Variable compleja y Análisis de Fourier

Práctica 2 - Relación entre los desarrollos y las Tranformadas de Fourier

Helena García Escudero

8 de abril, 2019

0.1. Introduction

Un tipo realmente importante de señales son las periódicas,aquellas en las que exite un número real T de tal forma que $x(t+T) = x(t) \quad \forall t$. Entre este tipo de señales se encuentran las de la siguiente forma

$$e_n(t) = e^{2\pi in\frac{t}{T}} \qquad \forall \ n\epsilon\mathbb{Z} \tag{1}$$

Todas estas señales son periódicas de período T (T es el período fundamental para la e_1, la e_n tiene período fundamental $\frac{T}{n}$)

Cualquier señal periódica, de período T, que pertenezca a $L^2[0,T]$ es una combinación lineal (infinita) de las señales e_n. Esto es,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi in\frac{t}{T}} \tag{2}$$

con convergencia en $L^2[0,T]$. Los c_n son los llamados coeficientes de Fourier y viene definidos por la expresión:

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)e^{-2\pi in\frac{t}{T}}dt \tag{3}$$

Si consideramos ahora una función x integrable en $\mathbb{R}$, se define su *Tranformada de Fourier* $\hat{x}$ por la expresión:

$$\hat{x}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-2\pi\omega ti}dt \tag{4}$$

Cuando y es una función continua en un intervalo $[-T_1, T_1]$, es integrable en él, y la expresión de su transformada de Fourier resulta ser de la forma

$$\hat{y}(\omega) = \int_{-T_1}^{+T_1} y(t)e^{-2\pi\omega ti}dt \tag{5}$$

Las funciones de este tipo pueden considerarse como funciones periódicas definidas en todo $\mathbb{R}$ replicando los valores que toman en $[-T_1, T_1]$ a lo largo del eje de tiempos de esta forma: se fija un número real T (mayor que $2T_1$, para evitar solapamientos) y se define:

$$x(t) = \begin{cases} y(t) & \text{si } t\epsilon[kT - T_1, kT + T_1], \quad k\epsilon\mathbb{Z} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{6}$$

El objetivo de esta práctica es el de estudiar la relación que existe entre los coeficientes de Fourier de esta señal x y la tranformada de Fourier de la señal original y. Observaremos como a partir de los coeficientes en desarrollo en serie de Fourier de x se pueden obtener muestras de la transformada de y y recíprocamente.

Dados dos números reales positivos T_1 y T, siendo $2T_1 < T$, consideremos la señal:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\epsilon[-T_1, T_1], \quad k\epsilon\mathbb{Z} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{7}$$

Calculando los coeficientes de Fourier obtenemos:

$$c_n = \frac{1}{n\pi} sen(2n\pi \frac{T_1}{T}) \tag{8}$$

Su representación gráfica puede verse en las imágenes que aparecen más adelante en el documento.
Si consideramos ahora la Transfromada de Fourier del rectángulo:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\epsilon[-T_1, T_1], \quad k\epsilon\mathbb{Z} \\ \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{9}$$

Su tranformada es:

$$\hat{y}(\omega) = \int_{-T_1}^{+T_1} e^{-2\pi\omega t i} dt = \frac{1}{\pi\omega} sen(2\pi\omega T_1) \tag{10}$$

Tomando ω de la forma $\frac{n}{T}$, resulta que:

$$\hat{y}(\frac{n}{T}) = \frac{T}{\pi n} sen(2\pi n \frac{T_1}{T}) = Tc_n \tag{11}$$

Esto es, el coeficiente c_n de la serie de Fourier correpondiente a la señal inicial x (que depende de T) es el producto inverso de T por el valor de la transformada de Fourier del rectángulo y en los puntos

0.2. Código de Matlab

Se genera un tren de rectángulos de base $2{\cdot}T_1$ y altura 1 separados una distancia (período) T. Para obtener otro tren de rectángulos de la misma base pero con período múltiplo de T basta darle a K el valor que se desee. Estos datos se piden por pantalla. Tambien se pide le número N de coeficientes del desarrollo de Fourier que se quieren calcular.

```
T1=input('T1(base de los rectángulos) ');
T=input('T(período, debe ser mayor que 2*T1) ');
K=input('K(orden del múltiplo de T) ');
N=input('n(número de coeficientes)')
```

Se llama a la función calculacoef que hace el cálculo de los coeficientes de Fourier requeridos, hay que llamarla con T1, T, K y N.

```
calculacoef(T1,T,1,N)
```

Se hace ahora lo mismo manteniendo el ancho de la señal pero aumentando la frecuencia en un múltiplo K de T.

```
c=calculacoef(T1,T,K,N);

figure
```

Se generan mil muestras de un rectángulo centrado en 0 de base 2*T1 con 10 muestras por segundo.

```
b=[zeros(1,500-10*T1),ones(1,10*2*T1),zeros(1,500-10*T1)];
```

b tiene longitud 500-10*T1+10*2*T1+500-10*T1=1000.

```
m=linspace(-length(b)/(2*10),length(b)/(2*10),length(b));


subplot(2,1,1)
plot(m,b)
axis([m(1) m(1000) -1 2]);
title('Rectángulo')
omega=[0.01:0.01:N/(K*T)];
omega=[-fliplr(omega),omega];
subplot(2,1,2)
plot(omega, zeros(1,length(omega)),'k')
hold on
plot(omega,sin(2*pi*omega*T1)./(pi*omega))
xlabel('\omega')
ylabel('Fy(\omega)')
```

```
title('Transformada de Fourier del rectángulo')

hold off
pause

figure

subplot(2,1,1)
plot(omega,sin(2*pi*omega*T1)./(pi*omega))

hold on

%Dibujamos el eje de abscisas pintando ceros en negro ('k')
plot(omega, zeros(1,length(omega)),'k')
xlabel('\omega')
ylabel('Fy(\omega)')
title('Transformada de Fourier del rectángulo')

hold off

subplot(2,1,2)
stem([-(N-1):1:(N-1)],K*T*c)
title('Coeficientes del desarrollo de Fourier de x
multiplicados por el período')
xlabel('n')
ylabel('c_n')

pause

close all
```

Las figuras resultantes al aplicar el código son las siguientes

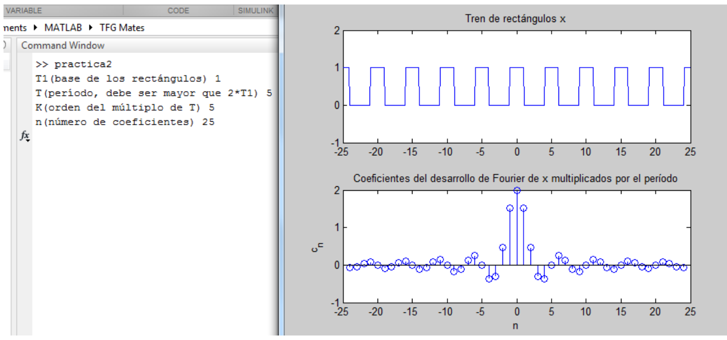

Figura 1: Datos Pantalla

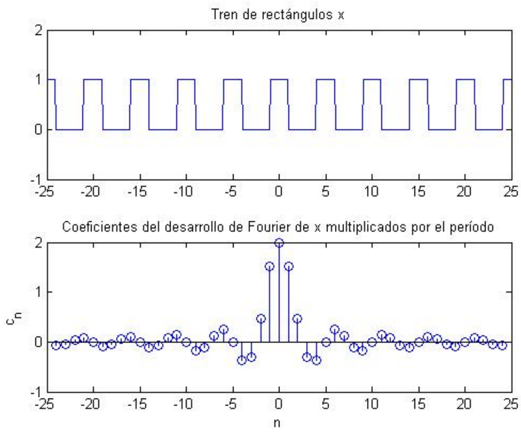

Figura 2:

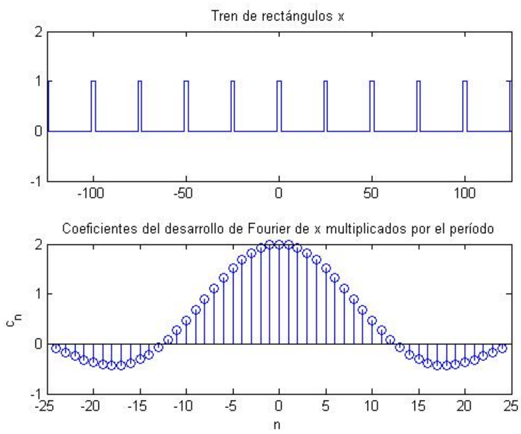

Figura 3:

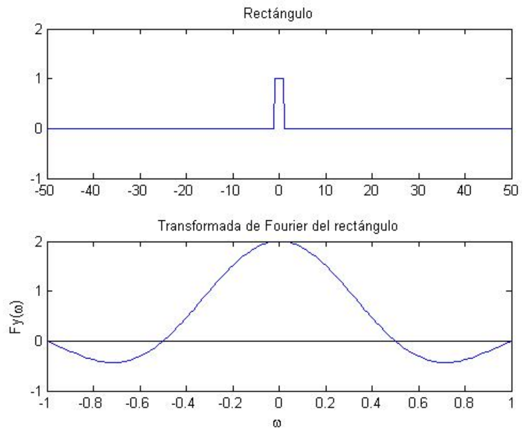
Rectángulo
2
1
0
-1
-50 -40 -30 -20 -10 0 10 20 30 40 50
Transformada de Fourier del rectángulo
Fy(ω)
2
1
0
-1
-1 -0.8 -0.6 -0.4 -0.2 0 0.2 0.4 0.6 0.8 1
ω

Figura 4: