MEMORIA DE BECA DE COLABORACIÓN

Interpolación de operadores bilineales compactos entre espacios L_p

Autor: Víctor Olmos Prieto

Tutor: Fernando Cobos Díaz

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA

Curso: 2018 - 2019

Índice general

Introducción

La interpolación de operadores bilineales ha sido considerada por Calderón y Zygmund [6] para operadores entre espacios L_p y posteriormente por Lions y Peetre [13] y Calderón [5] en sus trabajos famosos sobre el método de interpolación real y complejo, respectivamente. En estos últimos casos, los autores consideran operadores entre espacios de Banach. Calderón también consideró en [5, 10.4] el problema de la interpolación de la compacidad. Un intento por obtener los análogos correspondientes para el método real de interpolación fue hecho por Fernandez y Silva [8].

Recientemente los trabajos de Bényi y Torres [2], Bényi y Oh [4], Hu [11] y otros autores han puesto de manifiesto que los operadores bilineales compactos aparecen de forma natural en el Análisis Armónico. Esto ha propiciado nuevos estudios sobre el comportamiento por interpolación de dichos operadores. Véanse los artículos de Fernández-Cabrera y Martínez [9, 10], Cobos, Fernández-Cabrera y Martínez [7], Mastyło y Silva [14] y Besoy y Cobos [3].

En este trabajo recogemos diversos resultados sobre interpolación de operadores bilineales entre espacios L_p. Consideramos tanto los resultados de acotación de Calderón y Zygmund [6], como ciertos resultados de compacidad de Fernández-Cabrera y Martínez [9, 10].

Comenzamos el Capítulo 1 repasamos resultados básicos sobre esos opera-dores, así como diversos ejemplos concretos. En la primera sección del Capítulo 2 tratamos la interpolación de la acotación entre espacios L_p. Es decir, damos la versión bilineal del Teorema de Riesz-Thorin. Cubrimos incluso el caso en que alguno o los dos espacios de la imagen son cuasi-Banach: L_{r_j} con $0 < r_j < 1$. En la segunda sección del capítulo tratamos la compacidad y en la última sección estudiamos operadores cuya definición sólo indica cómo se comportan sobre las funciones simples.

Capítulo 1

Operadores bilineales compactos

En primer lugar comenzamos con las definiciones básicas. Seguiremos como guión el trabajo de Fernández-Cabrera y Martínez [9], incluyendo todas las demostraciones de aquellos resultados que no se hayan visto en cursos básicos de Análisis Funcional o Análisis Real, las cuales se pueden ver en el artículo de Bényi y Torres [2]. Además incluiremos diversos ejemplos de operadores compactos y no compactos de los artículos anteriores y del de Ramanujan y Schock [15].

Nos referiremos a espacios normados y completos denotando idénticamente a las normas de todos ellos. En casos en los que haya lugar a dudas pondremos como subíndice el espacio.

1.1. Definiciones y propiedades básicas

Sean X, Y y Z espacios de Banach sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Un operador $T : X \times Y \longrightarrow Z$ se dice que es *bilineal* si es lineal en cada variable, en cuyo caso tiene asociadas sus secciones, que son los operadores lineales dados por

$$\forall x \in X, \quad T_x : \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ y & \longmapsto & T_x(y) = T(x,y) \end{array} \qquad \text{y} \qquad \forall y \in Y, \quad T_y : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Z \\ x & \longmapsto & T_y(x) = T(x,y). \end{array}$$

Definición 1.1.1. *Un operador bilineal $T : X \times Y \longrightarrow Z$ se dice que es acotado si*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x,y)\| : \|x\| \leq 1; \|y\| \leq 1\} < \infty. \tag{1.1.1}$$

El valor $\|T\|$ se denomina la norma del operador T.

De forma muy similar al caso lineal se puede probar que un operador bilineal T es acotado si y sólo si es continuo. Se considera en $X \times Y$ la norma $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$. También se puede demostrar que T es acotado si y sólo si existe un $M > 0$ tal que

$$\|T(x,y)\| \leq M\|x\|\|y\| \quad \text{para todo } x \in X \text{ y todo } y \in Y,$$

en cuyo caso la norma es el mínimo de los M cumpliendo esa condición. Denotaremos por

$$\mathcal{B}(X \times Y, Z) = \{T : X \times Y \longrightarrow Z : T \text{ es bilineal y acotado}\}.$$

Proposición 1.1.1. *El espacio $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$ es un espacio de Banach con la norma dada por* (1.1.1).

Demostración. Dados $T, S \in \mathcal{B}(X \times Y, Z)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, para cada $x \in X$ e $y \in Y$,

$$\|(\lambda T + \mu S)(x, y)\| \leq |\lambda|\|T(x, y)\| + |\mu|\|S(x, y)\| \leq (|\lambda|\|T\| + |\mu|\|S\|)\|x\|\|y\|.$$

Esto muestra que $\lambda T + \mu S \in \mathcal{B}(X \times Y, Z)$, luego éste es un espacio vectorial. Además tomando $\lambda = \mu = 1$ se obtiene la desigualdad triangular para el funcional $\| \cdot \|$.

Por otro lado, de 1.1.1 se deduce que $\|T\| = 0$ si y sólo si T es idénticamente 0, y que $\|\lambda T\| = |\lambda|\|T\|$. Esto demuestra que $\| \cdot \|$ es en efecto una norma en $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$.

Ahora sea $(T_n)_n$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$. Para cada par $(x, y) \in X \times Y$, se tiene que

$$\|T_n(x, y) - T_m(x, y)\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\|\|y\| \longrightarrow 0 \quad \text{cuando } n, m \to \infty.$$

Luego la sucesión $(T_n(x, y))_n$ es de Cauchy, así que es convergente en Z por ser éste de Banach.

Definimos

$$T(x, y) = \lim_{n \to \infty} T_n(x, y).$$

De la bilinealidad de los T_n y la linealidad del límite se deduce que T es un operador bilineal de $X \times Y$ en Z.

Para ver que es acotado y que $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$, sea $\varepsilon > 0$. Por ser $(T_n)_n$ de Cauchy existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n, m \geq N$ se tiene $\|T_n - T_m\| \leq \varepsilon$. Por la continuidad de la norma, para cada $(x, y) \in X \times Y$ y cada $n \geq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|T_n(x, y) - T(x, y)\| &= \left\|T_n(x, y) - \lim_{m \to \infty} T_m(x, y)\right\| = \\ &= \lim_{m \to \infty} \|T_n(x, y) - T_m(x, y)\| \leq \varepsilon\|x\|\|y\|. \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

Por tanto

$$\|T(x, y)\| \leq \|T(x, y) - T_N(x, y)\| + \|T_N(x, y)\| \leq (\varepsilon + \|T_N\|)\|x\|\|y\|,$$

lo que muestra que $T \in \mathcal{B}(X \times Y, Z)$. Además de (1.1.2) se deduce que $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ para $n \geq N$, y por tanto $T_n \longrightarrow T$ en $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$. $\square$

La acotación de un operador bilineal T es a su vez equivalente a la acotación de T_x y T_y para todo $x \in X$ e $y \in Y$, para lo cual es fundamental que los espacios sean de Banach ya que el resultado se basa en el Teorema de Banach-Steinhaus (ver por ejemplo el libro de Rudin [16, pág. 52]).

Teorema 1.1.1. *Sean X, Y y Z espacios de Banach y $T : X \times Y \longrightarrow Z$ un operador bilineal. Entonces T es continuo si y sólo si sus secciones T_x y T_y son continuas para todo $x \in X$ y todo $y \in Y$.*

Demostración. Por un lado si T es continuo, dado $x \in X$,

$$\|T_x(y)\| = \|T(x, y)\| \leq (\|T\| \cdot \|x\|) \cdot \|y\| \qquad \text{para todo } y \in Y.$$

Por tanto T_x es acotado (y continuo), y análogamente con las secciones T_y.

Para el recíproco sean $(x_0, y_0) \in X \times Y$ y $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times Y$ una sucesión que converja a (x_0, y_0) (en particular converge coordenada a coordenada). Sea $\varepsilon > 0$. Para cada $x \in X$, como T_x es continuo e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a y_0,

$$T_{y_n}(x) = T_x(y_n) \longrightarrow T_x(y_0) = T(x, y_0) \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Por tanto el conjunto $\{T_{y_n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado para cada $x \in X$.

Entonces $\mathcal{T} = \{T_{y_n} : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia de operadores lineales continuos del espacio de Banach X en Z, y puntualmente acotada. Por el Teorema de Banach-Steinhaus $\mathcal{T}$ es uniformemente acotada, es decir, existe un $M > 0$ tal que $\|T_{y_n}\| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, por ser T_{x_0} continuo,

$$T_{x_0}(y_n - y_0) \longrightarrow T_{x_0}(0) = 0 \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

Sea por tanto un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ se tenga $\|x_n - x_0\| < \varepsilon/(2M)$ y $\|T_{x_0}(y_n - y_0)\| < \varepsilon/2$. Entonces si $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \|T(x_n, y_n) - T(x_0, y_0)\| &= \|T(x_n - x_0, y_n) + T(x_0, y_n - y_0)\| \leq \\ &\leq \|T(x_n - x_0, y_n)\| + \|T(x_0, y_n - y_0)\| = \\ &= \|T_{y_n}(x_n - x_0)\| + \|T_{x_0}(y_n - y_0)\| < \\ &< \|T_{y_n}\| \cdot \|x_n - x_0\| + \frac{\varepsilon}{2} < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es decir, $T(x_n, y_n)$ converge a $T(x_0, y_0)$ y por tanto T es continuo. □

Sin embargo el concepto en el que se basa este trabajo es el de compacidad:

Definición 1.1.2. *Un operador bilineal $T : X \times Y \longrightarrow Z$ entre espacios de Banach se dice que es compacto si para cualquier conjunto acotado $W \subset X \times Y$, su imagen $T(W)$ es relativamente compacto en Z, es decir, si $\overline{T(W)}$ es compacto.*

A continuación probaremos una serie de resultados fundamentales sobre este tipo de operadores. Empezamos por una caracterización básica de los operadores bilineales compactos que será de utilidad. En lo que sigue $B_{r,X\times Y}$ denota la bola abierta de radio r en $X \times Y$, y usamos una notación similar para X e Y.

Proposición 1.1.2. *Sean X, Y y Z espacios de Banach, y sea $T : X \times Y \longrightarrow Z$ un operador bilineal. Las afirmaciones que siguen son equivalentes:*

a) T es compacto

b) Para todo $r > 0$, $T(B_{r,X\times Y})$ es relativamente compacto

c) Para cualesquiera $r_1, r_2 > 0$, $T(B_{r_1,X} \times B_{r_2,Y})$ es relativamente compacto

d) Para cualesquiera $A \subset X$ y $B \subset Y$ acotados, $T(A \times B)$ es relativamente compacto

e) Para toda sucesión acotada $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times Y$, la sucesión $(T(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente

Demostración.

$a) \Rightarrow b)$ Se sigue porque $B_{r,X\times Y}$ es acotado.

$b) \Rightarrow c)$ Como $B_{r_1,X} \times B_{r_2,Y} \subset B_{r_1+r_2,X\times Y}$, se tiene que

$$\overline{T\left(B_{r_1,X} \times B_{r_2,Y}\right)} \subset \overline{T\left(B_{r_1+r_2,X\times Y}\right)}.$$

Por hipótesis $\overline{T\left(B_{r_1+r_2,X\times Y}\right)}$ es compacto, luego $T\left(B_{r_1,X} \times B_{r_2,Y}\right)$ es también relativamente compacto.

$c) \Rightarrow d)$ Por ser acotados, $A \subset B_{r_1,X}$ e $B \subset B_{r_2,Y}$ para algunos $r_1, r_2 > 0$. Entonces $T(A\times B) \subset T\left(B_{r_1,X} \times B_{r_2,Y}\right)$, luego es relativamente compacto.

$d) \Rightarrow e)$ Una sucesión acotada $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ está contenida en algún producto de bolas $B_{r_1,A} \times B_{r_2,B}$.

Por $d)$, $\{T(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset T\left(B_{r_1,A} \times B_{r_2,B}\right)$ es un conjunto relativamente compacto, luego por la caracterización de la compacidad mediante sucesiones en espacios métricos, $(T(x_n, y_n))_n$ tiene alguna subsucesión convergente.

$e) \Rightarrow a)$ Sea $W \subset X \times Y$ acotado. Por $e)$ toda sucesión en $T(W)$ tiene una subsucesión convergente, así que $T(W)$ es relativamente compacto.

□

Ahora, de la misma forma que para operadores bilineales acotados, conviene considerar el espacio de los operadores bilineales compactos y estudiar la relación entre ambos. Dados X, Y y Z espacios de Banach, denotaremos por

$$\mathcal{K}(X \times Y, Z) = \{T : X \times Y \longrightarrow Z : T \text{ es bilineal y compacto}\}.$$

Proposición 1.1.3. *Sean X, Y y Z espacios de Banach. Entonces:*

a) $\mathcal{K}(X \times Y, Z)$ *es un espacio vectorial*

b) $\mathcal{K}(X \times Y, Z) \subset \mathcal{B}(X \times Y, Z)$

Demostración.

$a)$ Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{K}(X \times Y, Z)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Para ver que $T = \lambda T_1 + \mu T_2$ es compacto usamos el apartado $d)$ de la proposición anterior: sea $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times Y$ una sucesión acotada y $z_n = T(x_n, y_n) \in Z$.

Como T_1 es compacto, existe una subsucesión convergente $(T_1(x_{n_k}, y_{n_k}))_{k\in\mathbb{N}}$. De nuevo, por ser T_2 compacto, existe otra subsucesión de ésta que converge, $(T_2(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}))_{j\in\mathbb{N}}$.

Por tanto $z_{n_{k_j}} = \lambda T_1(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}) + \mu T_2(x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}})$ es una subsucesión de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge, así que T es compacto.

$b)$ Sea $T \in \mathcal{K}(X \times Y, Z)$ y supongamos que no es acotado. Entonces existe una sucesión $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset X \times Y$ tal que

$$\|T(x_n, y_n)\| > n\|x_n\|\|y_n\|.$$

Por tanto la sucesión $((x_n/\|x_n\|, y_n/\|y_n\|))_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, pero su imagen no tiene ninguna subsucesión convergente porque

$$\left\|T\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}, \frac{y_n}{\|y_n\|}\right)\right\| = \frac{\|T(x_n, y_n)\|}{\|x_n\|\|y_n\|} > n. \tag{1.1.3}$$

Esto contradice que T sea compacto.

□

Otro resultado muy importante sobre operadores compactos es que forman un espacio completo, lo que permite ver la compacidad de algunos operadores bilineales aproximándolos por sucesiones de operadores compactos.

Teorema 1.1.2. *Sean X, Y y Z espacios de Banach. Si $(T_n)_n$ es una sucesión de operadores bilineales compactos de $X \times Y$ en Z que converge a un operador bilineal T en la norma de $\mathcal{B}(X \times Y, Z)$, entonces T también es compacto.*

Demostración. Para ver la compacidad de T sea $((x_n, y_n))_n \subset X \times Y$ una sucesión acotada. Por ser T_1 compacto, existe una subsucesión $(x_{n_k^1}, y_{n_k^1})_k$ tal que $(T_1(x_{n_k^1}, y_{n_k^1}))_k$ es convergente. Por serlo T_2 vuelve a existir otra subsucesión de la anterior, $(T_2(x_{n_k^2}, y_{n_k^2}))_k$, que converge. Procediendo por recursión, para cada $m \in \mathbb{N}$ existe una subsucesión $\left(x_{n_k^m}, y_{n_k^m}\right)_k$ de $\left(x_{n_k^{m-1}}, y_{n_k^{m-1}}\right)_k$ tal que $\left(T_m(x_{n_k^m}, y_{n_k^m})\right)_k$ es convergente.

Usamos ahora el argumento diagonal de Cantor tomando $x_i = x_{n_i^i}$ e $y_i := y_{n_i^i}$. Entonces $(T_n(x_i, y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es convergente para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $\varepsilon > 0$.

Por ser $(x_i)_i$ e $(y_i)_i$ acotadas, existe $C > 0$ tal que $\|x_i\|\|y_i\| \leq C$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y como $T_n \longrightarrow T$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq N$ se tiene $\|T - T_n\| < \frac{\varepsilon}{4C}$. Para este N, como $(T_N(x_i, y_i))_i$ es convergente en particular es de Cauchy, existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_N(x_i, y_i) - T_N(x_j, y_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todos $i, j \geq M$.

Por último, si $i, j \geq M$,

$$\begin{aligned}
\|T(x_i, y_i) - T(x_j, y_j)\| &\leq \|(T - T_N)(x_i, y_i)\| + \|T_N(x_i, y_i) - T_N(x_j, y_j)\| + \\
&\quad + \|(T_N - T)(x_j, y_j)\| \leq \\
&\leq \|T - T_N\|\|x_i\|\|y_i\| + \frac{\varepsilon}{2} + \|T_N - T\|\|x_j\|\|y_j\| \\
&< \frac{\varepsilon}{4C}C + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4C}C = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir, la subsucesión $(T(x_i, y_i))_{i\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, y por ser Z de Banach es convergente. Esto prueba la compacidad de T. □

1.2. Ejemplos

A continuación damos varios ejemplos de operadores bilineales compactos y no compactos. Algunos de ellos dan información adicional sobre los operadores compactos, como la relación de la compacidad de un operador con la de sus secciones. Otros ejemplos son operadores clásicos usados en Análisis Funcional.

Ejemplo 1. Un operador bilineal acotado $T : X \times Y \longrightarrow Z$ se dice de *rango finito* si $T(X \times Y)$ es un subespacio de dimensión finita de Z. Si T es de rango finito entonces es compacto. La demostración es sencilla: si $W \subset X \times Y$ es acotado, por ser T continuo, $T(W)$ es acotado. Por tanto $\overline{T(W)}$ es cerrado y acotado en un espacio de dimensión finita, luego compacto.

Ejemplo 2. Dado que cada operador bilineal T tiene asociadas sus secciones y la relación existente entre la acotación de T y la de sus secciones, cabe preguntarse por la relación entre la compacidad de T y la de sus secciones. Si $T : X \times Y \longrightarrow Z$ es bilineal y compacto entonces todas sus secciones T_x y T_y también lo son. Efectivamente, si $x \in X$ y tomamos un conjunto acotado $V \subset Y$, $T_x(V) = T(\{x\} \times V)$ es precompacto en Z (ya que $\{x\} \times V$ es acotado y T compacto). Análogamente para las secciones T_y.

Sin embargo al revés no ocurre, es decir, existen operadores bilineales acotados entre espacios de Banach cuyas secciones son todas compactas, pero que el operador no es compacto. Un ejemplo de esto, que se puede encontrar en el artículo de Ramanujan y Schock [15, pág. 309], se tiene considerando $X = Y = Z = \ell^2$ y el operador $T : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \ell^2$ dado por

$$T(x, y) = (x_j y_j)_{j\in\mathbb{N}}.$$

Nótese que T es acotado ya que $\|T(x, y)\|_2 \le \|x\|_\infty \|y\|_2 \le \|x\|_2 \|y\|_2$.

Veamos que las secciones son compactas: sea por ejemplo $x \in \ell^2$. La sección asociada a x es $T_x(y) = (x_j y_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Definimos para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{rccl} T_{x,n}: & \ell^2 & \longrightarrow & \ell^2 \\ & y & \longmapsto & (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n, 0, \dots). \end{array}$$

Cada $T_{x,n}$ es compacto, porque es de rango finito y continuo, ya que

$$\|T_{x,n}(y)\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j|^2\right)^{1/2} \le \left(\max_{j\in\{1,\dots,n\}} |x_j|\right) \cdot \|y\|_2.$$

Además, como $\lim x_n = 0$, dado $\varepsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \varepsilon$ para $n \ge N$. Por tanto para todo $y \in \ell^2$, si $n \ge N$,

$$\|(T_x - T_{x,n})(y)\|_2^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j y_j|^2 \le \varepsilon^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} |y_j|^2 \le \varepsilon^2 \|y\|_2^2$$

Es decir, $\|T_x - T_{x,n}\| \le \varepsilon$, luego T_x es límite de una sucesión de operadores compactos, y por tanto es compacto. Análogamente para las secciones T_y.

Por otro lado, para ver que no es compacto basta tomar la sucesión $((e_n, e_n))_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^2 \times \ell^2$ (donde $e_n = \chi_{\{n\}}$), que es acotada. Sin embargo la sucesión de las imágenes es $T(e_n, e_n) = e_n$, que no tiene ninguna subsucesión convergente (porque $\|e_n - e_m\|_2 = \sqrt{2}$ siempre que $n \ne m$).

Ejemplo 3. Tomamos $X = Y = Z = \mathcal{C}([0, 1])$ con la norma del máximo. Definimos el operador multiplicación $T : X \times Y \longrightarrow Z$ por $T(f, g) = f \cdot g$. Claramente T es bilineal y acotado. Fijando $f \equiv 1$ la sección asociada a f es $T_f = Id_X$. Pero esta no es compacta porque la imagen de la bola unidad es la misma bola, cuya adherencia no es compacta (por ser $\dim Z = \infty$). Luego las secciones de T no son compactas, y así T tampoco es compacto.

Ejemplo 4. De nuevo sean $X = Y = Z = \mathcal{C}([0, 1])$, pero tomamos ahora el operador $T : X \times Y \longrightarrow Z$ dado por

$$T(f, g)(x) = \int_0^x f(t)g(t)\, dt.$$

Para ver que es compacto sea B la bola unidad abierta de $X = Y$. Si $f, g \in B$ y $x \in [0, 1]$,

$$|T(f, g)(x)| \le \int_0^x |f(t)g(t)|\, dt \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty \cdot x \le \|f\|_\infty \|g\|_\infty < 1$$

Luego $T(B \times B)$ es acotado (y de hecho contenido en B). Además dados $x, y \in [0,1]$,

$$|T(f,g)(y) - T(f,g)(x)| = \left| \int_x^y f(t)g(t)\,dt \right| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \cdot |y-x| < |y-x|$$

Por tanto la familia $T(B \times B)$ es equicontinua. Por el Teorema de Ascoli-Arzelà, $T(B \times B)$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}([0,1])$, luego T es compacto.

Ejemplo 5. Ahora consideramos $X = Y = Z = \mathcal{C}([0,1])$, pero en X e Y consideramos la norma de $L_1([0,1])$ con la medida de Lebesgue y en Z la norma del supremo. De esta forma X e Y dejan de ser espacios de Banach.

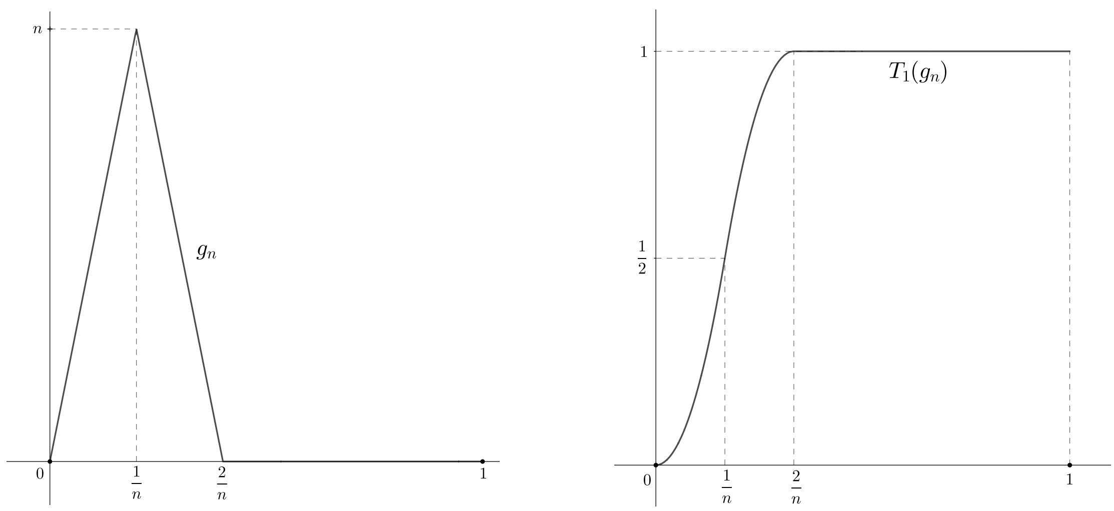
Sea T el mismo operador del ejemplo anterior. Ahora T no es compacto. Para ver esto tomamos la función constante $f \equiv 1$ y consideramos la sección $T_f = T_1$, dada por

$$T_1(g)(x) = \int_0^x g(t)\,dt.$$

Consideramos además la sucesión de funciones

$$g_n(t) = \begin{cases} n^2 t & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1/n \\ 2n - n^2 t & \text{si} \quad 1/n \leq t \leq 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n \leq t \leq 1, \end{cases}$$

(ver Figura 1.1).



(a) Sucesión $(g_n)_n$ (b) Sucesión $(T_1(g_n))_n$

Figura 1.1: Sucesión acotada cuyas imágenes no tienen una subsucesión convergente

La sucesión $(g_n)_n$ es acotada en X porque

$$\|g_n\|_1 = \int_0^1 |g_n(x)|\,dx = 1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Supongamos entonces que $(T_1(g_n))_n$ tuviera una subsucesión $(T_1(g_{n_k}))_k$ convergente en Z. En particular sería de Cauchy y existiría un $J \in \mathbb{N}$ tal que para $j, k \geq J$ se tendría

$$\left\| T_1(g_{n_j}) - T_1(g_{n_k}) \right\|_\infty < \frac{1}{4}. \tag{1.2.1}$$

Fijamos $j = J$ y tomamos un $k \geq J$ tal que $n_k > 2n_J$. Entonces $\frac{1}{n_J} > \frac{2}{n_k}$, así que

$$T_1(g_{n_J})\left(\frac{1}{n_J}\right) = \frac{1}{2}$$

y

$$T_1(g_{n_k})\left(\frac{1}{n_J}\right) = \int_0^{\frac{1}{n_J}} g_{n_k}(t)\,dt = \int_0^{\frac{2}{n_k}} g_{n_k}(t)\,dt = 1.$$

Pero entonces

$$\left\|T_1(g_{n_j}) - T_1(g_{n_k})\right\|_\infty \geq \left|T_1(g_{n_j})\left(\frac{1}{n_J}\right) - T_1(g_{n_k})\left(\frac{1}{n_J}\right)\right| = \frac{1}{2},$$

lo que contradice (1.2.1). Por tanto T_1 no es compacto, así que T tampoco.

Otra forma de ver que T no es compacto es viendo que, en este caso, T no es ni siquiera continuo. Para comprobarlo definimos la sucesión de funciones continuas

$$f_n(t) = \begin{cases} 4n^3t & \text{si} \quad 0 \leq t < 1/(4n^2) \\ n & \text{si} \quad 1/(4n^2) \leq t < 3/(4n^2) \\ -4n^3t + 4n & \text{si} \quad 3/(4n^2) \leq t < 1/n^2 \\ 0 & \text{si} \quad 1/n^2 \leq t < 1 \end{cases}$$

(ver Figura 1.2).

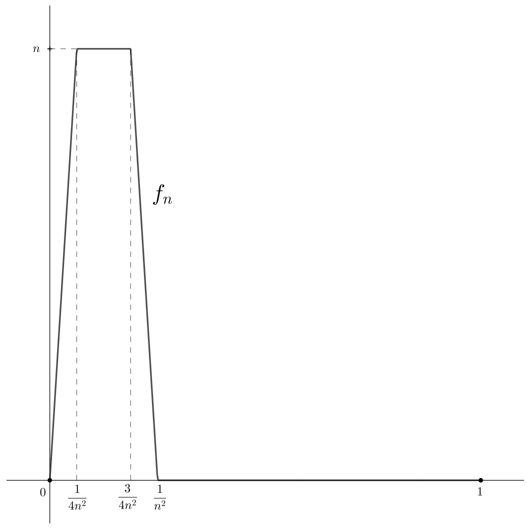


Figura 1.2: Gráfica de f_n

De esta forma la sucesión f_n cumple $0 \leq f_n \leq n\chi_{[0,1/n^2]}$, luego $\|f_n\|_1 \leq 1/n \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$. Es decir, $f_n \longrightarrow 0$ en X y en Y.

Sin embargo para todo $n \in \mathbb{N}$

$$T(f_n, f_n)(1) \;=\; \int_0^1 f_n(t)^2\,dt =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{1}{4n^2}} 16n^6t^2\,dt + \int_{\frac{1}{4n^2}}^{\frac{3}{4n^2}} n^2\,dt + \int_{\frac{3}{4n^2}}^{\frac{1}{n^2}} (-4n^3t+4n)^2\,dt = \\
&= \frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{1}{12}=\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Esto muestra que $\|T(f_n,f_n)\|_\infty \geq \frac{2}{3}$, así que $T(f_n,f_n)$ no converge a 0. Por tanto el operador T no es ni siquiera continuo, así que tampoco compacto.

Ejemplo 6. Sea $(\alpha_{i,j,k})_{i,j,k\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que

$$\sum_{i,j,k=1}^{\infty} |\alpha_{i,j,k}| < \infty.$$

Consideramos el operador bilineal $T:\ell^2\times\ell^2 \longrightarrow \ell^1$ dado por

$$(T(x,y))_i = \sum_{j,k=1}^{\infty} \alpha_{i,j,k}x_jy_k,$$

siendo $x=(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $y=(y_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Está bien definido porque si tomamos $x,y\in B_{1,\ell^2}$, entonces cada coordenada de ambas sucesiones es menor o igual que 1, luego

$$\|T(x,y)\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty}|T(x,y)_i| \leq \sum_{i,j,k=1}^{\infty}|\alpha_{i,j,k}x_jy_k| \leq \sum_{i,j,k=1}^{\infty}|\alpha_{i,j,k}| < \infty.$$

Esto muestra además que T es continuo con norma menor o igual que $\sum_{i,j,k=1}^{\infty}|\alpha_{i,j,k}|$.

Ahora definimos, para cada $n\in\mathbb{N}$, el operador bilineal $T_n:\ell^2\times\ell^2\longrightarrow\ell^1$ dado por

$$T_n(x,y) = \left(T(x,y)_1, T(x,y)_2, \ldots, T(x,y)_n, 0, \ldots\right).$$

Es claro que cada T_n es bilineal y, como $\|T_n(x,y)\|_1 \leq \|T(x,y)\|_1$, T_n es continuo. Más aún, $T\left(\ell^2\times\ell^2\right)$ está contenido en el subespacio de ℓ^1 generado por las sucesiones $(e_j)_{j=1}^n$, luego T_n es continuo y de rango finito, así que es compacto.

Para ver que los operadores T_n aproximan a T sean $x,y\in B_{1,\ell^2}$. Cada coordenada de x e y es menor o igual que 1, luego

$$
\begin{aligned}
\|T(x,y)-T_n(x,y)\|_1 &= \|(0,0,\ldots,0,T(x,y)_{n+1},T(x,y)_{n+2},\ldots)\|_1 \leq \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{\infty}|\alpha_{i,j,k}x_jy_k| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{\infty}|\alpha_{i,j,k}|.
\end{aligned}
$$

Esto implica que $\|T-T_n\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{\infty}|\alpha_{i,j,k}|$, y como la serie $\sum_{i,j,k=1}^{\infty}|\alpha_{i,j,k}|$ converge, $\|T-T_n\|$ tiende a 0 cuando n tiende a ∞. Por tanto T es límite de una sucesión de operadores compactos, luego es compacto.

Ejemplo 7. Si tomamos una función $K\in\mathcal{C}([0,1]^3)$ y definimos el operador $T:L^2(0,1)\times L^2(0,1)\longrightarrow\mathcal{C}([0,1])$ por

$$T(f,g)(s) = \int_0^1\int_0^1 K(s,t,u)f(t)g(u)\,dtdu,$$

es claro que T es bilineal.

Para ver que es compacto veamos que $T(B_{1,L_2} \times B_{1,L_2})$ es relativamente compacto. Por un lado, si $f, g \in B_{1,L_2}$ y $s \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned}
|T(f,g)(s)| &\leq \int_0^1 \int_0^1 |K(s,t,u)f(t)g(u)|\, dtdu \leq \\
&\leq \|K\|_\infty \int_0^1 \int_0^1 |f(t)g(u)|\, dtdu = \\
&= \|K\|_\infty\, \|f\|_1 \|g\|_1 \leq \|K\|_\infty\, \|f\|_2 \|g\|_2 \leq \|K\|_\infty,
\end{aligned}$$

es decir, la familia $T(B_{1,L_2} \times B_{1,L_2})$ está uniformemente acotada.

Por otro lado, dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad uniforme de K existe $\delta > 0$ tal que si $|s_1 - s_2| < \delta$, entonces $|K(s_1,t,u) - K(s_2,t,u)| < \varepsilon$ para todo $t, u \in [0,1]$. Así que si tomamos $f, g \in B_{1,L_2}$ y $s_1, s_2 \in [0,1]$ con $|s_1 - s_2| < \delta$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|T(f,g)(s_1) - T(f,g)(s_2)| &\leq \int_0^1 \int_0^1 |K(s_1,t,u) - K(s_2,t,u)||f(t)||g(u)|\, dtdu \leq \\
&\leq \varepsilon \|f\|_1 \|g\|_1 \leq \varepsilon \|f\|_2 \|g\|_2 < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Por tanto la familia $T(B_{1,L_2} \times B_{1,L_2})$ es equicontinua. Por el Teorema de Ascoli-Arzelà, $T(B_{1,L_2} \times B_{1,L_2})$ es relativamente compacto en $\mathcal{C}([0,1])$, luego T es compacto.

Ejemplo 8. Como último ejemplo tomamos $K \in L_2((0,1)^3)$ y definimos $T : L_2(0,1) \times L_2(0,1) \longrightarrow L_1(0,1)$ mediante la misma expresión del ejemplo anterior, es decir,

$$T(f,g)(s) = \int_0^1 \int_0^1 K(s,t,u)f(t)g(u)\, dtdu.$$

Por la densidad de las funciones continuas de soporte compacto en $L_2((0,1)^3)$, podemos tomar una sucesión $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}([0,1]^3)$ tal que $K_n \longrightarrow K$ en la norma de L_2.

Si definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ el operador bilineal $T_n : L_2(0,1) \times L_2(0,1) \longrightarrow \mathcal{C}([0,1])$ por

$$T_n(f,g)(s) = \int_0^1 \int_0^1 K_n(s,t,u)f(t)g(u)\, dtdu,$$

sabemos que cada T_n es compacto (por el ejemplo previo). Como la inclusión $\mathcal{C}([0,1]) \hookrightarrow L_1(0,1)$ es continua, al componerla con cada T_n obtenemos que los T_n son también compactos de $L_2(0,1) \times L_2(0,1)$ en $L_1(0,1)$.

Por último, T es compacto porque es el límite de los T_n: si $f, g \in B_{1,L_2}$, usando el Teorema de Tonelli y las desigualdades de Hölder y de Jensen,

$$\begin{aligned}
\|T(f,g) - T_n(f,g)\|_1 &\leq \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 |K(s,t,u) - K_n(s,t,u)||f(t)||g(u)|\, dtduds = \\
&= \int_{(0,1)^2} |f(t)||g(u)| \int_0^1 |K(s,t,u) - K_n(s,t,u)|\, ds\, dtdu \leq \\
&\leq \left(\int_{(0,1)^2} |f(t)|^2 |g(u)|^2\, dtdu \right)^{1/2} \cdot
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \cdot \left(\int_{(0,1)^2} \left(\int_0^1 |K(s,t,u) - K_n(s,t,u)|\, ds \right)^2 dtdu \right)^{1/2} \leq \\
\leq \quad & \|f\|_2 \|g\|_2 \left(\int_{(0,1)^3} |K(s,t,u) - K_n(s,t,u)|^2 \, dsdtdu \right)^{1/2} = \\
= \quad & \|K - K_n\|_2 \; \|f\|_2 \|g\|_2.
\end{aligned}
$$

Es decir, $\|T - T_n\| \leq \|K - K_n\|_2 \longrightarrow 0$ cuando $n \to \infty$.

Capítulo 2

Interpolación de operadores bilineales

En este capítulo probamos una serie de resultados de interpolación de operadores bilineales entre espacios L_p, referidos en primer lugar a la acotación, debido a Calderón y Zygmund [6], y en segundo lugar a la compacidad del operador interpolado, siguiendo los artículos de Fernández-Cabrera y Martínez [9, 10]. También dedicaremos una sección a resultados de interpolación en los que los operadores de partida están definidos sólo para funciones simples.

En todo el capítulo el cuerpo base siempre será $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, lo cual es fundamental en el Teorema de Riesz-Thorin y lo será también en los resultados que se expongan aquí. También se supondrá que todos los espacios de medida son σ-finitos, lo que permitirá aplicar los teoremas de Fubini y Tonelli.

2.1. El Teorema de Riesz-Thorin para operadores bilineales

Comenzamos demostrando el Teorema de Riesz-Thorin para operadores bilineales. Este teorema, como su análogo para el caso lineal, permite obtener información sobre la norma de un operador entre dos espacios L_p sabiendo su norma entre otros espacios.

Para tratar de simplificar la demostración probamos antes un lema previo.

Lema 2.1.1. *Sean (Y, ν) un espacio de medida, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ y $k > 0$. Para cada $z \in \overline{\Omega}$ sea $h_z : Y \longrightarrow \mathbb{C}$ una función medible cumpliendo:*

- *Existe una función integrable $H : Y \longrightarrow [0, \infty]$ tal que $|h_z|^k \leq H$ para todo $z \in \overline{\Omega}$*
- *Para cada $y \in Y$ fijo, la función de z dada por $h_z(y)$ es holomorfa en Ω*
- *Si definimos $F(z) = \int_Y |h_z|^k \, d\nu$, para todo $t \in \mathbb{R}$ se tiene que $F(it) \leq M_0$ y $F(1+it) \leq M_1$*

Entonces para cada $0 < \theta < 1$ y $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$F(\theta + it) = \int_Y |h_{\theta+it}|^k \, d\nu \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

Demostración. En primer lugar veamos que F es continua en $\overline{\Omega}$: sea $z_0 \in \overline{\Omega}$ y $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{\Omega}$ convergente a z_0. Entonces, por ser $h_z(y)$ continua en z_0 para cada $y \in Y$,

$$|h_{z_n}|^k \longrightarrow |h_{z_0}|^k \quad \text{cuando } n \to \infty.$$

Además para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ la función $|h_{z_n}|^k$ está acotada por H, que es integrable, y por tanto por el Teorema de la Convergencia Dominada, cuando $n \to \infty$

$$F(z_n) = \int_Y |h_{z_n}|^k \, d\nu \longrightarrow \int_Y |h_{z_0}|^k \, d\nu = F(z_0).$$

Ahora para cada $\varepsilon > 0$ y cada $\lambda \in \mathbb{R}$ definimos en $\overline{\Omega}$ la función

$$F_\varepsilon(z) = \int_Y \left| e^{\varepsilon z^2 + \lambda z} \right| \cdot |h_z|^k \, d\nu = \left| e^{\varepsilon z^2 + \lambda z} \right| \cdot F(z) \tag{2.1.1}$$

que es continua en $\overline{\Omega}$ por ser producto de funciones continuas.

Para cada $y \in Y$ fijo la función de z dada por $|e^{\varepsilon z^2 + \lambda z}| \cdot |h_z(y)|^k = |e^{(\varepsilon z^2 + \lambda z)/k} \cdot h_z(y)|^k$ es subarmónica, por ser el módulo de una función holomorfa elevado a una potencia positiva (esto se puede ver por ejemplo en el Teorema 17.3 del libro de Rudin [17, p. 336], y es una sencilla consecuencia de la desigualdad de Jensen). Veamos que F_ε también es subarmónica en Ω. Para ello nos basaremos en el libro de Ahlfors [1, p. 246], el hecho de que $|e^{\varepsilon z^2 + \lambda z}| \cdot |h_z(y)|^k$ es subarmónica y el Teorema de Tonelli. Sean $z_0 \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $D(z_0; r) \subset \Omega$.

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(z_0) &= \int_Y \left| e^{\varepsilon z_0^2 + \lambda z_0} \right| \cdot |h_{z_0}|^k \, d\nu \leq \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_Y \int_0^{2\pi} \left| e^{\varepsilon (z_0 + re^{it})^2 + \lambda (z_0 + re^{it})} \right| \cdot \left| h_{z_0 + re^{it}} \right|^k \, dt \, d\nu = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_Y \left| e^{\varepsilon (z_0 + re^{it})^2 + \lambda (z_0 + re^{it})} \right| \cdot \left| h_{z_0 + re^{it}} \right|^k \, d\nu \, dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_\varepsilon(z_0 + re^{it}) \, dt
\end{aligned}$$

Ahora observamos que, si $z = a + bi \in \overline{\Omega}$ y $C = \int_Y H \, d\nu < \infty$, como $a \leq 1$,

$$F_\varepsilon(z) = e^{\varepsilon(a^2 - b^2) + \lambda a} \cdot \int_Y |h_z|^k \, d\nu \leq e^{-\varepsilon b^2} \cdot e^{\varepsilon a^2 + \lambda a} \cdot \int_Y H \, d\nu = C \cdot e^{-\varepsilon b^2} \cdot e^{\varepsilon a^2 + \lambda a} \leq C \cdot e^{-\varepsilon b^2} \cdot e^{\varepsilon + \lambda}$$

Y por tanto F_ε tiende a 0 cuando $\mathrm{Im}(z) \to \pm\infty$ uniformemente en $\mathrm{Re}(z)$.

Además

$$F_\varepsilon(it) = e^{-\varepsilon t^2} \cdot \int_Y |h_{it}|^k \, d\nu \leq M_0 \quad \text{y} \quad F_\varepsilon(1 + it) = e^{-\varepsilon t^2} \cdot e^{\varepsilon + \lambda} \cdot \int_Y |h_{1+it}|^k \, d\nu \leq e^{\varepsilon + \lambda} \cdot M_1.$$

Ahora dado $\delta > 0$ existe un $R > 0$ tal que si $|\mathrm{Im}(z)| \geq R$ entonces $F_\varepsilon(z) < \delta$. Pero por el principio del máximo para funciones subarmónicas, en el rectángulo $[0, 1] \times [-R, R]$ la función F_ε ha de alcanzar su máximo sobre el borde.

Si $M_0 = 0$ y $M_1 > 0$, tomando $\delta < M_1$ se tiene que $F_\varepsilon(z) \leq \delta$ para $z \in [0, 1] \times [-R, R]$, y por tanto para todo $z \in \overline{\Omega}$. Haciendo tender δ a 0, se llega a que $F_\varepsilon(z) = 0$ (obsérvese que $F_\varepsilon \geq 0$ por definición). Luego se tiene lo que se quería demostrar. El mismo argumento sirve si $M_1 = 0$ o si $M_0 = M_1 = 0$.

Si M_0 y M_1 son ambos no nulos, tomando $\delta < \text{máx}\{M_0, M_1\}$ la cota de la función F_ε en $[0, 1] \times [-R, R]$ es la cota sobre los lados verticales del rectángulo: $\text{máx}\{M_0, M_1 \cdot e^{\varepsilon + \lambda}\}$. Por tanto esa cota se tiene para toda la banda, es decir,

$$F_\varepsilon(z) \leq \text{máx}\{M_0, M_1 \cdot e^{\varepsilon + \lambda}\}.$$

De aquí y de (2.1.1) despejamos $F(z)$ y resulta

$$F(\theta+it) \leq e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)-\lambda\theta} \cdot \text{máx}\{M_0, M_1 \cdot e^{\varepsilon+\lambda}\} = e^{-\varepsilon(\theta^2-t^2)} \cdot \text{máx}\{M_0 \cdot e^{-\lambda\theta}, M_1 \cdot e^{\varepsilon+\lambda(1-\theta)}\}.$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, haciéndolo tender a 0 se llega a

$$F(\theta+it) \leq \text{máx}\{M_0 \cdot e^{-\lambda\theta}, M_1 \cdot e^{\lambda(1-\theta)}\},$$

y como esto se cumple para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, tomando $e^\lambda = M_0/M_1$ se tiene lo que se quería:

$$F(\theta+it) \leq \text{máx}\left\{M_0 \cdot \frac{M_1^\theta}{M_0^\theta},\ M_1 \cdot \frac{M_0^{1-\theta}}{M_1^{1-\theta}}\right\} = M_0^{1-\theta}M_1^\theta.$$

□

Recordemos que para operadores lineales el Teorema de Riesz-Thorin con el rango completo de los parámetros q se debe a Calderón y Zygmund [6]. Lo enunciados seguidamente ya que será de utilidad para aplicarlo al caso bilineal.

Teorema 2.1.1 (Teorema de Riesz-Thorin). *Sean $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, $0 < q_0, q_1 \leq \infty$ y (X,μ) e (Y,ν) dos espacios de medida. Sea T un operador lineal definido en $L_{p_0}(X)+L_{p_1}(X)$ y con valores en $L_{q_0}(Y)+L_{q_1}(Y)$ cumpliendo que*

$$T : L_{p_0}(X) \longrightarrow L_{q_0}(Y) \qquad \textit{es continuo con cuasi-norma } M_0,\ \textit{y}$$

$$T : L_{p_1}(X) \longrightarrow L_{q_1}(Y) \qquad \textit{es continuo con cuasi-norma } M_1.$$

Si $0 < \theta < 1$ y definimos

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad \textit{y} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},$$

entonces T lleva continuamente $L_p(X)$ en $L_q(Y)$ con cuasi-norma $M \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta$.

A continuación demostramos el Teorema de Riesz-Thorin para operadores bilineales. Este resultado también se debe a Calderón y Zygmund [6, p. 199]. De hecho, en [6] el resultado se enuncia de forma más general, es decir, para operadores multilineales.

Para la demostración del teorema, como es habitual, dado $1 \leq p \leq \infty$ denotaremos por p' al exponente conjugado de p, es decir, al que cumple $1/p + 1/p' = 1$.

Teorema 2.1.2 (Teorema de Riesz-Thorin para operadores bilineales). *Sean (X,μ), (Y,ν) y (Z,τ) tres espacios de medida. Sean $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, $0 < r_0, r_1 \leq \infty$ y $0 < \theta < 1$. Definimos*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad \textit{y} \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

Sea T un operador bilineal acotado de $(L_{p_0}(X)+L_{p_1}(X)) \times (L_{q_0}(Y)+L_{q_1}(Y))$ en $L_{r_0}(Z)+L_{r_1}(Z)$ tal que

$$T : L_{p_0}(X) \times L_{q_0}(Y) \longrightarrow L_{r_0}(Z) \qquad \textit{tiene cuasi-norma } M_0,\ \textit{y}$$

$$T : L_{p_1}(X) \times L_{q_1}(Y) \longrightarrow L_{r_1}(Z) \qquad \textit{tiene cuasi-norma } M_1.$$

Entonces

$$T : L_p(X) \times L_q(Y) \longrightarrow L_r(Z) \qquad \textit{es acotado con cuasi-norma } M \leq M_0^{1-\theta}M_1^\theta.$$

Demostración. Supongamos primero que $p_0 = p_1 = p$ y $q_0 = q_1 = q$. Podemos suponer $r_0 \neq r_1$ y por tanto $r < \infty$, ya que de lo contrario no hay nada que demostrar. Como $(1-\theta)r/r_0 + \theta r/r_1 = 1$, si $f \in L_p(X)$ y $g \in L_q(Y)$, aplicando la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|T(f,g)\|_r &= \left(\int_Z |T(f,g)|^{(1-\theta)r} \cdot |T(f,g)|^{\theta r}\, d\tau\right)^{1/r} \leq \\
&\leq \left(\int_Z |T(f,g)|^{r_0}\, d\tau\right)^{(1-\theta)/r_0} \cdot \left(\int_Z |T(f,g)|^{r_1}\, d\tau\right)^{\theta/r_1} = \\
&= \|T(f,g)\|_{r_0}^{1-\theta} \cdot \|T(f,g)\|_{r_1}^{\theta} \leq M_0^{1-\theta}\|f\|_{p_0}^{1-\theta}\|g\|_{q_0}^{1-\theta} \cdot M_1^{\theta}\|f\|_{p_1}^{1-\theta}\|g\|_{q_1}^{\theta} = \\
&= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \cdot \|f\|_p \cdot \|g\|_q.
\end{aligned}$$

Ahora supongamos $q_0 \neq q_1$, en cuyo caso $q < \infty$. Si $p = \infty$ entonces $p_0 = p_1 = \infty$, y fijamos $f \in L_p(X)$, de forma que el operador T_f definido por $T_f(g) = T(f,g)$ cumple:

- Si $g \in L_{q_0}(Y)$ entonces $\|T_f(g)\|_{r_0} = \|T(f,g)\|_{r_0} \leq (M_0\|f\|_p) \cdot \|g\|_{q_0}$
- Si $g \in L_{q_1}(Y)$ entonces $\|T_f(g)\|_{r_1} = \|T(f,g)\|_{r_1} \leq (M_1\|f\|_p) \cdot \|g\|_{q_1}$

O, dicho de otra forma,

$$T_f : L_{q_0}(Y) \longrightarrow L_{r_0}(Z) \qquad \text{con cuasi-norma menor o igual que } M_0\|f\|_p, \text{ y}$$

$$T_f : L_{q_1}(Y) \longrightarrow L_{r_1}(Z) \qquad \text{con cuasi-norma menor o igual que } M_1\|f\|_p.$$

Por el Teorema de Riesz-Thorin para operadores lineales (Teorema 2.1.1), esto implica que $T_f : L_q(Y) \longrightarrow L_r(Z)$ con cuasi-norma menor o igual que

$$(M_0\|f\|_p)^{1-\theta} \cdot (M_1\|f\|_p)^{\theta} = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \cdot \|f\|_p,$$

o lo que es lo mismo, que dada $g \in L_q(Y)$ se tiene

$$\|T_f(g)\|_r = \|T(f,g)\|_r \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \cdot \|f\|_p \cdot \|g\|_q,$$

que es lo que se quería demostrar. La prueba es análoga si $p_0 \neq p_1$ y $q = \infty$.

Los casos que quedan son en los que $p < \infty$ y $q < \infty$. Para ello sea $0 < k < \min\{1, r_0, r_1\}$, y sean S_X, S_Y y S_Z los conjuntos de funciones simples en X, Y y Z, respectivamente, que se anulan fuera de un conjunto de medida finita. Por ser $1 \leq p, q < \infty$, S_X y S_Y son densos en $L_p(X)$ y $L_q(Y)$. Por tanto es suficiente ver que si $f \in S_X$ y $g \in S_Y$ con $\|f\|_p = 1 = \|g\|_q$, entonces $\|T(f,g)\|_r \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

Si $f \in S_X$ y $g \in S_Y$, como

$$\frac{k}{r} = (1-\theta)\frac{k}{r_0} + \theta\frac{k}{r_1} < 1,$$

se tiene por tanto que

$$\|T(f,g)\|_r^k = \left\| |T(f,g)|^k \right\|_{r/k} = \sup\left\{\int_Z |T(f,g)|^k\, h\, d\tau : h \in S_Z,\ \|h\|_{(r/k)'} = 1,\ h \geq 0\right\}. \tag{2.1.2}$$

Por tanto sean f, g y h fijas en las condiciones anteriores. Las podemos escribir en la forma

$$f = \sum_{n=1}^{N} a_n \chi_{A_n}, \quad g = \sum_{m=1}^{M} b_m \chi_{B_m} \quad \text{y} \quad h = \sum_{j=1}^{J} c_j \chi_{C_j},$$

donde los conjuntos A_r, B_s y C_j son disjuntos, respectivamente, de medida finita. El objetivo es probar que

$$\int_Y |T(f,g)|^k \, h \, d\tau \leq (M_0^{1-\theta} M_1^{\theta})^k. \tag{2.1.3}$$

Para cada $s \in \mathbb{C}$ sean

$$\alpha(s) = \frac{1-s}{p_0} + \frac{s}{p_1}, \quad \beta(s) = \frac{1-s}{q_0} + \frac{s}{q_1} \quad \text{y} \quad \gamma(s) = \frac{1-s}{r_0} + \frac{s}{r_1}.$$

Pongamos

$$\begin{cases} \varphi_s(x) = |f(x)|^{p\cdot\alpha(s)-1} \cdot f(x) & \text{para } x \in X, \\ \psi_s(y) = |g(y)|^{q\cdot\beta(s)-1} \cdot g(y) & \text{para } y \in Y, \text{ y} \\ \omega_s(z) = h(z)^{(1-k\cdot\gamma(s))/(1-k/r)} \cdot h(z) & \text{para } z \in Z. \end{cases}$$

También definimos

$$F(s) = \int_Z |T(\varphi_s, \psi_s)|^k \cdot |\omega_s| \, d\tau.$$

Para poder aplicar el Lema 2.1.1 empecemos viendo que esas funciones son holomorfas en la variable s:

$$\varphi_s = \sum_{n=1}^{N} |a_n|^{p\cdot\alpha(s)-1} \cdot a_n \cdot \chi_{A_n}, \qquad \psi_s = \sum_{m=1}^{M} |b_m|^{q\cdot\beta(s)-1} \cdot b_m \cdot \chi_{B_m} \quad \text{y}$$

$$\omega_s = \sum_{j=1}^{J} c_j^{(1-k\cdot\gamma(s))/(1-k/r)} \cdot \chi_{C_j}.$$

Luego por la bilinealidad de T

$$T(\varphi_s, \psi_s) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} |a_n|^{p\cdot\alpha(s)-1} \cdot a_n \cdot |b_m|^{q\cdot\beta(s)-1} \cdot b_m \cdot T(\chi_{A_n}, \chi_{B_m}).$$

Entonces para cada $z \in Z$ fijo, la función $T(\varphi_s, \psi_s)(z) \cdot \omega_s(z)^{1/k}$ es holomorfa en s. Además para un s con $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ las partes reales de α, β y γ están acotadas, luego (por ser también $k < 1$)

$$|T(\varphi_s, \psi_s)|^k \leq R_1 \cdot \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} |T(\chi_{A_n}, \chi_{B_m})|^k \quad \text{y}$$

$$|\omega_s| = \sum_{j=1}^{J} c_j^{(1-k\,\mathrm{Re}(\gamma(s)))/(1-k/r)} \cdot \chi_{C_j} \leq R_2 \cdot \sum_{j=1}^{J} \chi_{C_j}$$

para dos constantes positivas R_1 y R_2 independientes de s.

Por tanto

$$|T(\varphi_s,\psi_s)|^k \cdot |\omega_s| \le R_1 \cdot R_2 \cdot \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{J} |T(\chi_{A_n},\chi_{B_m})|^k \cdot \chi_{C_j}.$$

Veamos ahora que cada término de la suma es integrable: si fijamos un n, un m y un j, y aplicamos la desigualdad de Hölder para $r_0/k > 1$

$$\begin{aligned}
\int_Z |T(\chi_{A_n},\chi_{B_m})|^k \cdot \chi_{C_j}\, d\tau &\le \left(\int_Z |T(\chi_{A_n},\chi_{B_m})|^{r_0}\, d\tau\right)^{k/r_0} \left(\int_Z \chi_{C_j}\, d\tau\right)^{1/(r_0/k)'} = \\
&= \|T(\chi_{A_n},\chi_{B_m})\|_{r_0}^k \cdot \tau(C_j)^{1/(r_0/k)'} \le \\
&\le M_0^k \cdot \mu(A_n)^{k/p_0} \cdot \nu(B_m)^{k/q_0} \cdot \tau(C_j)^{1/(r_0/k)'} < \infty.
\end{aligned}$$

Luego las funciones $\left|T(\varphi_s,\psi_s)\cdot \omega_s^{1/k}\right|^k$ están acotadas por una función integrable independiente de s.

Por último veamos las cotas de la función F. Si $s = it$ entonces, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}
F(it) &= \int_Z |T(\varphi_{it},\psi_{it})|^k \cdot |\omega_{it}|\, d\tau \le \left(\int_Z |T(\varphi_{it},\psi_{it})|^{r_0}\right)^{k/r_0} \left(\int_Z |\omega_{it}|^{(r_0/k)'}\right)^{1/(r_0/k)'} = \\
&= \|T(\varphi_{it},\psi_{it})\|_{r_0}^k \cdot \|\omega_{it}\|_{(r_0/k)'} \le M_0^k \cdot \|\varphi_{it}\|_{p_0}^k \cdot \|\psi_{it}\|_{q_0}^k \cdot \|\omega_{it}\|_{(r_0/k)'}.
\end{aligned}$$

Pero además, como $\mathrm{Re}(\alpha(it)) = 1/p_0$, $\mathrm{Re}(\beta(it)) = 1/q_0$ y $\mathrm{Re}(\gamma(it)) = 1/r_0$,

$$\|\varphi_{it}\|_{p_0} = \left(\int_Z |f|^{p\cdot \mathrm{Re}(\alpha(it))\cdot p_0}\, d\mu\right)^{1/p_0} = \|f\|_p^{p/p_0} = 1 \quad \text{y análogamente } \|\psi_{it}\|_{q_0} = 1$$

$$\|\omega_{it}\|_{(r_0/k)'} = \left(\int_Z h^{(r_0/k)'\cdot(1-k/r_0)/(1-k/r)}\, d\mu\right)^{1/(r_0/k)'} = \|h\|_{(r/k)'}^{(r/k)'/(r_0/k)'} = 1$$

Luego $F(it) \le M_0^k$.

Análogamente para $s = 1+it$, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
F(1+it) &= \int_Z |T(\varphi_{1+it},\psi_{1+it})|^k \cdot |\omega_{1+it}|\, d\tau \le \\
&\le \left(\int_Z |T(\varphi_{1+it},\psi_{1+it})|^{r_1}\, d\tau\right)^{k/r_1} \left(\int_Z |\omega_{1+it}|^{(r_0/k)'}\, d\tau\right)^{1/(r_1/k)'} = \\
&= \|T(\varphi_{1+it},\psi_{1+it})\|_{r_1}^k \cdot \|\omega_{1+it}\|_{(r_1/k)'} \le M_1^k \cdot \|\varphi_{1+it}\|_{p_1}^k \cdot \|\psi_{1+it}\|_{q_1}^k \cdot \|\omega_{1+it}\|_{(r_1/k)'}.
\end{aligned}$$

Ahora, como $\mathrm{Re}(\alpha(1+it)) = 1/p_1$, $\mathrm{Re}(\beta(1+it)) = 1/q_1$ y $\mathrm{Re}(\gamma(1+it)) = 1/r_1$,

$$\|\varphi_{1+it}\|_{p_1} = \left(\int_Z |f|^{p\cdot \mathrm{Re}(\alpha(1+it))\cdot p_1}\, d\mu\right)^{1/p_1} = \|f\|_p^{p/p_1} = 1 \quad \text{y análogamente } \|\psi_{1+it}\|_{q_1} = 1$$

$$\|\omega_{1+it}\|_{(r_1/k)'} = \left(\int_Z h^{(r_0/k)'\cdot(1-k/r_1)/(1-k/r)}\right)^{1/(r_1/k)'} = \|h\|_{(r/k)'}^{(r/k)'/(r_1/k)'} = 1$$

Luego $F(1+it) \leq M_1^k$. Así que por el Lema 2.1.1

$$F(\theta) = \int_Z |T(\varphi_\theta, \psi_\theta)|^k \cdot |\omega_\theta| \, d\tau \leq M_0^{k(1-\theta)} M_1^{k\theta}.$$

Y como $\varphi_\theta = f$, $\psi_\theta = g$ y $\omega_\theta = h$, se ha probado (2.1.3). Como la cota no depende de la función h bajo esas condiciones, de (2.1.2) resulta que

$$\|T(f,g)\|_r \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

$\square$

2.2. Los teoremas de compacidad en espacios L_p

Nuestro objetivo en esta sección es establecer una versión reforzada del Teorema de Riesz-Thorin para operadores bilineales involucrando la compacidad. Para ello comenzamos estudiando una propiedad especial de los pares de espacios L_p.

Sea (X,μ) un espacio de medida. Decimos que una pareja de espacios $(L_{p_0}(X), L_{p_1}(X))$ satisface la condición $(\mathfrak{h})$ si para cada compacto $K \subseteq L_{p_0}(X)$ hay una familia de operadores $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{B}\left(L_{p_0}(X) + L_{p_1}(X), L_{p_0}(X) \cap L_{p_1}(X)\right)$ y una constante $C > 0$ tales que:

- $P_\lambda : L_{p_0}(X) + L_{p_1}(X) \longrightarrow L_{p_0}(X) \cap L_{p_1}(X)$ es compacto para todo $\lambda \in \Lambda$
- $\|P_\lambda\|_{L_{p_j}(X), L_{p_j}(X)} \leq C$ para $j = 0,1$ y para todo $\lambda \in \Lambda$
- Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\|f - P_{\lambda_0} f\|_{L_{p_0}(X)} \leq \varepsilon \quad \forall f \in K$$

Esta propiedad se puede definir para pares de espacios de Banach más generales, como se puede ver en los artículos de Fernández-Cabrera y Martínez [9, 10]. El resultado que sigue está en [10, pág. 1197].

Proposición 2.2.1. *Sea (X,μ) un espacio de medida. Si $1 \leq p_0 < \infty$ y $1 \leq p_1 \leq \infty$, entonces la pareja $(L_{p_0}(X), L_{p_1}(X))$ cumple la condición $(\mathfrak{h})$ con $C = 1$ y de forma que todos los P_λ son de rango finito.*

Demostración. Como sólo tratamos con un espacio de medida, denotaremos directamente en esta demostración $L_p = L_p(X)$.

Sea S_X el conjunto de funciones simples medibles de soporte finito en X. Por ser $p_0 < \infty$, S_X es denso en L_{p_0}. Para cada familia finita de conjuntos disjuntos medibles de medida finita $A_1, \ldots, A_M$ definimos el operador

$$Pf = \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} f \, d\mu \right) \cdot \chi_{A_k}. \tag{2.2.1}$$

Consideramos la familia $\mathcal{F}$ de todos los operadores así obtenidos (servirá la misma familia para cualquier compacto). De esta forma si $f \in L_1$, se tiene

$$\|Pf\|_1 \quad = \quad \int_X \left(\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{\mu(A_k)} \left| \int_{A_k} f(x) \, d\mu(x) \right| \cdot \chi_{A_k}(y) \right) d\mu(y) =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} \left| \int_{A_k} f(x)\, d\mu(x) \right| \leq \int_X |f|\, d\mu = \|f\|_1,$$

y análogamente si $f \in L_\infty$,

$$\|Pf\|_\infty = \text{máx} \left\{ \frac{1}{\mu(A_k)} \left| \int_{A_k} f\, d\mu \right| : k \in \{1, \dots, M\} \right\} \leq \|f\|_\infty.$$

Por tanto P es un operador lineal acotado de L_1 en L_1 y de L_∞ en L_∞, siempre con norma menor o igual que 1. Por el Teorema de Riesz-Thorin para operadores lineales (Teorema 2.1.1), $\|Pf\|_p \leq \|f\|_p$ para toda $f \in L_p$ y todo $1 \leq p \leq \infty$. En particular se cumple para p_0 y p_1, por lo que $T : L_{p_0} + L_{p_1} \longrightarrow L_{p_0} + L_{p_1}$ es acotado. Pero más aún, la imagen de P está generada por las funciones χ_{A_k} con $k \in \{1, \dots, M\}$, así que $P\left(L_{p_0} + L_{p_1}\right) \subseteq [\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_M}] \subset L_{p_0} \cap L_{p_1}$ es de dimensión finita, luego

$$P : L_{p_0} + L_{p_1} \longrightarrow L_{p_0} \cap L_{p_1} \quad \text{es de rango finito},$$

y como $[\chi_{A_1}, \dots, \chi_{A_M}]$ tiene dimensión finita, dos normas cualesquiera son equivalentes sobre este espacio, así que $P : L_{p_0} + L_{p_1} \longrightarrow L_{p_0} \cap L_{p_1}$ es acotado. Obsérvese de hecho que $P : L_{p_0} + L_{p_1} \longrightarrow L_{p_0} \cap L_{p_1}$ es compacto.

Para la última condición, sea $K \subseteq L_{p_0}$ compacto. Para cada $\varepsilon > 0$ existen $s_1, \dots, s_N \in S_X$ tales que la unión de las bolas de centro s_j y radio $\varepsilon/2$ recubren K. Analizando las funciones s_j, resulta una cantidad finita de conjuntos disjuntos medibles, de medida finita, $A_1, \dots, A_M$ tales que cada función s_j es constante en cada A_k. Consideramos el operador $P \in \mathcal{F}$ obtenido según (2.2.1) a partir de estos conjuntos.

Si $f \in K$, existe un $j \in \{1, \dots, M\}$ tal que $\|f - s_j\| \leq \varepsilon/2$. Además, como s_j es constante en cada A_k, digamos $s_j|_{A_k} \equiv c_{jk}$, se tiene que

$$Ps_j = \sum_{k=1}^{M} \left(\frac{1}{\mu(A_k)} \int_{A_k} s_j\, d\mu \right) \cdot \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^{M} c_{jk} \chi_{A_k} = s_j.$$

Por tanto, usando que $\|P\|_{L_{p_0}, L_{p_0}} \leq 1$,

$$\|f - Pf\|_{p_0} \leq \|f - s_j\|_{p_0} + \|s_j - Ps_j\|_{p_0} + \|P(s_j - f)\|_{p_0} \leq \|f - s_j\|_{p_0} + 0 + \|s_j - f\|_{p_0} \leq \varepsilon.$$

□

El siguiente teorema se debe a Fernández-Cabrera y Martínez [9], es de hecho consecuencia de [9, Theorem 5.7], y muestra una versión reforzada del Teorema de Riesz-Thorin para operadores bilineales: bajo las mismas condiciones del Teorema 2.1.2, si además sabemos que la primera restricción del operador es compacta, entonces se puede concluir que también lo es en los puntos intermedios.

En lo que resta de trabajo, para no recargar demasiado la notación, si no es necesario omitiremos el espacio y la medida: se sobreentenderá que si el subíndice es p se refiere a (X, μ) y lo mismo con q y r respecto de (Y, ν) y (Z, τ).

Teorema 2.2.1 (Teorema bilineal de compacidad). *Sean (X, μ), (Y, ν) y (Z, τ) tres espacios de medida. Sean $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1, r_0, r_1 \leq \infty$ y T un operador bilineal acotado de $(L_{p_0} + L_{p_1}) \times (L_{q_0} + L_{q_1})$ en $L_{r_0} + L_{r_1}$ tal que las restricciones*

$$T : L_{p_j} \times L_{q_j} \longrightarrow L_{r_j}, \quad j = 0, 1,$$

son acotadas. Sean $0 < \theta < 1$ *y*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad y \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1}.$$

Si $r_0 < \infty$ *y* $T : L_{p_0} \times L_{q_0} \longrightarrow L_{r_0}$ *es compacto, entonces* $T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$ *es compacto.*

Demostración. El operador T es continuo de $L_p \times L_q$ en L_r como consecuencia directa del Teorema de Riesz-Thorin para operadores bilineales (Teorema 2.1.2). Para ver que es compacto veamos que se puede aproximar por operadores compactos.

Sea $V = \{(f,g) : \|f\|_{p_0} \leq 1, \ \|g\|_{q_0} \leq 1\} \subset L_{p_0} \times L_{q_0}$. Como $T : L_{p_0} \times L_{q_0} \longrightarrow L_{r_0}$ es compacto, el conjunto $K = \overline{T(V)} \subset L_{r_0}$ es compacto. Además, al ser $r_0 < \infty$, la pareja (L_{r_0}, L_{r_1}) cumple la condición $(\mathfrak{h})$. Sea $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{B}(L_{r_0} + L_{r_1}, L_{r_0} \cap L_{r_1})$ la familia dada por la proposición anterior, es decir:

- $P_\lambda : L_{r_0} + L_{r_1} \longrightarrow L_{r_0} \cap L_{r_1}$ es acotado y de rango finito para todo $\lambda \in \Lambda$
- $\|P_\lambda\|_{L_{r_j}, L_{r_j}} \leq 1$ para $j = 0, 1$ y $\lambda \in \Lambda$
- Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\|h - P_{\lambda_0} h\|_{r_0} \leq \varepsilon \quad \forall h \in K = \overline{T(V)} \tag{2.2.2}$$

Por el Teorema de Riesz-Thorin y la segunda condición, se tiene que todos los operadores cumplen $P_\lambda : L_r \longrightarrow L_r$ con norma $\|P_\lambda\|_{L_r, L_r} \leq 1$, y son compactos porque son acotados y de rango finito.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\lambda_n \in \Lambda$ cumpliendo la condición (2.2.2) para $\varepsilon = 1/n$. Entonces $P_{\lambda_n} \circ T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$ es compacto (por ser composición de un acotado con un compacto). El objetivo es ver que T es el límite de esta sucesión de operadores. Para ello consideramos el diagrama

$$(L_{p_0} + L_{p_1}) \times (L_{q_0} + L_{q_1}) \xrightarrow{\ T\ } L_{r_0} + L_{r_1} \xrightarrow{Id - P_{\lambda_n}} L_{r_0} + L_{r_1}.$$

Cada operador $(Id - P_{\lambda_n}) \circ T = T - P_{\lambda_n} \circ T$ es acotado, por ser diferencia de operadores bilineales acotados. Además

$$\|T - P_{\lambda_n} \circ T\|_{L_{p_1} \times L_{q_1}, L_{r_1}} \leq \|T\|_{L_{p_1} \times L_{q_1}, L_{r_1}} + \|P_{\lambda_n}\|_{L_{r_1}, L_{r_1}} \cdot \|T\|_{L_{p_1} \times L_{q_1}, L_{r_1}} \leq 2 \cdot \|T\|_{L_{p_1} \times L_{q_1}, L_{r_1}}.$$

Por otro lado, si tomamos $(f,g) \in L_{p_0} \times L_{q_0}$ con $\|f\|_{p_0} \leq 1$ y $\|g\|_{q_0} \leq 1$ entonces $T(f,g) \in T(V) \subset K$, luego por (2.2.2)

$$\|T(f,g) - P_{\lambda_n}(T(f,g))\|_{r_0} \leq \frac{1}{n}.$$

Es decir, $\|T - P_{\lambda_n} \circ T\|_{L_{p_0} \times L_{q_0}, L_{r_0}} \leq 1/n$.

Por el Teorema de Riesz-Thorin para operadores bilineales (Teorema 2.1.2),

$$\|T - P_{\lambda_n} \circ T\|_{L_p \times L_q, L_r} \leq \frac{1}{n^{1-\theta}} \cdot 2^\theta \cdot \|T\|^\theta_{L_{p_1} \times L_{q_1}, L_{r_1}} \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Así que $T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$ es límite de operadores compactos, luego es compacto. □

Terminamos la sección demostrando el Teorema de compacidad de Krasnoselskii [12] para operadores lineales. Se trata de una versión reforzada del Teorema de Riesz-Thorin que Krasnoselskii probó en 1960. Nosotros la deducimos como una consecuencia del Teorema bilineal de compacidad.

Corolario 2.2.1. *Sean* (X,μ) *y* (Z,τ) *dos espacios de medida,* $1 \le p_0, p_1, r_0, r_1 \le \infty$ *y* T *un operador lineal acotado de* $L_{p_0} + L_{p_1}$ *en* $L_{r_0} + L_{r_1}$ *tal que ambas restricciones*

$$T : L_{p_j} \longrightarrow L_{r_j}$$

son acotadas. Supongamos además que $r_0 < \infty$ *y que* $T : L_{p_0} \longrightarrow L_{r_0}$ *es compacto. Entonces para* $0 < \theta < 1$,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{\theta}{r_1},$$

el operador $T : L_p \longrightarrow L_r$ *es compacto.*

Demostración. Sean $Y = \{1\}$, la medida ν en $\mathcal{P}(Y)$ dada por $\nu(\{1\}) = 1$ y $q_0 = q_1 = \infty$. Entonces $L_{q_j}(Y,\nu) = \ell^\infty(\{1\}) = \mathbb{C}$.

Consideramos el operador $\widetilde{T} : (L_{p_0} + L_{p_1}) \times (L_{q_0} + L_{q_1}) \longrightarrow L_{r_0} + L_{r_1}$ dado por

$$\widetilde{T}(f,\lambda) = \lambda \cdot Tf. \tag{2.2.3}$$

Entonces si $f \in L_{p_j}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, para $j = 0, 1$,

$$\|\widetilde{T}(f,\lambda)\|_{r_j} = |\lambda| \cdot \|Tf\|_{r_j} \le |\lambda| \cdot \|T\|_{L_{p_j}, L_{r_j}} \cdot \|f\|_{p_j},$$

luego $\widetilde{T}$ es acotado de $L_{p_j} \times L_{q_j}$ en L_{r_j}.

También es compacto de $L_{p_0} \times L_{q_0}$ en L_{r_0} porque si B_X y B_Y son la bolas unidad (cerradas) en L_{p_0} y $L_{q_0} = \mathbb{C}$ respectivamente, se tiene que $\widetilde{T}(B_X \times B_Y) = T(B_X)$:

$\subseteq$) Si $\|f\|_{p_0} \le 1$ y $|\lambda| \le 1$, entonces $\|\lambda f\|_{p_0} \le 1$ y $\widetilde{T}(f,\lambda) = T(\lambda f)$.

$\supseteq$) Si $\|f\|_{p_0} \le 1$, entonces tomando $\lambda = 1$ se tiene que $(f, 1) \in B_X \times B_Y$ y $T(f) = \widetilde{T}(1, f)$.

Por ser T compacto de L_{p_0} en L_{r_0}, $T(B_X)$ es relativamente compacto en L_{r_0}, luego $\widetilde{T}$ es compacto de $L_{p_0} \times L_{q_0}$ en L_{r_0}.

Con todo lo anterior $\widetilde{T}$ está en las condiciones del Teorema bilineal de compacidad 2.2.1, luego $\widetilde{T}$ es compacto de $L_p \times L_q$ en L_r. Por tanto también lo son sus secciones y en particular tomando $1 \in \mathbb{C}$ la sección $\widetilde{T}_1$. Pero $\widetilde{T}_1(f) = Tf$, así que T es compacto de L_p en L_r. □

2.3. Operadores definidos sobre las funciones simples

La hipótesis de partida del Teorema bilineal de compacidad es que $T : (L_{p_0} + L_{p_1}) \times (L_{q_0} + L_{q_1}) \longrightarrow L_{r_0} + L_{r_1}$ es acotado. Ahora, algunas veces en las aplicaciones (ver [10]) no se tiene esto sino sólo que

$$\|T(f,g)\|_{r_j} \le M_j \|f\|_{p_j} \|g\|_{q_j}, \quad j = 0, 1,$$

cualquiera que sean las funciones simples f y g. Como los espacios de funciones simples no son de Banach con las normas de los espacios L_p, no se pueden usar las caracterizaciones de la compacidad de la Proposición 1.1.2, por tanto lo primero que se necesita es poder extender un operador desde el subespacio a todo el espacio.

Lema 2.3.1. *Sean X e Y espacios normados, Z espacio de Banach y $E \subset X$ y $F \subset Y$ dos subespacios densos. Sea $T_0 : E \times F \longrightarrow Z$ un operador bilineal y continuo. Entonces T_0 se puede extender de forma única a un operador bilineal y continuo $T : X \times Y \longrightarrow Z$ con $\|T_0\| = \|T\|$.*

Demostración. Para cada $x \in X$ e $y \in Y$ sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset F$ dos sucesiones que converjan a x e y respectivamente (que existen por la densidad de E y F). Definimos

$$T(x, y) = \lim_{n\to\infty} T_0(x_n, y_n).$$

En primer lugar, para ver que T está bien definido, hay que ver que el límite existe y no depende de las sucesiones que se tomen. Como las sucesiones convergen son acotadas, esto es, $\|x_n\| \leq M_1$ e $\|y_n\| \leq M_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora

$$\begin{aligned}
\|T_0(x_n, y_n) - T_0(x_m, y_m)\| &\leq \|T_0(x_n, y_n) - T_0(x_m, y_n)\| + \|T_0(x_m, y_n) - T_0(x_m, y_m)\| = \\
&= \|T_0(x_n - x_m, y_n)\| + \|T_0(x_m, y_n - y_m)\| \leq \\
&\leq \|T_0\|\|x_n - x_m\|\|y_n\| + \|T_0\|\|x_m\|\|y_n - y_m\| \leq \\
&\leq M_2\|T_0\|\|x_n - x_m\| + M_1\|T_0\|\|y_n - y_m\|,
\end{aligned}$$

y tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de Cauchy, luego $(T_0(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ también lo es. Por ser Z de Banach, converge.

Para ver que el límite no depende de las sucesiones, tomemos otras sucesiones $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergiendo también a x e y respectivamente. Entonces están de nuevo acotadas, digamos $\|x'_n\| \leq M_1$ e $\|y_n\| \leq M_2$. Procediendo como antes se llega a

$$\begin{aligned}
\|T_0(x_n, y_n) - T_0(x'_n, y'_n)\| &\leq \|T_0(x_n, y_n) - T_0(x'_n, y_n)\| + \|T_0(x'_n, y_n) - T_0(x'_n, y'_n)\| = \\
&= \|T_0(x_n - x'_n, y_n)\| + \|T_0(x'_n, y_n - y'_n)\| \leq \\
&\leq \|T_0\|\|x_n - x'_n\|\|y_n\| + \|T_0\|\|x'_n\|\|y_n - y'_n\| \leq \\
&\leq M_2\|T_0\|\|x_n - x'_n\| + M_1\|T_0\|\|y_n - y'_n\|,
\end{aligned}$$

y como $(x_n - x'_n)_n$ e $(y_n - y'_n)_n$ convergen a cero, obtenemos que

$$T(x, y) = \lim_{n\to\infty} T_0(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} T_0(x'_n, y'_n).$$

Para la bilinealidad de T, dados $x, x' \in X$, $y \in Y$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tomamos $(x_n)_n, (x'_n)_n \subset E$ convergiendo a x y x' respectivamente, e $(y_n)_n \subset F$ convergiendo a y. Como $(\lambda x_n + \mu x'_n)_n \subset E$ converge a $\lambda x + \mu x'$, se tiene que

$$\begin{aligned}
T(\lambda x + \mu x', y) &= \lim_{n\to\infty} T_0(\lambda x_n + \mu x'_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} \big(\lambda T_0(x_n, y_n) + \mu T_0(x'_n, y_n)\big) = \\
&= \lambda T(x, y) + \mu T(x', y).
\end{aligned}$$

Por lo que T es lineal en la primera variable. La linealidad en la segunda variable se demuestra análogamente.

Que $T|_{E\times F} = T_0$ es claro: para $x \in E$ e $y \in F$ basta tomar las sucesiones constantes. Y para ver que T es continuo con $\|T\| = \|T_0\|$, para $x \in X$ e $y \in Y$ tomamos $(x_n)_n \subset E$ e $(y_n)_n \subset F$ convergiendo a x e y respectivamente. Entonces

$$\|T(x, y)\| = \left\|\lim_{n\to\infty} T_0(x_n, y_n)\right\| = \lim_{n\to\infty} \|T_0(x_n, y_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} \|T_0\|\|x_n\|\|y_n\| = \|T_0\|\|x\|\|y\|,$$

de donde $\|T\| \leq \|T_0\|$. La otra desigualdad se debe a que

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|T(x,y)\| : x \in X,\ y \in Y,\ \|x\|, \|y\| \leq 1\} \geq \\ &\geq \sup\{\|T(x,y)\| : x \in E,\ y \in F,\ \|x\|, \|y\| \leq 1\} = \|T_0\|. \end{aligned}$$

Por último demostramos la unicidad de la extensión. Si T' es otra extensión bilineal y continua de T_0 a $X \times Y$, dados $x \in X$ e $y \in Y$ tomamos de nuevo sucesiones $(x_n)_n \subset E$ y $(y_n)_n \subset F$ como antes. Por la continuidad de T', se tiene que

$$T'(x,y) = \lim_{n\to\infty} T'(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} T_0(x_n, y_n) = T(x,y).$$

□

Con este lema podemos obtener las versiones de los teoremas de Riesz-Thorin para operadores bilineales y de compacidad cuando el operador está definido sólo para funciones simples, para lo cual primero extenderemos el operador a todo el espacio y luego aplicaremos los teoremas ya conocidos.

Teorema 2.3.1. *Sean (X,μ), (Y,ν) y (Z,τ) tres espacios de medida. Sean $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$, $0 < r_0, r_1 \leq \infty$, y supongamos que alguno de los p_j y alguno de los q_j son finitos. Para $0 < \theta < 1$ definimos*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad y \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{1}{r_1}.$$

Sean S_X y S_Y los conjuntos de funciones simples con soporte de medida finita en X e Y respectivamente, y sea $T : S_X \times S_Y \longrightarrow L_{r_0} + L_{r_1}$ un operador bilineal tal que para cualesquiera $f \in S_X$ y $g \in S_Y$ se cumple

$$\|T(f,g)\|_{r_j} \leq M_j \|f\|_{p_j} \|g\|_{q_j}, \quad j = 0, 1.$$

Entonces T se puede extender de forma única a un operador bilineal continuo

$$T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$$

con norma $\|T\|_{L_p \times L_q, L_r} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

Demostración. Si fuera $p = \infty$, necesariamente habría de ser $p_0 = p_1 = \infty$, lo que contradice las hipótesis, y análogamente con q. Por tanto $p, q < \infty$, así que S_X y S_Y son densos en L_p y L_q respectivamente.

Ahora basta con repetir el argumento de la segunda parte de la demostración del Teorema 2.1.2 (la parte en la que $p < \infty$ y $q < \infty$), donde se concluye que para todo par de funciones simples $(f,g) \in S_X \times S_Y$ se tiene

$$\|T(f,g)\|_r \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_p \|g\|_q.$$

Esto significa que el operador $T : S_X \times S_Y \longrightarrow L_r$ es continuo considerando en S_X y S_Y las normas de L_p y L_q, y con norma $\|T\|_{S_X \times S_Y, L_r} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$. Por el Lema 2.3.1 T se puede extender de forma única a un operador bilineal continuo $T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$ con norma

$$\|T\|_{L_p \times L_q, L_r} = \|T\|_{S_X \times S_Y, L_r} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

□

Teorema 2.3.2. *Sean (X, μ), (Y, ν) y (Z, τ) tres espacios de medida, $1 \leq p_0, q_0, r_0 < \infty$ y $1 \leq p_1, q_1, r_1 \leq \infty$. Para $0 < \theta < 1$ definimos*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} \quad y \quad \frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{r_0} + \frac{1}{r_1}.$$

Sean S_X y S_Y los conjuntos de funciones simples con soporte de medida finita en X e Y respectivamente, y sea $T : S_X \times S_Y \longrightarrow L_{r_0} + L_{r_1}$ un operador bilineal tal que para cualesquiera $f \in S_X$ y $g \in S_Y$ se cumple

$$\|T(f,g)\|_{r_j} \leq M_j \|f\|_{p_j} \|g\|_{q_j}, \quad j = 0, 1. \tag{2.3.1}$$

Si la extensión $T : L_{p_0} \times L_{q_0} \longrightarrow L_{r_0}$ de T a $L_{p_0} \times L_{q_0}$ es compacta, entonces también se puede extender T, de forma única, a un operador bilineal compacto $T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$.

Demostración. En primer lugar, obsérvese que p y q también son finitos. Luego S_X y S_Y son densos en L_p y L_q respectivamente. Como estamos en las condiciones del Teorema 2.3.1, se tiene entonces que T se puede extender de forma única a un operador bilineal continuo $T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$.

Además de (2.3.1) se deduce que para cada $j = 0, 1$, si consideramos en S_X y S_Y las normas de L_{p_j} y L_{q_j} respectivamente, entonces $T : S_X \times S_Y \longrightarrow L_{r_j}$ es un operador bilineal y continuo con norma menor o igual que M_j.

Sea también $T : L_{p_0} \times L_{q_0} \longrightarrow L_{r_0}$ la extensión bilineal y compacta de T. Ahora seguimos la demostración del Teorema bilineal de compacidad (Teorema 2.2.1).

Sea $V = \{(f,g) \in L_{p_0} \times L_{q_0} : \|f\|_{p_0} \leq 1, \ \|g\|_{q_0} \leq 1\}$. Como $T : L_{p_0} \times L_{q_0} \longrightarrow L_{r_0}$ es compacto, el conjunto $K = \overline{T(V)} \subset L_{r_0}$ es compacto. Además, al ser $r_0 < \infty$, la pareja (L_{r_0}, L_{r_1}) cumple la condición $(\mathfrak{h})$. Sea $\{P_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \mathcal{B}(L_{r_0} + L_{r_1}, L_{r_0} \cap L_{r_1})$ la familia dada por la Proposición 2.2.1, es decir:

- $P_\lambda : L_{r_0} + L_{r_1} \longrightarrow L_{r_0} \cap L_{r_1}$ es acotado y de rango finito para todo $\lambda \in \Lambda$
- $\|P_\lambda\|_{L_{r_j}, L_{r_j}} \leq 1$ para $j = 0, 1$ y $\lambda \in \Lambda$
- Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$\|h - P_{\lambda_0} h\|_{r_0} \leq \varepsilon \quad \forall h \in K = \overline{T(V)} \tag{2.3.2}$$

Por el Teorema de Riesz-Thorin y la segunda condición, se tiene que todos los operadores cumplen $P_\lambda : L_r \longrightarrow L_r$ con norma $\|P_\lambda\|_{L_r, L_r} \leq 1$, y son compactos porque son de rango finito.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $\lambda_n \in \Lambda$ cumpliendo la condición (2.3.2) para $\varepsilon = 1/n$. Entonces $P_{\lambda_n} \circ T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$ es compacto (por ser composición de un acotado con un compacto). El objetivo es ver que T es el límite de esta sucesión de operadores. Para ello consideramos el diagrama

$$S_X \times S_Y \xrightarrow{T} L_{r_0} + L_{r_1} \xrightarrow{Id - P_{\lambda_n}} L_{r_0} + L_{r_1}.$$

Si en S_X y S_Y consideramos las normas de L_{p_1} y L_{q_1} respectivamente, obtenemos que

$$\begin{aligned} \|T - P_{\lambda_n} \circ T\|_{S_X \times S_Y, L_{r_1}} &\leq \|T\|_{S_X \times S_Y, L_{r_1}} + \|P_{\lambda_n}\|_{L_{r_1}, L_{r_1}} \cdot \|T\|_{S_X \times S_Y, L_{r_1}} \leq \\ &\leq 2 \cdot \|T\|_{S_X \times S_Y, L_{r_1}} \leq 2M_1. \end{aligned}$$

Es decir, que para cada $(f,g) \in S_X \times S_Y$ se tiene

$$\|T(f,g)\|_{r_1} \leq 2M_1 \|f\|_{p_1} \|g\|_{q_1}.$$

Por otro lado, si en S_X y S_Y consideramos las normas de L_{p_0} y L_{q_0} y tomamos $(f,g) \in S_X \times S_Y$ con $\|f\|_{p_0} \leq 1$ y $\|g\|_{q_0} \leq 1$, entonces

$$T(f,g) \in T(V) \subset K,$$

y por (2.3.2)

$$\|T(f,g) - P_{\lambda_n}(T(f,g))\|_{r_0} \leq \frac{1}{n}.$$

Así que en general, si $(f,g) \in S_X \times S_Y$ dividiendo por su norma obtenemos que

$$\|(T - P_{\lambda_n} \circ T)(f,g)\|_{r_0} \leq \frac{1}{n} \|f\|_{p_0} \|g\|_{q_0}.$$

Por el Teorema 2.3.1, $T - P_{\lambda_n} \circ T$ se puede extender de forma única a un operador bilineal continuo de $L_p \times L_q$ en L_r y con norma

$$\|T - P_{\lambda_n} \circ T\|_{L_p \times L_q, L_r} \leq \frac{1}{n^{1-\theta}} \cdot 2^\theta \cdot M_1^\theta \xrightarrow{n \to \infty} 0.$$

Así que $T : L_p \times L_q \longrightarrow L_r$ es límite de una sucesión de operadores compactos, luego es compacto. $\square$

Bibliografía

[1] L. V. Ahlfors. *Complex Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1979.

[2] Á. Bényi and R. H. Torres. Compact bilinear operators and commutators. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141:3609–3621, 2013.

[3] B. F. Besoy and F. Cobos. Interpolation of the measure of non-compactness of bilinear operators among quasi-Banach spaces. *J. Approx. Theory*, 243:25–44, 2019.

[4] Á. Bényi and T. Oh. Smoothing of commutators for a Hörmander class of bilinear pseudodiferential operators. *J. Fourier Anal. Appl.*, 20:282–300, 2014.

[5] A. P. Calderón. Intermediate spaces and interpolation, the complex method. *Studia Math.*, 24:113–190, 1964.

[6] A. P. Calderón and A. Zygmund. A note on the interpolation of linear operations. *Studia Math.*, 12:194–204, 1951.

[7] F. Cobos, L. M. Fernández-Cabrera, and A. Martínez. Interpolation of compact bilinear operators among quasi-Banach spaces and applications. *Math. Nachr.*, 291:2168–2187, 2018.

[8] D. L. Fernandez and E. B. Silva. Interpolation of bilinear operators and compactness. *Nonlinear Anal.*, 73:526–537, 2010.

[9] L. M. Fernández-Cabrera and A. Martínez. On interpolation properties of compact bilinear operators. *Math. Nachr.*, 290:1663–1677, 2017.

[10] L. M. Fernández-Cabrera and A. Martínez. Real interpolation of compact bilinear operators. *J. Fourier Anal. Appl.*, 24:1181–1203, 2018.

[11] G. Hu. Compactness of the commutator of bilinear Fourier multiplier operator. *Taiwanese J. Math.*, 18:661–675, 2014.

[12] M. A. Krasnoselskii. On a theorem of M. Riesz. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 131:246–248, 1960.

[13] J. L. Lions and J. Peetre. Sur une classe d'espaces d'interpolation. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 19:5–68, 1964.

[14] M. Mastyło and E. B. Silva. Interpolation of the measure of non-compactness of bilinear operators. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 370:8979–8997, 2018.

[15] M. S. Ramanujan and E. Schock. Operator ideals and spaces of bilinear operators. *Linear & Mult. Algebra*, 18:307–318, 1985.

[16] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1973.

[17] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* McGraw-Hill, New York, 2006.