle\right|^p\right)^{1/p}:\{u_n\}\ \text{sistema ortonormal en }\mathcal{H}\right\}.$$

Demostración. *Sea $T\in S_p(\mathcal{H})$, y sea*

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}s_n(T)\langle x,x_n\rangle x_n$$

su representación espectral. Sea $\{u_n\}$ un conjunto ortonormal. Entonces, si P_0 es la proyección ortogonal sobre $\ker T$,

$$\begin{aligned}\langle Tu_m,u_m\rangle &= \left\langle\sum_{n=1}^{\infty}s_n(T)\langle u_m,x_n\rangle x_n,P_0u_m+\sum_{n=1}^{\infty}\langle u_m,x_n\rangle x_n\right\rangle\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}s_n(T)\left|\langle u_m,x_n\rangle\right|^2.\end{aligned}$$

Si q es el índice conjugado de p, entonces

$$
\begin{aligned}
|\langle Tu_m, u_m\rangle| &= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\, |\langle u_m, x_n\rangle|^{2/p}\, |\langle u_m, x_n\rangle|^{2/q} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p\, |\langle u_m, x_n\rangle|^2\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle u_m, x_n\rangle|^2\right)^{1/q} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p\, |\langle u_m, x_n\rangle|^2\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\sum_m |\langle Tu_m, u_m\rangle|^p &\leq \sum_m \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p\, |\langle u_m, x_n\rangle|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p \sum_m |\langle u_m, x_n\rangle|^2 \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p = \sigma_p(T)^p.
\end{aligned}
$$

De ahí que

$$
\sup\left\{ \left(\sum |\langle Tu_n, u_n\rangle|^p\right)^{1/p} : \{u_n\} \text{ sistema ortonormal en } \mathcal{H} \right\} \leq \sigma_p(T).
$$

Recíprocamente, si $\sum |\langle Tu_n, u_n\rangle|^p < \infty$ para todo conjunto ortonormal $\{u_n\}$ y

$$
Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\, \langle x, x_n\rangle\, x_n
$$

es la representación espectral de T, entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Tx_n, x_n\rangle|^p \\
&\leq \sup\left\{ \left(\sum |\langle Tu_n, u_n\rangle|^p\right)^{1/p} : \{u_n\} \text{ sistema ortonormal en } \mathcal{H} \right\},
\end{aligned}
$$

como queríamos. ■

El siguiente resultado tiene un corolario importante, que es la desigualdad triangular para σ_p, $1 \leq p \leq \infty$. Como σ_p cumple también las otras propiedades de norma, llegaremos a que $(S_p(\mathcal{H}), \sigma_p)$ es un espacio normado.

Teorema 37 *Sea $T \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$, sea $p \geq 1$. Entonces, $T \in S_p(\mathcal{H})$ si, y sólo si, $\sum |\langle Tu_n, v_n\rangle|^p < \infty$ para todos los conjuntos ortonormales $\{u_n\}$, $\{v_n\}$. Además,*

$$\sigma_p(T) = \sup\left\{ \left(\sum |\langle Tu_n, v_n\rangle|^p\right)^{1/p} : \{u_n\}, \{v_n\} \text{ sistemas ortonormales en } \mathcal{H} \right\}.$$

Demostración. *Supongamos que $\sum |\langle Tu_n, v_n\rangle|^p < \infty$ para todos los conjuntos ortonormales $\{u_n\}$, $\{v_n\}$. Sea*

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T) \langle x, x_j\rangle y_j$$

la descomposición espectral de T. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p &= \sum_{n=1}^{\infty} |\langle Tx_n, y_n\rangle|^p \\ &\leq \sup\left\{ \left(\sum |\langle Tu_n, v_n\rangle|^p\right) \right\}. \end{aligned}$$

Recíprocamente, sea $T \in S_p(\mathcal{H})$. Podemos suponer T positivo: si no lo es, entonces $|T|$ es positivo, tiene los mismos números singulares que T, y además $|T| \in S_p(\mathcal{H})$ y

$$\begin{aligned} \sum |\langle Tu_n, v_n\rangle|^p &= \sum |\langle \mathcal{U}\,|T|\,u_n, v_n\rangle|^p = \sum |\langle |T|\,u_n, \mathcal{U}^* v_n\rangle|^p \\ &\leq \sup\left\{ \left(\sum |\langle |T|\,u_n, v_n\rangle|^p\right) \right\} \\ &\leq \sigma_p(|T|) \leq \sigma_p(T). \end{aligned}$$

Consideremos entonces $|\langle |T|\,u_n, v_n\rangle|^2$; se tiene que

$$\begin{aligned} |\langle |T|\,u_n, v_n\rangle|^2 &= \left|\left\langle |T|^{1/2} u_n, |T|^{1/2} v_n \right\rangle\right|^2 \\ &\leq \left\| |T|^{1/2} u_n \right\|^2 \left\| |T|^{1/2} v_n \right\|^2 \\ &= \left\langle |T|^{1/2} u_n, |T|^{1/2} u_n \right\rangle \left\langle |T|^{1/2} v_n, |T|^{1/2} v_n \right\rangle \\ &= \langle |T|\,u_n, u_n\rangle \langle |T|\,v_n, v_n\rangle, \end{aligned}$$

luego

$$|\langle |T|\,u_n, v_n\rangle| \leq \langle |T|\,u_n, u_n\rangle^{1/2} \langle |T|\,v_n, v_n\rangle^{1/2},$$

y así

$$\begin{aligned} \sum |\langle |T|\,u_n, v_n\rangle|^p &\leq \sum \langle |T|\,u_n, u_n\rangle^{p/2} \langle |T|\,v_n, v_n\rangle^{p/2} \\ &\leq \left(\sum \langle |T|\,u_n, u_n\rangle^p\right)^{1/2} \left(\sum \langle |T|\,v_n, v_n\rangle^p\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\sigma_p(T)^p\right)^{1/2} \left(\sigma_p(T)^p\right)^{1/2} = \sigma_p(T)^p. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. ■

Veamos ya el corolario que hemos anunciado:

Corolario 38 *$\sigma_p(T+S) \leq \sigma_p(T) + \sigma_p(S)$ si $1 \leq p \leq \infty$.*

Demostración. *Se tiene que, dados los sistemas ortonormales $\{u_n\}$ y $\{v_n\}$,*

$$\begin{aligned}\left(\sum_n |\langle (T+S)\, u_n, v_n\rangle|^p\right)^{1/p} &\leq \left(\sum_n \left(|\langle Tu_n, v_n\rangle| + |\langle Su_n, v_n\rangle|\right)^p\right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_n |\langle Tu_n, v_n\rangle|^p\right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\sum_n |\langle Su_n, v_n\rangle|^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

De aquí deducimos el resultado. ■

Para terminar esta sección, terminamos de probar que el espacio $S_p(\mathcal{H})$ es de Banach para $1 \leq p < \infty$. Sólo falta mostrar que es completo. De hecho,

Teorema 39 *Para $0 < p \leq \infty$, el espacio $S_p(\mathcal{H})$ es completo.*

Demostración. *Sea $(T_n) \subset S_p(\mathcal{H})$ una sucesión de Cauchy. Entonces, (T_n) también es de Cauchy en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, que es un espacio completo, y, por tanto, existe $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ compacto tal que $(T_n) \longrightarrow T$ en $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Ahora, como*

$$s_{n+m-1}(R+S) \leq s_n(R) + s_m(S),$$

se tiene que

$$s_n(A+B) = s_{n+1-1}(A+B) \leq s_n(A) + \|B\|,$$

de donde, si hacemos $R = A+B$ y $S = A$, entonces $B = R-S$, y, sustituyendo,

$$|s_n(R) - s_n(S)| \leq \|R-S\|.$$

Así, para todos $n, m, j \in \mathbb{N}$,

$$|s_j(T_n) - s_j(T_m)| \leq \|T_n - T_m\|,$$

luego $(s_j(T_n)) \longrightarrow s_j(T)$.

Ahora, como (T_n) es una sucesión de Cauchy en $S_p(\mathcal{H})$, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, m \geq N$, entonces

$$\sum_{j=1}^{L} s_j(T_n - T_m)^p < \varepsilon^p,$$

para cualquier L. Tomando límites cuando $n \longrightarrow \infty$, obtenemos

$$\sum_{j=1}^{L} s_j(T - T_m)^p < \varepsilon^p,$$

y haciendo tender L a ∞, obtenemos

$$\sigma_p(T - T_m) < \varepsilon,$$

de donde se sigue que $T \in S_p(\mathcal{H})$ y que $(T_n) \longrightarrow T$ en $S_p(\mathcal{H})$. ■

3.3. El espacio dual de $S_p(\mathcal{H})$

En esta sección, vamos a estudiar el espacio dual de $S_p(\mathcal{H})$. Comenzamos con un teorema que define la traza de un operador en $S_1(\mathcal{H})$. Recordemos que ya hemos probado este resultado para los operadores positivos de $S_1(\mathcal{H})$; vimos que

$$tr(T) = \sum \lambda_n.$$

Teorema 40 *Si $T \in S_1(\mathcal{H})$, entonces la serie*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$

converge absolutamente para cualquier sistema ortonormal $\{e_k\}$ de $\mathcal{H}$ y su suma es independiente de la elección de la base. Llamaremos a este valor la traza de T y la denotaremos por $tr(T)$.

Demostración. *Sea*

$$T(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle \cdot, x_n \rangle y_n$$

la representación espectral de T, donde $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son sistemas ortonormales. En primer lugar, comprobaremos que la serie del enunciado converge absolutamente:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_k, e_k \rangle| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle e_k, x_n \rangle y_n, e_k \right\rangle \right| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y_n, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \|x_n\| \|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty.
\end{aligned}$$

Veamos ahora que la suma no depende de la base ortonormal elegida:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle .$$

Como

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle y_n, e_k \rangle e_k, \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_n, e_k \rangle e_k \right\rangle \\
&= \langle y_n, x_n \rangle ,
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle y_n, x_n \rangle ,$$

y así la suma no depende de la base elegida. ■

Observemos que $|tr(T)| \leq \sigma_1(T)$, y que, si definimos $T_{x,y}z = \langle z, y \rangle x$, entonces, para todo $s \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, es $tr(T_{xy}S) = \langle Sx, y \rangle$:

$$\begin{aligned} tr(T_{xy}S) &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle T_{xy}Se_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \langle Se_k, y \rangle x, e_k \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle Se_k, y \rangle \langle x, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, S'y \rangle \langle x, e_k \rangle \\ &= \langle x, S'y \rangle = \langle Sx, y \rangle . \end{aligned}$$

Por otro lado, la traza tiene las siguientes propiedades:

1. $tr(\alpha T + \beta R) = \alpha tr(T) + \beta tr(R)$ *si* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ *y* $T, R \in S_1$. Esto se sigue directamente de la definición.

2. $tr(T') = \overline{tr(T)}$ *si* $T \in S_1$*:* Si

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n \rangle y_n,$$

entonces, como

$$\langle Tx, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, x_n \rangle \overline{\langle y, y_n \rangle} = \left\langle x, \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle y, y_n \rangle x_n \right\rangle ,$$

se tiene que

$$T'x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x, y_n \rangle x_n,$$

luego

$$\sigma_1(T') = \sigma_1(T) < \infty.$$

Además,

$$\begin{aligned} tr(T') &= \sum_{k=1}^{\infty} \langle T'e_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, Te_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \overline{\langle Te_k, e_k \rangle} \\ &= \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle} = \overline{tr(T)}. \end{aligned}$$

3. *Si* $1 \leq p \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *y* $T \in S_p, R \in S_q$, *entonces se tiene que* $RT, TR \in S_1$ *y* $tr(RT) = tr(TR)$. *Además,* $|tr(RT)| \leq \sigma_p(T)\,\sigma_q(R)$*:*
Como ya sabemos, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $0 < r, r_0, r_1 < \infty$ tales que $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}$, se tiene que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} s_j(RT)^r\right)^{1/r} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} s_j(R)^{r_0}\right)^{1/r_0} \left(\sum_{j=1}^{n} s_j(T)^{r_1}\right)^{1/r_1}.$$

Tomando $r_0 = q$, $r_1 = p$ y $r = 1$, se tiene que $RT \in S_1$ y también que $\sigma_1(RT) \leq \sigma_p(T)\,\sigma_q(R)$. Análogamente para TR.

Para demostrar la igualdad $tr(RT) = tr(TR)$, sea

$$T(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle \cdot, x_n \rangle y_n$$

la representación espectral de T. Entonces,

$$RT(\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle \cdot, x_n \rangle Ry_n,$$

luego

$$tr(RT) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle RTx_n, x_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle Ry_n, x_n \rangle.$$

Por otra parte, para TR tenemos

$$TRx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle Rx, x_n \rangle y_n,$$

luego

$$tr(TR) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle TRy_n, y_n \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle Ry_n, x_n \rangle = tr(RT).$$

Por último,

$$|tr(RT)| \leq \sigma_1(RT) \leq \sigma_p(T)\,\sigma_q(R).$$

Aunque ya conocemos caracterizaciones del espacio $S_p(\mathcal{H})$, vamos a dar ahora un resultado algo más débil que utilizaremos más adelante:

Teorema 41 *Sea* $1 \leq p \leq \infty$ *y sea* q *su exponente conjugado. Si* $T \in S_p$, *entonces*

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &= \sup\{|tr(ST)| : \sigma_q(S) = 1\} \\ &= \sup\{|tr(ST)| : \sigma_q(S) = 1, rg(S) < \infty\}. \end{aligned}$$

Demostración. *Ya sabemos que*

$$|tr\,(ST)| \leq \sigma_p\,(T)\,\sigma_q\,(S)\,,$$

luego

$$\sup\left\{|tr\,(ST)| : \sigma_q\,(S) = 1\right\} \leq \sigma_p\,(T)\,.$$

Para probar la otra desigualdad, supongamos en primer lugar $1 < p < \infty$. *Sea*

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n\,(T)\,\langle x, x_n\rangle\,y_n$$

la descomposición espectral de T. *Definimos*

$$S_N x = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^{p/q}\,\langle x, y_n\rangle\,x_n.$$

Se tiene que $S_N \in S_q$, *y*

$$\sigma_q\,(S_N) = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{-1/q} \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{1/q} = 1.$$

Además,

$$\begin{aligned}
S_N T x &= \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^{p/q}\,\langle Tx, y_n\rangle\,x_n \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^{p/q} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} s_j\,(T)\,\langle x, x_j\rangle\,y_j, y_n \right\rangle x_n \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^{p/q} \sum_{j=1}^{\infty} s_j\,(T)\,\langle x, x_j\rangle\,\langle y_j, y_n\rangle\,x_n \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^{p/q}\,s_n\,(T)\,\langle x, x_n\rangle\,x_n \\
&= \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{-1/q} \sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^{p}\,\langle x, x_n\rangle\,x_n,
\end{aligned}$$

luego

$$tr\,(S_N T) = \sum_{n=1}^{N} \langle S_n T x_n, x_n\rangle = \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{1/p},$$

de donde

$$\sup\left\{|tr\,(ST)| : \sigma_q\,(S) = 1\right\} \geq \left(\sum_{n=1}^{N} s_n\,(T)^p\right)^{1/p}$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\sup\{|tr(ST)| : \sigma_q(S) = 1\} \geq \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)^p\right)^{1/p}.$$

Si $p = 1$, consideremos el operador

$$S_N x = \sum_{n=1}^{N} \langle x, y_n\rangle x_n.$$

Entonces, $\sigma_\infty(S_N) = \|S_N\| = 1$, y, como

$$S_N T x = \sum_{n=1}^{N} s_n(T)\langle x, x_n\rangle x_n,$$

se tiene que

$$tr(S_N T) = \sum_{n=1}^{N} s_n(T)$$

para todo $N \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\sigma_1(T) \leq \sup\{|tr(ST)| : \sigma_\infty(S) = 1\}$.

Por último, si $p = \infty$, consideramos el operador $R_{x,y}$ de rango 1 dado por

$$R_{x,y} z = \langle z, y\rangle x.$$

Si $\|x\| = \|y\| = 1$, entonces $\sigma_1(R_{x,y}) = \|R_{x,y}\| = 1$, y

$$|\langle Tx, y\rangle| = |tr(R_{x,y}T)|,$$

de donde

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\} \leq \sup\{|tr(ST)| : \sigma_1(S) = 1\},$$

como queríamos. ■

Una vez estudiadas las propiedades de la traza, vamos a trabajar con los espacios duales de $S_p(\mathcal{H})$. Comenzamos con dos lemas:

Lema 42 *Para todo $1 \leq p \leq \infty$, los operadores de rango finito son densos en $S_p(\mathcal{H})$.*

Para demostrar este lema, basta tomar la N-ésima suma parcial de la descomposición espectral de un operador $T \in S_p(\mathcal{H})$, con N lo suficientemente grande.

Lema 43 *Sea $L(x,y)$ una aplicación lineal en x y conjugada-lineal en y. Supongamos que existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|L(x,y)| \leq C \|x\| \|y\|$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$. Entonces, existe un operador lineal y acotado T tal que

$$L(x,y) = \langle Tx, y \rangle$$

para todo $x, y \in \mathcal{H}$.

Demostración. *Dado $x \in \mathcal{H}$, consideramos el funcional*

$$y \mapsto \overline{L(x,y)},$$

que es lineal y acotado. Por el teorema de representación de Riesz, existe un único Tx tal que

$$\overline{L(x,y)} = \langle y, Tx \rangle$$

para todo $y \in \mathcal{H}$. Es decir,

$$L(x,y) = \langle Tx, y \rangle$$

para todo $y \in \mathcal{H}$.

Entonces, el operador T así definido es lineal: cualesquiera que sean los vectores $u, v, y \in \mathcal{H}$ y los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} \langle T(\alpha u + \beta v), y \rangle &= \alpha L(u,y) + \beta L(v,y) \\ &= \alpha \langle Tu, y \rangle + \beta \langle Tv, y \rangle \\ &= \langle \alpha Tu + \beta Tv, y \rangle, \end{aligned}$$

luego

$$\langle T(\alpha u + \beta v) - (\alpha Tu + \beta Tv), y \rangle = 0$$

para todo $y \in \mathcal{H}$. Por tanto, T es lineal.

Además, T es acotado:

$$\|T\| = \sup \{ |\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1 \} \leq C.$$

Esto termina la demostración. ■

Teorema 44 *Sea $1 < p \leq \infty$ (respectivamente, $p = 1$), y sea q el exponente conjugado de p. La forma general de un funcional lineal acotado F sobre $S_p(\mathcal{H})$ está dada por la fórmula*

$$F(T) = tr(ST),$$

donde S es un operador de $S_q(\mathcal{H})$ (respectivamente, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$) unívocamente determinado. Además, $\|F\| = \sigma_q(S)$ (respectivamente, $\|F\| = \|S\|$). En particular, $S_p(\mathcal{H})^* = S_q(\mathcal{H})$ (respectivamente, $S_1(\mathcal{H})^* = \mathcal{L}(\mathcal{H})$).

Demostración. *Sea $S \in S_q(\mathcal{H})$. De los teoremas anteriores, sabemos que la aplicación F_S que a cada $T \in S_p(\mathcal{H})$ le asocia $tr(ST)$ es un funcional lineal acotado en $S_p(\mathcal{H})$, con*

$$\|F_S\| = \sup\{|tr(ST)| : \sigma_p(T) = 1\} = \sigma_q(S).$$

Sea entonces $F : S_p(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathbb{C}$ un funcional lineal y acotado. Veamos que existe $S \in S_q(\mathcal{H})$ tal que $F = F_S$.

Sean $x, y \in \mathcal{H}$, y sea $T_{x,y}$ el operador de rango 1 definido por

$$T_{x,y}z = \langle z, y\rangle x.$$

Pongamos $L(x,y) = F(T_{x,y})$. L es lineal en la primera variable y conjugado-lineal en la segunda:

$$\begin{aligned} T_{x,\lambda y_1+\mu y_2}z &= \langle z, \lambda y_1 + \mu y_2\rangle x = \overline{\lambda}\langle z, y_1\rangle x + \overline{\mu}\langle z, y_2\rangle x \\ &= \overline{\lambda}T_{x,y_1}z + \overline{\mu}T_{x,y_2}z. \end{aligned}$$

Además, es acotado:

$$|L(x,y)| \leq \|F\|\,\sigma_p(T_{x,y}) = \|F\|\,\|x\|\,\|y\|.$$

Usando el lema anterior, podemos localizar $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que $L(x,y) = \langle Sx, y\rangle$ para $x, y \in \mathcal{H}$. Por tanto,

$$F(T_{x,y}) = \langle Sx, y\rangle = tr(ST_{x,y}).$$

De aquí se sigue que $F(T) = tr(ST)$ para todo operador de rango finito y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|S\|_q &= \sup\left\{|tr(ST)| : \|T\|_p = 1, rg(T) < \infty\right\} \\ &= \sup\left\{|F(T)| : \|T\|_p = 1, rg(T) < \infty\right\} \\ &= \|F\| < \infty, \end{aligned}$$

ya que los operadores de rango finito son densos en $S_p(\mathcal{H})$. Deducimos entonces que $S \in S_q(\mathcal{H})$ y $F_S = F$ sobre los operadores de rango finito (y así sobre todo $S_p(\mathcal{H})$).

Además, sólo puede haber un operador S que represente a F: si $\widehat{S} \in S_q(\mathcal{H})$ también representa a F, entonces

$$\begin{aligned} \left\|S - \widehat{S}\right\|_q &= \sup\left\{\left|tr\left(\left(S - \widehat{S}\right)T\right)\right| : \|T\|_p = 1\right\} \\ &= \sup\left\{\left|tr(ST) - tr\left(\widehat{S}T\right)\right| : \|T\|_p = 1\right\} \\ &= \sup\left\{|F(T) - F(T)| : \|T\|_p = 1\right\} = 0, \end{aligned}$$

de donde $S = \widehat{S}$. ■

Con técnicas similares se puede demostrar que $S_{\infty}^{*} = S_1$ con igualdad de normas. La dualidad viene dada nuevamente por la traza:

Teorema 45 *La forma general de un funcional lineal acotado F sobre S_{∞} viene dada por*

$$F(T) = tr(ST),$$

donde S es un operador de S_1 unívocamente determinado. Además, se tiene que $\|F\| = \|S\|_1$. Así, pues, $S_{\infty}^{*} = S_1$.

Demostración. *Sea $F : S_{\infty} \longrightarrow \mathbb{C}$. Como $S_2 \hookrightarrow S_{\infty}$, $F \in S_2^{*}$. Así, existe $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ tal que*

$$F(S) = tr(RS)$$

para todo R de rango finito. Por tanto,

$$\begin{aligned} \|S\|_1 &= \sup\{|tr(RS)| : \sigma_{\infty}(R) \leq 1, rg(R) < \infty\} \\ &= \sup\{|F(R)| : \sigma_{\infty}(R) \leq 1\} = \|F\|. \end{aligned}$$

Finalmente, como los operadores de rango finito son densos en S_{∞}, se tiene $F = F_S$. ■

Por último, estudiamos el dual del espacio $S_p(\mathcal{H})$ para $0 < p < 1$.

Teorema 46 *Sea $0 < p < 1$. La forma general de un funcional lineal y acotado F sobre $S_p(\mathcal{H})$ viene dada por la fórmula*

$$F(T) = tr(ST),$$

donde $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ está unívocamente determinado. Además, $\|F\| = \|S\|$, de donde $S_p^{*} = \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Demostración. *Observemos que, si $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, entonces $F_S : S_1 \longrightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal. Como $S_p \hookrightarrow S_1$ con norma 1, tenemos que $F_S : S_p \longrightarrow \mathbb{C}$ define un funcional lineal y acotado de norma $\|F_S\| \leq \|F_S\|_{S_1} \leq \|S\|$.*

Sea ahora $F \in S_p^{*}$; consideramos en S_p la norma

$$\|T\|^{*} = \text{ínf}\left\{\sum_{r=1}^{n} \sigma_p(T_r) : \sum_{r=1}^{n} T_r = T\right\}.$$

Entonces F es acotado en $(S_p, \|\cdot\|^{*})$: si $\sum_{r=1}^{n} T_r = T$,

$$|F(T)| \leq \sum_{r=1}^{n} |F(T_r)| \leq \|F\| \sum_{r=1}^{n} \sigma_p(T_r),$$

luego $\|F\|^{*} \leq \|F\|$.

Veamos que $\|\cdot\|^{*}$ coincide con σ_1 sobre los operadores de rango finito ($\mathcal{F}$):

$$\sigma_1(T) \leq \sum_{r=1}^{n} \sigma_1(T_r) \leq \sum_{r=1}^{n} \sigma_p(T_r),$$

luego $\sigma_1(T) \leq \|T\|^*$. *Además, si*

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T) \langle x, x_j \rangle y_j,$$

entonces

$$\begin{aligned} \|T\|^* &\leq \sum_{j=1}^{n} \sigma_p(s_j(T) \langle x, x_j \rangle y_j) = \sum_{j=1}^{n} s_j(T) \|x_j\| \|y_j\| \\ &= \sum_{j=1}^{n} s_j(T) = \sigma_1(T). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$F : (\mathcal{F}, \sigma_1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es lineal y acotado de norma menor o igual que $\|F\|$. *Por el teorema de Hahn-Banach, podemos extender* F *a* $\widetilde{F} \in S_1^*$ *con la misma norma, y así localizar* $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ *tal que* $\|S\| = \left\|\widetilde{F}\right\|$, *luego*

$$\|S\| = \left\|\widetilde{F}\right\| \leq \|F\|,$$

y también

$$F(T) = \lim_n F(T_n) = \lim_n tr(ST_n) = \lim_n tr(ST).$$

Esto termina la demostración. ■

3.4. Clases de Schatten-von Neumann e interpolación

Quizás parte de los problemas abiertos más interesantes sobre clases de Schatten-von Neumann se refieren a cómo introducir y desarrollar la teoría para formas multilineales (ver [17], [16], [6] y [2]). El caso de las formas bilineales se puede estudiar mediante el operador que define la forma, como se puede comprobar a partir del Lema 43, luego el primer caso interesante es el de una forma trilineal. En esta situación, el teorema de representación ya no se cumple, y, por tanto, hay que desarrollar esta teoría de una forma completamente distinta. La teoría de interpolación juega un papel importante en esas extensiones. Para terminar este capítulo, caracterizaremos S_p por interpolación entre S_1 y S_∞.

Sean $A_0 \hookrightarrow A_1$; consideramos la siguiente norma en A_1:

Definición 47 *Llamamos* K*-funcional de Peetre a*

$$\begin{aligned} K(t,a) &= K(t,a;A_0,A_1) \\ &= \inf\left\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1, a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\right\}, \end{aligned}$$

donde $a \in A_1$ *y* $t \in (0,\infty)$.

Ahora, para $0 < \theta < 1$ y $1 \leq q \leq \infty$, el espacio de interpolación real se define por

$$(A_0, A_1)_{\theta,q} = \left\{ a \in A_1 : \|a\|_{\theta,q} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,a) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} < \infty \right\},$$

ver [1] y [20].

Notación 48 *Dada una sucesión de escalares (x_n), escribiremos (x_n^*) para indicar su reordenamiento no-creciente, es decir, para $n \in \mathbb{N}$,*

$$x_n^* = \inf \left\{ \sigma \geq 0 : \# \left\{ k \in \mathbb{N} : |x_k| \geq \sigma \right\} < n \right\}.$$

Vamos a probar, en esta sección, el siguiente teorema:

Teorema 49 *Sean $1 < p < \infty$ y $0 < \theta < 1$ con $\frac{1}{p} = 1 - \theta$. Entonces,*

$$(S_1, S_\infty)_{\theta,p} = S_p$$

con equivalencia de normas.

Para ello, necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 50 *Para todo $t \in (0, \infty)$, se tiene*

$$K(t, T; S_1, S_\infty) = K(t, (s_n(T)); l_1, l_\infty).$$

Demostración. *Sea $T \in S_\infty$ y sea $Tx = \sum_n s_n(T) \langle x, x_n \rangle y_n$ su representación de Schmidt. Dada cualquier representación $(s_n(T)) = (\alpha_n) + (\beta_n)$ con $(\alpha_n) \in l_1$ y $(\beta_n) \in l_\infty$, sean*

$$T_0 x = \sum_n \alpha_n \langle x, x_n \rangle y_n$$

y

$$T_1 x = \sum_n \beta_n \langle x, x_n \rangle y_n.$$

Se puede comprobar que $s_n(T_0) = |\alpha_n^*|$ y que $s_n(T_1) = |\beta_n^*|$, luego $T_0 \in S_1$, $T_1 \in S_\infty$ y

$$\begin{aligned} \sigma_1(T_0) &= \sum_n |\alpha_n^*| = \|(\alpha_n)\|_1, \\ \|T_1\| &= \sup \{|\beta_n|\} = \|(\beta_n)\|_\infty. \end{aligned}$$

De ahí que, si $(s_n(T)) = (\alpha_n) + (\beta_n)$, entonces $T = T_0 + T_1$ y así

$$K(t, T; S_1, S_\infty) \leq K(t, (s_n(T)); l_1, l_\infty).$$

Recíprocamente, si $T = T_0 + T_1$ *con* $T_0 \in S_1$ *y* $T_1 \in S_\infty$*, hacemos*

$$\alpha_n = \text{mín}\left\{s_n(T), s_n(T_0)\right\}$$

y

$$\beta_n = \text{máx}\left\{0, s_n(T) - s_n(T_0)\right\}.$$

Entonces, $(s_n(T)) = (\alpha_n) + (\beta_n)$*, y, como*

$$\|(\alpha_n)\|_1 \leq \sigma_1(T_0), \quad \|(\beta_n)\|_\infty \leq \|T_1\|$$

y además

$$s_n(T) = s_n(T_0 + T_1) \leq s_n(T_0) + \|T_1\|,$$

deducimos que

$$K(t, (s_n(T)); l_1, l_\infty) \leq K(t, T; S_1, S_\infty).$$

Con esto terminamos la demostración. ■

Lema 51 *Sea* (δ_n) *una sucesión acotada tal que* $\delta_1 \geq \delta_2 \geq \cdots \geq 0$*. Entonces,*

$$K(n, (\delta_m); l_1, l_\infty) = \sum_{j=1}^{n} \delta_j.$$

Demostración. *Consideremos la representación de* (δ_m) *como* $(\eta_m) + (\mu_m)$*, donde*

$$(\eta_m) = (\delta_1 - \delta_n, \delta_2 - \delta_n, ..., \delta_{n-1} - \delta_n, 0, 0, ...)$$

y

$$(\mu_m) = (\delta_n, \delta_n, ..., \delta_n, \delta_n, \delta_{n+1}, \delta_{n+2}, \delta_{n+3}, ...).$$

Entonces,

$$K(n, (\delta_m); l_1, l_\infty) \leq \left(\sum_{j=1}^{n-1} \delta_j - (n-1)\delta_n\right) + n\delta_n = \sum_{j=1}^{n} \delta_j.$$

Por otro lado, si $(\delta_m) = (\eta_m) + (\mu_m)$*, entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_j \leq \sum_{j=1}^{n} \left|\eta_j\right| + \sum_{j=1}^{n} \left|\mu_j\right| \leq \|(\eta_m)\|_1 + n\,\|(\mu_m)\|_\infty,$$

como queríamos. ■

Seguidamente probamos la fórmula de interpolación para S_p. En lo que sigue, ponemos $f(t) \sim g(t)$ si existen constantes positivas c_1 y c_2 tales que

$$c_1 f(t) \leq g(t) \leq c_2 f(t)$$

para todo t.

Teorema 52 *Sean $1 < p < \infty$ y $0 < \theta < 1$ con $\frac{1}{p} = 1 - \theta$. Entonces,*

$$(S_1, S_\infty)_{\theta,p} = S_p$$

con equivalencia de normas.
Demostración. *Sea $T \in (S_1, S_\infty)_{\theta,p}$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \|T\|_{\theta,p} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta} K(t,T)\right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \sim \left(\int_1^\infty \left(t^{-\theta} K(t,T)\right)^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \\ &\sim \left(\sum_{n=1}^\infty \left(n^{-\theta} K(n,T)\right)^p n^{-1} \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Combinando los Lemas 50 y 51, obtenemos que

$$K(n,T) = \sum_{j=1}^n s_j(T).$$

Además, por hipótesis, $-\theta = \frac{1}{p} - 1$, luego

$$\begin{aligned} \|T\|_{\theta,p} &\sim \left(\sum_{n=1}^\infty \left(n^{-\theta} K(n,T)\right)^p n^{-1} \right)^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^\infty n \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j(T) \right)^p n^{-1} \right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{n=1}^\infty \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_j(T) \right)^p \right)^{1/p} \sim \left(\sum_{n=1}^\infty s_n(T)^p \right)^{1/p} = \sigma_p(T), \end{aligned}$$

como queríamos. ■

Capítulo 4

Operadores integrales débilmente singulares

En este capítulo, usamos los resultados anteriores para estudiar el comportamiento asintótico de los autovalores de operadores débilmente singulares. Para ello, seguimos principalmente [4] y también [3].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado, sea $\Delta = \{(x, x) : x \in \Omega\}$ su diagonal y consideremos los núcleos

$$K : \Omega^2 - \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$$

dados por

$$K(x, y) = \frac{L(x, y)}{\|x - y\|^{N(1-\alpha)}},$$

con $0 < \alpha < 1$, $L \in L_\infty(\Omega^2)$ y $\|\cdot\|$ indica la norma euclídea de $\mathbb{R}^N$. Estamos trabajando, pues, con núcleos con una singularidad a lo largo de la diagonal. Consideremos el operador integral definido por el núcleo K:

$$T_K f(x) = \int_\Omega K(x, y) f(y)\, dy.$$

A estos operadores se les llama operadores integrales débilmente singulares, y aparecen de forma natural como inversos de muchos operadores diferenciales.

Se puede comprobar que T_K es un operador compacto en $L_2(\Omega)$. Por tanto, sus autovalores

$$|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \cdots$$

forman una sucesión que converge a cero. El orden del decaimiento de estos autovalores es un problema que ha sido estudiado por varios autores. Algunos resultados conocidos son los siguientes:

1. $(\lambda_n(T_K)) \in l_2$ si $1/2 < \alpha < 1$. Esto se debe a que, para $1/2 < \alpha < 1$, el núcleo K es de cuadrado integrable, luego $T_K \in S_2$, y así $(\lambda_n(T_K)) \in l_2$.

2. $(\lambda_n(T_K)) = O(n^{-\alpha})$ si $0 < \alpha < 1/2$. Este resultado fue probado por Kostomezov en 1974 ([14]). Más adelante, König- Retherford y Tomazak-Jaegerman ([13]) dieron una demostración completamente diferente y conjeturaron que, para $\alpha = 1/2$, el resultado debería ser también cierto.

3. No obstante, poco después, König ([11]) demostró que esto último no se cumple, y obtuvo la estimación $(\lambda_n(T_K)) = O\left(\left(\frac{\log n}{n}\right)^{1/2}\right)$ si $\alpha = 1/2$.

Vamos a probar todas estas estimaciones, siguiendo la estrategia de Thomas Kühn y Fernando Cobos en [4]. Los dos continuaron la investigación en otro trabajo conjunto con Svante Janson en [3]. Con estas técnicas, volvieron a probar los tres resultados que acabamos de mencionar e incluso mejoraron el resultado de König del caso $\alpha = 1/2$: probaron que

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(T)|^2 = O(\log n).$$

Veremos, como ya hemos dicho, estas pruebas, y además comprobaremos que estas estimaciones son las mejores posibles.

Comenzaremos trabajando con una clase de núcleos más general que los débilmente singulares: sea

$$K : \Omega^2 - \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$$

un núcleo del tipo

$$K(x,y) = L(x,y)\, g\left(\|x-y\|^N\right),$$

donde $L \in L_\infty(\Omega^2)$ y $g \in L_1([0,\infty))$ es una función no negativa tal que, para todo número positivo a, se tiene que $g \in L_2([a,\infty))$.

Lema 53 *Para todo $a > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(T_K)^2 \leq c\,\|L\|_\infty^2 \left[n\left(\int_0^a g(t)\,dt\right)^2 + \int_a^\infty g(t)^2\,dt \right],$$

donde la constante c sólo depende de Ω.

Demostración. *Expresamos el núcleo K como suma de dos: $K = K_1 + K_2$, donde*

$$K_1(x,y) = \begin{cases} K(x,y) & \text{si } \|x-y\|^N \leq a, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y

$$K_2(x,y) = K(x,y) - K_1(x,y).$$

Trabajaremos primero con el operador T_{K_1}. Este operador es acotado de $L_\infty(\Omega)$ en sí mismo. Además,

$$\begin{aligned} |T_{K_1} f(x)| &\leq \int_\Omega |K_1(x,y)| \, |f(y)| \, dy \leq \|f\|_\infty \int_\Omega |K_1(x,y)| \, dy \\ &\leq \|f\|_\infty \|L\|_\infty \int_\Omega g\left(\|x-y\|^N\right) dy. \end{aligned}$$

Pongamos $A = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \|x\|^N \leq a\right\}$. Entonces,

$$\begin{aligned} |T_{K_1} f(x)| &\leq \|f\|_\infty \|L\|_\infty \int_A g\left(\|x\|^N\right) dx \\ &\leq \|f\|_\infty \|L\|_\infty \sigma_N \int_0^a g(t) \, dt, \end{aligned}$$

donde σ_N es el volumen de la bola euclídea N-dimensional. Así, se tiene que

$$\|T_{K_1}\|_\infty \leq \|L\|_\infty \sigma_N \int_0^a g(t) \, dt.$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |T_{K_1} f(x)| \, dx &\leq \int_\Omega \int_\Omega |K_1(x,y)| \, |f(y)| \, dydx \\ &\leq \int_\Omega |f(y)| \int_\Omega |K_1(x,y)| \, dxdy \\ &\leq \|f\|_1 \|L\|_\infty \sigma_N \int_0^a g(t) \, dt. \end{aligned}$$

Por el teorema de Riesz-Thorin, concluimos que

$$T_{K_1} : L_2(\Omega) \longrightarrow L_2(\Omega)$$

y su norma cumple que

$$\|T_{K_1}\|_2 \leq \|L\|_\infty \sigma_N \int_0^a g(t) \, dt.$$

Ahora, comprobamos que el operador T_{K_2} es un operador de Hilbert-Schmidt, mostrando que su núcleo es de cuadrado integrable: pongamos

$$B = \left\{x, y \in \Omega : \|x-y\|^N > a\right\}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \int_\Omega |K_2(x,y)|^2 \, dxdy &\leq \|L\|_\infty^2 \int \int_B g\left(\|x-y\|^N\right)^2 dxdy \\ &\leq \|L\|_\infty^2 \, vol(\Omega) \int_{\|x\|^N > a} g\left(\|x\|^N\right)^2 dx \\ &\leq \|L\|_\infty^2 \, vol(\Omega) \, \sigma_N \int_a^\infty g(t)^2 \, dt. \end{aligned}$$

Así, pues,

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j\left(T_{K_2}\right)^2 \leq \|L\|_{\infty}^2 \, vol\left(\Omega\right) \sigma_N \int_a^{\infty} g\left(t\right)^2 dt.$$

Ahora, sabemos que

$$s_j\left(T_K\right) = s_{j+1-1}\left(T_K\right) \leq \left\|T_{K_1}\right\|_2 + s_j\left(T_{K_2}\right)$$

y que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|T_{K_1}\right\|_2 + s_j\left(T_{K_2}\right)\right)^2 &= n\left\|T_{K_1}\right\|_2^2 + \sum_{j=1}^{n} s_j\left(T_{K_2}\right)^2 \\ &\quad +2\left\|T_{K_1}\right\|\sum_{j=1}^{n} s_j\left(T_{K_2}\right).\end{aligned}$$

Además, como $2ab \leq a^2 + b^2$,

$$2\sum_{j=1}^{n}\left\|T_{K_1}\right\|_2 s_j\left(T_{K_2}\right) \leq n\left\|T_{K_1}\right\|_2^2 + \sum_{j=1}^{n} s_j\left(T_{K_2}\right)^2,$$

de donde

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\left(s_j\left(T_K\right)\right)^2 &\leq 2\left[n\left\|T_{K_1}\right\|_2^2 + \sum_{j=1}^{n} s_j\left(T_{K_2}\right)^2\right] \\ &\leq 2n\|L\|_{\infty}^2 \sigma_N^2\left(\int_0^a g\left(t\right) dt\right)^2 \\ &\quad +2\|L\|_{\infty}^2 \, vol\left(\Omega\right) \sigma_N \int_a^{\infty} g\left(t\right)^2 dt \\ &\leq 2\|L\|_{\infty}^2\left(\sigma_N^2 + \sigma_N vol\left(\Omega\right)\right) \\ &\quad \left[n\left(\int_0^a g\left(t\right) dt\right)^2 + \int_a^{\infty} g\left(t\right)^2 dt\right],\end{aligned}$$

como queríamos. ■

En particular,

$$\begin{aligned}s_n\left(T_K\right) &\leq \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_j\left(T_K\right)^2\right)^{1/2} \\ &\leq c\|L\|_{\infty}\left[\int_0^a g\left(t\right) dt + n^{-1/2}\left(\int_a^{\infty} g\left(t\right)^2 dt\right)^{1/2}\right].\end{aligned}$$

Utilizaremos la estimación

$$s_n\left(T_K\right) \leq c\|L\|_{\infty}\left[\int_0^a g\left(t\right) dt + n^{-1/2}\left(\int_a^{\infty} g\left(t\right)^2 dt\right)^{1/2}\right] \tag{4.1}$$

más adelante.

A partir de este lema, podemos demostrar ya el siguiente teorema:

Teorema 54 *Sea* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un dominio acotado, y sea*

$$K(x,y) = \frac{L(x,y)}{\|x-y\|^{N(1-\alpha)}}.$$

Entonces,

1. $(\lambda_n(T_K)) \in l_2$ *si* $1/2 < \alpha < 1$,
2. $(\lambda_n(T_K)) = O(n^{-\alpha})$ *si* $0 < \alpha < 1/2$,
3. $\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(T)|^2 = O(\log n)$ *si* $\alpha = 1/2$.

Demostración. *La prueba de 1. es directa. Veamos entonces la prueba de 2. y de 3.*

Apliquemos el Lema 53 con

$$g(t) = \begin{cases} t^{\alpha-1} & si\ 0 < t < (diam(\Omega))^N, \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

y $a = 1/n$. *Se puede comprobar fácilmente que*

$$\int_0^{1/n} g(t)\,dt \simeq n^{-\alpha}$$

y que

$$\int_{1/n}^{\infty} g(t)^2\,dt \simeq \begin{cases} \log n & si\ \alpha = 1/2, \\ n^{1-2\alpha} & si\ 0 < \alpha < 1/2. \end{cases}$$

Así, si $0 < \alpha < 1/2$, *entonces*

$$s_n(T) \leq C\,\|L\|_\infty \left(n^{-\alpha} + n^{-1/2}\left(n^{1-2\alpha}\right)^{1/2}\right) = C'\,\|L\|_\infty\, n^{-\alpha},$$

y, por tanto, $s_n(T) = O(n^{-\alpha})$. *Además, si* $\alpha = 1/2$, *entonces*

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(T)^2 \leq C\,\|L\|_\infty^2 \left(nn^{-1} + \log n\right) \leq C'\,\|L\|_\infty^2 \log n,$$

de donde $\sum_{j=1}^{n} s_j(T)^2 = O(\log n)$. *Esto da el resultado para números singulares. Para obtener el resultado con los autovalores, empleamos la desigualdad de Weyl:*

$$n\,|\lambda_n(T_K)| \leq \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(T_K)| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(T_K).$$

Por tanto,

$$|\lambda_n(T_K)| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_j(T_K).$$

Ahora, es sencillo comprobar que, si $s_n(T) = O(n^{-\alpha})$, *entonces también* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} s_j(T_K) = O(n^{-\alpha})$, *de donde* $|\lambda_n(T_K)|$ *también lo es.*

Para el caso $\alpha = 1/2$, *se puede usar directamente la desigualdad de Weyl:*

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(T_K)|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(T_K)^2,$$

de donde

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(T_K)| = O(\log n),$$

como queríamos. ∎

Por último, vamos a mostrar que estas estimaciones son las mejores posibles. Empezamos por el caso $1/2 < \alpha < 1$.

Teorema 55 *Si* $1/2 < \alpha < 1$, *la estimación* $(\lambda_n(T_K)) \in l_2$ *es la mejor posible.*
Demostración. *Sea* g *una función continua en* $[0,1]$ *cuyos coeficientes de Fourier*

$$\widehat{g}(n) = \int_0^1 g(x)\, e^{-2\pi i n x} dx$$

no pertenenen a l_r *para ningún* $r < 2$. *Sea* $\widetilde{g}$ *la extensión periódica de* g; *definimos el operador*

$$Tgf(x) = \int_0^1 \widetilde{g}(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Además, como g *es continua, se tiene que*

$$L(x,y) := g(x,y)\, \|x-y\|^{N(1-\alpha)} \in L_\infty\left([0,1]^2\right).$$

Por tanto, Tg *es un operador integral débilmente singular, con* $L(x,y)$ *como arriba.*

Por otro lado, consideramos la base de $L_2([0,1])$ *dada por*

$$f_n(x) = e^{2\pi i n x},$$

para $n \in \mathbb{Z}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} Tgf_n(x) &= \int_0^1 \widetilde{g}(x-y)\, e^{2\pi i n y} dy = \int_0^1 \widetilde{g}(y)\, e^{2\pi i n(x-y)} dy \\ &= f_n(y)\, \widehat{g}(n), \end{aligned}$$

luego los coeficientes de Fourier de g son los autovalores de Tg. Pero

$$\sum_j |\lambda_j (T_K)|^r = \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{g}(n)|^r = \infty$$

para $r < 2$, luego la estimación dada es la mejor posible. ■

En cuanto al caso $0 < \alpha \leq 1/2$, tenemos el siguiente teorema:

Teorema 56 *Sea $0 < \alpha \leq 1/2$ y sea*

$$K(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} & si\ |x-y| \leq 1/2, \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

para $x, y \in [0,1]$. Entonces, los autovalores del operador integral débilmente singular T_K verifican que $(|\lambda_n (T_K)|) \simeq (n^{-\alpha})$ si $0 < \alpha < 1/2$ y que

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j (T)|^2 \simeq (\log n)$$

si $\alpha = 1/2$.
Demostración. *Observemos, en primer lugar, que, como el núcleo $K(x,y)$, el operador T_K es compacto y autoadjunto en $L_2([0,1])$. Así, por el teorema de representación espectral,*

$$|\lambda_n (T_K)| = s_n (T_K).$$

Por tanto, teniendo en cuenta el Teorema 54, basta probar que

$$\left(n^{-\alpha}\right) = O(s_n (T_K))$$

si $0 < \alpha < 1/2$ y que

$$(\log n) = O\left(\sum_{j=1}^{n} s_j (T)^2\right)$$

si $\alpha = 1/2$.

Con este propósito, consideramos la función

$$g(t) = \frac{1}{|t|^{1-\alpha}}$$

para $|t| \leq 1/2$. Sea, como antes, $\widetilde{g}$ la extensión periódica de g a $\mathbb{R}$, y sea Cg el operador integral sobre $L_2([0,1])$ definido por el núcleo

$$K(x,y) = \widetilde{g}(x-y).$$

Este operador, de nuevo, es autoadjunto, luego

$$s_n(Cg) = |\lambda_n(Cg)|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. *Además. como antes, los autovalores de* Cg *son precisamente los coeficientes de Fourier de* g, *luego*

$$s_n(Cg) = |\lambda_n(Cg)| = |\widehat{g}(n)| \geq n^{-\alpha}.$$

Por otro lado, el operador $Cg - T_K$, *cuyo núcleo es*

$$L(x,y) = \begin{cases} \widetilde{g}(x-y) & si\ |x-y| > 1/2, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

satisface

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 |L(x,y)|^2 \, dxdy &= \int\int_A \widetilde{g}(x-y)^2 \, dxdy \\ &= 2\int_0^{1/2} \int_y^{1/2} |g(t)|^2 \, dtdy \\ &= 2\int_0^{1/2} \int_y^{1/2} t^{2\alpha-2} dtdy \\ &\leq c\int_0^{1/2} y^{2\alpha-1} dy < \infty, \end{aligned}$$

donde, $A = \{(x,y) \in [0,1) \times [0,1) : |x-y| > 1/2\}$ *y, para obtener la segunda igualdad, hemos usado la paridad de* g *y un cambio de variable. Por tanto,* $Cg - T_K$ *es un operador de Hilbert-Schmidt, y así*

$$s_n(Cg - T_K) \leq \left[n^{-1} \sum_{j=1}^{n} s_j (Cg - T_K)^2 \right]^{1/2} \leq cn^{-1/2}.$$

Ahora, como $Cg = (Cg - T_K) + T_K$, *se tiene, para* $0 < \alpha < 1/2$, *que*

$$\begin{aligned} c\left(2n^{-\alpha}\right) &\leq s_{2n}(Cg) \leq s_n(Cg - T_K) + s_n(T_K) \\ &\leq cn^{-1/2} + s_n(T_K). \end{aligned}$$

Como $(2n)^{-\alpha} \sim n^{-\alpha}$ *y* $n^{-1/2} = o(n^{-\alpha})$, *concluimos que*

$$s_n(T_K) \geq c' n^{-\alpha},$$

como queríamos.

Por último, cuando es $\alpha = 1/2$, dado que $s_n(Cg) \geq cn^{-1/2}$, se tiene que $s_n(Cg)^2 \geq c^2 n^{-1}$, y así

$$\begin{aligned}
\log n &\simeq \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \simeq \sum_{j=1}^{n} c^2 \frac{1}{2j} \leq \sum_{j=1}^{n} s_{2j}(Cg)^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \left[s_j(Cg - T_K) + s_j(T_K)\right]^2 \\
&\leq 2\sum_{j=1}^{n} s_j(Cg - T_K)^2 + \sum_{j=1}^{n} s_j(T_K)^2 \\
&\leq 2\left[c_1 + \sum_{j=1}^{n} s_j(T_K)^2\right],
\end{aligned}$$

luego

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(T_K)^2 \geq c_2 \log n,$$

como queríamos. ■

En [4] y [3] se estudian unos operadores integrales algo más generales: aquéllos cuyo núcleo es de la forma

$$K(x,y) = \frac{L(x,y)\left(1 + \log\|x-y\|\right)^{\gamma}}{\|x-y\|^{N(1-\alpha)}}.$$

De hecho, a partir de la desigualdad (4.1), se prueba en [4] el siguiente resultado:

Teorema 57 *En las condiciones de antes, las sucesiones $(s_n(T_K))$ y $(\lambda_n(T_K))$ son de orden asintótico $O(M_{\alpha,\gamma}(n))$, donde*

$$M_{\alpha,\gamma}(n) := \begin{cases} (\log n)^{\gamma+1} & si\ \alpha = 0, \gamma < -1, \\ n^{-\alpha}(\log n)^{\gamma} & si\ 0 < \alpha < 1/2, \gamma \in \mathbb{R}, \\ n^{-1/2}(\log n)^{\gamma-1/2} & si\ \alpha = \frac{1}{2}, \gamma > -\frac{1}{2}, \\ n^{-1/2}(\log\log n)^{1/2} & si\ \alpha = \frac{1}{2}, \gamma = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

La demostración es similar a la del Teorema 54, pero con el núcleo

$$k(t) := \begin{cases} t^{\alpha-1}\left(1 + \frac{1}{N}|\log t|\right)^{\gamma} & \text{si } 0 < t < (diam(\Omega))^N, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y con $a = 1/n$. Además, se prueba que, salvo cuando $\alpha = 1/2$ y $\gamma \geq -1/2$, estas son las mejores estimaciones posibles. En [3] se mejora la estimación para el caso límite $\alpha = 1/2$ y $\gamma \geq -1/2$:

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(T_K)|^2 = \begin{cases} O(\log\log n) & \text{si } \gamma = -1/2, \\ O\left((\log n)^{2\gamma+1}\right) & \text{si } \gamma > -1/2, \end{cases}$$

estimación que es la mejor posible.

Capítulo 5

Números de entropía y de aproximación en espacios cuasi-Banach

En este último capítulo, vamos a extender diversos resultados anteriores al caso cuasi-Banach. Comenzaremos estudiando algunos aspectos de la teoría espectral de operadores entre espacios cuasi-Banach. Luego definiremos la sucesión de números de entropía de un operador entre espacios cuasi-Banach, y estudiaremos las relaciones entre esta sucesión y las de autovalores y números de aproximación del operador. Por último, veremos cómo se comportan los números de entropía cuando interpolamos. Compararemos, siempre que podamos, lo que sucede en el caso cuasi-Banach con lo que ocurre en el caso Banach. Todo lo que se dice en este capítulo aparece en [8].

5.1. Teoría espectral en espacios cuasi-Banach

En esta sección, comenzaremos recordando la definición de espacio cuasi-Banach y después estudiaremos el espectro de un operador compacto entre espacios cuasi-Banach.

Comenzamos con algunos conceptos básicos.

Definición 58 *Llamamos cuasi-norma en un espacio vectorial complejo B a una aplicación*

$$\|\cdot\| : B \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

tal que

1. $\|x\| = 0$ *si, y sólo si,* $x = 0$,
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *para todo escalar* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y para todo* $x \in B$,
3. *Existe una constante* $C \geq 1$ *tal que, para todo* $x, y \in B$, *es*

$$\|x + y\| \leq C \left(\|x\| + \|y\| \right).$$

Toda cuasi-norma induce una topología en B, y al par $(B, \|\cdot\|)$ se le llama espacio cuasi-normado; es un espacio vectorial topológico metrizable. Si en B toda sucesión de Cauchy es convergente, llamamos a B espacio cuasi-Banach. Un ejemplo de espacio cuasi-Banach es l_q para $0 < q \leq \infty$. De hecho, sabemos que, para $q \geq 1$, el espacio l_q es de Banach.

Definición 59 *Dado cualquier $p \in (0,1]$, llamamos p-norma a una aplicación*

$$\|\cdot\| : B \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

que cumple las condiciones 1. y 2. de arriba, y además

3. Para todo $x, y \in B$, es $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$.

Se puede probar que, dada una cuasi-norma $\|\cdot\|$, existe una p-norma equivalente a $\|\cdot\|$. Recíprocamente, toda p-norma es una cuasi-norma con $C = 2^{\frac{1}{p}-1}$ (ver [1]).

Definición 60 *Sea $T : B \longrightarrow B$ un operador lineal. Decimos que la sucesión $(u_n) \subset dom\,(T)$ es una sucesión de Weyl de T correspondiente a $\lambda \in \mathbb{C}$ si no contiene ninguna subsucesión convergente, todos los vectores son unitarios, y además $Tu_j - \lambda u_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Sea B un espacio cuasi-Banach, y sea $\mathcal{T}$ la familia de todos los operadores cerrados, lineales y con dominio un subconjunto denso de B. Para $T \in \mathcal{T}$, distinguimos dos subconjuntos de su espectro: el espectro puntual $\sigma_p(T)$ y el espectro esencial $\sigma_e(T)$, dados por

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists u \in B - \{0\} \text{ tal que } Tu = \lambda u\}$$

y

$$\sigma_e(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{ existe una sucesión de Weyl de } T \text{ correspondiente a } \lambda\}.$$

Observemos que, si $T \in \mathcal{T}$ y $\lambda \in \rho(T)$, entonces claramente existirá $c > 0$ tal que

$$\|Tu - \lambda u\| \geq c\,\|u\| \tag{5.1}$$

para todo $u \in dom\,(T)$. Vamos a introducir ahora la clase

$$\mathcal{S} = \{T \in \mathcal{T} : \lambda \in \rho(T) \iff \text{ se tiene (5.1) para algún } c > 0\}.$$

Consideraremos, asimismo, la clase

$$\mathcal{S}_0 = \{T \in \mathcal{S} : \sigma_e(T) = \varnothing\},$$

la clase de operadores compactos

$$\mathcal{K} = \{T \in \mathcal{L}(B) : T \text{ es compacto}\}$$

y la clase

$$\mathcal{S}_1 = \left\{T \in \mathcal{T} : \rho(T) \neq \varnothing, (T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K} \text{ para algún } \lambda \in \rho(T)\right\}.$$

Comencemos con una proposición que relaciona algunos de estos conjuntos.

Proposición 61 *Sea $T \in \mathcal{T}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T \in \mathcal{S}$;
2. $\sigma(T) = \sigma_e(T) \cup \sigma_p(T)$;
3. $\sigma(T) = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \in \mathbb{C}: & \text{existe una sucesión } \{u_j\} \subset dom(T) \text{ de} \\ & \text{vectores unitarios tal que } Tu_j - \lambda u_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right\}$.

Demostración. 1. $\Longleftrightarrow$ ***3.*** *Pongamos*

$$M = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda \in \mathbb{C}: & \text{existe una sucesión } \{u_j\} \subset dom(T) \text{ de} \\ & \text{vectores unitarios tal que } Tu_j - \lambda u_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{array} \right\}.$$

Entonces, se tiene que $T \in \mathcal{S} \Longleftrightarrow$

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{se tiene } (5.1) \text{ para algún } c > 0\} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{aligned} \sigma(T) &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall c > 0 \exists u \in dom(T) \text{ con } \|Tu - \lambda u\| < c\|u\|\} \\ &= M. \end{aligned}$$

2. $\Longleftrightarrow$ ***3.*** *Basta probar que $M = \sigma_e(T) \cup \sigma_p(T)$. Veamos, en primer lugar, que $M \subset \sigma_e(T) \cup \sigma_p(T)$. Sea $\lambda \in M$. Entonces, existe una sucesión de vectores unitarios $(u_j) \subset dom(T)$ tal que $Tu_j - \lambda u_j \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Si dicha sucesión no contiene ninguna subsucesión convergente, entonces, por definición, se tendrá $\lambda \in \sigma_e(T)$. Por otro lado, si existe una subsucesión (u_{j_k}) convergente a un cierto u, entonces debe ser $\|u\| = 1$. Además, como*

$$Tu_{j_k} - \lambda u_{j_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

y

$$u_{j_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u,$$

se tiene que

$$\|Tu_{j_k} - \lambda u\| \leq \|Tu_{j_k} - \lambda u_{j_k}\| + \|\lambda u_{j_k} - \lambda u\| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de donde $(Tu_{j_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \lambda u$. Como T es cerrado, $u \in dom(T)$, y además, como $Tu = \lim Tu_j = \lambda u$, se tiene que $\lambda \in \sigma_p(T)$. Veamos ahora la otra inclusión. Claramente, $\sigma_e(T) \subset M$. Además, si $\lambda \in \sigma_p(T)$, entonces existirá $u \in B - \{0\}$ tal que $Tu = \lambda u$. Pero entonces $\frac{u}{\|u\|}$ también cumple esta propiedad, y es unitario. Por tanto, la sucesión constante $\left(\frac{u}{\|u\|}\right)$ cumple todas las propiedades para que $\lambda \in M$. Esto termina la demostración. ■

En la siguiente proposición, estudiamos las clases $\mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_1$:

Proposición 62 *Se tiene que*

1. *Si* $T \in \mathcal{S}_0$*, entonces*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \sigma_p(T) : \lambda \text{ tiene multiplicidad geométrica finita}\}.$$

2. *Si* $T \in \mathcal{S}_1$*, entonces* $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}$ *para todo* $\lambda \in \rho(T)$*.*

Demostración. *Lo probaremos a partir de algunos resultados del caso Banach que también son ciertos en el caso cuasi-Banach.*

1. *Por la proposición anterior,* $\sigma(T) = \sigma_e(T) \cup \sigma_p(T) = \sigma_p(T)$*. Así, basta excluir los autovalores de multiplicidad geométrica infinita. Supongamos que* $\lambda \in \sigma_p(T)$ *cumple que* $\dim(\ker(T - \lambda I)) = \infty$*. Entonces, por el lema de Riesz (para espacios cuasi-Banach), para todo* $\varepsilon > 0$*, podemos localizar una sucesión de vectores unitarios* $(u_j) \subset \ker(T - \lambda I)$ *tal que* $\|u_j - u_k\| > 1 - \varepsilon$ *para* $j \neq k$*. Pero entonces* $\lambda \in \sigma_e(T) = \varnothing$*, lo cual es absurdo.*

2. *Se tiene que*

$$(T - \lambda I)^{-1} = (T - \mu I)^{-1} + (\lambda - \mu)(T - \lambda I)^{-1}(T - \mu I)^{-1},$$

como se puede comprobar fácilmente. De aquí deducimos que, si

$$(T - \mu I)^{-1} \in \mathcal{K},$$

entonces $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}$*.*

Con esto terminamos la demostración. ■

Observemos que 2. implica que la definición de $T \in \mathcal{S}_1$ es independiente de la elección de λ.

Vamos a centrarnos por un momento en los espacios de Banach. En [7] aparece el siguiente teorema:

Teorema 63 *Sea* X *un espacio infinito-dimensional. Sea* $T \in \mathcal{S}_1$*. Entonces, el espectro de* T *sólo tiene autovalores aislados de multiplicidad algebraica finita.*

Demostración. *Supongamos que* $(T - \zeta I)^{-1} \in \mathcal{K}$*. Entonces, su espectro en* $\mathbb{C} - \{0\}$ *sólo tiene autovalores aislados de multiplicidad algebraica finita (ya que es compacto). Ahora,* λ *es autovalor de* T *si, y sólo si,* $\frac{1}{\lambda - \zeta}$ *es autovalor de* $(T - \zeta I)^{-1}$ *con las mismas multiplicidades algebraica y geométrica:*

$$T - \lambda I = (\lambda - \zeta)(T - \zeta I)\left[(\lambda - \zeta)^{-1} I - (T - \zeta I)^{-1}\right].$$

Por tanto, los autovalores de T *son puntos aislados con multiplicidades algebraicas finitas, como queríamos.* ■

Así, en este caso,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \sigma_p(T) : \lambda \text{ tiene multiplicidad algebraica finita}\},$$

y además, para todo $\lambda \in \rho(T)$, $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}$ es un operador de Riesz. Por tanto, en el caso de espacios de Banach, se tiene que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0$. Trataremos de generalizar este hecho para espacios cuasi-Banach en el próximo teorema. Para probarlo, necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 64 *Sea B un espacio cuasi-Banach, sea $T \in \mathcal{K}$ y sea λ un autovalor no nulo. Entonces, existe un número $r \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \geq r$, es*

$$\ker(T - \lambda I)^n = \ker(T - \lambda I)^r.$$

Podemos encontrar la prueba de este lema en [7]. Los otros dos lemas son los siguientes:

Lema 65 *Sea B un espacio cuasi-Banach, sea $T \in \mathcal{K}$ y sea $\{x_1, x_2, ...\}$ el conjunto de autovectores correspondientes a los autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ...$, tal que $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$. Entonces, $\{x_1, x_2, ...\}$ es linealmente independiente y, además, si es infinito, entonces $\lambda_n \longrightarrow 0$.*

Lema 66 *Sea B un espacio cuasi-Banach, sea $T \in \mathcal{L}(B)$ tal que $\|T^q\| < 1$ para algún q. Entonces, el operador $I - T$ es invertible y además*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n.$$

Las pruebas de estos dos lemas aparecen en [15]. El segundo se demuestra para operadores entre espacios de Banach, pero la prueba se puede adaptar fácilmente para espacios cuasi-Banach. Probemos ya el teorema anunciado.

Teorema 67 *Sea B un espacio cuasi-Banach infinito-dimensional y complejo. Sea $K \in \mathcal{K}$. Entonces,*

1. *$K \in \mathcal{S}$,*

2. *$\sigma_e(K) = \{0\}$ y $\sigma(K) = \{0\} \cup \sigma_p(K)$,*

3. *$\sigma(K) - \{0\}$ contiene una cantidad a lo más numerable de autovalores de multiplicidad algebraica finita. Además, los autovalores no tienen ningún punto de acumulación salvo quizás 0.*

Demostración. *Haremos la prueba en varios pasos:*

1. *Veamos que* $\sigma_e(K) \subset \{0\}$. *Sea* $\lambda \in \sigma_e(T) - \{0\}$, *y sea* (u_j) *una sucesión de Weyl asociada. Como* K *es compacto, podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que la sucesión* (Ku_j) *converge a un vector* v. *Ahora,*

$$\lambda u_j = (\lambda u_j - Ku_j) + Ku_j \longrightarrow 0 + v,$$

y, por tanto, la sucesión (u_j) *es convergente. Pero esto es imposible, porque* (u_j) *es una sucesión de Weyl.*

2. *Veamos que* $0 \in \sigma_e(K)$ *(y, por tanto,* $\sigma_e(K) = \{0\}$*). Sea* $\varepsilon \in (0,1)$. *Construimos, a partir del lema de Riesz (para el caso cuasi-Banach), una sucesión* (u_j) *de vectores de norma 1 tal que*

$$d\left(u_j, span\left\{u_1, ..., u_{j-1}\right\}\right) > 1 - \varepsilon.$$

Sea, para cada j, $v_j = u_{2j} - u_{2j-1}$. *Entonces,*

$$1 - \varepsilon \leq \|v_j\| \leq 2,$$

y además, para todo $k < j$, *es*

$$v_j - v_k = u_{2j} - (u_{2j-1} + u_{2k} - u_{2k-1}).$$

Como el vector $u_{2j-1} + u_{2k} - u_{2k-1} \in span\left\{u_1, ..., u_{2j-1}\right\}$, *se tiene que*

$$\|v_j - v_k\| > 1 - \varepsilon. \tag{5.2}$$

Además, como K *es compacto, podemos suponer que* (Ku_j) *es convergente, y así*

$$Kv_j = Ku_{2j} - Ku_{2j-1} \longrightarrow 0.$$

Por tanto, la sucesión $\left(\frac{v_j}{\|v_j\|}\right)$ *es una sucesión de vectores unitarios sin subsucesiones convergentes (por* (5.2)*) y tal que*

$$Kv_j - 0 \cdot v_j \longrightarrow 0:$$

es una sucesión de Weyl.

3. *Probamos ahora el punto 3. del enunciado con el espectro puntual. Sea* $\lambda \in \sigma_p(K) - \{0\}$. *Por el Lema 64,* λ *debe tener multiplicidad algebraica finita. Además,* σ_p *no tiene otro posible punto de acumulación que* 0*: para* $\delta > 0$, *definimos el conjunto*

$$E_\delta = \{\mu \in \sigma_p(K) : |\mu| \geq \delta\}.$$

Si E_δ *es infinito para algún* $\delta > 0$, *tomamos una sucesión* $(\mu_n) \subset E_\delta$, *con* $\mu_n \neq \mu_m$ *para* $m \neq n$, *y la sucesión de autovectores asociados* (x_n). *Entonces, el conjunto* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es linealmente independiente y, por* *tanto (Lema 65), $\mu_n \longrightarrow 0$. Pero esto contradice el hecho de que $|\mu_n| \geq \delta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, E_δ es finito para todo $\delta > 0$. Ahora bien, como*

$$\sigma_p(K) = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{1/n},$$

σ_p es a lo sumo numerable y no tiene puntos de acumulación salvo quizás el 0.

4. *Renormamos B con una p-norma equivalente $\|\cdot\|_p$. Observemos que, si $|\lambda|^q > \|K^q\|_p$ para algún q, entonces $\lambda \in \rho(K)$: podemos suponer que $K \neq 0$, y así $\lambda \neq 0$. Entonces,*

$$K - \lambda I = -\lambda\left(I - \lambda^{-1}K\right).$$

Por el Lema 66, $K - \lambda I$ es invertible, y, por tanto, $\lambda \in \rho(K)$. De ahí que, si $|\lambda| > C\|K\|$ para un cierto C (que es la constante que relaciona la norma de B con la p-norma equivalente), entonces $\lambda \in \rho(K)$.

5. *Veamos que $K \in \mathcal{S}$. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \notin \sigma_p(K) \cup \{0\}$. Entonces, $\lambda \notin \sigma_e(K)$, y así existe $c > 0$ tal que*

$$\|Ku - \lambda u\| \geq c\|u\|$$

para todo $u \in B$. Sea ahora $\mu \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu| > C\|K\|$ como en el paso 4, y sea γ un camino en $\mathbb{C}$ que une μ con λ sin pasar por ningún autovalor. Entonces, con un argumento sencillo por contradicción, podemos probar que se tiene

$$\|Ku - \kappa u\| \geq c\|u\|$$

para todo κ sobre γ, con la misma constante c de antes.

Si $\kappa \in \rho(K)$, entonces se tiene que

$$\|K - \kappa I\| \leq \frac{1}{c}.$$

Además, haciendo

$$v = Ku - \nu u = Ku - \kappa u - (\nu - \kappa)u$$

para todo ν, se tiene que

$$(K - \kappa I)^{-1} v = u - (\nu - \kappa)(K - \kappa I)^{-1} u. \tag{5.3}$$

Ahora, si ν está sobre γ y además es

$$|\nu - \kappa| \left\|(K - \kappa I)^{-1}\right\| < 1,$$

entonces, por el Lema 66, la ecuación (5.3) tiene solución única. Por tanto, con estas condiciones, $\nu \in \rho(K)$. Como la imagen de γ es compacta, podemos repetir este argumento (un número finito de veces), y de este modo obtenemos que $\lambda \in \rho(K)$. Por tanto, $\lambda \in \rho(K) \iff \|Ku - \kappa u\| \geq c\|u\| \,\forall u$, y así $K \in \mathcal{S}$.

Con esto terminamos la demostración: como $K \in \mathcal{S}$, se tiene que

$$\sigma(K) = \sigma_e(K) \cup \sigma_p(K).$$

Como ya hemos probado que $\sigma_e(K) = \{0\}$, ya tenemos 2. y 3. ■

Probaremos ahora que $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0$ también en el caso cuasi-Banach (recordemos que probamos esta inclusión para el caso Banach antes del Lema 64):

Proposición 68 $\mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_0$.
Demostración. *Sea $T \in \mathcal{S}_1$. Supondremos, en primer lugar, que $T^{-1} \in \mathcal{K}$; más adelante estudiaremos qué sucede si $0 \notin \rho(T)$. Por el teorema anterior, se tiene que $\sigma_e(T^{-1}) = \{0\}$. Ahora,*

1. *$0 \neq \mu \in \sigma_e(T) \iff 0 \neq \mu^{-1} \in \sigma_e(T^{-1})$: Observemos que basta probar "$\Rightarrow$". Si $\mu \in \sigma_e(T)$, entonces existe una sucesión (u_j) de vectores unitarios sin subsucesiones convergentes tal que $(T - \mu I)u_j \longrightarrow 0$. Si se tuviese $Tu_j = 0$ para infinitos j, tomamos la subsucesión (u_{j_k}) de (u_j) tal que $(Tu_{j_k}) = (0)$. Entonces,*

   $$(T - \mu I)u_{j_k} = Tu_{j_k} - \mu u_{j_k} = \mu u_{j_k} \longrightarrow 0,$$

   luego, como $\mu \neq 0$, deducimos que la sucesión (u_j) tiene una subsucesión convergente, lo cual es absurdo.

   Por tanto, se puede dar $Tu_j = 0$ sólo para una cantidad finita de j, y así podemos suponer que $Tu_j \neq 0$ para ningún j. Definimos, para cada j, el vector

   $$v_j = \frac{Tu_j}{\|Tu_j\|}.$$

   Entonces, (v_j) es una sucesión de vectores unitarios tal que

   $$\begin{aligned} \left(T^{-1} - \mu^{-1}I\right)v_j &= \frac{u_j}{\|Tu_j\|} - \mu^{-1}\frac{Tu_j}{\|Tu_j\|} \\ &= \frac{\mu^{-1}}{\|Tu_j\|}(Tu_j - \mu u_j) \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

   siempre que $\|Tu_j\| \nrightarrow 0$. Pero, si $Tu_j \longrightarrow 0$, como $(T - \mu I)u_j \longrightarrow 0$, entonces $u_j \longrightarrow 0$, lo cual es imposible.

   Por tanto, para comprobar que (v_j) es una sucesión de Weyl, sólo falta mostrar que no tiene subsucesiones convergentes. Pero, si existe una subsucesión (v_{j_k}) convergente a v, entonces $\mu u_{j_k} \longrightarrow v$, ya que se tiene $Tu_{j_k} - \mu u_{j_k} \longrightarrow 0$ y $Tu_{j_k} \longrightarrow v$. Así la sucesión (u_j) tiene una subsucesión convergente, lo cual es absurdo.

2. *0* $\notin \sigma_e(T)$. *De 1., deducimos que* $\sigma_e(T) \subset \{0\}$. *Si mostramos* $0 \notin \sigma_e(T)$, *tendremos que* $\sigma_e(T) = \varnothing$ *y, por tanto, que* $T \in \mathcal{S}_0$. *Sea* (u_j) *una sucesión de vectores unitarios sin subsucesiones convergentes. Veamos que es imposible que* $Tu_j \longrightarrow 0$. *Si* $Tu_j \longrightarrow 0$, *entonces, como* T^{-1} *es continuo (por ser* T *compacto), entonces* $T^{-1}Tu_j = u_j \longrightarrow 0$, *lo cual es imposible.*

Veamos ahora qué sucede si $0 \notin \rho(T)$. *En este caso, si* $T \in \mathcal{S}_1$, *entonces existe* $\lambda \in \rho(T)$, $\lambda \neq 0$, *tal que* $(T - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{K}$. *Sea* $S = T - \lambda I$. *Entonces,* $S \in \mathcal{S}_1$ *y* $0 \in \rho(S)$. *Por lo anterior,* $S \in \mathcal{S}_0$. *Es decir,* $T - \lambda I \in \mathcal{S}_0$, *o bien* $\sigma_e(T - \lambda I) = \varnothing$. *Si* $\mu \in \sigma_e(T)$, *entonces existe una sucesión de vectores unitarios* (u_j) *sin subsucesiones convergentes tal que* $Tu_j - \mu u_j \longrightarrow 0$. *Ahora,*

$$\begin{aligned} Tu_j - \mu u_j &= Tu_j - \lambda u_j - (\mu - \lambda) u_j \\ &= (T - \lambda I) u_j - (\mu - \lambda) u_j \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

luego $\mu - \lambda \in \sigma_e(T - \lambda I)$, *lo cual es imposible. Por tanto,* $\sigma_e(T) = \varnothing$ *también en este caso. Esto termina la demostración.* ■

5.2. Números de entropía y números de aproximación. Relaciones entre ellos

Como ya hemos anunciado, vamos a definir y a probar algunas propiedades de los números de entropía de un operador entre dos espacios cuasi-Banach. Estudiaremos las relaciones entre esta sucesión y la de números de aproximación, así como las propiedades que tienen en común y las que los diferencian.

Comencemos por la definición de los números de entropía de un operador.

Definición 69 *Sean* A *y* B *dos espacios cuasi-Banach y sea* $T \in \mathcal{L}(A, B)$. *Pongamos* $U_A = \{a \in A : \|a\|_A \leq 1\}$. *Entonces, para cada* $k \in \mathbb{N}$, *definimos el* k*-ésimo número de entropía de* T, $e_k(T)$, *como*

$$e_k(T) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : T(U_A) \subset \bigcup_{j=1}^{2^{k-1}} (b_j + \varepsilon U_B) \text{ para algunos } b_1, ..., b_{2^{k-1}} \in B \right\}.$$

El siguiente lema muestra algunas propiedades elementales de los números de entropía.

Lema 70 *Sean* A, B *y* C *espacios cuasi-Banach y sean* $S, T \in \mathcal{L}(A, B)$ *y* $R \in \mathcal{L}(B, C)$. *Entonces,*

1. $\|T\| \geq e_1(T) \geq e_2(T) \geq \cdots \geq 0$ *y* $e_1(T) = \|T\|$ *si* B *es un espacio de Banach.*

2. *Para todos $k, l \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$e_{k+l-1}(R \circ S) \leq e_k(R)\, e_l(S).$$

3. *Si B es p-Banach, con $0 < p \leq 1$, entonces para todos $k, l \in \mathbb{N}$, es*

$$e^p_{k+l-1}(S+T) \leq e^p_k(S) + e^p_l(T).$$

Demostración.

1. *Teniendo en cuenta que*

$$\|T\| = \text{ínf}\,\{\mu \geq 0 : T(U_A) \subset \mu U_B\}$$

y que

$$e_1(T) = \text{ínf}\,\{\varepsilon \geq 0 : T(U_A) \subset b + \varepsilon U_B\},$$

es inmediato que $\|T\| \geq e_1(T)$. Además, es claro que $e_k(T) \geq e_{k+1}(T)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (porque, con e_{k+1}, se pueden usar más bolas, o las mismas, para recubrir $T(U_A)$). También es obvio que $e_k(T) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por la definición.

Así, sólo falta comprobar que $e_1(T) \geq \|T\|$ si B es un espacio de Banach. Sea $p \in [0,1)$ tal que B es p-Banach. Entonces, si $T(U_A) \subset b_0 + \mu U_B$, dado $a \in U_A$, existen $b_1, b_2 \in U_B$ tales que

$$\begin{aligned} Ta &= b_0 + \mu b_1, \\ -Ta &= b_0 + \mu b_2. \end{aligned}$$

De ahí que $2Ta = \mu(b_1 - b_2)$, y así

$$\|Ta\| = |\mu|\, \|b_1 - b_2\| \leq |\mu|\, 2^{1/p-1}.$$

Por tanto, $T(U_A) \subset 2^{1/p-1}\mu U_B$, y, si B es de Banach, entonces $p = 1$, es decir, $T(U_A) \subset \mu U_B$. Por tanto, $\|T\| \geq e_1(T)$.

2. *Sean $\mu > e_k(R)$ y $\nu > e_l(S)$. Entonces, existen puntos $c_1, ..., c_M \in C$ y $b_1, ..., b_N \in B$ tales que*

$$R(U_B) \subset \bigcup_{i=1}^{M} (c_i + \mu U_C),\ M \leq 2^{k-1},$$

$$S(U_A) \subset \bigcup_{j=1}^{N} (b_j + \nu U_B),\ N \leq 2^{l-1}.$$

Dado $a \in U_A$, existen $b_j \in B$ y $b \in U_B$ tales que

$$Sa = b_j + \nu b,$$

de donde

$$RSa = Rb_j + \nu Rb.$$

Pero como $b \in U_B$*, existirá* $c_i \in C$ *tal que* $Rb \in c_i + \mu U_C$*, y así*

$$RSa \in Rb_j + \nu c_i + \mu\nu U_C.$$

Por tanto,

$$RS(U_A) \subset \bigcup_{i=1}^{M}\bigcup_{j=1}^{N}\{(Rb_j + \nu c_i) + \mu\nu U_C\}.$$

La cantidad de puntos $Rb_j + \nu c_i$ *con* $i \in \{1, ..., M\}$ *y* $j \in \{1, ..., N\}$ *es, como mucho,* $MN \leq 2^{(k+l-1)-1}$*. Por tanto,*

$$e_{k+l-1}(RS) \leq \mu\nu.$$

Tomando ínfimos, obtenemos

$$e_{k+l-1}(RS) \leq e_k(R)\, e_l(S),$$

como queríamos.

3. *Sean* $\mu > e_k(S)$ *y* $\nu > e_l(T)$*. Entonces, existen* $b_1, \ldots, b_M, b'_1, \ldots, b'_N \in B$ *tales que*

$$S(U_A) \subset \bigcup_{i=1}^{M}(b_i + \mu U_B), \qquad T(U_A) \subset \bigcup_{j=1}^{N}\left(b'_j + \nu U_B\right),$$

donde $M \leq 2^{k-1}$ *y* $N \leq 2^{l-1}$*. Ahora, dado* $a \in U_A$*, existen puntos* b_i, b'_j *tales que* $Sa \in b_i + \mu U_B$ *y* $Ta \in b'_j + \nu U_B$*. Por tanto,*

$$(S+T)\,a \in \left(b_i + b'_j\right) + (\mu + \nu)\,U_B \subset \left(b_i + b'_j\right) + (\mu^p + \nu^p)^{1/p}\,U_B,$$

y así

$$(S+T)\,U_A \subset \bigcup_{i=1}^{M}\bigcup_{j=1}^{N}\left[\left(b_i + b'_j\right) + (\mu^p + \nu^p)^{1/p}\,U_B\right].$$

El número de puntos $b_i + b'_j$ *con* $i \in \{1, ..., M\}$ *y* $j \in \{1, ..., N\}$ *es, como mucho,* $MN \leq 2^{(k+l-1)-1}$*.*

Con esto terminamos la demostración. ■

La relación entre los números de entropía de un operador $T \in \mathcal{L}(A, B)$, donde A y B son espacios de Banach, y su adjunto T' ha sido un problema sobre el que se ha trabajado mucho recientemente. En el caso de espacios de Hilbert, el problema es sencillo:

Teorema 71 *Sea $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, donde $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ son espacios de Hilbert. Entonces, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$e_k(T) = e_k(T') = e_k(|T|).$$

Demostración. *Por el teorema de descomposición polar, existe una isometría parcial $\mathcal{U}$ tal que $T = \mathcal{U}|T|$ y $|T| = \mathcal{U}'T$. Por tanto,*

$$e_k(T) = e_k(\mathcal{U}|T|) \leq e_k(|T|)\|\mathcal{U}\| = e_k(|T|),$$

y también

$$e_k(|T|) = e_k(\mathcal{U}'T) \leq e_k(T)\|\mathcal{U}'\| = e_k(T).$$

Por otro lado, como $T' = |T|\mathcal{U}'$ y $|T| = T'\mathcal{U}$, se tiene que

$$e_k(T') = e_k(|T|\mathcal{U}') \leq e_k(|T|)\|\mathcal{U}'\| = e_k(|T|),$$

y también

$$e_k(|T|) = e_k(T'\mathcal{U}) \leq e_k(T')\|\mathcal{U}\| = e_k(T').$$

Con esto, terminamos la demostración. ■

Tratamos ahora el caso de los números de aproximación, que se definen igual que en el caso Banach (ver Definición 17).

Lema 72 *Sean A, B y C espacios cuasi-Banach, y sean $S, T \in \mathcal{L}(A, B)$ y $R \in \mathcal{L}(B, C)$. Entonces,*

1. *$a_1(T) = \|T\| \geq a_2(T) \geq a_3(T) \geq \cdots \geq 0$.*
2. *Para todo $k, l \in \mathbb{N}$, se tiene que $a_{k+l-1}(RS) \leq a_k(R)\, a_l(S)$.*
3. *Si B es un espacio p-Banach ($0 < p \leq 1$), entonces, para todo $k, l \in \mathbb{N}$, se tiene que*
$$a^p_{k+l-1}(S + T) \leq a^p_k(S) + a^p_l(T).$$

Demostración. *Sabemos ya que se tiene 1., sean los espacios en que esté definido T de Banach o cuasi-Banach. Por otro lado,*

2. *Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición, podemos encontrar operadores $R_1 \in \mathcal{L}(B, C)$ y $S_1 \in \mathcal{L}(A, B)$ con $rg(R_1) < k$ y $rg(S_1) < l$, tales que*
$$\|R - R_1\| < a_k(R) + \varepsilon \text{ y } \|S - S_1\| < a_l(S) + \varepsilon.$$
Como $rg(R_1(S - S_1) + RS_1) < k + l - 1$, se tiene que
$$\begin{aligned} a_{k+l-1}(RS) &\leq \|RS - R_1(S - S_1) - RS_1\| \\ &\leq \|R - R_1\|\,\|S - S_1\| \\ &\leq (a_k(R) + \varepsilon)(a_l(S) + \varepsilon). \end{aligned}$$
Por tanto, si $\varepsilon \longrightarrow 0$, obtenemos que
$$a_{k+l-1}(RS) \leq a_k(R)\, a_l(S).$$

3. *Sea $\varepsilon > 0$. Entonces, existen $T_1, S_1 \in \mathcal{L}(A,B)$ de rangos $rg(T_1) < l$ y $rg(S_1) < k$ tales que $\|S - S_1\| < a_k(S) + \varepsilon$ y $\|T - T_1\| < a_l(T) + \varepsilon$. Además, como $rg(S_1 + T_1) < k + l - 1$, se tiene que*

$$\begin{aligned} a_{k+l-1}^p(S+T) &\leq \|S + T - S_1 - T_1\|^p \\ &\leq \|S - S_1\|^p + \|T - T_1\|^p \\ &< (a_k(S) + \varepsilon)^p + (a_l(T) + \varepsilon)^p, \end{aligned}$$

de donde $a_{k+l-1}^p(S+T) \leq a_k^p(S) + a_l^p(T)$, como queríamos.

Esto termina la demostración. ■

Aunque los números de entropía y los números de aproximación tienen estas tres propiedades en común, existen diferencias radicales entre ellos. Por ejemplo, es claro que, a menos que $T \in \mathcal{L}(A,B)$ sea idénticamente cero, para todo $k \in \mathbb{N}$ es $e_k(T) \neq 0$. No obstante, $a_n(T) = 0$ si, y sólo si, $rg(T) < n$. Además, si B es un espacio de Banach real de dimensión finita e $I : B \longrightarrow B$ es la identidad, entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, es $1 \leq 2^{(n-1)/m} e_n(I) \leq 4$, pero, si $\dim B \geq n$, entonces $a_k(I) = 1$ para $k = 1, 2, ..., n$. Vamos a probarlo; los tres resultados que siguen aparecen en [7].

Proposición 73 *Sea B un espacio de Banach real de dimensión $m < \infty$. Sea $I : B \longrightarrow B$ la identidad. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ es*

$$1 \leq 2^{(n-1)/m} e_n(I) \leq 4.$$

Demostración. *Como $\dim B < \infty$, podemos identificar B con $\mathbb{R}^m$ mediante un homeomorfismo, y obtener así una medida de Borel μ sobre B que sea invariante por traslaciones. Además, podemos suponer que $\mu(U_B) = 1$.*

1. *Comprobemos la primera desigualdad. Sea $\lambda > e_n(I)$. Entonces, existen $x_1, x_2, ..., x_q \in B$ tales que*

$$U_B \subset \bigcup_{i=1}^{q} (x_i + \lambda U_B),$$

con $q \leq 2^{n-1}$. Así,

$$\mu(U_B) \leq \sum_{i=1}^{q} \mu(x_i + \lambda U_B) = q\lambda^m \mu(U_B),$$

de donde $1 \leq q\lambda^m$, es decir,

$$\lambda \geq q^{-1/m} \geq 2^{-(n-1)/m}$$

para todo $\lambda > e_n(I)$. De ahí que

$$e_n(I) \geq 2^{-(n-1)/m},$$

es decir,

$$1 \leq 2^{(n-1)/m} e_n(I),$$

como queríamos.

2. *Veamos ahora que también se tiene la otra desigualdad. Distinguimos dos casos:*

   - *Si* $n-1 \geq m$, *sea* ρ *tal que*

   $$\frac{1+\rho}{\rho} = 2^{(n-1)/m}.$$

   Como U_B *es un conjunto compacto, podemos localizar p puntos de* U_B, $x_1, x_2, ..., x_p$, *tales que* $\|x_i - x_j\| > 2\rho$ *si* $i \neq j$ *y, si* $x \in U_B$, *entonces* $x \in x_i + 2\rho U_B$ *para algún* i.
   Pongamos $B_i = x_i + 2\rho U_B$ *para* $i = 1, ..., p$. *Entonces, las bolas* $\overline{B_i}$ *son disjuntas dos a dos: si existiese* $x \in \overline{B_i} \cap \overline{B_j}$ *para* $i \neq j$, *se tendría que*

   $$\begin{aligned} \|x - x_i\| &\leq \rho, \\ \|x - x_j\| &\leq \rho, \end{aligned}$$

   y así $\|x_j - x_i\| \leq \|x - x_i\| + \|x - x_j\| \leq 2\rho$, *lo que es imposible. Además, para todo* i, $\overline{B_i} \subset (1+\rho)\overline{U_B}$, *ya que, si* $\|x - x_i\| \leq \rho$, *entonces*

   $$\|x\| \leq \|x - x_i\| + \|x_i\| \leq \rho + 1.$$

   Por tanto,

   $$\begin{aligned} p\rho^m &= \sum_{i=1}^{p} \mu(x_i + \rho U_B) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{p} (x_i + \rho U_B)\right) \\ &\leq \mu((1+\rho) U_B) = (1+\rho)^m, \end{aligned}$$

   de donde

   $$p \leq \left(\frac{1+\rho}{\rho}\right)^m = 2^{n-1}.$$

   Por otro lado, para todo $x \in U_B$ *existe* $i \in \{1, 2, ..., p\}$ *tal que* $\|x - x_i\| \leq 2\rho$, *luego*

   $$U_B \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + 2\rho U_B),$$

   y así

   $$e_n(I) \leq 2\rho = \frac{2}{2^{(n-1)/m} - 1} \leq 4 \cdot 2^{-(n-1)/m},$$

   como queríamos.

   - *Si* $n-1 < m$, *entonces* $2^{(n-1)/m} < 2$, *de donde*

   $$2^{(n-1)/m} e_n(I) < 2e_n(I) \leq 2\|I\| = 2 \leq 4.$$

Así, en cualquiera de los dos casos, obtenemos la estimación deseada.

Si B fuese complejo, se puede modificar la demostración sustituyendo m por $2m$. ■

Veamos ahora qué sucede con los números de aproximación.

Proposición 74 *Sean A, B espacios vectoriales normados. Sea $T \in \mathcal{L}(A, B)$. Entonces,*

1. $a_n(T) = 0 \iff rg(T) < n$.
2. *Si* $\dim B \geq n$ *y existe $S \in \mathcal{L}(B, A)$ tal que $TSy = y$ para todo $y \in B$, entonces $a_n(T)\|S\| \geq 1$.*

Demostración.

1. *Supongamos que $a_n(T) = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$, pero que $rg(T) \geq n$. Entonces, existe un conjunto linealmente independiente $\{y_i\}$ que verifica que $y_i = Tx_i$ para $i = 1, 2, ..., n$ y algún $x_i \in A$. Además, podemos encontrar, para cada i, un elemento $f_i \in B'$ tal que $f_i(y_j) = \delta_{ij}$. Por la continuidad de la aplicación* $\det$, *como* $\det(\delta_{ij}) = 1$, *existe $\delta > 0$ tal que* $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$ *si $|\delta_{ij} - \alpha_{ij}| < \delta$ para todo i, j.*

   Además, como $a_n(T) = 0$, existe $L \in \mathcal{L}(A, B)$ de rango menor que n, tal que
   $$\|T - L\| < \frac{\delta}{\max\limits_{i,j}(\|x_i\| \|f_j\|)}.$$

   Por otro lado,
   $$\begin{aligned} |\delta_{ij} - f_j(Lx_i)| &= |f_j(y_i - Lx_i)| = |f_j((T - L)x_i)| \\ &\leq \|f_j\| \|T - L\| \|x_i\| < \delta, \end{aligned}$$

   luego debe ser
   $$\det(f_j(Lx_i)) \neq 0.$$

   Pero $rg(L) < n$, y así $\det(f_j(Lx_i)) = 0$. *Pero esto es absurdo. Por tanto, debe ser $rg(T) < n$.*

   Recíprocamente, si $rg(T) < n$, entonces
   $$\begin{aligned} a_n(T) &= \inf\{\|T - L\| : L \in \mathcal{L}(A, B), rg(L) < n\} \\ &\leq \|T - T\| = 0. \end{aligned}$$

   Como sabemos que también es $a_n(T) \geq 0$, concluimos que debe ser $a_n(T) = 0$.

2. *Si, en las condiciones del enunciado, es* $a_n(T)\|S\| < 1$*, entonces existe* $L \in \mathcal{L}(A,B)$*, con* $rg(L) < n$*, tal que* $\|T-L\|\|S\| < 1$*. Sea* $I : B \longrightarrow B$ *la identidad. Entonces, por el Lema 66, el operador* $I-(T-L)S$ *es invertible. Ahora,*

$$I-(T-L)S = I-TS+LS = I-I+LS = LS,$$

de donde $(LS)^{-1}$ *es invertible. Pero* $rg(LS) < n$ *y* $\dim(B) \geq n$*, absurdo.*

Esto termina la demostración. ■

Corolario 75 *Si* $\dim A \geq n$ *e* $I : A \longrightarrow A$ *es la identidad, entonces* $a_k(I) = 1$ *para todo* $k = 1, 2, ..., n$*.*
Demostración. *Por 2. del teorema anterior, se tiene que*

$$a_n(I)\|I\| \geq 1,$$

es decir, $a_n(I) \geq 1$*. Pero también* $a_n(I) \leq \|I\| = 1$*, luego* $a_n(I) = 1$*. Así,*

$$1 = a_1(I) \geq a_2(I) \geq \cdots \geq a_n(I) = 1,$$

de donde $a_k(I) = 1$ *para todo* $k \leq n$*, como queríamos.* ■

Una vez vistas algunas de las diferencias entre números de aproximación y números de entropía, veamos qué relación se puede establecer entre ellos.

Teorema 76 *Sean* A *y* B *espacios cuasi-Banach, y sea* $T \in \mathcal{L}(A,B)$ *un operador compacto.*

1. *Supongamos que, para algún* $c > 0$*, es*

$$a_{2^{j-1}}(T) \leq c a_{2^j}(T)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$*. Entonces, existe una constante* $C > 0$ *tal que, para todo* $j \in \mathbb{N}$*, es*

$$e_j(T) \leq a_j(T).$$

2. *Sea* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función positiva y creciente, y supongamos que existe* $c > 0$ *tal que*

$$f\left(2^j\right) \leq cf\left(2^{j-1}\right).$$

Entonces, existe $C > 0$ *tal que, para todo* $n \in \mathbb{N}$*, es*

$$\sup_{1\leq j\leq n} f(j)\, e_j(T) \leq C \sup_{1\leq j\leq n} f(j)\, a_j(T).$$

Demostración. *Sea* $K \geq 1$ *tal que* $\forall u, v \in B$ *es* $\|u+v\|_B \leq K\left(\|u\|_B + \|v\|_B\right)$. *Entonces, para* $y_1, y_2, ..., y_k \in B$, *se tiene que*

$$
\begin{aligned}
\left\|\sum_{j=1}^{k} y_j\right\|_B &\leq K\|y_k\|_B + K\left\|\sum_{j=1}^{k-1} y_j\right\|_B \\
&\leq K\|y_k\|_B + K^2\|y_{k-1}\|_B + K^2\left\|\sum_{j=1}^{k-2} y_j\right\|_B \\
&\leq \cdots \leq \sum_{j=1}^{k} K^{k-j+1}\|y_j\|_B \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j)}\|y_j\|_B, \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

donde $\lambda \geq 0$ *es tal que* $K \leq 2^{\lambda}$. *Ahora, para cada* $j \in \mathbb{N}$, *sea* $L_j \in \mathcal{L}(A, B)$ *tal que* $L_1 = 0$ *y* $rg\left(L_j\right) < 2^{j-1}$ *y*

$$\|T - L_j\| \leq 2a_{2^{j-1}}(T) \qquad (5.5)$$

para $j \geq 2$. *Entonces, para cada* j, *es*

$$rg\left(L_{j+1} - L_j\right) < 2^j + 2^{j-1} < 2^{j+1}.$$

Además, se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|L_{j+1} - L_j\| &\leq K\left(\|L_{j+1} - T\| + \|T - L_j\|\right) \\
&\leq 2K\left(a_{2^j}(T) + a_{2^{j-1}}(T)\right) \\
&\leq 4Ka_{2^{j-1}}(T) = c_1 a_{2^{j-1}}(T)
\end{aligned}
$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. *Sea ahora, para cada* j, $m_j = \mu 2^j(k-j)$ *para un* $\mu > 0$ *que determinaremos más adelante. Entonces,*

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} m_j &= \sum_{j=1}^{k-1} m_j = \mu\sum_{j=1}^{k-1} 2^j(k-j) = \mu 2^k \sum_{j=1}^{k-1} 2^{-(k-j)}(k-j) \\
&\leq \mu 2^k c_2.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
T &= T + L_1 + (L_2 - L_1) + (L_3 - L_2) + \cdots (L_k - L_{k+1}) - L_k \\
&= T - L_k + \sum_{j=1}^{k-1}\left(L_{j+1} - L_j\right).
\end{aligned}
$$

Así, para todo $x \in U_A$ y para $y_j \in B$, $j = 1, 2, ..., k-1$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\| Tx - \sum_{j=1}^{k-1} y_j \right\|_B &= \left\| (T - L_k)\, x + \sum_{j=1}^{k-1} \left[(L_{j+1} - L_j)\, x - y_j \right] \right\|_B \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} 2^{\lambda(k+1-j)} \left\| (L_{j+1} - L_j)\, x - y_j \right\|_B \\
&\quad + 2^{\lambda(k+1-k)} \left\| (T - L_k)\, x \right\|_B \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} 2^{\lambda(k+1-j)} \left\| (L_{j+1} - L_j)\, x - y_j \right\|_B \\
&\quad + 2^{\lambda} \cdot 2a_{2^{k-1}}(T) \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} 2^{\lambda(k+1-j)} \left\| (L_{j+1} - L_j)\, x - y_j \right\|_B \\
&\quad + 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T),
\end{aligned}$$

donde, en la segunda línea hemos aplicado (5.4) *y, en la cuarta,* (5.5)*. Hemos obtenido, pues, que*

$$\left\| Tx - \sum_{j=1}^{k-1} y_j \right\|_B \leq \sum_{j=1}^{k-1} 2^{\lambda(k+1-j)} \left\| (L_{j+1} - L_j)\, x - y_j \right\|_B + 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T) \tag{5.6}$$

Ahora, para $j \in \{1, 2, ..., k-1\}$, sea

$$\varepsilon_{m_j} = \operatorname{ínf} \left\{ \varepsilon > 0 : \exists 2^{m_j-1} \textit{bolas de radio } \varepsilon \textit{ que cubren } \operatorname{Im}(L_{j+1} - L_j) \cap U_B \right\}.$$

Aplicando la Proposición 73 con los cambios adecuados, podemos hallar unos valores $c_3, c_4 > 0$ tales que

$$\varepsilon_{m_j} \leq c_3 2^{-c_4 m_j / 2^j} = c_3 2^{-c_4 \mu (k-j)}.$$

Además, dado $\varepsilon > 0$, para $j \in \{1, 2, ..., k-1\}$, existen $y_1^j, y_2^j, ..., y_{2^{m_j-1}}^j$ tales que

$$\begin{aligned}
(L_{j+1} - L_j)(U_A) &\subset \bigcup_{n=1}^{2^{m_j-1}} \left(y_n^j + \left(\| L_{j+1} - L_j \| \, \varepsilon_{m_j} + \varepsilon \right) U_B \right) \\
&\subset \bigcup_{n=1}^{2^{m_j-1}} \left(y_n^j + \left(c_1 a_{2^{j-1}}(T)\, c_3 2^{-c_4 \mu (k-j)} + \varepsilon \right) U_B \right),
\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{n=1}^{2^{m_j-1}} \left\| (L_{j+1} - L_j)\, x - y_n^j \right\|_B \leq c_1 a_{2^{j-1}}(T)\, c_3 2^{-c_4 \mu (k-j)} + \varepsilon.$$

Así, si tomamos $\left\{y_1^j, y_2^j, ..., y_{2^{m_j-1}}^j : j = 1, 2, ..., k-1\right\}$, *tenemos*

$$\sum_{j=1}^{k-1} (m_j - 1) = \left(\sum_{j=1}^{k-1} m_j\right) - (k-1) \leq \mu c_2 2^k - 1$$

centros. Para estos vectores, la desigualdad (5.6) *se sigue teniendo, luego*

$$\begin{aligned}
e_{\mu c_2 2^k}(T) &\leq \left\| Tx - \sum_{j=1}^{k-1} \left(\sum_{n=1}^{2^{m_j-1}} y_n^j \right) \right\|_B \\
&\leq 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T) + \sum_{j=1}^{k-1} 2^{\lambda(k+1-j)} \sum_{n=1}^{2^{m_j-1}} \left\| (L_{j+1} - L_j) x - y_n^j \right\|_B \\
&\leq 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T) + c_1 c_3 \sum_{j=1}^{k-1} \left(2^{\lambda(k+1-j)} a_{2^{j-1}}(T) 2^{-c_4 \mu (k-j)} + \varepsilon \right),
\end{aligned}$$

de donde

$$e_{\mu c_2 2^k}(T) \leq 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T) + c_1 c_3 \sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j)} a_{2^{j-1}}(T) 2^{-c_4 \mu (k-j)},$$

para todo μ.

1. *Ya estamos en condiciones de probar 1. Por hipótesis,*

   $$a_{2^{j-1}}(T) \leq c a_{2^j}(T)$$

   para todo $j \in \mathbb{N}$, *es decir,*

   $$a_1(T) \leq c a_2(T) \leq \cdots \leq c^{j-1} a_{2^j}(T) \leq \cdots \leq c^{k-1} a_{2^{k-1}}(T).$$

   Sea κ *tal que* $c \leq 2^\kappa$. *Entonces, para todo* $j = 1, 2, ..., k$, *se tiene*

   $$c^{j-1} a_{2^j}(T) \leq c^{k-1} a_{2^{k-1}}(T),$$

   de donde

   $$a_{2^j}(T) \leq c^{k-j} a_{2^{k-1}}(T) \leq 2^{\kappa(k-j)} a_{2^{k-1}}(T). \tag{5.7}$$

   Así, por lo anterior,

   $$\begin{aligned}
   e_{\mu c_2 2^k}(T) &\leq 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T) + c_1 c_3 \sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j)} a_{2^{j-1}}(T) 2^{-c_4 \mu (k-j)} \\
   &\leq a_{2^{k-1}}(T) \left[2^{\lambda+1} + c_1 c_3 \sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j) - c_4 \mu (k-j) + \kappa (k-j)} \right].
   \end{aligned}$$

Si escogemos μ lo suficientemente grande como para que la serie

$$\sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j)-c_4\mu(k-j)+\kappa(k-j)}$$

sea convergente y hacemos $C = \mu c_2$, tendremos que

$$e_{C2^k}(T) \leq c' a_{2^{k-1}}(T).$$

Podemos asumir que $C = 2^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ (en otro caso, elegimos μ más grande). Entonces,

$$e_{2^{k+n}}(T) \leq c' a_{2^{k-1}}(T) \leq c' c^{n+1} a_{2^{k+n}}(T),$$

de donde

$$e_{2^{k+n}}(T) \leq c'' a_{2^{k+n}}(T)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Sea $j \in \mathbb{N}$. Entonces,

- *Si $j \geq 2^n$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k+n} \leq j < 2^{k+n+1}$, de donde*

$$e_j(T) \leq e_{2^{k+n}}(T) \leq c'' a_{2^{k+n}}(T) \leq c'' c a_{2^{k+n+1}} \leq c'' c a_j(T).$$

- *Si $j < 2^n$, entonces, para todo $i = 1, 2, ..., 2^n - 1$, existe c_i tal que $e_i(T) \leq c_i a_i(T)$. Sea*

$$c''' = \max\{c_i : i = 1, 2, ..., 2^n - 1\}.$$

Entonces, $e_i(T) \leq c''' a_i(T)$ para todo $i = 1, 2, ..., 2^n - 1$.

Haciendo $C = \max\{c'' c, c'''\}$, obtenemos que

$$e_j(T) \leq C a_j(T)$$

para todo $j \in \mathbb{N}$.

2. Sea

$$b = \sup\left\{f(j) a_j(T) : j = 1, 2, ..., 2^{k+n}\right\}.$$

Entonces,

$$a_j(T) \leq \frac{b}{f(j)}$$

para todo $j = 1, 2, ..., 2^{k+n}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} e_{\mu c_2 2^k}(T) &\leq 2^{\lambda+1} a_{2^{k-1}}(T) + c_1 c_3 \sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j)} a_{2^{j-1}}(T) 2^{-c_4\mu(k-j)} \\ &\leq 2^{\lambda+1} \frac{b}{f(2^{k-1})} + c_1 c_3 \sum_{j=1}^{k} 2^{\lambda(k+1-j)} \frac{b}{f(2^{j-1})} 2^{-c_4\mu(k-j)}. \end{aligned}$$

Con un razonamiento totalmente análogo al anterior, obtenemos que

$$e_{2^{k+n}}(T) \leq \frac{cb}{f\left(2^{k+n}\right)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, y que

$$e_j(T) \leq \frac{cb}{f(j)}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\sup_{1 \leq j \leq n} f(j)\, e_j(T) \leq C \sup_{1 \leq j \leq n} f(j)\, a_j(T),$$

como queríamos.

Esto termina la demostración. ■

Si conocemos alguna función que cumpla *2.* del teorema anterior, podemos establecer una relación entre los números de entropía y los de aproximación de un operador. Por ejemplo,

$$f_1(j) = j^\rho,$$

para $\rho > 0$, es una función creciente, y se tiene que

$$f_1\left(2^j\right) = 2^{j\rho},\ f_1\left(2^{j-1}\right) = 2^{\rho(j-1)},$$

y, como $2^{j\rho} = 2^\rho 2^{\rho(j-1)}$,

$$f_1\left(2^j\right) \leq 2^\rho f_1\left(2^{j-1}\right).$$

Por tanto, f_1 cumple las hipótesis de *2.*, y así, podemos afirmar que

$$\sup_{1 \leq j \leq n} j^\rho e_j(T) \leq C \sup_{1 \leq j \leq n} j^\rho a_j(T)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Análogamente, se puede probar que la función

$$f_2(j) = (\log(j+1))^\rho$$

cumple las hipótesis de *2.* para todo $\rho > 0$, y, por tanto,

$$\sup_{1 \leq j \leq n} (\log(j+1))^\rho\, e_j(T) \leq C \sup_{1 \leq j \leq n} (\log(j+1))^\rho\, a_j(T)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Otros resultados sobre relaciones entre $(a_n(T))$ y $(e_n(T))$ se pueden ver en [5], capítulo 3.

5.3. Relaciones entre estos números y los autovalores

Ya conocemos algunas relaciones entre los números de aproximación de un operador y sus autovalores cuando el espacio es de Hilbert y el operador es compacto. En esta sección mencionaremos alguna más para operadores entre espacios cuasi-Banach y números de entropía.

Si $T \in \mathcal{L}(A)$ es un operador compacto en un espacio cuasi-Banach A, sabemos que su espectro (salvo quizás el 0) contiene autovalores de multiplicidad algebraica finita. Podemos entonces reordenar sus autovalores como al final de la Sección 2.1.

Teorema 77 *En las condiciones anteriores, se tiene que*

$$\left(\prod_{m=1}^{k} |\lambda_m(T)|\right)^{1/k} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} 2^{n/2k} e_n(T)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. *Si $T \equiv 0$, el resultado es obvio. En otro caso, sea λ un autovalor no nulo de T y sea $a \in A$ un autovector asociado, con $(T-\lambda I)^{k-1} a \neq 0$ y $(T-\lambda I)^k a = 0$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, si $a_j = (T-\lambda I)^{j-1} a$ para $j = 1, 2, ..., k$, se tiene que el sistema $\{a_j : j = 1, 2, ..., k\}$ es linealmente independiente: si*

$$0 = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k a_k = \alpha_1 a + \alpha_2 (T-\lambda I) a \cdots + \alpha_k (T-\lambda I)^{k-1} a,$$

entonces

$$0 = (T-\lambda I)^{k-1} 0 = \alpha_1 (T-\lambda I)^{k-1} a,$$

de donde $\alpha_1 = 0$. Repitiendo el argumento con $\alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$, obtenemos $\alpha_2 = 0$, y si volvemos a repetirlo, tendremos $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$. Además, como $\lambda \neq 0$, si $\Lambda = span\{a_1, ..., a_k\}$, entonces $T\Lambda = \Lambda$.

Para $j = 1, 2, ..., k-1$, es

$$a_{j+1} = (T-\lambda I)^j a = (T-\lambda I) a_j,$$

de donde

$$Ta_j = a_{j+1} + \lambda a_j,$$

para $j = 1, 2, ..., k-1$, y $Ta_k = \lambda a_k$.

Ahora, sea $a_0 \in \Lambda$, $a_0 = \sum_{j=1}^{k} \rho_j a_j$. *Entonces,*

$$\begin{aligned} Ta_0 &= \sum_{j=1}^{k} \rho_j T a_j = \sum_{j=1}^{k-1} \rho_j \left(a_{j+1} + \lambda a_j\right) + \lambda \rho_k a_k \\ &= \sum_{j=2}^{k} \rho_{j-1} a_j + \lambda \sum_{j=2}^{k} \rho_j a_j \\ &= \lambda \rho_1 a_1 + \sum_{j=2}^{k} \left(\rho_{j-1} + \lambda \rho_j\right) a_j. \end{aligned}$$

Así, si Π *es la matriz asociada a* $T|_{\Lambda}$, *entonces*

$$\Pi = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ 1 & \lambda & & & 0 & \\ & 1 & \lambda & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \lambda & \\ & & & & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Si identificamos Λ *con* $\mathbb{R}^{2k}$ *y descomponemos* λ *y los* ρ_j *en sus partes reales e imaginarias, la matriz* Π^* *queda*

$$\Pi^* = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}\lambda & -\operatorname{Im}\lambda & & & & & & & & \\ \operatorname{Im}\lambda & \operatorname{Re}\lambda & & & & & & & & \\ 1 & 0 & \operatorname{Re}\lambda & -\operatorname{Im}\lambda & & & & 0 & & \\ 0 & 1 & \operatorname{Im}\lambda & \operatorname{Re}\lambda & & & & & & \\ & & 1 & 0 & \ddots & & & & & \\ & & 0 & 1 & & \ddots & & & & \\ & & & & \ddots & & \operatorname{Re}\lambda & -\operatorname{Im}\lambda & & \\ & & & & & \ddots & \operatorname{Im}\lambda & \operatorname{Re}\lambda & & \\ & 0 & & & & & 1 & 0 & \operatorname{Re}\lambda & -\operatorname{Im}\lambda \\ & & & & & & 0 & 1 & \operatorname{Im}\lambda & \operatorname{Re}\lambda \end{pmatrix}.$$

Sea $M \subset \Lambda$, *con* Λ *visto como* $\mathbb{R}^{2k}$ *con la medida de Lebesgue. Entonces,*

$$vol\left(T\left(M\right)\right) = \left|\lambda\right|^{2k} vol\left(M\right).$$

Si repetimos el argumento con $\left|\lambda_1\left(T\right)\right| \geq \left|\lambda_2\left(T\right)\right| \geq \cdots \geq \left|\lambda_k\left(T\right)\right| > 0$, *obtenemos una matriz por bloques donde cada bloque es como* Π^*. *Así, si* Λ *es el subespacio generado por los autovectores asociados a* $\lambda_1, ..., \lambda_k$ *visto como espacio vectorial real y* $M \subset \Lambda$, *entonces*

$$vol\left(T\left(M\right)\right) = \left(\prod_{j=1}^{k} \left|\lambda_j\left(T\right)\right|\right)^2 vol\left(M\right). \tag{5.8}$$

Además, $T(\Lambda) = \Lambda$.

Supongamos que $T(U_A)$ *está cubierto por* 2^{n-1} *bolas de radio* $(1+\varepsilon)\, e_n(T)$ *para algún* $\varepsilon > 0$. *Sea* B *una de ellas con* $B \cap \Lambda \neq \varnothing$. *Sea* $a \in B \cap \Lambda$. *Entonces, para todo* $x \in B$, *se tiene*

$$\|x-a\| \leq K\left[\|a-c_B\| + \|x-c_B\|\right] \leq 2K(1+\varepsilon)\, e_n(T),$$

donde c_B *es el centro de* B. *Sea* $c_\varepsilon = 2K(1+\varepsilon)$. *Entonces, por* (5.8), *se tiene que*

$$vol\left(T\left(U_A \cap \Lambda\right)\right) = vol\left(T\left(U_A\right) \cap \Lambda\right) = \left(\prod_{j=1}^{k} \left|\lambda_j(T)\right|\right)^2 vol\left(U_A \cap \Lambda\right),$$

y, por otro lado,

$$vol\left(T\left(U_A \cap \Lambda\right)\right) \leq 2^{n-1} c_\varepsilon^{2k} e_n^{2k}(T)\, vol\left(U_A \cap \Lambda\right),$$

luego

$$\left(\prod_{j=1}^{k} \left|\lambda_j(T)\right|\right)^{1/k} \leq 2^{(n-1)/2k} c_\varepsilon e_n(T) \leq 2^{n/2k} c_\varepsilon e_n(T). \tag{5.9}$$

Vamos a aplicar (5.9) *al operador* T^m. *Para ello, observemos que, para todo* $m \in \mathbb{N}$, *es* $\lambda_j(T^m) = \lambda_j^m(T)$. *Además,* $e_{mn}(T^m) \leq e_n^m(T)$ *para todo* $m, n \in \mathbb{N}$: *vamos a probarlo por inducción. Es claro que el resultado se tiene para* $m = 1$ *y todo* $n \in \mathbb{N}$. *Por otro lado, si* $e_{(m-1)n}(T^{m-1}) \leq e_n^{m-1}(T)$, *entonces*

$$e_{mn}(T^m) = e_{mn}\left(T \circ T^{m-1}\right).$$

Como $mn = (mn+1) - 1$ *y* $mn + 1 = (m-1)\,n + n + 1$, *podemos usar el Lema 70, y obtenemos*

$$\begin{aligned} e_{mn}(T^m) &\leq e_{n+1}(T)\, e_{(m-1)n}\left(T^{m-1}\right) \leq e_{n+1}(T)\, e_n^{m-1}(T) \\ &\leq e_n(T)\, e_n^{m-1}(T) = e_n^m(T). \end{aligned}$$

Así, por (5.9),

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^{k} \left|\lambda_j(T^m)\right|\right)^{1/k} &= \left(\prod_{j=1}^{k} \left|\lambda_j(T)\right|\right)^{m/k} \leq 2^{mn/2k} c_\varepsilon e_{mn}(T^m) \\ &\leq 2^{mn/2k} c_\varepsilon e_n^m(T). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left(\prod_{j=1}^{k} \left|\lambda_j(T)\right|\right)^{1/k} \leq 2^{n/2k} c_\varepsilon^{1/m} e_n(T)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Haciendo tender m a ∞,

$$\left(\prod_{j=1}^{k} |\lambda_j (T)|\right)^{1/k} \leq 2^{n/2k} e_n (T) .$$

Como esto se tiene para todo $n \in \mathbb{N}$, deducimos que

$$\left(\prod_{j=1}^{k} |\lambda_j (T)|\right)^{1/k} \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} 2^{n/2k} e_n (T) ,$$

como queríamos. ■

Corolario 78 *Para todo $k \in \mathbb{N}$,*

$$|\lambda_k (T)| \leq \sqrt{2} e_k (T) .$$

Demostración. *Hacemos $k = n$ en el teorema:*

$$\left(\prod_{j=1}^{k} |\lambda_j (T)|\right)^{1/k} \leq \inf_{k\in\mathbb{N}} 2^{1/2} e_k (T) \leq \sqrt{2} e_k (T) .$$

Ahora, $|\lambda_1 (T)| \geq |\lambda_2 (T)| \geq \cdots \geq |\lambda_k (T)|$, luego

$$\left(\prod_{j=1}^{k} |\lambda_k (T)|\right)^{1/k} = |\lambda_k (T)| \leq \left(\prod_{j=1}^{k} |\lambda_j (T)|\right)^{1/k} ,$$

de donde

$$|\lambda_k (T)| \leq \sqrt{2} e_k (T) ,$$

como queríamos. ■

Con este corolario podemos probar la siguiente proposición:

Proposición 79 *Sea $T \in \mathcal{K}(A)$, con A un espacio de Banach. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$\lim_{k\to\infty} \left[e_n \left(T^k\right)\right]^{1/k} = r (T) ,$$

donde $r (T)$ es el radio espectral de T.
Demostración. *Sabemos que $e_n (T) \leq \|T\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego*

$$\overline{\lim_{k}} \left[e_n \left(T^k\right)\right]^{1/k} \leq \lim_{k} \left\|T^k\right\|^{1/k} = r (T) .$$

Por otro lado, del teorema, haciendo $k = 1$, obtenemos

$$|\lambda_1 (T)| \leq \left(\sqrt{2}\right)^m e_m (T)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Así, para todo $k \in \mathbb{N}$, se tiene

$$|\lambda_1(T)|^k = \left|\lambda_1\left(T^k\right)\right| \leq \left(\sqrt{2}\right)^m e_m\left(T^k\right),$$

de donde

$$|\lambda_1(T)| \leq \left(\sqrt{2}\right)^{m/k}\left[e_m\left(T^k\right)\right]^{1/k}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pero entonces

$$|\lambda_1(T)| \leq \underline{\text{lím}}_k \left(\sqrt{2}\right)^{m/k}\left[e_m\left(T^k\right)\right]^{1/k} = \underline{\text{lím}}_k \left[e_m\left(T^k\right)\right]^{1/k}.$$

Como $r(T) \leq |\lambda_1(T)|$, hemos terminado. ■

Existe un resultado, llamado fórmula del radio espectral de Gelfand, que relaciona el radio espectral de un operador en un espacio de Banach con su norma, y que, en cierto modo, es similar a la proposición que acabamos de probar:

Teorema 80 *Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in \mathcal{L}(X)$. Entonces,*

$$r(T) = \lim_{k\to\infty} \left\|T^k\right\|^{1/k}.$$

También se puede probar un resultado similar a la Proposición 79 para números de aproximación: para todo $n \in \mathbb{N}$, es

$$|\lambda_n(T)| = \lim_k a_n^{1/k}\left(T^k\right).$$

También es cierto que, para todo $N \in \mathbb{N}$ y todo $p \in (0, \infty)$,

$$\left(\sum_{k=1}^{N} |\lambda_k(T)|^p\right)^{1/p} \leq K_p \left(\sum_{k=1}^{N} a_k^p(T)\right)^{1/p},$$

donde K_p depende de p.

5.4. Números de entropía e interpolación

En esta última sección, vamos a comprobar qué sucede con los números de entropía de un operador cuando interpolamos.

Consideramos dos espacios cuasi-Banach A_0, A_1 inyectados continuamente en algún otro espacio cuasi-Banach A. Decimos entonces que $\{A_0, A_1\}$ es un par compatible de espacios cuasi-Banach. Recordemos que el K-funcional de Peetre se define de la siguiente forma (ver Definición 47):

$$K(t,a) = K(t,a;A_0,A_1) = \inf\left\{\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1} : a = a_0 + a_1, a_0 \in A_0, a_1 \in A_1\right\},$$

donde $a \in A_0 + A_1$ y $t \in (0, \infty)$.

En esta sección, para evitar confusiones, pondremos $e_k(T : A \to B)$ para indicar el k-ésimo número de entropía de $T \in \mathcal{L}(A, B)$.

Teorema 81 *1. Sea A un espacio cuasi-Banach y sea $\{B_0, B_1\}$ un par compatible de espacios p-Banach. Consideramos $0 < \theta < 1$, y sea B_θ un espacio cuasi-Banach tal que*

$$B_0 \cap B_1 \subset B_\theta \subset B_0 + B_1 \text{ y } \|b\|_{B_\theta} \leq \|b\|_{B_0}^{1-\theta} \|b\|_{B_1}^{\theta}$$

para todo $b \in B_0 \cap B_1$. Sea también $T \in \mathcal{L}(A, B_0 \cap B_1)$, donde en $B_0 \cap B_1$ hemos considerado la cuasi-norma $\max\left\{\|b\|_{B_0}, \|b\|_{B_1}\right\}$. Entonces, cualesquiera que sean $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$, se tiene

$$e_{k_0+k_1-1}(T : A \to B_\theta) \leq 2^{1/p} e_{k_0}^{1-\theta}(T : A \to B_0)\, e_{k_1}^{\theta}(T : A \to B_1).$$

2. Sea $\{A_0, A_1\}$ un par compatible de espacios cuasi-Banach. Sea $0 < \theta < 1$ y sea A un espacio cuasi-Banach tal que $A \subset A_0 + A_1$ y además se tenga $t^{-\theta} K(t, a) \leq \|a\|_A$ para todo $a \in A$ y para todo $t \in (0, \infty)$. Consideramos un operador $T : A_0 + A_1 \longrightarrow B$ lineal tal que $T|_{A_0}$ y $T|_{A_1}$ son continuos. Entonces, $T|_A$ es continuo y, para todo $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$, es

$$e_{k_0+k_1-1}(T : A \to B) \leq 2^{1/p} e_{k_0}^{1-\theta}(T : A_0 \to B)\, e_{k_1}^{\theta}(T : A_1 \to B).$$

Demostración.

1. *Sea $\varepsilon > 0$. Trabajamos, en primer lugar, con el operador T visto como $T : A \longrightarrow B_0$. El conjunto $T(U_A)$ se puede recubrir con 2^{k_0-1} bolas $K_j \subset B_0$ de radio $(1+\varepsilon)\, e_{k_0}(T : A \to B_0)$. Ahora, tomando la restricción $T : A \longrightarrow B_1$, recubrimos cada $K_j \cap T(U_A)$ con 2^{k_1-1} bolas de radio $(1+\varepsilon)\, 2^{1/p} e_{k_1}(T : A \to B_1)$ con centros en $K_j \cap T(U_A)$. Esto último es posible: recubrimos cada $K_j \cap T(U_A)$ con 2^{k_1-1} bolas de radio $r = (1+\varepsilon)\, e_{k_1}(T : A \to B_1)$. Sea C_i una de dichas bolas, y supongamos que su centro $c \notin K_j \cap T(U_A)$. Sea $x \in K_j \cap T(U_A) \cap C_i$. Entonces, para todo $y \in C_i$, se tiene que*

$$\|x - y\|_{B_1}^p \leq \|x - c\|_{B_1}^p + \|c - y\|_{B_1}^p \leq 2r^p,$$

luego $C_i \subset x + 2^{1/p} r U_{B_1}$, y esta última bola tiene centro en $K_j \cap T(U_A)$. Trabajamos, entonces, con $2^{k_0-1} 2^{k_1-1} = 2^{k_0+k_1-2}$ centros b_l.

Ahora, para toda $a \in U_A$, existe un centro b_l tal que

$$\|Ta - b_l\|_{B_1}^p \leq 2(1+\varepsilon)^p e_{k_1}^p(T : A \to B_1)$$

y además, si c_{K_l} es el centro de K_l,

$$\begin{aligned} \|Ta - b_l\|_{B_0}^p &\leq \|Ta - c_{K_l}\|_{B_0}^p + \|c_{K_l} - b_l\|_{B_0}^p \\ &\leq 2(1+\varepsilon)^p e_{k_0}^p(T : A \to B_0), \end{aligned}$$

de donde

$$\|Ta - b_l\|_{B_i} \leq 2^{1/p}(1+\varepsilon)\, e_{k_i}(T : A \to B_i)$$

para $i = 0, 1$. *Por otro lado,*

$$\begin{aligned} \|Ta - b_l\|_{B_\theta} &\leq \|Ta - b_l\|_{B_0}^{1-\theta} \|Ta - b_l\|_{B_1}^{\theta} \\ &\leq 2^{1/p} (1+\varepsilon) e_{k_0}^{1-\theta} (T : A \to B_0) e_{k_1}^{\theta} (T : A \to B_1). \end{aligned}$$

Sea $\Gamma_0 = 2^{1/p} (1+\varepsilon) e_{k_0}^{1-\theta} (T : A \to B_0) e_{k_1}^{\theta} (T : A \to B_1)$. *Entonces,* T, *visto como operador de* A *en* B_θ, *satisface que*

$$T(U_A) \subset \bigcup_{l=1}^{2^{k_0+k_1-1}} (b_l + \Gamma_0 U_{B_\theta}),$$

de donde

$$e_{k_0+k_1-1} (T : A \to B_\theta) \leq 2^{1/p} (1+\varepsilon) e_{k_0}^{1-\theta} (T : A \to B_0) e_{k_1}^{\theta} (T : A \to B_1)$$

para todo $\varepsilon > 0$, *y así, haciendo tender* ε *a* 0,

$$e_{k_0+k_1-1} (T : A \to B_\theta) \leq 2^{1/p} e_{k_0}^{1-\theta} (T : A \to B_0) e_{k_1}^{\theta} (T : A \to B_1),$$

como queríamos.

2. *Sean* $a \in U_A$, $\varepsilon, t > 0$; *elegimos* $a_0 \in A_0$ *y* $a_1 \in A_1$ *tales que* $a = a_0 + a_1$ *y*

$$\begin{aligned} \|a_0\|_{A_0} + t \|a_1\|_{A_1} &\leq (1+\varepsilon) K(t,a) \leq t^{\theta} \|a\|_A (1+\varepsilon) \\ &\leq t^{\theta} (1+\varepsilon). \end{aligned}$$

De aquí deducimos que deben ser

$$\|a_0\|_{A_0} \leq t^{\theta} (1+\varepsilon), \ \|a_1\|_{A_1} \leq t^{\theta-1} (1+\varepsilon).$$

Hacemos ahora $t = e_{k_1} (T : A_1 \to B) e_{k_0}^{-1} (T : A_0 \to B)$, *y recubrimos el conjunto* $(1+\varepsilon) t^{\theta} T(U_{A_0})$ *con* 2^{k_0-1} *bolas centradas en* $b_l \in B$ *y de radio*

$$(1+\varepsilon)^2 t^{\theta} e_{k_0} (T : A_0 \to B) = (1+\varepsilon)^2 e_{k_1}^{\theta} (T : A_1 \to B) e_{k_0}^{1-\theta} (T : A_0 \to B).$$

Además, recubrimos el conjunto $(1+\varepsilon) t^{\theta-1} T(U_{A_1})$ *con* 2^{k_1-1} *bolas centradas en* $b^m \in B$ *y de radio*

$$(1+\varepsilon)^2 t^{\theta-1} e_{k_1} (T : A_1 \to B) = (1+\varepsilon)^2 t^{\theta} e_{k_0} (T : A_0 \to B).$$

Entonces, para algunos l, m,

$$\begin{aligned} \|Ta - b_l - b^m\|_B^p &\leq \|Ta_0 - b_l\|_B^p + \|Ta_1 - b^m\|_B^p \\ &\leq 2 \left[(1+\varepsilon)^2 e_{k_1}^{\theta} (T : A_1 \to B) e_{k_0}^{1-\theta} (T : A_0 \to B) \right]^p. \end{aligned}$$

Como trabajamos con, como mucho, $2^{k_0-1}2^{k_1-1} = 2^{k_0+k_1-2}$ *centros y esta última desigualdad se verifica para todo* $\varepsilon > 0$*, hacemos tender* ε *a* 0 *y obtenemos que*

$$T\left(U_A\right) \subset \bigcup_{l=1}^{2^{k_0-1}} \bigcup_{m=1}^{2^{k_1-1}} \left(b_l + b^m + rU_B\right),$$

donde $r = 2^{1/p} e_{k_1}^{\theta}\left(T : A_1 \to B\right) e_{k_0}^{1-\theta}\left(T : A_0 \to B\right)$*. De ahí que*

$$e_{k_0+k_1-1}\left(T : A \to B\right) \leq 2^{1/p} e_{k_0}^{1-\theta}\left(T : A_0 \to B\right) e_{k_1}^{\theta}\left(T : A_1 \to B\right),$$

como queríamos.

Con esto terminamos la demostración. ■

Bibliografía

[1] Bergh, J.; Löfström, J., *Interpolation Spaces, an Introduction*, Springer, Berlin, 1976.

[2] Cobos, F., *Banach and function spaces*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces, Kitakyushu, Japan, (2003), 1-15.

[3] Cobos, F.; Janson, S.; Kühn, T., *On the optimal asymptotic eigenvalue behaviour of weakly singular integral operators*, Proc. Amer. Math. Soc., **113**, (1991), 1017-1022.

[4] Cobos, F.; Kühn, T.; *Eigenvalues of weakly singular integral operators*, J. London Math. Soc., (2), **41**, (1990) 323-335.

[5] Cobos, F.; Kühn, T., *Approximation and Entropy numbers in Besov spaces of generalised smoothness*, J. Approx. Theory, **160**, (2009), 56-70.

[6] Cobos, F.; Kühn, T.; Peetre, J., *Schatten-von Neumann classes of multilinear forms*, Duke Math. J., **65**, (1992), 121-156.

[7] Edmunds, D. E.; Evans, W. D., *Spectral theory and Differential Operators*, Oxford: Oxford University Press, 1987.

[8] Edmunds, D. E.; Triebel, H., *Function Spaces, Entropy Numbers and Differential Operators*, Cambridge University Press.

[9] Garling, D. J. H., *Inequalities: a Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge.

[10] Gohberg, I. C.; Krein, M. G., *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, A. M. S., Providence, 1969.

[11] König, H., *Some remarks on weakly singular operators*, Int. Equations and Oper. Theory, **3**, (1980), 397-407.

[12] König, H., *Eigenvalue distribution of Compact Operators*, Birkhäuser, Basel, 1986.

[13] König, H.; Retherford, J. R.; Tomazak-Jaegermann, N., *On the eigenvalues of $(p, 2)$-summing operators and constants associated to normed spaces*, J. Funct. Anal., **37**, (1980), 88-126.

[14] Kostomezov, G. P., *Asymptotic behaviour of the spectrum of integral operators with a singularity on the diagonal*, Math. USSR-Sb, **23**, (1974), 417-424.

[15] Limaye, B. V., *Functional analysis*, New Age International Limited, 1996.

[16] Peetre, J., *Paracommutators-brief introduction, open problems*, Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid, **2**, (1989), suppl., 201-211.

[17] Pietsch, A., "Ideals of multilinear functionals (designs of a theory)"in *Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics, Leipzig*, Teubner-Texte Math. **67**, (1984), 185-199.

[18] Pietsch, A., *Eigenvalues and s-numbers*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[19] Simon, B., *Trace Ideals and their Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979.

[20] Triebel, H., *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North Holland, Amsterdam, 1978.