LA EVALUACIÓN PÚBLICA DE GRANDES PROYECTOS: TEORIA Y PRÁCTICA

1ª.Parte.-Desigualdades variacionales, complementariedad y programación binivel. Aplicaciones a la economía de la energía y del medio ambiente

Universidad Complutense de Madrid, 4-5 de julio de 2013

-Depto. De Fundamentos del Análisis Económico

-Depto. De Estadística e Investigación Operativa

-Depto. de Economía Financiera y Contabilidad

Con la colaboración de la Asociación Hispano-Portuguesa de Economía de los Recursos Naturales y Ambientales

Josep Maria VEGARA-CARRIÓ[1]

1.-INTRODUCCIÓN

Después de explorar un conjunto de temas básicos de la economía del cambio climático en una obra colectiva publicada en 2009[2], me pareció conveniente recuperar una línea de investigación centrada en la evaluación pública de grandes proyectos [3]. De aquí surgió el trabajo que se halla en la base de esta Parte del Seminario.

Esta Primera Parte del Seminario presenta inicialmente las particularidades de la evaluación de proyectos marginales para, seguidamente, exponer las metodologías utilizadas en una primera etapa para resolver el tema de la no-marginalidad. Hasta los años 80s, los métodos analizados tendían a interpretarse como procedimientos de

[1] *Profesor emérito. UNIVERSITAT AUTÒNOMA de BARCELONA. Unidad de Fundamentos del Análisis Económico, Departamento de Economia e Historia Económica.*

Correo electrónico: josepmaria.vegara@uab.com

[2] VEGARA J.Ma. (director), BUSOM I., COLLDEFORNS M., GUERRA A.I., SANCHO F.(2009) *El cambio climático: análisis y política económica. Una introducción*, Servicio de Estudios, La Caixa, Barcelona.

[3] VEGARA J.M. (1987) *Evaluación pública de grandes proyectos de inversión por integración en modelos macroeconómicos*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid

planificación, centralizada o no; esta afirmación resulta especialmente cierta en los casos de los algoritmos de Dantzig y Wolfe y en el de Benders.

Dicha tendencia deriva -muy probablemente- de la proximidad de los orígenes de la programación matemática con su interpretación económica, lo cual no ocurre en el caso de las nuevas metodologías.

Las nuevas metodologías expuestas son las desigualdades variacionales, la programación a dos niveles o binivel y la complementariedad lineal o no lineal. Se presentan con cierto detalle algunas aplicaciones al campo objeto de estudio.

Las nuevas metodologías permiten tratar casos mucho más complejos que los tradicionales pues pueden incluir la reacción de los agentes de un segundo nivel a las políticas fijadas por un primer nivel jerárquico o bien la existencia de varios centros de decisión en un entorno de restricciones comunes que pueden representar funciones de demanda conjunta para todos ellos o bien restricciones relativas a las emisiones también conjuntas

El guión de mi intervención es el siguiente:

2.-EVALUACIÓN DE PROYECTOS MARGINALES

Supongamos que se pretende evaluar un gran proyecto de inversión consistente en una planta siderúrgica en una economía de tamaño medio.

El punto de partida lo constituye una configuración dada de precios, cantidades, rentas, etc. en la economía. La eventual adopción de alguna de las variantes de inversión disponibles para la siderurgia modificaría la indicada configuración vigente. En estas condiciones ¿qué sentido tiene utilizar para realizar la evaluación la configuración inicial? Caso de no ser así ¿cómo proceder?

Para discutir esta cuestión básica supondremos que se dispone de un modelo de la economía en el que proceder a integrar un modelo de la siderurgia que permita evaluar las diversas alternativas de diseño de la misma. Concretamente, consideraremos que el modelo de la economía es un modelo de optimización multisectorial y multiperíodo y que representa la economía global en la que se integra el proyecto [4].

Las condiciones de K-K-T juegan, obviamente, un papel crucial en todos los temas planteados en el curso. Sin ánimo de ofender conviene recordarlas:

[4] Del tipo del modelo correspondiente a México, contenido en GOREUX L.M., MANNE A. (1973) *Multilevel Plannning: Case Studies in Mexico*, North Holland Pu.Co Amsterdam, London, o bien el relativo a economía española de SEBASTIÁN C. (1976) *El crecimiento económico español 1974-1984: proyecciones mediante un modelo multisectorial de optimización*, Fundación del INI, Programa de Investigaciones Económicas, Madrid

Las condiciones de Kuhn y Tucker son las condiciones necesarias del óptimo correspondientes a la programación matemática. Sea el problema de programación definido por hallar $\mathbf{x}$ tal que:

$$\text{Mín } z = f(\mathbf{x}) \tag{5.8}$$

$$a_i(\mathbf{x}) \geq 0; \qquad i = 1, 2, \ldots, m \tag{5.9}$$

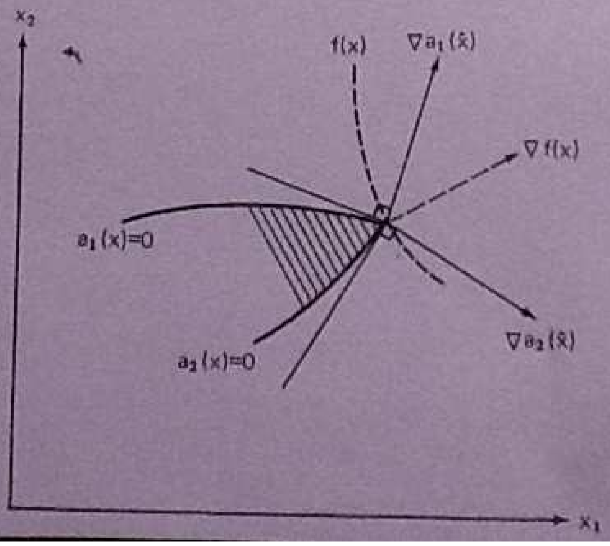
en donde $f(\mathbf{x})$ y las diversas $a_i(\mathbf{x})$ son derivables y cumplen las llamadas condiciones de calificación de las restricciones[3].

Las condiciones necesarias para que $\hat{\mathbf{x}}$ —que cumple (5.9)— sea una solución óptima de $f(\mathbf{x})$ es que existan unas variables duales u_i tales que[4]:

$$\begin{cases} u_i \geq 0 & i = 1, 2, \ldots, m \quad (5.10) \\ \dfrac{\partial f(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} u_i \dfrac{\partial a_i(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_j} = 0 & j = 1, 2, \ldots, n \quad (5.11) \\ u_i a_i(\hat{\mathbf{x}}) = 0 & i = 1, 2, \ldots, m \quad (5.12) \end{cases}$$

o bien, en notación matricial[5]:

$$\begin{cases} \mathbf{u} \geq 0 \\ \dfrac{\partial f(\hat{\mathbf{x}})^{\top}}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{u}^{\top} \dfrac{\partial \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \mathbf{x}} = 0^{\top} \\ \mathbf{u}^{\top} \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = 0. \end{cases}$$



La condiciones de K_K-T tienen una interpretación geométrica sencilla: en el óptimo, el vector gradiente de la función objetivo se expresa como combinación lineal positiva de los gradientes de las restricciones saturadas.

Es un buen procedimiento para recordarlas

2.1.-El modelo de la economía

El problema de la economía -sin el proyecto- consistirá en hallar el m_0-vector x_0^* de variables continuas que cumpla:

$$Max.w = F_0(x_0) \qquad (2.1)$$

$$A_{12}(x_0) \leq b_1 \qquad (2.2)$$

$$x_0 \geq 0 \qquad (2.3)$$

y en donde $A_{12}(.)$ es un un n_1-vector de funciones. El vector x_0 corresponde a las variables de la economía global en cuyo contexto se desea evaluar el proyecto.

Sea $\hat{v}$ el n_1-vector de las variables duales de las restricciones (2.2), es decir, los precios sombra de las restricciones globales (2.2) en el óptimo del modelo.

Supongamos que el impacto del proyecto sobre la economía sea marginal y venga dado por el vector diferencial db. Como es conocido, cuando se modifica el segundo miembro de las restricciones en términos diferenciales, de acuerdo con la interpretación económica de las variables duales, la variación de la función objetivo es igual a. $\hat{v}^T db$.

Así pues, si el "proyecto es marginal respecto a la economía", los precios sombra o de cálculo, vigentes en la economía global permiten evaluar su valoración según la función objetivo central. Como es bien conocido, el criterio de aceptación es:

$$\hat{v}^T \quad b > 0 \; .$$

Este es el enfoque convencional, que trata los proyectos como "perturbaciones infinitesimales" [5]. DRÈZE J. STERN N. (1987) analizan éstas en un marco que integra asimismo las "políticas".

2.2.-El modelo del proyecto

Seguidamente identificaremos las variables adicionales propias del proyecto así como las restricciones específicas del mismo. El conjunto define pues las diversas alternativas relativas al diseño de un proyecto a evaluar en el contexto global.

Sea x_1 el m_1-vector de las variables continuas específicas del proyecto 1 y sometidas a las n_2 restricciones propias del mismo:

[5] DRÈZE J., STERN, N. (1987) The Theory of Cost-Benefit Analysis, in AUERBACH.A.J., FELDSTEIN M. (1987), Vol.II

$$A_{21}(x_1) \leq b_2 \qquad (2.4)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (2.5)$$

Ahora bien, la necesidad de la evaluación pública del proyecto surge de la existencia de impactos del proyecto sobre la economía global, como sería el caso de sus aportaciones a la demanda o bien el empleo de recursos de la economía. Como consecuencia de ello, es preciso incorporar dichos impactos del proyecto sobre la economía que se hallan expresados mediante $A_{11}(x_1)$.

2.3-<u>La evaluación centralizada de proyectos</u>

A partir de lo previamente indicado podemos formular el problema de la economía global con el proyecto 1 incorporado y en el que, para simplificar, supondremos que en la función objetivo sólo figuran las variables de la economía. El modelo integrado será pues:

$$Max.w = F_0(x_0) \qquad (2.6)$$

$$A_{11}(x_1) + A_{12}(x_0) \leq b_1 \qquad (2.7)$$

$$A_{21}(x_1) \qquad \leq b_2 \qquad (2.8)$$

$$x_1, x_0 \geq 0 \qquad (2.9)$$

en donde x_0 y x_1 son los vectores ya definidos. Las restricciones (2.7) son las específicas del modelo global y en ellas el vector de funciones $A_{11}(x_1)$ expresa el impacto del proyecto sobre la economía global; por otra parte, las restricciones (2.8) son las específicas del proyecto.

El modelo anterior corresponde pues a una evaluación centralizada del proyecto el cual se halla incorporado en el modelo global..

2.4.-<u>La evaluación descentralizada de proyectos</u>

De (2.6)-(2.9) se puede derivar el siguiente modelo en el que figuran únicamente las variables x_1, específicas del proyecto:

$$Max\ \mathrm{w}_1 = -\hat{v}^T A_{11}(x_1) \qquad (2.10)$$

$$A_{21}(x_1) \leq b_2 \qquad (2.11)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (2.12)$$

El vector $\hat{v}$ es el n_1-vector óptimo de las variables duales asociadas al grupo de restricciones centrales (2.7) del modelo de la economía con el proyecto incorporado, (2.6)-(2.9)

Se demuestra que -en determinadas condiciones -que enunciaremos seguidamente -el óptimo x_1^* de (2.10)-(2.12) coincide con la solución de (2.6)-(2.9).

Es decir que si los responsables del proyecto conocen: a) sus restricciones específicas, b) los impactos del proyecto sobre la economía y c) el vector óptimo de las variables duales en el óptimo del problema que integra el proyecto con la economía, entonces el valor x_1^* que resulta de (2.10)-(2.12) coincide con el valor que se obtendría de resolver (2.6)-(2.9).

Así pues, los precios sombra vigentes en el óptimo del modelo de la economía, con el proyecto óptimo incorporado, se pueden utilizar en el modelo del proyecto (2.10)-(2.12) para evaluar el proyecto.

Ahora bien, como se habrá observado, en el caso general existe circularidad en el procedimiento por cuanto el cálculo del vector de precios sombra $\hat{v}$ es simultáneo con la determinación del proyecto óptimo en el programa (2.6)-(2.9).

En el caso general -relativo a proyectos no marginales- no existe pues posibilidad de evaluación descentralizada sin interacción con el modelo de la economía: ello tan sólo es posible cuando los impactos del proyecto son marginales, o sea, cuando $A_{11}(x_1)$ es un vector diferencial db de modo que, no se modifican los valores vigentes de las variables duales.

Ciertamente, este resultado no constituye ninguna sorpresa por cuanto si no fuera así resultaría posible determinar el impacto de un proyecto -no marginal- óptimo sin conocer su configuración óptima, es decir, sin disponer de la información relevante para determinar su impacto sobre la economía global, como resulta claramente expresado en (2.10)-(2.13).

2.5.-<u>Definición y condiciones de separabilidad.</u>

Un problema "reducido" (2.10)-(2.12) se denomina "separable" de un problema llamado "principal" (2.6)-(2.9) cuando toda solución óptima del primero -$\hat{x}_1$- se halla engendrada por una solución óptima del segundo.

O sea, en el ejemplo considerado, cuando toda solución óptima del problema utilizado para evaluar de modo descentralizado el proyecto se halla generada por una solución óptima del modelo que procede a la evaluación centralizada del proyecto.

Si las diversas funciones cumplen determinadas condiciones -en especial de diferenciabilidad y de concavidad- la existencia de una solución única en el problema reducido es condición suficiente de separabilidad. Como es conocido, en el caso de los programas lineales la existencia de soluciones múltiples es la norma, motivo por el cual en este caso no existe separarabilidad.

En el presente marco pues, evaluar un proyecto en los términos definidos constituye un problema de separabilidad. De las condiciones de separabilidad deriva que los grandes proyectos no son susceptibles de evaluación descentralizada al modo indicado y que el vector de precios sombra $\hat{v}$ a emplear en la función objetivo descentralizada (2.10) no se conoce puesto que depende del impacto del propio proyecto a evaluar. La contribución básica sobre el tema la realizó el equipo de Elestricité de France. Véase BESSIERE F., SAUTER,E. (1968) "Optimization and suboptimization: the method of extended models in the non-linear case", *Management Science*, September 1968.

En un contexto distinto de la separabilidad, la relevancia de los precios "antes o después" de adoptar un gran proyecto ocupa un lugar central en el análisis de las "transformaciones estructurales" en LESOURNE J. (1972) *Le calcul économique*, Dunod, Paris.

Véase asimismo NEGISHI T. (1962) y HARRIS R.G (1978). NEGISHI T. (1972) *General Equilibrium Theory and International Trade*, North Holland, Amsterdam; HARRIS R.G. (1978) "On the Choice of Large Projects", *Canadian Journal of Economics*, Vol. 11, pp.44-423

Función objetivo y restricciones

Veamos una ilustración de la separabilidad que permite contemplar la equivalencia de las restricciones y de la función objetivo. Sea el problema principal siguiente:

$$Max.w = F_0(x_1, x_2) \tag{2.13}$$

$$a_1(x_1, x_2) \le b_1 \tag{2.14}$$

$$a_2(x_1, x_2) \le b_2 \tag{2.15}$$

$$a_3(x_1, x_2) \le b_3 \tag{2.16}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{2.17}$$

Sea $(\hat{x}_1, \hat{x}_2)$ su óptimo. Veamos cómo proceder para eliminar la restricción $a_1(x_1, x_2) \le b_1$ del conjunto de restricciones pero obteniendo el mismo óptimo. De acuerdo con la teoría de la separabilidad, el problema reducido resultante de eliminar la primera restricción tomará la forma:

$$Max.w = F_0(x_1, x_2) - \hat{v}_1\, a_1(x_1, x_2) \qquad (2.18)$$

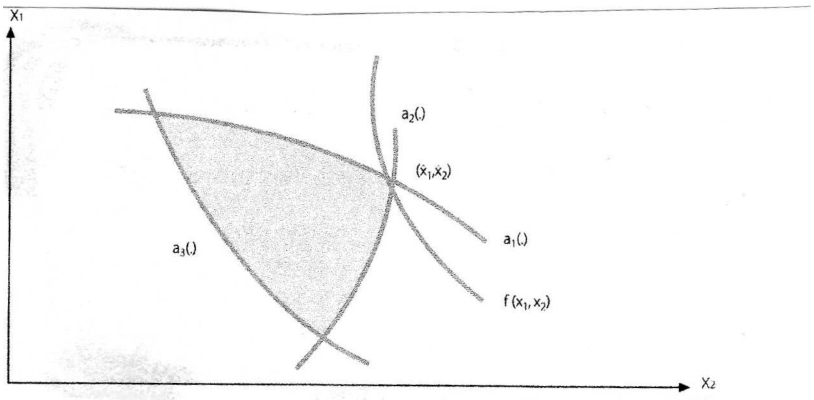
$$a_2(x_1, x_2) \leq b_2 \qquad (2.19)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad (2.20)$$

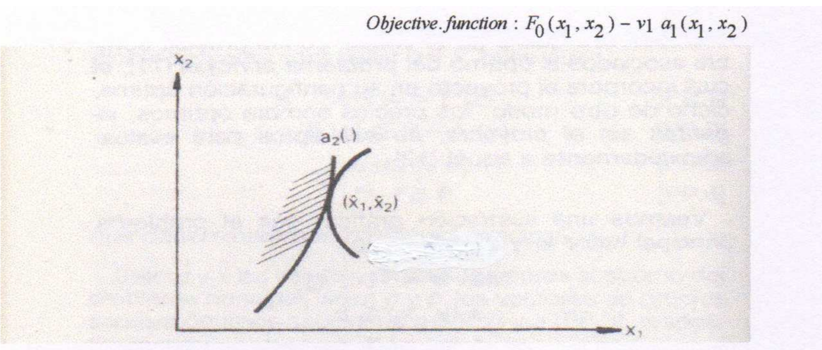
en donde $\hat{v}_1$ corresponde al valor en el óptimo del problema principal de la variable dual asociada a la restricción suprimida.

GRAFICO ilustrativo.

El ejemplo pose dos restricciones activas.



Si deseamos suprimir la restricción $a_1(x_1, x_2)$ pero manteniendo el óptimo resulta intuitivo que es necesario modificar la función objetivo, concretamente tal como nos indica la separabilidad.



Ejemplo numérico

Sea el problema:

$$Min.z = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 \leq 0$$

cuyo óptimo corresponde al punto $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Si deseamos eliminar la segunda restricción como tal, debemos incorporarla a la función objetivo el modelo tomará la forma:

$$Min.z = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 - \hat{u}_1(x_1 - x_2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4$$

Y, en términos numéricos, dado que $\hat{u}_1 =$ 3/2:

$$Min.z = x_1^2 + x_2^2 - (15/2)x_1 - (3/2)x_2$$

$$x_1^2 + x_2^2 \leq 4$$

que posee el mismo óptimo $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Seguidamente examinaremos las alternativas metodológicas existentes para tener en cuenta los problemas que plantea la no-marginalidad.

Ejemplo

Veamos una interpretación económica mediante un ejemplo con significado económico. Supongamos que el modelo principal (2.13)-(2.17) corresponda a una empresa que maximiza sus beneficios y que la restricción (2.14) corresponda a la limitación de sus emisiones de CO2 que le impone el regulador.

El resultado obtenido indica que se podria obtener el mismo óptimo fijando un impuesto sobre dichas emisiones mediante un impuesto igual a $\hat{v}_1$. El ejemplo ilustra la equivalencia existente entre una restricción y una modificación adecuada de la función objetivo .

3.- LA EVALUACION DE GRANDES PROYECTOS

Para resolver los problemas planteados por la evaluación de grandes proyectos existen dos enfoques básicos

a) la integración del proyecto en el modelo global

b) los procedimientos iterativos.

3.1.- La evaluación por integración

Existen diversas aplicaciones utilizando este enfoque. Véase WESTPHAL L.E.(1971)[6] y GOREUX, L.M.(1977)[7] así como VEGARA J.M. (1987) que contiene una aplicación a la economía española; la Sección [4] del libro expone otras aplicaciones.

El enfoque de la integración tiene la ventaja de que permite tratar modelos que incluyen variables binarias para tratar costes fijos, economías de escala, existencia de alternativas y otros aspectos altamente relevantes. Su limitación consiste en que supone un único centro de decisión para la economía global.

3.2-Ejemplo de modelo integrado

Utilizaré el expuesto en VEGARA J.M.(1987) *Evaluación pública de grandes proyectos de inversión por integración en modelos macroeconómicos*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid. El modelo se utilizó para evaluar una nueva siderurgia en España utilizando un modelo multisectorial y multiperíodo de la economía española.

Excepto en el nivel de agregación, la lógica del modelo correspondía a la desarrollada en SEBASTIÁN C. (1976) *El crecimiento económico español. 1974-1984*, Fundación del INI, Programa de Investigaciones Económicas, Madrid. El submodelo correspondiente al proyecto, expresado por medio de variables continuas (niveles de producción) y binarias (grado de integración de procesos, relaciones lógicas entre alternativas y existencia de economías de escala, en este caso). Puesto que se trata de un modelo integrado no existen dificultades derivadas de integrar variables discretas.

El modelo cubría un horizonte temporal de siete períodos bianuales; la variables que expresaban flujos correspondían a flujos anuales. Las discontinuidades se concentraban en el proyecto siderúrgico. La estructura general del modelo era la siguiente:

---

[6] WESTPHAL L. (1971) *Planning Investments with Economies of Scale*, Nort Holland Pu., Amsterdam

[7] MANNE A. (1977) *Interdependence in Planning*, The Johns Hopkinns University Press, Baltimore and London

a) Submodelo correspondiente a la ECONOMÍA AGREGADA

Formulado a un nivel de agregación alto: seis sectores y tres categorías de fuerza de trabajo. Las restricciones correspondían a los aspectos siguientes:

-Oferta y demanda de bienes y servicios distintos de los proporcionados por la nueva siderurgia

-Demandas al nuevo sector siderúrgico

-Restricciones de capacidad de producción de los seis sectores

-Restricciones de trabajo, desagregadas en tres categorías

-Restricciones de oferta y demanda de divisas

-Restricciones de ahorro

-Condiciones terminales, introducidas para asegurar unos niveles de inversión adecuada en el último período. Se trata de una complicación inevitable puesto que, de otro modo, los efectos de dicha inversión no se reflejan en el modelo.

Todos los modelos multiperíodo presentan la cuestión de las condiciones terminales que pueden ser analizadas en término de separabilidad temporal. Plantean problemas de difícil solución a los que no se presta suficiente atención.

-Senda gradualista. Ésta se impone a la evolución del consumo agregado para evitar que éste sufra una evolución arbitraria y no soportable en una economía real.

Función objetivo

Consiste en maximizar el consumo agregado sometido a la evolución que marca la senda gradualista.

Por otra parte, el Submodelo correspondiente a la siderurgia contenía:

-Restricciones de oferta-demanda de productos siderúrgicos que expresan la relación existente entre producción e importaciones, demanda (interior y de exportación) y capacidad de producción, diferenciando entre:

a) laminados en frío
b) laminados en caliente
c) slabs o bloques de fundición

-Demandas de inputs corrientes a la economía agregada:

a) demandas de inputs corrientes a otras industrias

b) demandas de divisas por inputs corrientes

-Decisiones de inversión en nueva capacidad. Expresan que la capacidad de las nuevas instalaciones –dadas las tecnologías existentes- debe hallarse comprendida entre un mínimo y un máximo tecnológicamente dado. También expresan la existencia de costes fijos decrecientes de las sucesivas unidades invertidas.

-Restricciones de capacidad de producción que expresan que la producción de las nuevas instalaciones debe ser inferior o igual a la capacidad acumulada.

-Restricciones de demandas de inputs no corrientes, de inversión a la economía global, diferenciando entre:

a) demanda global de inversión correspondiente al período inicial
b) demanda global al sector metalúrgico procedente de la realización de la nueva inversión siderúrgica
c) idem al sector construcción
d) demanda global de divisas

-Restricciones de orden temporal de las inversiones que expresan que las sucesivas inversiones de un mismo tipo debe producirse en el orden decreciente de la componente fija de sus costes

El modelo global poseía 535 restricciones y 454 variable propias, de las cuales 91 binarias y fue resuelto numéricamente.

4.-LOS PROGRAMAS DE PROYECTOS Y LAS RESTRICCIONES PRESUPUESTARIAS

La consideración de restricciones presupuestarias presenta dificultades singulares pues exige operar con variables binarias para poder especificar las diversas alternativas y sus relaciones así como su impacto sobre las restricciones presupuestarias.

PEARCE D.(2006) contiene una discusión heurística del tema subrayando su dificultad pero sin concluir claramente en la necesidad de adoptar un enfoque combinatorio. Examinemos la cuestión mediante un ejemplo, tomado de Pearce. Consideremos tres proyectos no exclusivos con una restricción presupuestaria común.

Tabla 1

Proyecto	*Inversión*	*Criterio de selección*
1	100	100

2	50	60
3	50	70

La inversión está sujeta a una restricción presupuestaria de 100. Si se clasifican los proyectos según su criterio de selección, el orden decreciente de los proyectos será 1-3-2 y eligiendo en primer lugar el proyecto 1 se agotará el presupuesto. Ahora bien, si se eligieran los proyectos 2 y 3 se agotaría todo el presupuesto obteniéndose un VNA igual 130 con una inversión total de 100, agotándose pues -en este caso concreto- el presupuesto. La regla de selección no puede ser secuencial.

Veamos otro ejemplo, tomado también de Pearce.

Proyecto	*coste-C*	*Beneficios brutos-B*	*B-C: NetPValue*	*ratio B/C*	*ratio NPV/C*
1	100	200	100	2.0	1.0
2	50	110	60	2.2	1.2
3	60	120	70	2.0	1.17

Supongamos ahora que la restricción presupuestaria sea igual a 115. Eligiendo en primer lugar el proyecto 1 no existe espacio para ningún otro proyecto de modo que la rentabilidad total es igual a 100. Por el contrario, si se eligen los proyectos 2 y 3 se alcanza una rentabilidad igual a 130.

La formulación del problema anterior en términos de programación binaria seria la siguiente:

Sea Ri rentabilidad de i, Ii la inversión y P el presupuesto total. La formulación del problema es:

$$Max.w = \sum_{i=1}^{3} R_i X_i$$

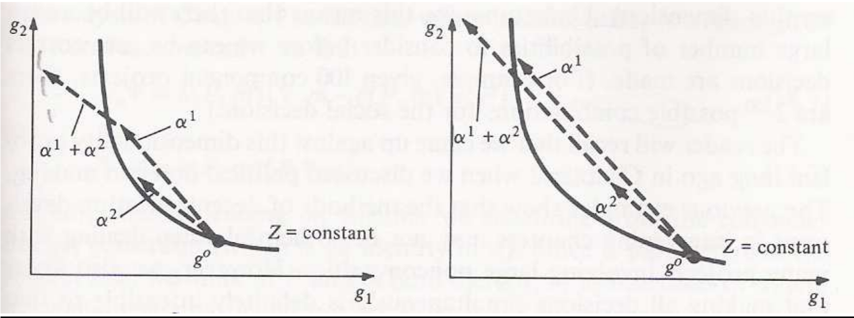
$$\sum_{i=1}^{3} I_i X_i \leq P$$

$$X_i binarias$$

El cual corresponde al problema denominado de “la mochila”, bien conocido en el campo de la Investigación de Operaciones [8].

Orden de evaluación y proyectos no marginales

El proceso de evaluación no es independiente del orden en el que se consideran los proyectos no. STARRET D.A. (1988) [9] formuló un ejemplo sencillo con dos grandes proyectos en el que la decisión depende del orden en el que es consideran los proyectos [10] .



Caso 1 Caso 2

[8] PLANE D.R., McMILLAN jr C. (1971) *Discrete Optimization*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs. Véase asimismo WEINGARTNER H.M. (1966) Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis, *Management Science*, No.7, pp.486-516 y, del mismo autor (1967) *Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems* , Markham Pu.Co

[9] STARRET D.A. (1988) *Foundations of public economics*, Cambridge University Press. 234-236.

El gráfico corresponde al caso en que se están evaluando dos proyectos no marginales a1 y a2. Los dos proyectos son aceptables por separado pero no lo son considerados conjuntamente (Caso 1). La aceptación de uno u otro puede depender del orden en el que se evalúen; en efecto, en el Caso 2, si primero se avalúa a1, a2 debe rechazarse y viceversa.

5.- SOBRE LA NECESIDAD DE VARIABLES BINARIAS

Es frecuente que las variables que intervienen en un programa matemático no sean continuas, sino que, por su propia naturaleza, deban tomar valores enteros; así, por ejemplo, si en el óptimo deben producirse 54.834,7 camiones, dicho valor concreto carece de significado real, aunque el error que se cometerá, redondeando el resultado será, probablemente, muy reducido. Existen otros casos en los que la aproximación por redondeo puede alejar notablemente del óptimo. Supongamos, por ejemplo, que el óptimo implique crear una capacidad de producción de 1.650 MW de centrales térmicas y 820 de turbinas, siendo las primeras posibles únicamente en bloques de 250 MW y las segundas de 50 MW; redondear a 7 bloques de 250 MW puede ser peor que reducir a 6 e incrementar la capacidad de turbinas por cuanto, de este modo, se reduce el coste de inversión de un bloque de 250 MW, que no se utilizaría a plena capacidad, aunque sea a costa de incrementar la capacidad de turbinas, de coste variable más elevado.

Por último, existen todavía otros casos en los que la naturaleza de las variables excluye de modo radical toda aproximación en términos de variables continuas. Supongamos que la variable x_{ij} exprese la posibilidad de emplazar una siderurgia tipo i en el lugar j y que x_{ik} exprese la posibilidad de emplazar la misma siderurgia en k: resulta patente que carecería de sentido una solución óptima, $\hat{x}_{ij} = 0,7$, $\hat{x}_{ik} = 0,3$, por cuanto las únicas combinaciones posibles son:

$$\begin{cases} x_{ij} = 0 \quad \text{y} \quad x_{ik} = 0 \\ x_{ij} = 0 \quad \text{y} \quad x_{ik} = 1 \\ x_{ij} = 1 \quad \text{y} \quad x_{ik} = 1. \end{cases}$$

Este último caso es común cuando las variables están relacionadas por medio de relaciones lógicas, no pueden expresarse por medio de variables continuas. Estos problemas tipo que han impulsado a desarrollar algoritmos de resolución de programas lineales enteros (PLE), bien mixtos (PLM).

7.3. Formulación de restricciones

Veamos seguidamente, mediante unos ejemplos, el modo de formular un cierto número de restricciones tipo; nos limitaremos al caso en el que intervienen variables binarias por su mayor sencillez y por cuanto es el caso en el que la discontinuidad es más radical[1].

[1] Véase Dantzig [70], Hu [119], [120], Simmonard [211], Balinski [21], [22].

* * *

Ejemplo E.7.1. Restricciones de exclusión.

Cuando se trata de expresar que —a lo sumo— una de entre n variables binarias puede valer la unidad, la restricción tiene una forma standard:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1 & (7.1) \\ x_1, x_2, \dots, x_n = 0 \text{ ó } 1 & (7.2) \end{cases}$$

En efecto, dado (7.2), y por (7.1), o bien todas las variables x_i son nulas, o a lo sumo una de ellas vale la unidad.

Este tipo de restricción es muy común en problemas económicos, ya que expresa la existencia de alternativas que se excluyen: instalar una planta en uno de entre varios emplazamientos posibles, elegir un equipo de entre una determinada gama, determinar el año en el que poner en funcionamiento una instalación, etc.

* * *

Ejemplo E.7.2. Costes fijos.

Supongamos se trate de expresar una función de coste caracterizada por la existencia de una componente fija, si la producción no es nula (figura 5.1). O sea, en función tal que:

$$\begin{cases} c = 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ c = ax + b & \text{si} \quad 0 < x \leq M. \end{cases}$$

La restricción correspondiente estará expresada por:

$$\begin{cases} c = ax + by \\ x \leq My \\ x \geq 0 \\ y = 0 \text{ ó } 1. \end{cases} \qquad (7.3)$$

En efecto: si la variable binaria y es igual a cero:

$$\begin{cases} c = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

si, por el contrario, dicha variable es igual a la unidad:

$$\begin{cases} c = ax + b \\ x \leq M \\ x \geq 0 \end{cases}$$

que coincide con las relaciones que deseábamos expresar, excepto en el hecho de que cuando $y = 1$, la x puede ser nula, en contra de lo que necesitamos expresar. Ahora bien, si las restricciones se integran en un problema de minimización de costes, la condición que falta se verificaría de modo automático. En efecto, $b > 0$ por cuanto, en caso contrario, no existiría el problema de los costes fijos; si $x = 0$, puesto que se está minimizando el coste, éste se producirá para $y = 0$ y no para $y = 1$, con lo que debido al efecto de la función objetivo, no se presentará la combinación de valores $x = 0$, $y = 1$.

* * *

Ejemplo E.7.3. *Regiones no convexas.*

Las soluciones posibles limitadas por hiperplanos delimitan conjuntos convexos; por el contrario, en ciertos problemas pueden intervenir conjuntos no convexos; éstos pueden expresarse utilizando variables binarias.
Sea la región de la figura 7.1; dicha región puede expresarse del modo siguiente:

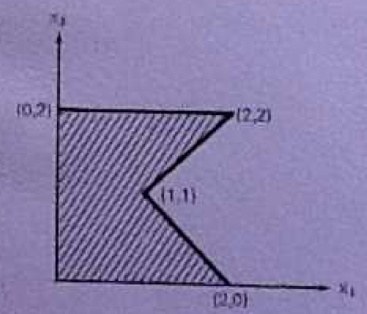


Fig. 7.1

$$
\begin{cases}
x_1, x_2 \geq 0 \\
y = 0 \text{ ó } 1 \\
x_1 - x_2 \leq (1-y)2 \\
x_1 + x_2 \leq (1+y)2 \\
x_2 \leq 2
\end{cases}
\qquad (7.4)
$$

En efecto: si $y = 1$ se obtiene la región de la figura 7.2*a*:

$$
\begin{cases}
x_1, x_2 \geq 0 \\
x_1 - x_2 \leq 0 \\
x_1 + x_2 \leq 4 \\
x_2 \leq 2
\end{cases}
$$

y si $y = 0$ se obtiene la región de la figura 7.2*b*:

$$
\begin{cases}
x_1, x_2 \geq 0 \\
x_1 - x_2 \leq 2 \\
x_1 + x_2 \leq 2 \\
x_2 \leq 4
\end{cases}
$$

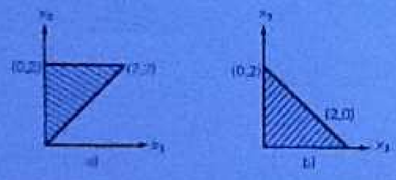


Fig. 7.2

* * *

Ejemplo E.7.4. *Variables continuas-discontinuas.*

Supongamos una central termoeléctrica que puede, o bien estar parada, o bien producir entre un mínimo y un máximo, dictados por consideraciones técnicas. Sea q el mínimo, Q el máximo y x la variable que expresa la producción:

$$\begin{cases} x \geq q(1-y) \\ x \leq Q(1-y) \\ x, y = 0 \text{ ó } 1. \end{cases} \tag{7.5}$$

En efecto, si $y = 1$, tenemos:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

o sea:

$$x = 0$$

y si $y = 0$ se cumplirá:

$$\begin{cases} x \geq q \\ x \leq Q \end{cases}$$

tal como deseábamos.

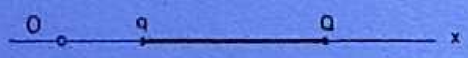


Fig. 7.3

* * *

Ejemplos E.7.5. *Expresión de variables enteras por medio de variables binarias.*

Por medio de variables binarias es posible introducir nuevas variables que sólo pueden tomar valores enteros. En efecto: supongamos que la variable y sólo pueda tomar los valores enteros a_1, a_2, a_3 y a_4; dicha restricción puede expresarse por medio de:

$$\begin{cases} y = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 \\ 1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ ó } 1. \end{cases} \tag{7.6}$$

La variables discretas platean problemas no siempre resueltos. Es preciso tenerlo presente.

6.-LOS PROCEDIMIENTOS ITERATIVOS

Este enfoque consiste en aplicar directamente los diversos algoritmos existentes para la optimización por descomposición de programas matemáticos. Los algoritmos básicos son el de Dantzig y Wolfe y el de Benders.

6.1.-El algoritmo de Dantzig y Wolfe. Interpretación

Sea la versión lineal del modelo de la economía con el proyecto incorporado (2.6)-(2.9)

$$Max\ W = c_0^T x_0 \qquad (3.1)$$

$$A_{11}x_1 + A_{12}x_0 = b_1 \qquad (3.2)$$

$$A_{21}x_1 = b_2 \qquad (3.3)$$

$$x_1,\ x_0 \geq 0 \qquad (3.4)$$

El anterior modelo integra un único proyecto pero la formulación inicial de D-W permite considerar s proyectos.

Sea u_k el vector de las variables duales de (3.5) correspondientes a la k-ésima iteración del algoritmo.

$$\text{Max } w^k = -u_k^T A_{11}x_1 \qquad (3.5)$$

$$A_{21}x_1 = b_2 \qquad (3.6)$$

$$x_1 \geq 0 \qquad (3.7)$$

Como es sabido, cualquier punto del poliedro definido por (3.6)-(3.7) puede expresarse como combinación lineal convexa de los puntos extremos correspondientes, de modo que resulta posible explorar dichos puntos proporcionando al Centro de Evaluación de Proyectos los precios provisionales asociados,. u_k .

En síntesis, el algoritmo consiste en:

El Centro de Planificación determina un punto extremo de (3.6)-(3.7) y calcula el vector asociado de variables duales provisionales, u_k , comunicando el vector $u_k^T A_{11}$ al Centro de Evaluación de Proyectos, vector que corresponde a la valoración neta provisional del impacto del proyecto.

El Centro de Evaluación de Proyectos resuelve (3.5)-(3.7) es decir maximiza el valor neto de su contribución, valorada utilizando los precios provisionales y considerando únicamente sus propias restricciones. Asimismo comunica su proyecto provisional, x_{1k}, así como el valor de la función objetivo w^k, que se utilizará en el test de optimalidad. Finalmente, el CP aplica el test de optimalidad: si se ha alcanzado el CP procede a calcular el proyecto óptimo.

En cada iteración, pues, el CP utiliza precios provisionales para obtener un nuevo punto extremo de su problema específico; explora los puntos extremos de las restricciones del primal del Proyecto modificando la función objetivo del mismo con precios provisionales. El CP debe calcular la solución óptima. Así pues, la información está descentralizada pero no la toma de la decisión.

Procedimientos algorítmico-heurísticos

Otro enfoque a mencionar, corresponde a los denominados procedimientos algorítmico-heurísticos, experimentados inicialmente por Janos Kornai [11], y consistentes en alternar fases algorítmicas con fases heurísticas con la finalidad de acelerar la convergencia del proceso y aprovechar los conocimientos y la experiencia de los planificadores.

La idea operacional fundamental consiste en multiplicar la información transmitida en cada intercambio con la finalidad de acelerar la convergencia hacia el óptimo.

Discontinuidades

Un tema distinto de la magnitud de los proyectos es la presencia de discontinuidades como las asociadas a la presencia de costes fijos, no convexidades o bien presencia de decisiones alternativas, aspectos que no pueden expresarse en modelos con variables continuas. Su presencia complica el cálculo pero no dificultades insalvables en los enfoques basados en la integración. El procedimiento más conocido de solución descentralizada lo constituye el algoritmo de Benders.

6.2.-El algoritmo de Benders

Sea el problema

[11] KORNAI J.(1969) Man-machine Planning, *Economics of Planning*, vol.9, 9, january

$$Max\ z = c_0^T x_0 \qquad (3.8)$$

$$A_{11}\, y + A_{10}\, x_0 \leq b_1 \qquad (3.9)$$

$$x_0 \geq 0 \qquad (3.10)$$

$$y \in Y \qquad (3.11)$$

en el que las variables y son las propias del proyecto y pueden incluir variables binarias y enteras y deben pertenecer a un conjunto dado, Y .

Las restricciones (3.9) expresan el impacto del proyecto sobre el conjunto de la economía. La función objetivo depende exclusivamente de las variables centrales x_0. Sea $\hat{z}$ el valor óptimo de la función objetivo.

Para unos valores dados de $y = \bar{y}$, el dual de (3.8)-(3.11) consiste en hallar u tal que cumpla:

$$Min.w = u_k^T (b_1 - A_{11}\, \bar{y}) \qquad (3.12)$$

$$-\hat{u}^T A_{10} \geq c_0^T \qquad (3.13)$$

$$u \geq 0 \qquad (3.14)$$

El poliedro convexo de soluciones factibles asociado al problema dual de (3.12–3.14) es independiente del valor $\bar{y}$ y el poliedro posee un número K finito de vértices. El óptimo corresponderá a uno de los vértices del dual, que supondremos único.

Así pues, el problema a resolver equivale a:

$$\underset{k \in K}{Min}\, w = u_k^T (b_1 - A_{11}\, \bar{y}) \qquad (3.15)$$

Cumpliéndose $\hat{w} = \hat{z}$.

De modo que

$$\underset{x \in X}{Max} = c_0^T x_0 = \underset{k \in K}{Min} = u_k^T (b_1 - A_{11} \bar{y}) \qquad (3.16)$$

siendo:

$$X = \left[x_0 \,/\, Ax \leq (b - A_{11} \bar{y}), x_0 \geq 0 \right]$$

y cumpliéndose, por dualidad: $c_0^T x_0 \geq u_k^T (b_1 - A_{11} \bar{y})$

El problema inicial (3.8)-(3.11) equivale pues al siguiente: hallar x_0 e y tales que:

$$\underset{y}{Max} \left[\underset{xo}{\max} \, c_0^T x_0 \right] \qquad (3.17)$$

$$A_{11} y + A_{10} x_0 \leq b_1 \qquad (3.18)$$

$$x_0 \geq 0 \qquad (3.19)$$

$$y \in Y \qquad (3.20)$$

O bien -dado que los valores de la funció objetivo de los dos problemas duales son equivalentes se cumple:

$$\underset{y \in Y}{Max} \left[\underset{k}{\min} \, u_k^T (b_1 - A_{11} \bar{y}) \right]$$

$$y \in Y$$

O lo que es equivalente: se trata de resolver:

$$\max z \qquad (3.21)$$

$$z \leq \underset{k}{\min} \, u_k^T (b_1 - A_{11} \bar{y}) \qquad (3.22)$$

$$y \in Y \qquad (3.23)$$

Así pues, si se conocieran todos los puntos extremos, el problema inicial sería equivalente a hallar *k* tal que

$$\min_k u_k^T (b_1 - A_{11}\bar{y}) \qquad (3.24)$$

$$y \in Y \qquad (3.25)$$

El Centro de Planificación determina el plan optimo compatible con el vector provisional dado de variables enteras. O sea, el Centro de Evaluación de Proyectos debe elegir la configuración que posea una evaluación mínima de entre todas aquéllas que resulten factibles.

Inicialmente no se conocen todos los vértices: se debe pues generarlos de modo iterativo. El algoritmo consiste en resolver

$$\max .z$$

$$z \leq \left[\min_k u_k^T (b_1 - A_{11}\bar{y}) \right]$$

$$y \in Y$$

El algoritmo precisa el modo de generar más restricciones, el test de optimalidad y cómo calcular una cota superior del error.

Los procedimientos de descomposición tipo Dantzig-Wolfe operan con variables continuas, de modo que –como se ha destacado ya- los modelos no pueden recoger aspectos importantes como son las no convexidades, las economías de escala y otros. De aquí el interés del algoritmo de Benders[12] que permite resolver problemas de programación matemática lineal con variables continuas y discretas.

En este caso al Centro de Planificación no le basta comunicar en cada intercambio información relativa a precios sombra provisionales a Centro de Evaluación de Proyectos sino que el Centro de Planificación le comunica restricciones mixtas de precios y cantidades y que afectan al valor de la función objetivo [13]. La información está descentralizada pero la decisión final no.

Ilustración

[13] Es conocida la dificultad que la presencia de no-convexidades plantea a la utilización de sistemas de precios para la evaluación descentralizada de alternativas. No se trata únicamente de la presencia de economías de escala. Véase, entre otros, SCARF H.E. (1994) The Allocation of Resources in the Presence of Indivisibilities, *Journal of Economic Perspectives* 8 (4) 117-128. La relevancia de las no-convexidades deriva también de la presencia de no-convexidades en los sistemas ecológicos: véase DASGUPTA P., MÁLER K.G, eds.(2004) *The Economics of Non-Convex Ecosystems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Supongamos un submodelo del proyecto tal que las variables propias del proyecto y € Y se reduzcan a una variable entera y restringida por:

$$0 \leq x \leq 100$$

En el Gráfico 5.1 cada nueva iteración proporciona una restricción adicional que limita el valor de la función objetivo z. Supongamos se hubieran generado tres restricciones. El gráfico correspondiente sería el siguiente:

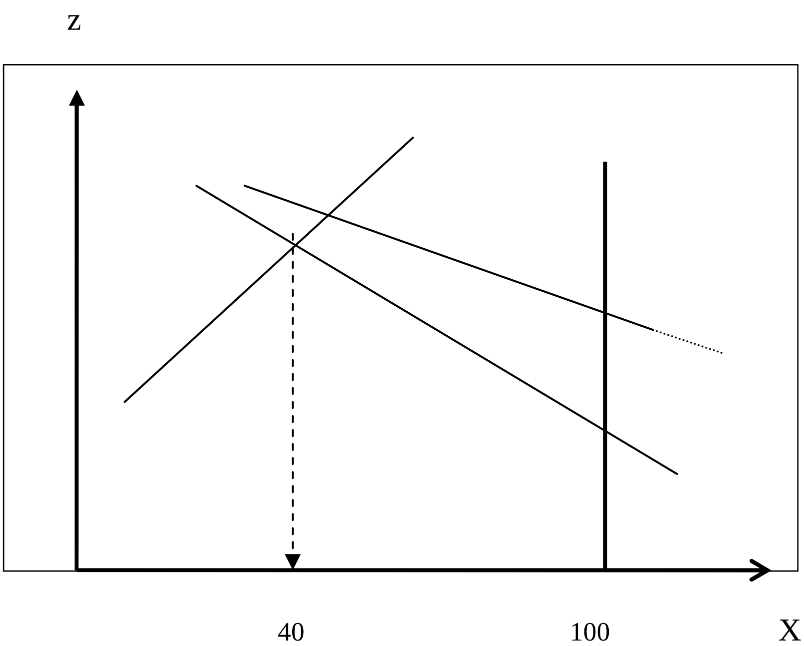


Gráfico 5.1

Se reflejan tres restricciones que establecen cotas superiores del valor de la función objetivo y contribuyen a determinar el valor óptimo de X.

Si no se hubiera alcanzado el máximo se generarían más restricciones las cuales generarían una especie de "cúpula" que restringe los valores de la función objetivo. El conocimiento de la cota superior del error cometido al detener el algoritmo permite elegir la configuración óptima del proyecto o bien una subóptima satisfactoria.

<u>Dantzig y Wolfe y Benders y los algoritmos de computación</u>

En presencia de variables discontinuas, la singularidad del algoritmo de Benders surge de dualizar parcialmente el problema global, precisamente por la parte del problema global con variables continuas, de modo que el Centro de Evaluación de Proyectos no opera con precios sino con restricciones adicionales; debido a ello $y \in Y$ puede expresar que determinadas variables son discontinuas.

Con independencia de su interpretación económica, los algoritmos de Dantzig-Wolfe y de Benders son utilizados para la resolución de problemas de optimización de grandes dimensiones debido a su enfoque comporta dividir éstos en sub-problemas [14].

7.- MODELOS CON PRECIOS ENDÓGENOS

En un conocido trabajo, SAMUELSON P. A. (1952)[15] expuso la idea de que un problema de optimización puede generar las condiciones que expresan un equilibrio de mercado. Concretamente, maximizando el excedente total de productores y consumidores en un modelo de equilibrio parcial se obtiene como condición la igualdad entre el precio de mercado y el coste marginal.

Formulando el problema de modo adecuado, una variable dual determinada puede expresar el precio de equilibrio competitivo en un modelo de equilibrio parcial. La posibilidad de endogenizar los precios de mercado permite simular mercados utilizando pues como instrumento modelos de optimización y en especial, funciones objetivo adecuadas.

Desde esta perspectiva destaca la contribución de DULOY J.H., NORTON R.D (1973) con el modelo CHAC que endogeneiza los precios de los productos agrario y los ingresos/ rentas de los productores de modo que se amplia la posibilidad de simular los efectos de políticas en determinados casos.

En el modelo de la agricultura mexicana, denominado CHAC [16], las demandas se expresan como función lineal de los precios. Sean::

$$p = a + Bq \qquad (4.1)$$

las funciones de demanda y sea

$$c(q) \qquad (4.2)$$

el coste total de producción.

Tomando como función objetivo, que corresponde a la suma del excedente de productores y del consumidores:

$$Z = q(a + 0.5bq) - c(q) \qquad (4.3)$$

se obtienen los mismos resultado que en un mecanismo de mercado competitivo.

En efecto, se obtiene, la condición: $p = c'(q)$ (4.4)

---

[14] Vése, por ejemplo, los Capítulos 3 y 7 de LASDONsdon L.S. (1970) *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Co., New York US

[15] SAMUELSON P.A. (1952) Spatial Price Equilibrium and Linear Programming, *American Economic Review*, Vol.42, pp.283-303

[16] DULOY J.H., NORTON R.D (1973) CHAC, A programming model of mexican agriculture, pp.291-337 in GOREUX L.M., MANNE A.S (1973) *Multi-level planning: case studies in Mexico*, North Holland Pu. Co. Amsterdam

En el caso del monopolista se procede de modo similar. En CHAC la función objetivo consiste en maximizar un sumatorio en el que figuran las sumas de los excedentes de consumidores y productores.

El panorama de HAZELL P.B.R.,NORTON R.D. (1986)[17] sobre la programación cuadrática y su utilización en los modelos agrícolas resulta de interés por su carácter exhaustivo.

---

*   *   *

Seguidamente exploraremos los nuevos instrumentos y las nuevas posibilidades que sugen de otras metodologías, concretamente, de::

-las desigualdades variacionales

-la programación binivel

-la complementariedad

Existen estrechas relaciones entre los diversos instrumentos y metodologías como puede verse en la Introducción del Vol.I de FACCHINEI F. PANG J-S (2003) [18]. Estas relaciones se hallan sintetizadas en el Cuadro de la página 8, secciõm 1.2. El Capítulo 1 de NAGURNEY A. (1993) [19] analiza asimismo varias de estas relaciones..

8.-LAS DESIGUALDADES VARIACIONALES .

8.1.-Introducción a las VI [20]

Un problema de desigualdades variacionales de dimensión finita $VI(F,K)$: consiste en hallar los vectores $x^* \in K \subset \Re^n$ que cumplan:

$$F(x^*)^T(x - x^*) \geq 0, \qquad \forall x \in K \qquad (5.1)$$

---

[17] HAZELL P.B.R.,NORTON R.D. (1986)[17] *Mathematical programming for economic analysis in agriculture*, Macmillan Pu., London

[18] FACCHINEI F., PANG J-S (2003) *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer Verlag, New York. Vol.I .

[19] NAGOURNEY A. (1999) *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Pu.

[20] The first problem in terms of VI was formulated by Signorini in 1959. Later, HARTMAN G.J.,. STAMPACCHIA G.(1966)[20] introduced VI theory as a tool with applications in mechanics. In 1979, SMITH M.J.(1979) [20] applied this approach to traffic equilibriu networks.

siendo $F(x)$ una correspondencia $F: K \to \Re^n$ y K un conjunto convexo cerrado, no vacío [21]. El conjunto K puede estar definido, por ejemplo, mediante un sistema de inecuaciones o bien mediante otros procedimientos.

Ejemplo

Sea el conjunto K definido mediante un sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales $K = \left\langle x \in R^n \mid Mx = a, Nx \leq b \right\rangle$ y sea F una correspondencia $F: K \to \Re^n$.

En estas condiciones puede definirse el problema $VI(F,K)$ hallar $x^* \in K \subset \Re^n$ que cumpla $F^T(x^*)(x - x^*) \geq 0$.

Las VI y los sistemas de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones pueden definirse como VI. Sea el sistema de ecuaciones: $F(x) = 0$. Se formula la siguiente Proposición: Sea $K = \Re^n$ y sea la función $F: \Re^n \mapsto \Re^n$.; el vector $x^* \in \Re^n$ es solución de $VI(F, \Re^n)$ si y sólo si $F(x^*) = 0$, es decir, si cumple el sistema de ecuaciones.

Demostración: si $F(x^*) = 0$ entonces se cumple (5.1.1) como igualdad. E inversamente, si x^* satisface (5.1.1) y tomamos $x = x^* - F(x^*)$ ello implica que:

$$F(x^*)^T(-F(x^*)^T \geq 0 \quad \text{o sea} \quad -\|F(x^*)\|^2 \geq 0 \qquad (5.2)$$

De donde resulta, $F(x^*) = 0$, es decir, que x^* cumple el sistema de ecuaciones.

Relación de los problemas de VI con los problemas de optimización

[21] Véase FACCHINEI F., PANG J-S. (2003) *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer-Verlag, New York.

Los problemas de optimización con restricciones pueden ser formulados como problemas de VI. Consideremos el siguiente problema de optimización consistente en hallar el vector x^* tal que :

$$\min f(x) \qquad (5.3)$$

$$\forall x \in K \qquad (5.4)$$

Se demuestra que si f es continuamente diferenciable y K es un conjunto cerrado y convexo, entonces x^* es solución del problema VI siguiente:

$$grad.f(x)^T (x - x^*) \geq 0 \qquad \forall x \in K \qquad (5.5)$$

Se demuestra asimismo, que si $f(x)$ es una función convexa y $x*$ es una solución de $VI(\nabla f, K)$ entonces $x*$ es una solución del problema de optimización (5.3)-(5.4).

Los problemas de VI se hallan asimismo estrechamente vinculadas a los problemas de equilibrio. Veámoslo seguidamente [22].

8.2.-Aplicaciones de las VI

Las VI tiene su origen en el cálculo de variaciones aplicado a la resolución de problemas de elasticidad y plasticidad. Su desarrollo posterior incluye -entre los que FACCHINEI F., PANG J-S (2003) denominan los "source problems"- los siguientes, con contenido económico:

-los equilibrios de Nash o Nash-Cournot

-modelos de mercados oligopolísticos del sector eléctrico

-problemas de equilibrio general, en especial de equilibrio general walrasiano.

Otro campo relevante lo constituyen los problemas de trafico en redes, ampliamente desarrollado por NAGURNEY A. (1993) [23].

9.-PROGRAMACIÓN MATEMÀTICA BINIVEL

9.1.-Introducción a la programació binivel [24]

[22] Véase asimismo KONNOV I.(2007) *Equilibrium Models and Variational Inequalities*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands.

[23] NAGURNEY A. (1999) *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Pu

La Programació binivel se halla claramente relacionado con la determinación de políticas. Como destacan BRINER A., AVRIEL M.(1999) [25] los “policy análisis” consisten en dos problemas interrelacionados: a) el problema de la elección de la política óptima desde el punto de vista de los objetivos, situado a un primer nivel y b) la predicción de la reacción del segundo nivel. La consideración de este segundo aspecto es indispensable para seleccionar las políticas. Los modelos binivel integran los dos aspectos en un modelo: de aquí su interés.

Segundo nivel. Sea el problema -que denominaremos de segundo nivel- consistente en hallar el vector x tal que [26]:

$$\min_{x} . f(x,y) \qquad (6.1.1)$$

$$g(x,y) \leq 0 \qquad (6.1.2)$$

en donde y caracteriza el “entorno” del problema del segundo nivel, entorno que es definido por el primer nivel. Sea $\phi(y)$ el conjunto de soluciones correspondientes a dicho problema de segundo nivel.

Primer nivel. El problema de “programación a dos niveles”, en su primer nivel, consiste en hallar el vector y solución de:

$$\min_{y} F[x(y),y] \qquad (6.1.3)$$

$$G[x(y),y] \leq 0 \qquad (6.1.4)$$

$$x(y) \in \phi(y) \qquad (6.1.5)$$

---

[24] En los años 70s se realizaron las primeras aplicaciones al campo objeto de este Survey: véase CANDLER W., NORTON R. (1977) Multi-Level Programming and Development Policy, *Working Paper* No.258, World Bank, Washington DC (may 1977), así como, pocos años después, CANDLER W. TOWNSELY R. (1982) A Linear Two-Level Programming Problem, *Computer and Operations Research*, Vol.9, No.1, pp.59-76

[25] BREINER A., AVRIEL M. (1999) Two-Stage Approach for Quantitative Policy Analysis Using Bilevel Programming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol..100, No.1, pp 15-27

[26] DEMPE S (2002) *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. Véase asimismo DEMPÉ S.(2003) An Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, *Optimization*, 52, 33-359. Puede verse asimismo COLSON B., MARCOTTE P., SAVARD G.(2007) An overview of bilevel optimization, *Annals of Operations research*, Vol.153, No.1, September, y también VICENTE L.N., CALAMAI P.H. (1994) Bilevel and Multilevel Programming: A Bibliographical Review, *Journal of Global Optimization*, 5, 291-306; COLSON B.,MARCOTTE P., SVARD g. (2005) Bilevel Programming: A Survey, *4OR*, 3, 87-107

La restricción (6.1.5) surge del segundo nivel y condiciona al primero o del lider.

El modelo completo. Si se cumplen determinadas restricciones de regularidad, las condiciones necesarias de optimalidad de Karush-Kuhn-Tucker del problema del segundo nivel permiten formular el modelo completo en x, e y de la forma siguiente, en donde u es el vector de las variables duales de las restricciones del segundo nivel nivel:

$$\min_{x,y,u} F[x(y), y] \qquad (6.1.6)$$

$$G[x, y] \leq 0 \qquad (6.1.7)$$

$$\nabla_x L(x, y, u) = 0 \qquad (6.1.8)$$

$$u^T g(x, y) = 0 \qquad (6.1.9)$$

$$u \geq 0 \qquad (6.1.10)$$

Los problemas (6.1.3)-(6.1.5) y (6.1.6)-(6.1.10) son equivalentes siempre y cuando el problema del segundo nivel sea convexo, posea solución y ésta sea única, lo cual no siempre ocurre, como puede observarse en el ejemplo siguiente.

Ejemplo

Consideremos un ejemplo sencillo, lineal. En él -por construcción- la decisión del primer nivel incluye el uso de uno de los recursos de los que dispone el segundo nivel, en la cantidad y_1, como puede observarse en el modelo siguiente del segundo nivel:

$$\begin{aligned}
&\min\, w = x_1 + x_2 \\
&2x_1 + 8x_2 \geq 16 - y_1 \\
&6x_1 + 2x_2 \geq 12 \\
&x_1, x_2, y_1 \geq 0
\end{aligned}$$

Al variar y_1 a partir de cero, la primera restricción correspondiente al segundo nivel se desplazará paralelamente, dando lugar a nuevos pares de valores (x_1, x_2), cuyo impacto sobre el primer nivel se reflejaría en el modelo correspondiente al mismo. A partir de un cierto valor de y_1 no existirán ya soluciones factibles del problema [27].

* * *

[27] Véase un ejemplo más complejo en BARD J.F. (1998) *Practical Bilevel Optimiza-tion*, Kluver Academic Pu. Dordrecht ; pgs.197-8

La interdependencia entre los dos niveles plantea en el campo de la programación binivel cuestiones relacionadas con la existencia de soluciones. Este tipo de problemas no se presenta en modelos del tipo Dantzig-Wolfe en el que el subconjunto de restricciones del “segundo nivel” no es –por construcción- vacío ya que incluye únicamente parte de la totalidad de las restricciones del problema global.

Multiplicidad de soluciones. Soluciones optimista y pesimista

Conviene destacar que no resulta obvio que el problema del segundo nivel posea una solución única. Supongamos que el segundo nivel posea una solución no única, global, para al menos un valor del parámetro y; asimismo –para simplificar- supondremos que las restricciones del primer nivel no dependen de la decisión del seguidor. Existen dos modos de enfrentarse al mencionado problema.:

a) la versión optimista o débil

b) la versión pesimista o fuerte

El líder tomará la opción optimista si supone que el seguidor le dará soporte, en el sentido de que elegirá la solución en $x(y) \in \psi(y)$ que resulte más conveniente para él, el líder. O sea, que de entre los valores equivalentes para el seguidor, éste elegirá la que proporcione un valor máxima a la función objetivo del lider.

La solución pesimista, por el contrario, se plantea cuando la cooperación con el líder no está permitida por razones institucionales o dentro tipo.

* * *

Algunas o todas la variables pueden ser binarias. Véase BARD J. (1998) Chap.6 para el aspecto algorítmico[28]. Tampoco en este caso la descentralización se puede conseguir via precios.

9.2.-APLICACIONES DE LA PROGRAMACIÓN BINIVEL

DEMPE S.(2002) [29] destaca los siguientes grupos de aplicaciones de la PB en el campo de la economia:

-juegos de Stackelberg

-equilibrios de Cournot-Nash

-problemas de agencia principal

---

[28] BARD J.F. (1998) *Practical Bilevel Optimization*, Kluwer Academic Pu. Dordrecht

[29] DEMPE S. (2002) *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Cap.12. DEMPE S. (2003) An Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, *Optimization*, 52, 33-359

-economia del medio ambiente.

9.3.-LOS PROGRAMAS MATEMÁTICOS CON RESTRICCIONES DE EQUILIBRIO-MPEC Y LOS PROGRAMAS BINIVEL

Sea el problema de programación matemática en *x* e *y*:

$$\min_{x,y} . f(x,y) \qquad (6.11)$$

sujeto a:
$$h(x,y) \leq 0 \qquad (6.12)$$

$$F(x,y) + \Delta_y s(x,y) u = 0 \qquad (6.13)$$

$$u \geq 0, s(x,y) \leq 0 \qquad u_i \left[s(x,y) \right]_i = 0 \qquad (6.14)$$

Las restricciones (2),(3) y (4) se denominan *restricciones de equilibrio* y el problema (1)-(4) se denomina *Programa matemático con restricciones de equilibrio-MPEC*.

Si $F(x,y)$ es el gradiente (respecto a y) de una función $P(x,y)$, las condiciones de equilibrio corresponden a las K-K-T del problema:

$$\min_{y} .P(x,y) \qquad (6.15)$$

$$s(x,y) \leq 0 \qquad (6.16)$$

Si en lugar de las restricciones (6.12),(6.13) y (6.14), las restricciones son (6.15), el problema es de programación binivel.

10.-LA COMPLEMENTARIEDAD LINEAL Y NO LINEAL.

10.1.-INTRODUCCIÓN

Los problemas de CL se formularon en los años 40 y se consolidó su tratamiento en los 60s. Poseen muchas aplicaciones en diversos campos de la ciencia y la tecnología

Véase la obra COTTLE R.W., PANG J-S., STONE R.E.(2009) *The Linear Complemetarity Problem*, SIAM, Philadelphia.

La complementariedad lineal, LCP:

Sea:

q un vector nx1

M una matriz nxn

Sea el problema hallar los vectores w y z tales que cumplan:

$$w,\ z \geq 0 \qquad (7.1.1)$$

$$q + Mz = w \qquad (7.1.2)$$

$$z^T w = 0 \qquad (7.1.3)$$

El PLC puede resolverse mediante el algoritmo simplex o alguna variante del mismo. Este enfoque permite resolver numéricamente problemas con estructuras especiales que resultan de interés desde diversos puntos de vista.

La CLP fué en sus inicios un modo de unificar la programación matemática lineal, la no lineal y los juegos bimatriciales.

Anexo 3. Ejemplo numérico de Complementariedad lineal

Sea: el problema

$$\min w = -10x_1 + 40x_2 + 20x_3$$

$$18x_1 - x_2 + 3x_3 - y_1 = 20$$

$$-3x_1 + 2x_2 - 13x_3 - y_2 = 30$$

$$x_1, x_2, x_3 y_1, y_2 \geq 0$$

La condiciones de KKT son hallar:

$$18u_1 - 3u_2 + v_1 = -10$$

$$-u_1 + 2u_2 + v_2 = 40$$

$$3u_1 - 13u_2 + v_3 = 20$$

$$x_j, u_j, y_i, v_i \geq 0 \quad \forall i, \forall j$$

$$u_i y_i = x_j v_j = 0 \quad \forall i, \forall j$$

En definitiva, resolver el programa lineal equivale a hallar w y z tales que cumplan con:

$$w,\ z \geq 0$$

$$q + Mz = w$$

$$z^T w = 0$$

siendo:

$$q = \begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

O sea:

$$M=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -18 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 13 \\ 18 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -13 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad q=\begin{bmatrix} -10 \\ 40 \\ 20 \\ -16 \\ 12 \end{bmatrix} \qquad z=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

<u>Programación cuadrática</u>. Consideremos el problema cuadrático siguiente:

$$\text{Min } = c^T x + 1/2 x^T Q x \qquad (7.1.4)$$

$$Ax \geq b \qquad (7.1.5)$$

$$x \geq 0 \qquad (7.1.6)$$

en donde Q es una matriz simétrica.

Si $\hat{x}$ es una solución local óptima de (7.1.4)-(7.1.6) existe un vector de variables duales, u, tal que el par x, u satisface las condiciones de K-K-T,

El problema (7.1.4)-(7.1.6) es equivalente a resolver el LCP (q, M), (7.1.1)-(7.1.3) tomando:

$$q=\begin{bmatrix} c \\ -b \end{bmatrix} \qquad M=\begin{bmatrix} Q & -A^T \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

Por supuesto, si Q es nula el programa es lineal

<u>Complementariedad nolineal y problemas VI</u>

El problema de CL constituye un caso particular del problema de la complementariedad no lineal-CNL que consiste en hallar un n-vector x^* tal que cumpla:

$$x^* \geq 0 \qquad (7.1.7)$$

$$f(x^*) \geq 0 \qquad (7.1.8)$$

$$(x^*)^T f(x) = 0 \qquad (7.1.9)$$

10.2.-APLICACIONES DE LA COMPLEMENTARIEDAD[30].

Existen algunos panoramas de las aplicaciones de la complemantariedad en el campo de la economía. Algunas de las primeras aplicaciones al campo de la economía son ya de los años 70 como testifican algunos trabajos de autores ya citados al tratar otras metodologías como es el caso de MANNE y TAKAYAMA [31].

Destaca el hecho de que en los inicios de la Programación Matemática ésta estuvo fuertemente interrelacionada con la teoría económica –como ha destacado SCARF H. (1990) [32]- pero que hoy ambos campos parecen haberse desconectado.

Véase, en especial, el panorama de FERRIS M.C., PANG J.S.(1997) [33] A pesar de su complejidad, modelos como MARKAL, MARKAL-MACRO o ETA-MARKAL impulsados desde finales de los años 70 por Alan Manne no contienen novedades metodológicas desde el punto de vista que nos ocupa: son modelos de optimización lineal o no lineal con una única función objetivo.

11.-APLICACIONES

Seguidamente se exponen, de modo compacto, seis aplicaciones de las nuevas metodologías relacionadas con la energía o con el medio ambiente. Se exponen los rasgos principales del modelo y, es especial, la naturaleza del problema a resolver y la adecuación de la metodología elegida por los autores.

11.1.-Polución y mercado de permisos de emisiones.

Desde la perspectiva del presente trabajo resulta de especial interés NAGURNEY A, DHANDA K.K. (2000) sobre el medio ambiente y los mercados de permisos [34] que

[30] FERRIS M.C., PANG J.S.(1997) Engineering and economic applications of complementarity problems, SIAM Rev. Vol.39, no. 4

[31] TAKAYAMA T., HASHIMOTO,H. (1984) A comparative Study of Linear Complementarity Models and Linear Programming Models in Multiregional Investment Analysis, *World Bank*, Division Working Paper No. 1984-1.

[32] SCARF H.E.(1990) Mathematical Programming and Economic Theory, *Operations Research*, vol 38, No.3, may-june

[33] FERRIS M.C., PANG J.S.(1997) Engineering and economic applications of complementarity problems, *SIAM Review*. Vol.39, no. 4

[34] NAGURNEY N.,DHANDA K.K.(1996) A variational inequality Approach for marketable pollution permits, Computational *Economics*, Vol.4. No.4 (363-384); NAGOURNEY A., DHANDA K.K. (2000) Marketable pollution permits in oligopolistic markets with transaction costs, *Operations Research*, 48, 3, 424

amplia el trabajo contenido en NAGURNEY N.,DHANDA K.K.(1996). Las autoras formulan un modelo con empresas multiproducto que producen diversas emisiones contaminantes; producen productos homogéneos y operan en mercados oligopolísticos. Las empresas operan en un mercado de permisos de emisiones en el que el nivel de calidad medio ambiental se halla definido en términos de las emisiones totales y es definido por el gobierno[35].

Las empresas reciben una asignación inicial de permisos que les autorizan a emitir polución por la cantidad correspondiente. Las empresas pueden adquirir o bien vender permisos administrativos. El mercado de permisos se supone perfectly competitive. Se trata de un mecanismo que induce a las empresas a internalizar las externalidades generadas por las emisiones pero que deja en manos de cada empresa la decisión relativa al mejor modo de responder al precio de los permisos que se fija en un mercado de permisos.

Las empresas oligopolísticas maximizan sus beneficios considerando los costes de producción así como los costes de reducción de las emisiones y los costes de adquisición de permisos adicionales. El equilibrio toma la forma de un juego no cooperativo Nash-Cournot.[36].

Se formulan las condiciones de equilibrio en los mercados de productos y también las condiciones de equilibrio en el mercado de permisos. Las condiciones de K-K-T que derivan del problema de optimización de cada empresa, consideradas conjuntamente con las que expresan el equilibrio en los mercados -incluído el mercado de permisos- toman la forma de un problema de VI.

Finalmente, el artículo incluye ejemplos numéricos del modelo y analiza las propiedades cualitativas del mismo. Se presenta asimismo un algoritmo de solución.

11.2.-<u>Generación de residuos e impuestos</u>

La aplicación contenida en AMOUZEGAR M.A., MOSHIRVAZIRI K. (1999) [37] Determining optimal control policies: An application of bilevel programming, *<u>European Journal of Operational Research</u>*, 119, 1, pp.100-120 es particularmente interesante desde la óptica del presente Survey. El modelo incluye además variables binarias.

El problema consiste en decidir la capacidad y la localización de las plantas de tratamiento de residuos peligrosos en California. El primer enfoque es el convencional,

[35] Véase MONTGOMERY W.D. (1972) Markets in licenses and efficient pollution control programs, *<u>Journal of Economic Theory</u>*, 5, 747-756; STAVINS R.N. (1995) Transaction costs and tradeable permits, *<u>Journal of Environmental Economics</u>*, 29, 133-148.

[36] TIROLE J.(1989) *<u>The Theory of Industrial Organization</u>*, The MIT Press, Cambridge USA

[37] AMOUZEGAR M.A., MOSHIRVAZIRI K. (1999) Determining optimal control policies: An application of bilevel programming, *<u>European Journal of Operational Research</u>*, 119, pp.100-120

en base a un modelo integrado -de un único nivel- se minimiza el coste total del sistema. Este enfoque no considera pues que las empresas poseen su propia función objetivo.El modelo incluye variables binarias y enteras (número de plantas de incineración, localización, etc.), además de las variables continuas.

El segundo modelo se basa en un enfoque binivel en el que la Autoridad Central puede implantar impuestos que inciten a las empresas a reducir su generación de residuos. La función objetivo de la Autoridad Central consiste en minimizar el coste total. El problema del segundo nivel es un programa lineal mixto, con variables continuas y enteras y en el que algunos de los coeficientes de la función objetivo del segundo nivel se halla determinado por el primer nivel, en particular, el impuesto [38].

Como se observará, es el agregado de todas las empresas lo que constituye el segundo nivel: éste es uno de los límites del modelo desde la óptica de su consideración como un instrumento para explorar las consecuencias de la política decidida por la Autoridad Central.

Otra aplicación destacable es la contenida en: DEMPE S.,KALASHNIKOV V. RÍOS-MERCADO R. (2005) [39] también relativa al sector del gas en los Usa.

11.3.- La política de estímulo de los biocombustibles.

El objetivo de la aplicación expuesta en BARD J.F.(1998)[40] es reducir la contaminación causada por los combustibles convencionales mediante una política de estímulo de la producción y el empleo de los biocombustibles. Para ello se busca reducir el precio de los productos no alimenticios utilizados por la industria petroquímica.

El instrumento principal utilizado con tal fin por el Gobierno es aplicar deducciones fiscales para reducir el precio pagado la industria petroquímica por los productos agrarios no alimenticios; al mismo tiempo determina una superficie minima a destinar para dicha producción. El Estado debe determinar un nuevo precio de modo que resulten mínimos os costes fiscales. Así pues, existe un conflicto entre el Gobierno y los agricultores mientras que la industria es neutral.

La industria es neutral, de modo que el precio a pagar por la industria a pie de explotación para cada uno de los productos agrarios no alimentarios no debe superar la suma de la deducción fiscal recibida por la industria por unidad de biofuel y del precio de mercado del biofuel más el precio de mercado de los subproductos correspondientes, todo ello menos la suma del coste de conversión de una unidad de producto agarario no

[38] El artículo incluye una variante del modelo binivel indicado.

[39] DEMPE S.,KALASHNIKOV V. RÍOS-MERCADO R. (2005) [39] Discrete Bilevel Programming: Application to a Natural Gas Cash-Out Problem, *European Journal of Operational Research*, 16, 2. DEMPE S. (2002) *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Cap.12,; DEMPE S. (2003) An Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, *Optimization*, 52, 33-359.

[40] Véase el Capítulo 12 BARD J.F. (1998) *Practical Bilevel Optimization*, Kluwer Academic Pu. Dordrecht.

alimentario en el biofuel b y del beneficio esperado por la industria por unidad de biofuel.

Los agricultores buscan maximizar sus beneficios en las nuevas condiciones y sus decisiones fundamentales se refieren a su producción de productos alimentarios y no alimentarios para producir biofuels así como al mantenimiento de tierras en barbecho, siguiendo la política de la Unión Europea. Están sujetos también a otras restricciones que afectan a las disponibilidades de tierra, que derivan de criterios agronómicos o bien que reflejan políticas de la UE que dan lugar a diversas subvenciones.

Se trata pues de un problema de programación a dos niveles, con el Gobierno en el primer nivel y los agricultores en el segundo nivel. La variable común a los dos niveles es el precio a pagar por la industria, los agricultores por los productos no alimentarios utilizados en la producción de biocombustibles por parte de la industria.

El modelo fue desarrollado en el marco de las actividades del INRA francés..

11.4.-El modelo energético de los Usa

La administración USA desarrolló después del embargo del petróleo el Project Independence Evaluation System-PIES con la finalidad de representar los sistemas energéticos de los USA y poder evaluar respuestas frente a diversos escenarios [41]. El modelo incluía las actividades de producción, procesado, conversión, distribución, transporte y consumo. Sus principales limitaciones radicaban en su naturaleza estática y en un análisis muy limitado de los impactos sobre el medio ambiente.

El desarrollo posterior del PIES dió lugar al National Energy Modeling System-NEMS relativo al período 1990-2020 [42]. Véase EIA (2009)[43]. NEMS resuelve las principales deficiencias mencionadas del PIES. Está articulado en torno a diversos módulos, regionalizados. En concreto:

-el módulo de demanda residencial, comercial, industrial y transportes bajo la forma de funciones no lineales;

-el módulo de oferta, que expresan las curvas de oferta de los distintos tipos de combustibles: petróleo, gas, carbón y renovables. Consiste básicamente en programas lineales de optimización.

-el módulo de conversión/transmisión consistente en el sector eléctrico y refinerias. En este caso el módulo toma la forma de programas lineales en cuya función objetivo

[41] Véase HOGAN W. (1975) Energy Policy Models for Project Independence, *Computers & Operations Research*, Vol.2, pp.251-271 así como AHN,Byong-hun (1979) *Computation of Market Equilibria for Policy Analysis*, Garland Publishing, Inc. New York & London

[42] Véase www.eia.doe.gov. En especial EIA (2009) The National Energy Modelling System, EIA, Washington

[43] Resultan interesantes las recomendaciones para el diseño y el desarrollo de NEMS contenido en el informe *The National Enegy Modeling System*, National Academy Press,

aparecen los precios –que figuran en los módulos de oferta y demanda- y las cantidades de inputs y de outputs.

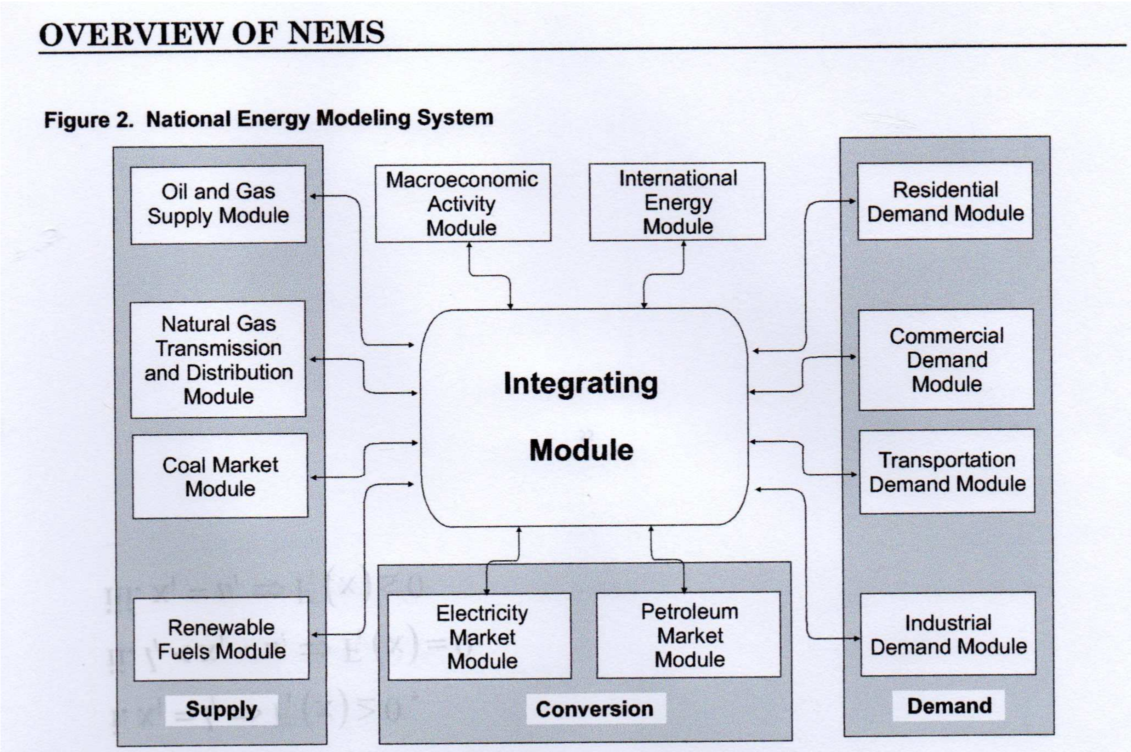
El modelo incluye, finalmente, un módulo macroeconómico y otro internacional. El primero conecta NEMS con el resto de la economía, proporcionando las proyecciones económica clave que condicionan la oferta y la demanda de energía y
que derivan de los diversos supuestos de crecimiento potencial de la economía. El módulo internacional proporciona las curvas de oferta o los precios de importación de los diversos combustibles.

Los módulos mencionados se hallan interconectados mediante el módulo de Interacción que juega el papel central en el proceso iterativo de solución numérica del conjunto: permite resolver iterativamente los módulos de oferta y demanda hasta alcanzar un equilibrio entre precios y cantidades entre los sectores productores y los demandantes. El algoritmo utilizado es el de Gauss-Seidel que simula la función de un subastador walrasiano en el papel de determinar los precios de equilibrio.

GABRIEL,S.,KYDES A.,WHITMAN,P.(2001) contiene la propuesta de un formato NLC/VI [44] del modelo que permitiría el manejo integral, no secuencial, del mismo. Utiliza el hecho de que numerosas restricciones del modelo toman la forma de NCP/VI y utilizan variables duales de un módulo como precios en otro. El modelo global se puede resolver combinando las ecuaciones de demanda y las condiciones de K-K-T de los módulos de conversión/transmisión.

---

[44] GABRIEL,S.,KYDES A.,WHITMAN,P.(2001) The National Energy Modelling System: A Large-Scale Energy-Economic Equilibrium Model, *Operations Research* Vol.4, No.1, january-february 2001,pp 14-25



Fuente: EIA

Figura 8.1

El modelo puede utilizarse para analizar –entre otras- cuestiones como las respuestas del sector a políticas de mitigación de las emisiones de dióxido de carbono tales como impuestos o el establecimiento de mercados de permisos o bien los cambios en las condiciones de los mercados mundiales de petróleo o del gas natural. Da lugar análisis periódicos a demanda de las diversas instancias políticas como la Casa Blanca o el Congreso.

11.5.-El modelo del sector del gas de los USA

El modelo del sector del gas en los USA constituye una aplicación de la mixed linear complementarity [45]. Incluye únicamente variables continuas y está elaborado para un horizonte temporal de uno a tres años con lo que no contempla aumentos de capacidad.

El modelo se halla regionalizado y existe una red de gaseoductos -definidos mediante arcos direccionados- que conectan las diversas regiones. La demanda distingue tres estaciones. Los grupos de operadores considerados son: a) los operadores de los gasoductos; b) los operadores de producción que gestionan la exploración y la producción de gas; c) los comercializadores-marketers que venden a los sectores

[45] Véase GABRIEL S. , KIET S., ZHUANG J. (2005) A Mixed Complementarity-Based Equilibrium Model of Natural Gas Markets, *Operations Research*. Vol.53, September-october, pp.799-818. Sobre las particularidades de la Mixed Complementarity véase KONNOV I.V.. VOLOTSKAYA E.O. (2002) Mixed Variational Inequalities and Economic Equilibrium, *Journal of Applied Mathematics*, 2:6, 289-314

residencial, comercial, industrial y eléctrico ; d) los operadores de almacenaje; e) los operadores de la estación de demanda punta y, finalmente, f) los consumidores. Todos operan en mercados competitivos excepto los comercializadores-marketers.

Los operadores de los gasoductos operan en un mercado regulado y maximizan su beneficio neto. Se supone existe una única empresa (803). Los productores y las regiones de consumidores se hallan en los extremos de arcos del gasoducto. Los operadores de la producción se hallan localizados en los nudos de la red y gestionan la exploración y la producción; son agentes competitivos que maximizan sus beneficios netos. Existen las correspondientes clearing conditions en cada nudo.

Los comercializadores-marketers se hallan localizados en los nodos y venden el gas a los sectores residencial, comercial, industrial y eléctrico. Operan bajo los supuestos de Nash-Cournot. Los gestores de almacenaje almacenan gas natural en las dos estaciones no-punta y lo inyectan en la red en la estación con demanda punta. Su función de costes es convexa debido a los costes crecientes de sus operaciones. Los consumidores, finalmente, se hallan representados mediante sus funciones de demanda.

En todos los casos, las condiciones de K-K-T y las market-clearing conditions definen cada operador. El conjunto se configura como un problema de Mixed Nonlinear Complementarity. Los autores analizan la existencia y unicidad de soluciones así como exploran algunos resultados numéricos. Sobre esta base los autores han desarrollado el modelo aplicado [46].

11.6.-El modelo del sector eléctrico español

Un reciente e interesante ejemplo de aplicación al sector eléctrico español lo constituye el trabajo de LINARES et al. (2006) [47] que modeliza el comportamiento de las empresas del sector eléctrico español las cuales se enfrentan a la curva agregada de la demanda sectorial y se hallan sometidas a una restricción conjunta sectorial de sus emisiones expresada también mediante un curva de demanda de permisos de emisión.

Cada empresa maximiza sus beneficios por lo que no existe una única función a optimizar sino tantas como empresas y, por otra parte, existen dos restricciones comunes en las que las variables son las producciones de todas las empresas y que formalizan la función de demanda de electricidad y la demanda de persmisos de emisiones agregadas del sector [48].

[46] El modelo aplicado del sector del gas natural en los USA puede verse en GABRIEL S., KIET S., ZHUANG J. (2005) A large-sacle linear complementarity mode of the North American natural gas market, *Energy Economics*, 27, 639-665

[47] LINARES P., SANTOS F.J., VENTOSA M., LAPIEDRA L.(2006) Impacts of the European Emissions Trading Scheme Directive and Permit Assignment Methods on the Spanish Electricity Sector, *Energy Journal*, Vol.21, No.1

[48] El modelo tiene en cuenta que el mercado europeo de emisiones establece límites a las emisiones máximas del sector energético pero no específicas para el sector eléctrico. La explicación que sigue simplifica este aspecto considerando que la limitación de emisiones afecta al propio sector eléctrico. Un enfoque alternativo podría expresar –obviamente- la asignación al sector de las emisiones máximas y el modelo distribuiría los permisos entre las empresas.

Los ingresos de cada empresa dependen del precio de la electricidad y éste, a su vez, de la producción agregada del sector, entre los costes figuran los relativos a los permisos de las emisiones que se determinan en la función de demanda correspondiente. Las variables relevantes en en estas restricciones no son las producciones de cada empresa sino las producciones agregadas. Los autores formalizan el comportamiento oligopolístico de las F empresas.

El modelo global –no lineal- es el siguiente:

$$Max.w_1 = \pi_1(q_1) \qquad Max.w_2 = \pi_2(q_2) \quad .. \quad Max.w_F = \pi_F(q_F)$$
$$h_1 \le 0 \qquad h_2 \le 0 \qquad h_F \le 0$$

Con las dos restricciones agregadas siguientes:

Precio de la electricidad precio de los permisos de emisiones

$$p^e = \overline{p}^e - \alpha^e \sum_f^F q_f^e \qquad p^p = \overline{p}^p - \alpha^p \sum_f^F q_f^p$$

Estas restricciones deben cumplirse, además de las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker.

$$grad_q L_1(q,u) = \frac{\partial L_1}{\partial q_1} = 0$$

$$h_1 \le 0 \quad u_1 \le 0 \quad u_1.h_1 = 0$$

. . .

. . .

$$grad_q L_F(q,u) = \frac{\partial L_F}{\partial q_F} = 0$$

$$h_F \le 0 \quad u_F \le 0 \quad u_F.h_F = 0$$

Con:

$$p^e = \overline{p}^e - \alpha^e \sum_f^F q_f^e \qquad\qquad p^p = \overline{p}^p - \alpha^p \sum_f^F q_f^p$$

Las variables duales del modelo poseen la interpretación matemática y económica convencional de modo que se pueden utilizar para evaluar cambios marginales respecto a la configuración óptima obtenida tanto a nivel global como de empresa.

La singularidad del modelo -posible gracias a la CL- consiste pues en que trata el comportamiento de varias empresas sometidas a la influencia de los resultados agregados. Los métodos convencionales de optimización no permiten, evidentemente, tratar estos casos. La capacidad de incorporar restricciones comunes a los diversos agentes es muy adecuada para tratar, por ejemplo, las externalidades ambientales y las políticas correpondientes.

12-<u>CONCLUSIONES</u>

Hasta los años 80s, los métodos analizados tendían a interpretarse como procedimientos de planificación, centralizada o no; esta afirmación resulta especialmente cierta en los casos de los algoritmos de Dantzig y Wolfe y en el de Benders. Dicha tendencia deriva, muy probablemente, de la proximidad de los orígenes de la programación matemática con su interpretación económica: en este sentido, es conocido el papel que jugaron en los orígenes de ésta ARROW, DANTZIG, HURWICZ, SAMUELSON y UZAWA – entre otros- en los orígenes de aquélla [49].

Una limitación de las metodologías del primer período consiste en que se trata de técnicas que permiten sólo tratar problemas caracterizados por una única función objetivo o bien que utilizan ésta ésta con el fin que generar precios de equilibrio parcial. Así pues, no permiten tratar problemas con varios agentes.

Las nuevas metodologías analizadas abren nuevas posibilidades relacionadas con: a) los equilibrios de mercado; b) la consideración de varios agentes, situados al mismo nivel o a dos niveles; c) la incorporación de las reacciones de un agente situado en el segundo nivel; d) la incorporación de restricciones comunes a varios agentes como pueden ser ecuaciones de demanda o bien restricciones relativas a las emisiones.

Los algoritmos de la primera etapa mantienen su relevancia pero únicamente como procedimientos de cálculo, de resolución numérica de problemas de grandes

---

[49] Véase ABRAMOVIYZ M. et al. (1959) The allocation ef economic resoouces, Stanford University Press, Stanford USA. CHENERY H.B. (1959) The Interdependence of Investment Decisions. ABRAMOVIYZ M. et al. (1959). KOOPMANS T.C. (1951).*<u>Activity analysis of production and allocation</u>*, Lohn Wiley & Sons, New York USA. SAMUELSON P.A. (1949) Market Mechanism and Maximization, Rand Corpora-tion, P-69UZAWA H. (1960) Market Mechanisms and Mathematical Programming, *<u>Econometrica</u>*, Vol.28, 4 october, in ABRAMOVIYZ M. et al..(1959).

dimensiones, sin interpretación económica del proceso: así, los procedimientos de Dantzig y Wolfe y Benders aparecen únicamente desde este perspectiva[50].

BIBLIOGRAFIA

-ABRAMOVIYZ M. et al. (1959) The allocation ef economic resoouces, Stanford University Press, Stanford USA

-AHN Byong-hun (1979) *Computation of Market Equilibria for Policy Analysis*, Garland Publishing, Inc. New York & London

-AMOUZEGAR M.A., MOSHIRVAZIRI K. (1999) Determining optimal control policies: An application of bilevel programming, *European Journal of Operational Research*, 119, 1, pp.100-120

-AUERBACH A.J, FELDSTEIN M. (1987) *Handbook of Public Economics*, vol.I,II North Holland Pu., New York

-BARBOLLA R., CERDÁ E., SANZ P.(2001) *Optimización. Cuestiones, ejercicios y aplicaciones a la economia*, Pearson Educación, Madrid.

-BARD J.F. (1998) *Practical Bilevel Optimization*, Kluwer Academic Pu.,Dordrecht

-BESSIÈRE F. (1970) The "Investnent85" Model of Electricité de France, *Management Science*, Vol.7, No.4, december 192-211

-BESSIERE F., SAUTER,E. (1968) Optimization and suboptimization: the method of extended models in the non-linear case, *Management Science*, September 1968

-BRUCE A.McCarl.,SPREEN Th.H. (1980) Price Endogenous Mathematical Programming as a Tool for Sector Analysis, *American Journal of Agricultural Economics*, February

-CANDLER W., NORTON R. (1977) Multi-Level Programming and Development Policy, Working Paper No.258, World Bank, Washington DC (may 1977)

------- CANDLER W. TOWNSELY R. (1982) A Linear Two-Level Programming Problem, Computer and Operations Research, Vol.9, No.1, pp.59-76

-CHENERY H.B. (1959) The Interdependence of Investment Decisions, in ABRAMOVIYZ M. et al. (1959)

-CLARK P.B., FOXLEY A., JUL A.M. (1973) *Project evaluation within a Macroeconomic Framework*, in ECKHAUS, ROSENSTEIN-RODAN P.N. eds. (1974) *Analysis of development problems*, North Holland Pu,

-COLSON B.,MARCOTTE P., SVARD g. (2005) Bilevel Programming: A Survey, *4OR*, 3, 87-107

------ MARCOTTE P., SAVARD G.(2007) An overview of bilevel optimization, *Annals of Operations research*, Vol.153, No.1, september

-COTTLE R.W., PLANG J-S., STONE R.E.(2009) *The Linear Complemetarity Problem*, SIAM, Philadelphia 1a el 1992

-DASGUPTA P., MÄLER K.G, eds.(2004) *The Economics of Non-Convex Ecosystems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands

[50] Véase Fuller D., Chung W. (2008) Benders decomposition for a class of variational inequalities, *European Journal of Operational Research*, 18, 76-91.

------ MÁLER K-G.(2003) *The economics of non-convex systems*, Kluwer Academic Publishers

-DEMPE S.(2002) *Foundations of Bilevel Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

------ (2003) An Annotated Bibliography on Bilevel Programming and Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, *Optimization*, 52, 33-359

------KALASHNIKOV V. RÍOS-MERCADO R. (2005) Discrete Bilevel Programming: Application to a Natural Gas Cash-Out Problem, *European Journal of Operational Research*, 166,469-488

-DRÈZE J., STERN, N. (1987) The Theory of Cost-Benefit Analysis, in AUERBACH.A.J., FELDSTEIN M. (1987), Vol.II

-DULOY J.H., NORTON R.D (1973) CHAC, A programming model of mexican agriculture, pp.291-337 in GOREUX L.M., MANNE A.S (1973) *Multi-level planning: case studies in Mexico*, North Holland Pu. Co. Amsterdam

-ECKAUS, ROSENSTEIN-RODAN P.N.(eds.) *Analysis of development problems*, North Holland Pu, New York

-FACCHINEI F., PANG J-S. (2003) *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, Springer-Verlag, New York

-FERRIS M.C., PANG J.S.(1997) Engineering and economic applications of complementarity problems, SIAM Rev. Vol.39, no. 4, 76-91

-FULLER J.D.,CHUNG W.(2008) Benders decomposition for a class of variational inequalities, *European Journal and Operational Research*, 185,(2008) 76-91

-GABRIEL,S.,KYDES A.,WHITMAN,P.(2001) The National Energy Modelling System: A Large-Scale Energy-Economic Equilibrium Model, *Operations Research*,Vol.4, No.1,januaery-February 2001,pp 14-25

------ KIET S., ZHUANG J. (2005) A Mixed Complementarity-Based Equilibrium Model of Natural Gas Markets, *Operations Research*. Vol.53, September-october, pp.799-818

-GOREUX L.M., MANNE A. (1973) *Multilevel Planning: Case Studies in Mexico*, North Holland Pu.Co Amsterdam, London

-HARKER P.T., PANG J.S. (1990) Finite-dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: a survey of theory, algorithms and applica-tions, *Mathematical Programming*, 48, 1-3, 161-220

-HARRIS R.G. (1978) “On the Choice of Large Projects”, *Canadian Journal of Economics*, Vol. 11, pp.44-423

-HARTMAN G.J., and STAMPACHIA G.(1966) On some nonlinear elliptic differential equations, *Acta Mathematica* 115, 271–310.

-HAZELL P.B.R.,NORTON R.D. (1986) *Mathematical programming for economic analysis in agriculture*, Macmillan Pu., London

-HOGAN W. (1975) Energy Policy Models for Project Independence, *Computers & Operations Research*, Vol.2, pp.251-271

-HU,J.,MITCHELL J.E.,PANG J-S.,YU B. (2010) *On Linear Programs with Linear Complementarity Constraints, Journal of Global Optimization* 1-23

-KENDRICK D.A.,STOUTJESDIK,A.J.(1978) *The Planning of Industrial Investment Programs*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London

-KINDERLERER D., STAMPACCHIA G.(1980) *A Introduction to Variational Inequalities and Their Applications*, Academic Press, Boston

-KONNOV I.(2007) *Equilibrium Models and Variational Inequalities*, Elsevier Science, Amsterdam, The Netherlands

------ VOLOTSKAYA E.O. (2002) Mixed Variational Inequalities and Economic Equilibrium, *Journal of Applied Mathematics*, 2:6 289-314

-KOOPMANS T.C. (1951) *Activity analysis of production and allocation*, John Wiley & Sons, New York USA

-KORNAI J.(1969) Man-machine Planning, *Economics of Planning*, vol.9, 9, january

-LAFFONT J.J. ed. (2003) *The Principal Agent Model. The Economic Theory of Incentives*, Edward Elgar, Cheltenham UK

-LASDON L.S. (1970) *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Co., New York USA

-LESOURNE J. (1972) *Le calcul économique*, Dunod, Paris

-LINARES P., SANTOS F.J., VENTOSA M., LAPIEDRA L.(2006) Impacts of the European Emissions Trading Scheme Directive and Permit Assignment Methods on the Spanish Electricity Sector, *Energy Journal*, Vol.21, No.1

-LUO Z-Q, PANG J-S, RALPH D. (1996) *Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*, Cambridge University Press, New York

-MANNE A. (1977) *Interdependence in Planning*,The Johns Hopkinns Univrsity Press, Baltimore and London

-MONTGOMERY W.D. (1972) Markets in licenses *and* efficient pollution control programs, *Journal of Economic Theory*, 5, 747-756

-MORLAT G., BESSIÈRE F, (1971) *Vingt cinq ans d´économie eléctrique*, Dunod, Paris

-NAGURNEY A. (1999) *Network Economics: A Variational Inequality Approach*, Kluwer Academic Pu.

------ DHANDA K. (1996) A variational inequality approach for marketable pollution permits, *Computational Economics*, 9,4 (Non.1996): 363-384

------ DHANDA K.K. (2000) Marketable pollution permits in oligopolistic markets with transation costs, *Operations Research*, 48, 3, 424

-NEGISHI T. (1972) *General Equilibrium Theory and International Trade*, North Holland, Amsterdam

-PLANE D.R., McMILLAN jr C. (1971) *Discrete Optimization*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs

-PLESSNER Y. (1967) Activity analysis, quadratic programming and general equilibrium, *International Economic Review*, vol.8, No.2

-SAMUELSON P.A. (1949) Market Mechanism and Maximization, Rand Corporation, P-69

------ (1952) Spatial Price Equilibrium and Linear Programming, *American Economic Review*, Vol.42, pp.283-303

-SCARF H.E.(1990) Mathematical programming and economic Theory, *Operations Research*, vol 38, No.3, may-june

------ (1994) The Allocation of Resources in the Presence of Indivisibilities, *Journal of Economic Perspectives* 8 (4) 117-128

-SEBASTIÁN C. (1976) *El crecimiento económico español 1974-1984: proyecciones mediante un modelo multisectorial de optimización*, Fundación del INI, Programa de Investigaciones Económicas, Madrid

-STARRET D.A. (1988) *Foundations of public economics*, Cambridge University Press. 234-236.

-STAVINS R.N. (1995) Transaction costs and tradeable permits, *Journal of Environamental Economics*, 29, 133-148.

-STERN N. (2007) *The Economics of Climate Change*, The Stern Review, Cambridge U.P., Cambridge UK

------STERN N.(2010) Presidential Address: Imperfections in the Economics of Public Policy, Imperfections in Markets, and Climate Change, *Journal of the European Economic Association*, Volume 8, issue 2-3, April-May 2010

TAKAYAMA T., HASHIMOTO,H. (1984) A comparative Study of Linear Complementarity Models and Linear Programming Models in Multiregional Investment Analysis, *Division Working Paper* No. 1984-1

------ JUDGE,G.G. (1971) *Spatial and Temporal Price and Allocation Models*, North Holland, Amsterdam

- TIROLE J.(1989) *The Theory of Industrial Organization*, The MIT Press, Cambridge USA

-UZAWA H. (1960) Market Mechanisms and Mathematical Programming, *Econometrica*, Vol.28, 4 october, in ABRAMOVIYZ M. ET AL.(1959)

-VEGARA J.M.(1987) *Evaluación pública de grandes proyectos de inversión por integración en modelos macroeconómicos*, Instituto de Estudios Fiscales, Madrid

------ SEBASTIÁN C. (1975) *Project evaluation in a two level framework*, Econometric Society World Congress, Toronto, september 1975

-VEGARA J.M.(director), BUSOM I., COLLDEFORN M., SANCHO F.(2009) *El cambio climático: análisis y política económica. Una introducción*, Servicio de Estudios, La Caixa, Barcelona. Edición electrónica: www.laCaixa.es/estudios

-VICENTE L.N., CALAMAI P.H. (1994) Bilevel and Multilevel Programming: A Bibliographical Review, *Journal of Global Optimization*, 5, 291-306

-WEINGARTNER H.M. (1966) Capital Budgeting of Interrelated Projects: Survey and Synthesis, *Management Science*, No.7, pp.486-516

------ (1967) *Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems* , Markham Pu.Co

-VEGARA J.M., SEBASTIÁN C. (1977) *La evaluación de proyectos en un contexto macroeconómico: un enfoque multinivel*, Fundación del INI-Programa de Investigaciones Económicas, Madrid, 1977.

-WEINGARTNER H.M. (1967) *Mathematical programming and the analysis of capital budgeting problems* , Markham Pu.Co

-WESTPHAL L. (1971) *Planning Investments with Economies of Scale*, North Holland Pu., Amsterdan

* * *