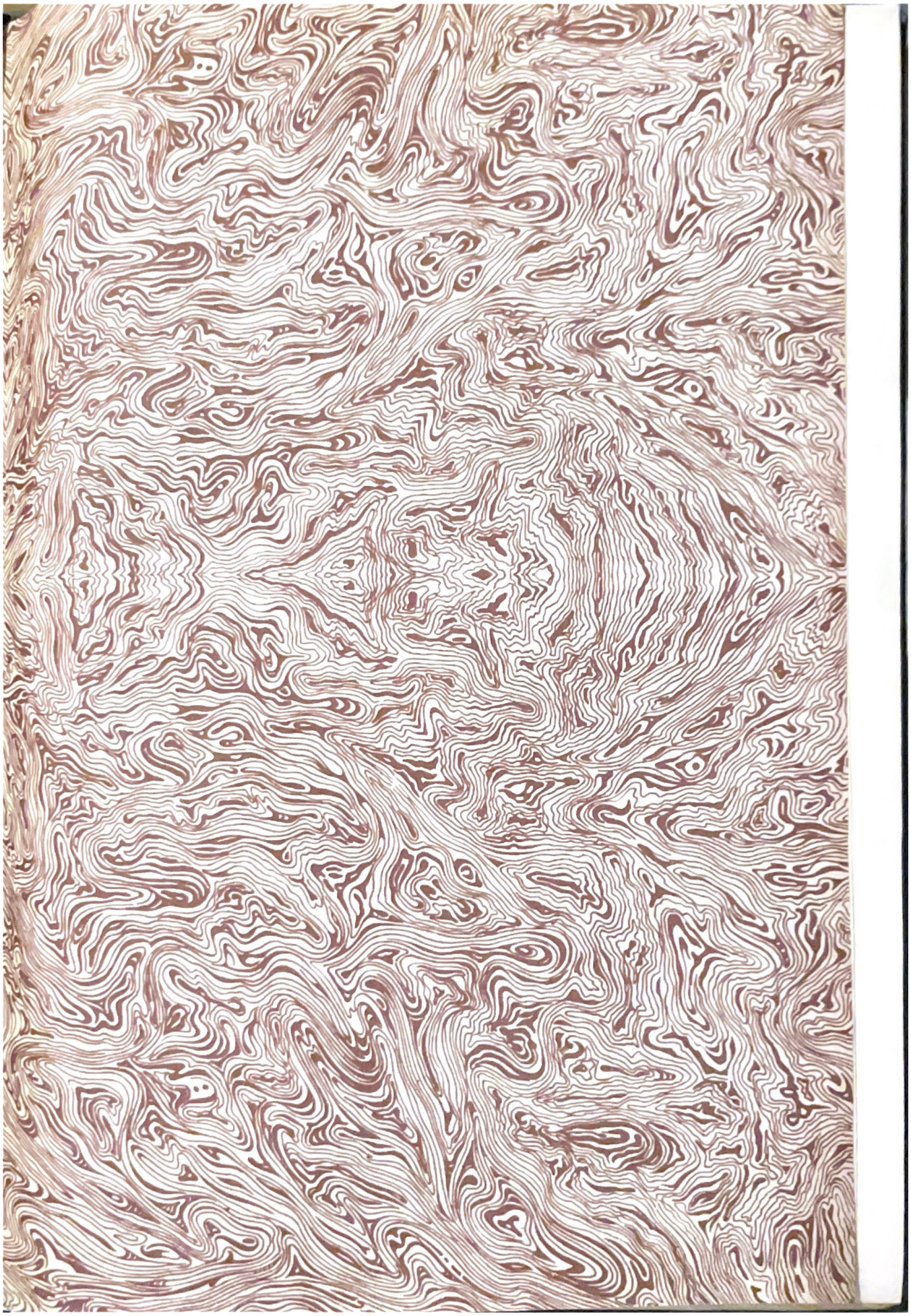
REPRESENTACION ESPINORIAL DEL GRUPO UNITARIO

M. J. Wonenburger



"REPRESENTACION ESPINORIAL DEL GRUPO UNITARIO"

Por

María Josefa Wonenburger Planells

Memoria presentada como tesis doctoral en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid.

UNIVERSIDAD CENTRAL

FACULTAD DE CIENCIAS

Ilmo. Sr.:

Adjunto tengo el honor de remitir la tesis doctoral presentada por la Srta. JOSEFA VONEMBURGER PLANELLES, para optar al Grado de Doctor en ciencias Sección de Matemáticas, la cual ha sido dirigida por D. German Ancochea Quevedo, Catedrático de esta Facultad, rogándole que una vez leída la devuelva a esta Secretaria.

Dios guarde a V.I. muchos años

Madrid, 28 de noviembre de 1959

El Catedrático-Secretario

Ilmo. Sr.D. Francisco Botella

La autora desea expresar su agradecimiento

al profesor Ancochea Quevedo por la dirección

de este trabajo.

I N T R O D U C C I O N

El álgebra de Clifford [4] (1) es un álgebra ligada a una forma cuadrática. Si Q es una forma cuadrática sobre el espacio vectorial M sobre el cuerpo comunicativo K, designaremos por C(M,Q) el álgebra de Clifford ligada a la forma cuadrática Q. La definición de esta álgebra, así como la de la subálgebra $C^+(M,Q)$, y el estudio de sus propiedades pueden verse en [1], [5], [6], [11], [15], siendo [5] el estudio más completo que conocemos sobre dichas álgebras, por lo que usaremos las denominaciones allá empleadas.

Nos ocuparemos solamente del caso en que el espacio vectorial M tiene dimensión par sobre K, esto es, (M:K)= 2n. Entonces C(M,Q) es un álgebra sobre K, simple y de dimensión 2^{2n}; si identificamos K con los múltiplos escalares de la ~~mitad de la~~ unidad de C(M,Q), K es el centro de dicha álgebra y existe un isomorfismo de C(M,Q) sobre un álgebra total de matrices con elementos en un cuerpo R cuyo centro es K. Además C(M,Q) contiene un subespacio sobre K que suele identificarse con el espacio vectorial M; cualquier base de este subespacio forma un sistema de generadores de C(M,Q) sobre K.

Si c es un elemento invertible del álgebra de Clifford, dicho elemento define un automorfismo interior que transforma el elemento a en $-c^{-1}ac$. El conjunto de elementos invertibles de C(M,Q) que definen automorfismos interiores que dejan invariante el subespacio M forma un grupo al que se llama grupo de Clifford. La transformación que estos automorfismos inducen sobre M es una transformación ortogonal de Q, y la aplicación de cada elemento del grupo de Clifford sobre la transformación ortogonal de Q, ligada al automorfismo interior que dicho elemento define, es un homomorfismo del grupo de Clifford en el grupo ortogonal de Q, O(Q). Como dada una transformación ortogonal cualquiera, se puede encontrar un elemento c de C(M,Q) que define un automorfismo interior que induce sobre M dicha transformación ortogonal, el homomorfismo del grupo de Clifford en el grupo ortogonal O(Q) arriba definido, es un homomorfismo sobre O(Q).

---

(1) Los números entre corchetes se refieren a la bibliografía que aparece al final.

El núcleo de este homomorfismo consta de los elementos del grupo de Clifford que dejan invariantes todos los elementos de M; el núcleo es pues igual a K', el grupo multiplicativo de los elementos invertibles de K.

Denotemos por * el anti-automorfismo involutivo de C(M,Q) que deja invariante los elementos de M. Si c pertenece al grupo de Clifford, cc^* es un elemento de K' al que se llama norma de c.

Sabemos que todas las representaciones simples de C(M,Q) son equivalentes. Elegida una cualquiera, dicha representación, llamada espinorial, induce una representación de los elementos del grupo de Clifford.

El objeto de nuestro trabajo es el siguiente:

Sea f una forma hermitiana sobre un espacio vectorial M de dimensión n, sobre el cuerpo commutativo F, y sea K el subcuerpo de F de elementos simétricos respecto del automorfismo involutivo J asociado con la forma hermitiana. Existe entonces una forma cuadrática Q sobre M, considerado como espacio vectorial sobre K, tal, que las transformaciones unitarias de M respecto de f, son transformaciones ortogonales respecto de Q (véase [12] y [16]). Naturalmente la inversa no es cierta, porque existen transformaciones ortogonales de Q que no son transformaciones unitarias de M respecto a f, ya que ni siquiera son transformaciones lineales de M sobre F.

Consideramos el subgrupo $U \subset O(Q)$ de transformaciones ortogonales de Q que corresponden a transformaciones unitarias de f, La representación espinorial del grupo de Clifford induce una representación del subgrupo Δ formado por los elementos c que definene automorfismos interiores ligados a las transformaciones ortogonales de Q que son transformaciones unitarias respecto a f. Seguimos llamando a esta representación, representación espinorial, y su estudio constitutye el tema principal de este trabajo.

Para hallar las representaciones en que se descomponen la representación espinorial de Δ, nos basta conocer como se descompone el álgebra G, álgebra sobre K envolvente de los elementos Δ.

La determinación directa de la estructura de G no parece fácil, por lo que empezamos nuestro estudio definiendo una subálgebra $D(M,f)$ del álgebra $C(M,Q)$. Los elementos de $D(M,f)$ son los elementos invariantes ante un grupo de automorfismos de $C^+(M,Q)$ ligado con las homotecias de f. Demostramos después que, cuando la característica de K es cero o mayor que $(M:F)$, esta álgebra es semi-simple, y hallamos sus componentes simples.

En el capítulo II estudiamos con más detalle el álgebra $D(M,f)$ a fin de probar que coincide con G. Como conocemos las componentes simples del álgebra $G = D(M,f)$ cuando la característica de K cumple las condiciones arriba citadas, quedan determinadas las representaciones simples en que se descompone la representación espinorial.

En [16] pág. 7, hemos definido una graduación con índices 0, 1,... .., $(M:K)$ sobre $C(M,Q)$, considerando como espacio vectorial sobre K. El subespacio M de $C(M,Q)$, coincide con el subespacio de grado 1, y el álgebra $C^+(M,Q)$ está formada por los elementos de grado par. Con esta graduación resulta que los elementos del grupo de Clifford son los elementos invertibles que definen automorfismos interiores homogéneos de grado cero, y que los automorfismos interiores de $C(M,Q)$ que inducen sobre $C^+(M,Q)$ automorfismos homogéneos de grado cero, coinciden con los automorfismos de $C^+(M,Q)$ definidos por las semejanzas de Q. Se deduce inmediatamente de su definición que el álgebra $D(M,f)$ es un subespacio homogéneo de $C^+(M,Q)$.

Probamos que los elementos de $C(M,Q)$ que definen automorfismos interiores de $C(M,Q)$ que inducen sobre $C^+(M,Q)$ automorfismos definidos por las semejanzas de Q que son semejanzas unitarias respecto de f, pertenecen al álgebra $D(M,f)$. Tenemos pues que a toda semejanza unitaria de f corresponde una semejanza de Q que define un aotomorfismo homogéneo de grado cero de $C^+(M,Q)$ que induce un automorfismo en $D(M,f)$.

En el capítulo III obtenemos representaciones fieles del grupo proyectivo de semejanzas unitarias de f, en grupos ortogonales, partiendo de las representaciones que obtenemos considerando las transformaciones que los automorfismos ligados a las semejanzas unitarias inducen en los subespacios de grado 2i, i=1, 2,..., (M;F), de D(M,f).

C A P I T U L O I

Empezamos este capítulo recordando las definiciones de forma hermitiana y semejanza unitaria, lo cual nos permitirá al mismo tiempo ir fijando nuestra notación. Daremos a nuestras definiciones la generalidad necesaria para nuestro objeto, y remitimos al lector a [9], cap. I, §§ 5, 6, 9, si desea ver definiciones más generales.

Definimos la subálgebra $D(M,f)$ de $C(M,Q)$, cuya estructura determinamos y estudiamos sobre $D(M,f)$ el antiautomorfismo involutivo inducido por el anti-automorfismo $\bar{\ }$ de $C(M,Q)$.

§ 1

Sea F un cuerpo conmutativo de característica distinta de 2, y J un automorfismo de F de período 2, distinto de la identidad. Designaremos los elementos de F por letras griegas. El conjunto de los elementos simétricos respecto de J, esto es

$$K = \{ \alpha \mid \alpha^J = \alpha \ , \ \alpha \in F \}$$

es un subcuerpo de F, y F es una extensión cuadrática de K obtenida adjuntando cualquier elemento antisimétrico. Es decir, $K(\theta) = F$, donde $\theta^J = -\theta$ y $\theta^2 = \rho \in K$.

Sea M un espacio vectorial, a la izquierda sobre F, cuyos elementos designaremos por minúsculas latinas. Decimos que $f(x,y)$ es una forma hermitiana sobre M, respecto al automorfismo J o que J es el automorfismo asociado a f, si f es una función con valores en F que satisface las siguientes condiciones:

I) es biaditiva, o sea

$$f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2,y); \qquad f(x,y_1+y_2) = f(x,y_1) + f(x,y_2)$$

II) es sesquilineal, esto es,

$$f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y) \quad y \quad f(x, \lambda y) = f(x,y)\lambda^J$$

y

III) reflexiva, es decir,

$$f(x,y) = (f(y,x))^J$$

Si S es una transformación lineal de M, representaremos por uS el transformado de $u \in M$ por S. Se dice que S es una semejanza unitaria o una semejanza respecto de f, de razón μ_S, si

$$f(xS, y\,S) = \mu_S f(x,y),$$

donde μ_S depende sólo de S.

Cuando $\mu_S = 1$, S se llama transformación unitaria. Las transformaciones unitarias son pues un caso particular de las semenjanzas. A las semejanzas $T_{\alpha+\beta\theta}$ definidas por los elementos $\alpha+\beta\theta$ de F, de la siguiente manera:

$$xT_{\alpha+\beta\theta} = (\alpha+\beta\theta)x$$

se les llama homotecias.

La forma f se llamma no degenerada, cuendo $f(x_o,y) = 0$, para todo y, implica que $x_o = 0$.

En lo que sigue supondremos siempre que M es un espacio vectorial de dimensión finita sobre F, y que f es una forma hermitiana no degenerada.

Si consideramos como operadores sobre M solamente los elementos de F que pertenencen a K, M queda definido como espacio vectorial sobre K, Su dimensión será entonces el doble de la dimensión $n = (M:F)$, ya que $(F:K) = 2$.

Definiendo

$$(x,y) = f(x,y) + f(y,x),$$

(x,y) es una forma bilineal simétrica, no degenerada, de M considerado como espacio vectorial sobre K, a la cual podemos asociar por tanto, una forma cuadrática Q, haciendo $Q(x) = 1/2(x,x)$.

Una transformación lineal de M sobre F que es una semejanza o transformación unitaria respecto de f, es una semejanza o transformación ortogonal, respectivamente, de (M,Q), es decir, de M respecto de Q. En particular, todo homotecia de (M,f), es decir, de M respecto de f, define una semejanza de (M,Q). Si llamamos T a la semejanza de (M,Q), definida por la homotecia T_θ , resulta que toda semejanza de (M,Q) que conmuta con T es una semejanza unitaria de (M,f) (v. [16] cap. II, cor. 1, pág. 59).

Sea $C(M,Q)$ el álgebra de Clifford definida por la forma Q; esta álgebra puede considerarse como un espacio vectorial graduado. Si los vectores $x_1, x_2, \ldots, x_{2n} \in M$ forma una base ortogonal de (M,Q), el subespacio de grado h, $0 \leq h \leq 2n$, tiene como base los elementos de la forma.

$$x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_h} \; ; \; i_1 < i_2 < \ldots < i_h .$$

Estos subespacios y, por tanto, la graduación son independientes de la base ortogonal elegida (v. [16] cap. I lema 1, pág. 5). La subálgebra $C^+(M,Q)$ es la subálgebra definida por el subespacio homogéneo suma directa de los subespacios de grado par. Existe un isomorfismo natural entre el subespacio de grado 1 y el espacio M sobre K, el cual identificaremos con el subespacio de grado 1 por medio de dicho isomorfismo.

Como toda semejanza de(M,f) es una semejanza de (M,Q), y cada semejanza de (M,Q) define un automorfismo homogéneo de grado cero en $C^+(M,Q)$, resulta que cada semejanza de (M,f) define un automorfismo homogéneo de grado cero de $C^+(M,Q)$. Diremos de dicho automorfismo que está ligado a la semejanza unitaria dada. La manera en que actúa sobre $C^+(M,Q)$ el automorfismo ligado a una semejanza aparece indicada en [9] pág. 72, [10] y [11], y desarrollada en forma completa y en un artículo, no publicado, de N. Jacobson, cuya presentación reproducimos en [16], pág. 18,

18°. Dos semejanzas S y S' definen el mismo automorfismo de $C^+(M,Q)$, cuando, y sólo cuando, $S' = ST_\alpha$, $\alpha \in K$. Dada una semejanza S de (M,Q), existe un elemento, de $C(M,Q)$ que define un automorfismo interior de este álgebra, que induce sobre $C^+(M,Q)$ el automorfismo ligado a S (V. [16], teor, 1, pág. 19).

Definimos ahora el álgebra $D(M,f)$ como la subálgebra de $C^+(M,Q)$ formada por todos los elementos que permanecen invariantes ante todos los automorfismos de $C^+(M,Q)$ definidos por las homotecias de f. $D(M,f)$ es un álgebra sobre K.

Resulta de la definición que $D(M,f)$ es un subespacio homogéneo de $C^+(M,Q)$; esto es, $D(M,f)$ es suma directa de sus subespacios de grado 2i, $i = 1, 2, \ldots n$.

Sea $x_1, x_2, \ldots x_n$, una base ortogonal de (M,f). Entonces los 2n elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1 = \theta x_1, \ldots, y_n = \theta x_n$, forman una base ortogonal de (M,Q).

Si $\alpha + \beta\theta$ es un elemento de F, con $\beta \neq 0$, que tiene norma

$$N(\alpha + \beta\theta) = (\alpha + \beta\theta)(\alpha - \beta\theta) = (\alpha^2 - \rho\beta^2) = 1,$$

sea U_i la cuasi-simetría que opera de la forma siguiente

$$x_i U_i = (\alpha + \beta\theta)x_i = \alpha x_i + \beta y_i;\ x_j U_i = x_j \quad \text{si} \quad j \neq i,$$

y por consiguiente

$$y_i U_i = (\theta x_i)U_i = \theta(\alpha + \beta\theta)x_i = \alpha\theta x_i + \beta\rho x_i = \alpha y_i + \beta\rho x_i;\ y_j U_i = (\theta x_j)U_i = \theta x_j = y_j$$

para $i \neq j$

Lema 1. El automorfismo de $C(M,Q)$ definido por la transformación U_i es el automorfismo interior definido por el elemento $u_i = \frac{1+\alpha}{\beta} + Q(x_i)^{-1} x_i y_i$.

Demostración: Puesto que los elementos de grado 1 engendran $C(M,Q)$, es suficiente probar que sobre estos elementos el automorfismo definido por U_i tiene el mismo efecto que la transformación u_i.

El inverso de u_i es

$$u_i^{-1} = \left(\frac{2(1+\alpha)}{\beta^2}\right)^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{\beta} - Q(x_i)^{-1}\, x_i y_i\right) \quad \text{pues} \quad u_i^{-1} u_i = \left(\frac{2(1+\alpha)}{\beta^2}\right)^{-1}\cdot$$

$$\left(\frac{(1+\alpha)^2}{\beta^2} - \rho\right) = \left(\frac{2(1+\alpha)}{\beta^2}\right)^{-1}\left(\frac{1+2\alpha+\alpha^2-\rho\beta^2}{\beta^2}\right) = 1 \text{ ya que } \alpha^2-\rho\beta^2 = 1.$$

Como u_i conmuta con todas las x_j, y_j, para $j \neq i$,

$u_i^{-1} x_j u_i = x_j = x_j U_i$; $u_i^{-1} y_j u_i = y_j = y_j U_i$. En cuanto a x_i e y_i

$$u_i^{-1} x_i u_i = \left(\frac{2(1+\alpha)}{\beta^2}\right)^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{\beta} - Q(x_i)^{-1}x_i y_i\right)x_i\left(\frac{1+\alpha}{\beta} + Q(x_i)^{-1}x_i y_i\right) =$$

$$= \left(\frac{2(1+\alpha)}{\beta^2}\right)^{-1}\left(\frac{1+\alpha}{\beta} - Q(x_i)^{-1}x_i y_i\right)^2 x_i = \left(\frac{2(1+\alpha)}{\beta^2}\right)^{-1}\left(\frac{2\alpha(1+\alpha)}{\beta^2}\, x_i + \frac{2(1+\alpha)}{\beta} y_i\right) =$$

$$= \alpha x_i + \beta y_i = x_i U_i; \quad u_i^{-1} y_i u_i = \left(\frac{2(1+\alpha)}{\beta^2}\right)^{-1}\left(\frac{2\alpha(1+\alpha)}{\beta^2} y_i + \frac{2(1+\alpha)}{\beta}\rho x_i\right) =$$

$$= \alpha y_i + \beta\rho x_i = y_i U_i$$

con lo cual queda demostrado el lema.

La homotecia definida por $\alpha + \beta\theta$, si $N(\alpha+\beta\theta) = 1$, es igual a la transformación $U = U_1 U_2 \ldots U_n$, la cual define un automorfismo de $C(M,Q)$ igual al automorfismo interior definido por $u = u_1 u_2 \ldots u_n$.

Busquemos pues primeramente homotecias de la forma $\alpha+\beta\theta$, en que $N(\alpha+\beta\theta) = 1$. Para nuestro objeto nos basta considerar las que se obtienen de la siguiente manera: tomemos cualquier elemento de la forma $\mu+\theta$, y dividamos su cuadrado $\mu^2+\rho+2\mu\theta$, por su norma $\mu^2-\rho$; obtenemos entonces el elemento de norma 1,

$$\frac{\mu^2+\rho}{\mu^2-\rho} - \frac{2\mu}{\mu^2-\rho}\,\theta = \alpha+\beta\theta.$$

Entonces $\frac{1+\alpha}{\beta} = \frac{2\mu^2}{2\mu} = \mu$ y el automorfismo de $C(M,Q)$ definido por la homotecia U es el automorfismo interior definido por

$$u = \sum_{i=1}^{n} (\mu + Q(x_i)^{-1} x_i y_i) = \mu^n + \mu^{n-1} r_1 + \ldots + \mu^{n-i} r_i + \ldots + r_n$$

donde

$$r_h = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_h \leq n} Q(x_{i_1})^{-1} Q(x_{i_2})^{-1} \ldots Q(x_{i_h})^{-1} x_{i_1} y_{i_1} \ldots x_{i_h} y_{i_h},$$

y la suma se extiende a todas las combinaciones de h índices.

Lema 2. Si K tiene por lo menos n elementos, para que un elemento de $C^+(M,Q)$ pertenezca a $D(M,f)$ es necesario que conmute con las r_i, $i = 1, 2, \ldots n$.

Demostración: Como los elementos de $D(M,f)$ permanecen invariantes ante todos los automorfismos definidos por las homotecias $\alpha + \beta\theta$, permanecerán invariantes, en particular, ante aquellos definidos por las homotedias de norma 1 descritas arriba. Esto quiere decir que dichos elementos deben conmutar con u, cualquiera que sea el valor de μ. Como μ^n y r_n pertenecen al centro de $C^+(M,Q)$, los elementos de $D(M,f)$ conmutan con

$$\mu^{n-1} r_1 + \mu^{n-2} r_2 + \ldots + \mu r_{n-1} \qquad (1)$$

y todas las combinaciones lineales de estos elementos.

Si K tiene por lo menos n elementos, tomando para μ, n-1 valores distintos entre si y distintos de cero, obtenemos n-1 elementos linealmente independientes del espacio sobre K engendrado por $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$, pues, los coeficientes de las n-1 expresiones de la forma (1) definen un determinante de Vandeermonde distinto de 0. Luego, las r_i son combinaciones lineales de dichas expresiones y conmutan con los elementos de $D(M,f)$.

Dada ahora una homotecia $\alpha + \beta\theta$ de norma cualquiera y $\beta \neq 0$, como el automorfismo que define en $C^+(M,Q)$ no varía si multiplicamos dicha

homotecia por $T_{\beta^{-1}}$ podemos suponer $\beta = 1$. Sea $K(\alpha + \theta) = \alpha^2 - \rho = \delta$. Adjuntamos a K, $\sqrt{\delta}$, y sea $P = K(\sqrt{\delta})$. Sea $M_p = P \otimes_K M$ el espacio vectorial deducido de M, considerando como espacio vectorial sobre K, por extensión de K a P; y, Q_p la extensión de Q a M_p. Entonces sabemos que $C(M,Q) \otimes_K P \cong C(M_p, Q_p)$, (véase [5] II. 1.5, pág. 41). Si $\sqrt{\delta}$ pertenece a K, P=K, y por tanto $C(M,Q) = C(M_p, Q_p)$.

Toda semejanza S de (M,Q) se extiende de manera única a una semejanza S' de (M_p, Q_p).

Según el lema 1, el automorfismo de $C(M_p, Q_p)$ definido por la transformación ortogonal U_i, tal que

$$x_i U_i = \frac{\alpha}{\sqrt{\delta}} x_i + \frac{1}{\sqrt{\delta}} y_i \; ; \; y_i U_i = \frac{\alpha}{\sqrt{\delta}} y_i + \frac{\rho}{\sqrt{\delta}} x_i ; x_j U_i = x_j \; ; \; y_j U_i = y_j$$

es el automorfismo interior definido por

$$u_i = \frac{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\delta}}}{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} + Q(x_i)^{-1} x_i y_i = \sqrt{\delta} + \alpha + Q(x_i)^{-1} x_i y_i .$$

Luego el automorfismo definido por la transformación $U = U_1 U_2 \ldots U_n$, será el automorfismo interior definido por

$$u = u_1 u_2 \ldots u_n = (\sqrt{\delta} + \alpha)^n + (\sqrt{\delta} + \alpha)^{n-1} r_1 + \ldots + (\sqrt{\delta} + \alpha)^{n-i} r_i + \ldots + r_n$$

Sobre $C^+(M_p, Q_p)$ el automorfismo definido por U es el mismo que el definido por $U' = U T_{\sqrt{\delta}}$, esto es

$$x_i U' = \alpha \; x_i + y_i \; ; \; y_i U' = \alpha \; y_i + \rho \; x_i \; , \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Esto indica que el elemento $u \in C^+(M_p, Q_p)$ define el automorfismo interior de $C^+(M_p, Q_p)$ que induce sobre $C^+(M,Q)$ el automorfismo definido por la homotecia $\alpha + \theta$. Por tanto todos los elementos de $C^+(M,Q)$ que conmutan con r_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, quedan invariantes ante los automorfismos definidos por las homotecias $\alpha + \theta$, y, por consiguiente, pertenecen a $D(M,f)$. Hemos probado pues el

Lema 3. La condición del lema 2, además de necesarias, es suficiente.

En el caso de que $\sqrt{\delta}$ no pertenezca a K, podemos hallar fácilmente un elemento de $C^+(M,Q)$ que define el mismo automorfismo interior que u. Pues, como r_n pertenece al centro de C(M,Q) u define el mismo automorfismo que $v = u(1+((\alpha - \sqrt{\delta})/\rho)^n r_n)$.

Teniendo en cuenta que

$$r_h r_n = (\Sigma Q(x_{i_1})^{-1}\ldots Q(x_{i_h})^{-1} x_{i_1} y_{i_1}\ldots x_{i_h} y_{i_h})(Q(x_1)^{-1}\ldots Q(x_n)^{-1} x_1 y_1 \ldots x_n y_n) =$$

$$= \rho^h r_{n-h},$$

y que $(\alpha + \sqrt{\delta})((\alpha - \sqrt{\delta})/\rho) = 1$, resulta

$$v = u(1+((\alpha - \sqrt{\delta})/\rho)^n r_n) = (\alpha + \sqrt{\delta})^n + (\alpha - \sqrt{\delta})^n + \ldots + [(\alpha + \sqrt{\delta})^{n-i} +$$

$$+ (\alpha - \sqrt{\delta})^{n-i}] r_i + \ldots + 2r_n, \quad y \quad v \in C(M,Q).$$

Señalemos también que como todo elemento de C(M,Q) que conmuta con r_n pertenece a $C^+(M,Q)$ podemos definir D(M,f) como el contralizador en C(M,Q), de los elementos $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Supongamos ahora que K tiene característica $p > n$, o bien $p=0$. Tomemos $s = r_1^h$, $h \leq n$; entonces, s es una combinación lineal de r_i, $i=1,2,\ldots h$. Además, el coeficiente de r_h en s es distinto de cero, porque $h! \neq 0$ en un cuerpo de características $p=0$ ó $p > n \geq h$. Esto quiere decir que si un elemento conmuta con r_1, conmuta con todas las r_i, puesto que son combinaciones lineales de potencias de r_1. Como al suponer que $p > n$, ó $p=0$, sabemos que K tiene más de n elementos, queda probado el

Lema 4. Si la característica de K es cero o mayor que la dimensión (M:F), el álgebra D(M,f) es el centrilizador del elemento r_1 en C(M,Q)

§ 2

Ahora nos será necesario dar un rodeo a fin de determinar la forma del elemento r_1 en el álgebra simple $C(M,Q)$, lo cual nos permitirá hallar la estructura de $D(M,F)$. Haremos uso de los productos tensoriales o directos cuyas propiedades pueden verse en [3].

Supongamos como antes que Q es la forma cuadrática asociada a la forma hermitiana, no degenerada, f, del espacio vectorial M sobre $F=K(\theta)$ y que $x_1, x_2, \ldots, x_n$, es una base ortogonal de (M,f). Sabemos que entonces

$$x_1, y_i = \theta\ x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

es una base ortogonal de (M,Q).

Si hacemos una extensión de M, considerado como espacio vectorial sobre K, a $M_F = F \otimes_K M$, los elementos (2) siguen formando una base ortogonal del espacio (M_F, Q_F).

El álgebra $C(M,Q)$ puede ser expresada como producto directo de cuaternios sobre K, de los que damos los elementos de una base del tipo $1, i, j, k$, de la siguiente manera,

$$C(M,Q) \cong (1, x_1, y_1, x_1y_1)_1 \otimes_K \cdots \otimes_K (1, u_i, v_i, \rho^{i-1} x_iy_i)_i \otimes_K \cdots \otimes_K$$

$$(1, u_n, v_n, \rho^{n-1} x_ny_n)_n$$

donde

$$u_i = Q(x_1)^{-1} \ldots Q(x_{i-1})^{-1}\, x_1y_1x_2y_2 \cdots x_{i-1}y_{i-1}x_i = \left(\prod_{h=1}^{i-1} Q(x_h)^{-1} x_hy_h\right) x_i,$$

$$v_i = \left(\prod_{h=1}^{i-1} Q(x_h)^{-1} x_hy_h\right) y_i.$$

$C(M_F, Q_F) \cong C(M,Q) \otimes_K F$ es por tanto un producto de cuaternios como los arriba indicados, pero considerados ahora como cuaternios sobre F, o sea

$$C(M_F, Q_F) \cong ((1, x_1, y_1, x_1y_1)_F)_1 \otimes_F \cdots \otimes_F ((1, u_n, v_n, \rho^{n-1} x_ny_n)_F)_n.$$

Pero puesto que $(\rho^{i-1} x_i y_i)^2 - \rho^{2i-1} Q(x_i)^2$ es un cuadrado en F, existe un isomorfismo de cada uno de estos cuaternios con el álgebra F_2 (álgebra de matrices de orden 2 x 2 con elementos en F).

Tomando una base conveniente, el elemento

$$Q(x_i)^{-1} \theta^{-1} x_i y_i \in C(M_F, Q_F),$$

cuyo cuadrado es igual a 1, puede ser representado por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Si designamos por e_1^1, e_1^2, e_2^1, e_2^2 las unidades matriciales

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

podemos escribir

$$\theta^{-1} x_i y_i = (1)_1 \otimes_F \dots \otimes_F (e_1^1 - e_2^2)_i \otimes_F \dots \otimes_F (1)_n$$

En el álgebra $C(M_F, Q_F) \cong (F_2)_1 \otimes_F \dots \otimes_F (F_2)_n \cong F_{2^n}$ designaremos por $u^{h_1, h_2, \dots h_n}_{m_1, m_2, \dots m_n}$ los elementos de F_{2^n} que corresponden a

$$(e^{h_1}_{m_1})_1 \otimes_F (e^{h_2}_{m_2})_2 \otimes_F \dots \otimes_F (e^{h_n}_{m_n})_n \; ; \; h_j, m_j = 1, 2; \; j = 1, 2, \dots, n.$$

Evidentemente los 2^{2n} elementos $u^{h_1 \dots h_n}_{m_1 \dots m_n}$ forman una base matricial de F_{2^n}. Ordenemos las 2^n sucesiones $P_i = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $m_j = 1, 2$, de tal manera que las sucesiones con s_1 "2" precedan a las sucesiones con s_2 "2", si $s_1 < s_2$, y entre las sucesiones con igual número de "2" adoptemos un órden cualquiera. Hagamos

$$u^{h_1 \dots h_n}_{m_1 \dots m_n} = u^s_r$$

donde r y s son los lugares que ocupan las sucesiones $P_r = (m_1 \dots m_n)$ y $P_s = (h_1 \dots h_n)$, respectivamante, en dicha ordenación.

Vemos pues que con las bases elegidas para $(F_2)_1 \otimes \dots \otimes (F_2)_n$ y F_{2^n} el elemento $\theta^{-1} Q(x_i)^{-1} x_i y_i$ viene expresado así

$$\theta^{-1} Q(x_i)^{-1} x_i y_i \cong (e_1^1 + e_2^2)_1 \otimes \dots \otimes (e_1^1 - e_2^2)_i \otimes \dots \otimes (e_1^1 + e_2^2)_n$$

$$\cong \sum_r \delta_{ir} u^r_r$$

donde δ_{ir} es 1 si la sucesión P_r tiene un 1 en el i-ésimo lugar, e igual a -1 si tiene un 2.

Entonces el elemento $\sum_{i=1}^{r} \theta^{-1} Q(x_i)^{-1} x_i y_i = \sum_{r=1}^{2^n} \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{ir} \right) u_r^r$. El coeficiente $\sum_{i=1}^{n} \delta_{is}$ de u_s^s es una suma de 1 y -1, en la que el número de -1 es igual al número b de "2" contenidos en la sucesión P_s. El coeficiente de u_s^s es pues igual a n-2b y $\Sigma\, \theta^{-1} Q(x_i)^{-1} x_i y_i$ es isomorfo a una matriz diagonal,

$$B = \text{diag. } (n,\ n-2,\ n-2,\ldots,\ n-2j,\ldots,\ -n)$$

en la que hay $\binom{n}{j}$ términos iguales a n-2j, j=0, 1,..., n.

El elemento $r_1 = \sum_i Q(x_i)^{-1} x_i y_i$ está representado pues, por la matriz

$$B = \text{diag. } (n\theta,\ (n-2)\theta,\ldots,\ -n\theta)$$

cuyo polinomio característica es

$$\prod_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (x-(n-2i)\theta)^{\binom{n}{i}} (x+(n-2i)\theta)^{\binom{n}{i}} = \prod_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (x^2-(n-2i)^2 \rho)^{\binom{n}{i}}$$

si n es impar, donde [n/2] denota la parte entera de n/2, y

$$\left[\prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (x-(n-2i)\theta)^{\binom{n}{i}} (x+(n-2i)\theta)^{\binom{n}{i}} \right] \times \binom{n}{n/2} = x^{\binom{n}{n/2}} \prod_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} (x^2-(n-2i)^2\rho)^{\binom{n}{i}}$$

si n es par.

La matriz B' es semejante, pues tiene los mismos divisores elementales, a una matriz que expresada en bloques de orden 2x2 tiene la forma diagonal

$$B'' = AB'A^{-1} = \text{diag. } (\alpha_0,\ \alpha_1,\ldots,\alpha_i,\ldots,\alpha_{[n/2]})$$

donde $\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (n-2i)^2 \rho & 0 \end{pmatrix}$ y el número de veces que aparece α_i en B'' es $\binom{n}{i}$. A diferencia de B' esta matriz tiene sus elementos en K.

Estudiemos ahora la forma del álgebra simple C(M,Q), cuyo centro es K, por ser par la dimensión (M:K); es decir

$$C(M,Q) \cong K_r \otimes_K R$$

donde R es un álgebra de división cuyo centro es K.

Por otra parte hemos visto que

$$C(M,Q) \otimes_K F \cong C(M_F, Q_F) \cong F_{2^n}$$

lo cual prueba que F es un cuerpo de descomposición de R, y, por tanto, $(F:K) = 2$ es un múltiplo de $\sqrt{(R:K)}$ (véase [2] cor. 8. 3. C.). Esto demuestra que $(R:K) = 1$ y $R = K$, o bien $(R:K) = 4$ y R es un álgebra de cuaternios sobre K.

Consideremos los dos casos, ya que es inmediato comprobar que ambos pueden presentarse.

Caso 1: $R = K, C(M,Q) \cong K_{2^n}$

Hemos visto que en el álgebra $C(M_F, Q_F) \cong F_{2^n}$ el elemento $r_1 = \sum_i Q(x_i)^{-1} x_i y_i$ puede ser representado por la matriz $B'' = \text{diag.}(\alpha_0, \ldots, \alpha_{[n/2]})$.

Sea B"' una representación de r_1 en $K_{2^n} \cong C(M,Q)$; B"' será también una representación en $F_{2^n} \cong K_{2^n} \otimes_K F$. Como en F_{2^n}, r_1 se puede representar por $B'' \in K_{2^n}$, B" es semejante a B"' en F_{2^n} y, por lo tanto, también en K_{2^n}. Es decir B" es una representación de r_1 en C(M,Q).

Sólo nos falta por determinar el centralizador de B" en K_{2^n}. Consideremos K_{2^n} como el álgebra de transformaciones lineales de una espacio vectorial N sobre K de dimensión 2^n. Suponemos como antes, que la característica p de K es cero o mayor que n.

La transformación definida por B" es completamente reducible. Las transformaciones irreducibles que la componen pertenecen a $1 + [\frac{n}{2}]$ clases distintas de transformaciones irreducibles no semejantes, correspondientes a las matrices $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{[n/2]}$.

Consideremos el espacio N como un módulo sobre el anillo A, engendrado por la transformación representada por B" y las multiplicaciones

escalares, y expresamos el A-módulo M como suma directa $\sum_{i=o}^{[n/2]} \oplus N_i$ de sus $1 + [n/2]$ componentes homogéneas. Estas componentes N_i consideradas como submódulos sobre A son isomorfas a espacios vectoriales sobre $F = K(\theta)$ de dimensión $\binom{n}{i}$ para $i = 0, 1, \ldots [n/2]$, si n es impar, y para $i = 0, 1, \ldots (n/2)-1$, si n es par, pues, en este caso la componente homogénea $N_{n/2}$, definida por la suma de submódulos irreducibles correspondientes a $\alpha_{n/2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es isomorfa a un espacio vectorial sobre K de dimensión $\binom{n}{n/2}$.

El centralizador D de A en el anillo de endomorfismos de M considerado como grupo aditivo, coincide con su centralizador en el álgebra de transformaciones lineales K_{2n}, pues A contiene las multiplicaciones escalares por elementos $\alpha \in K$. Esto equivale a decir que $D \cong D(M,f)$. Además D como álgebra de transformaciones es completamente reducible y tiene las mismas componentes homogéneas que A (véase [14] teorema 6. 1. 1.). D tiene por tanto la forma siguiente

$$D \cong D(M,f) \cong \sum_{i=o}^{r} \oplus F_{\binom{n}{i}} \qquad \text{si} \quad n = 2r+1, \quad y$$

$$D \cong D(M,f) \cong \sum_{i=o}^{r-1} \oplus F_{\binom{n}{i}} \oplus K_{\binom{n}{r}} \qquad \text{si} \quad n = 2r$$

En ambos casos la dimensión de D(M,f) es igual a

$$\sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

<u>Caso 2:</u> $C(M,Q) \cong K_{2^{n-1}} \otimes_K R$, donde R es un álgebra de cuaternios sobre K, que forman un cuerpo no conmutativo. Por el teorema de Wedderburn sobre cuerpos finitos, este caso sólo puede presentarse cuando K tiene un número infinito de elementos.

Como F es un cuerpo de descomposición de R y $(F:K) = \sqrt{(R:K)}$, R contiene un cuerpo isomorfo a F (v. [2], teorema 8.3.A(3), y teorema

7.3.C (4)), que seguimos designando por F y designaremos por i_1 el elemento de R que verifica $i_1^2 = \rho$.

El álgebra R es isomorfa a la subálgebra de F_2 que tiene por bases los elementos

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad u_1 = \begin{pmatrix}\theta & 0\\ 0 & -\theta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\ \alpha & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & \theta\\ -\alpha\theta & 0\end{pmatrix}$$

donde $\alpha \in K$ es tal que existe un $i_2 \in R$ que verifica $i_2^2 = \alpha$, $i_1 i_2 - i_2 i_1$.

Haciendo uso de esta representación de R y tomando como unidades matriciales $u_{2(i-1)+r}^{2(j-1)+s} \cong e_i^j \otimes e_r^s$ $\quad i, j = 1, 2, \ldots 2^{n-1}$; $r, s = 1, 2$; obtenemos una representación de $C(M,Q) \cong K_{2^{n-1}} \otimes_K R$ en una subálgebra S de F_{2^n}.

Adjuntando a esta subálgebra el elemento $\theta I_{2^n} \in F_{2^n}$ (I_{2^n} denota la matriz unidad de F_{2^n}), obtenemos el álgebra,

$$F_{2^n} \cong F_{2^{n-1}} \otimes_K R \otimes_K F \cong C(M,Q) \otimes_K F \cong C(M_F, Q_F)$$

Hemos probado antes que como elemento de $C(M_F, Q_F)$, r_1 se puede representar por $B' = \text{diag.}\ (n\theta, (n-2)\theta, \ldots, (n-2i)\theta, \ldots, -n\theta)$ y, por lo tanto, también por la matriz, semejante a B',

$$B'' = \text{diag.}\ (n\theta, -n\theta, \ldots, (n-2i)\theta, -(n-2i)\theta, \ldots) =$$
$$\text{diag.}\ (nu_1, (n-2)u_1, \ldots, (n-2i)u_1, \ldots)$$

donde el número de bloques $(n-2i)u_1 = \begin{pmatrix}(n-2i)\theta & 0\\ 0 & -(n-2i)\theta\end{pmatrix}$ es $\binom{n}{i}$.

Sea E una representación de r_1 en $S \subset F_{2^n}$. Será también una representación de r_1 en $C(M_F, Q_F) \cong F_{2^n} \cong S \otimes_K F$, y por tanto E y B'' son matrices semejantes y existe una matriz invertible M tal que

$$B'' = MEM^{-1}, \quad M \in F_{2^n} \qquad (4)$$

Expresemos M en la forma

$$M = M_1 + \theta M_2, \quad \text{donde} \quad M_1, M_2 \in S \cong K_{2^{n-1}} \otimes_K R$$

Sustituyendo en (4) obtenemos

$$B''' M_1 + \theta B''' M_2 = M_1 E + \theta M_2 E.$$

Ahora bien $B'''M_1$, $M_1E \in S$; y $\theta B'''M_2$, $\theta M_2 E \in \theta S$.

Se debe verificar pues $B'''M_1 = M_1E$ y $B'''M_2 = M_2E$; y, en general,

$$B'''(a_1M_1 + a_2M_2) = (a_1M_1 + a_2M_2)E$$

donde a_1 y a_2 son indeterminadas.

El determinante de $a_1M_1 + a_2M_2$ es una polinomio homogéneo en a_1 y a_2 de grado 2^n, no idénticamente nulo, puesto que para $a_1 = 1$, $a_2 = \theta$, es distinto de cero. Como el número de elementos de K es infinito existen valores λ_1, $\lambda_2 \in K$ para a_1, a_2 tales que

$$\det.\ (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) \neq 0,$$

y por tanto

$$B''' = (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)E(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2)^{-1}$$

Es decir B''' es una representación de r_1 en $S \cong C(M,Q)$.

En la representación de $K_{2n-1} \otimes_K R$ en S que elegimos anteriormente B''' es el elemento de S que representa a $M \otimes_K i_1$ donde M = diago. $(n, n-2, \ldots, n-2i, \ldots) \in K_{2n-1}$ y el número de elementos iguales a $n-2i$ es $\binom{n}{i}$ para todos los valores de i, es decir, $i = 0, 1, \ldots [\frac{n}{2}]$, si n es impar, y para todos excepto $i = n/2$, en cuyo caso el número de elementos es $1/2\binom{n}{n/2}$, si n es par.

En este segundo caso, el álgebra $D(M,f)$ que es el centralizador de $M \otimes i_1$ en $S \cong K_{2n-1} \otimes R$ tiene la siguiente estructura

$$D(M,f) \cong \sum_{i=o}^{r} \oplus F_{\binom{n}{i}}, \quad \text{si} \quad n = 2r+1, \quad \text{y}$$

$$D(M,f) \cong \sum_{i=o}^{r-1} \oplus F_{\binom{n}{i}} \oplus R_{\frac{1}{2}\binom{n}{r}}, \quad \text{si} \quad n = 2r$$

Como en el caso anterior, se calcula inmediatamente la dimensión de $D(M,f)$, que es igual a

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}$$

Resumimos estos resultados en el

Teorema 1. Sea f una forma hermitiana, no degenerada, sobre el espacio vectorial M de dimensión n sobre el cuerpo F, J la involución asociada a f, y $K = \{ \alpha \mid \alpha^J = \alpha , \alpha \in F \} \neq F$. Entonces, si la característica de F es cero o mayor que n, el álgebra $D(M,f)$ tiene dimensión $\binom{2n}{n}$, y

$$D(M,f) \cong \sum_{i=0}^{r} \oplus F_{\binom{n}{i}}, \quad \text{si} \quad n = 2r+1; \text{ o bien}$$

$$D(M,f) \cong \sum_{i=0}^{r-1} \oplus F_{\binom{n}{i}} \oplus T, \quad \text{si} \quad n=2r,$$

donde T puede ser $K_{\binom{n}{r}}$ ó $R_{\frac{1}{2}\binom{n}{r}}$ y R es un cuerpo de cuaternios sobre K.

§ 3

Conocida ahora la estructura de $D(M,f)$, cuando la característica de F es cero o mayor que $(M:F)$, vemos que, en cualquiera de los casos que pueden presentarse, la dimensión de su centro sobre K, es n+1. Por tanto, el centro es el espacio vectorial sobre K engendrado por 1, r_1, r_2, ..., r_n, que coincide con el álgebra sobre K engendrada por 1 y r_1.

El anti-automorfismo involutivo $*$ de $C(M,Q)$ deja invariantes los elementos de grado 1, transforma un elemento homogéneo en sí mismo si su grado es 4m ó 4m+1, y en su opuesto si el grado es 4m+2 ó 4m+3. Como $D(M,f)$ es un subespacio homogéneo de $C(M,Q)$, dicho antiautomorfismo induce un antiautomorfismo en $D(M,f)$ que seguiremos designando por $*$.

Definamos un isomorfismo σ del álgebra $D(M,f)$ sobre $\sum_{i=0}^{r-1} \oplus F_{\binom{n}{i}}$ si $n = 2r-1$ y sobre $\sum_{i=0}^{r-1} \oplus F_{\binom{n}{i}} \oplus T$ si $n=2r$. Si $c \in D(M,f)$ llamamos a c^σ

la representación espinorial de $\mathfrak{m}$ c; en esta representación el elemento r_1^σ viene dado por $\sum_{i=o}^{r-1} \oplus (n-2i)\theta I_{\binom{n}{i}}$ si $n = 2r-1$ ó $n = 2r$, o bien por los opuestos de estos elementos. El antiautomorfismo $*$ de $D(M,f)$ define un antiautomorfismo en la representación espinorial, que por simplificar la notación designaremos por el mismo símbolo, siendo $(c^\sigma)^* = (c^*)^\sigma$.

Definimos el antiautomorfismo involutivo γ de la representación espinorial de $D(M,f)$ como el antiautomorfismo que cambia cada matriz perteneciente a $F_{\binom{n}{i}}$ en su transpuesta conjugada respecto al antiautomorfismo J de F, y de las matrices pertenecientes a T en sus transpuestas si $T = K_{\binom{n}{r}}$, y en sus transpuestos conjugadas respecto a cualquier antiautomorfismo involutivo J' del algébra de cuaternios R, que deja invariantes los elementos de K, cuando $T = R_{1/2\binom{n}{r}}$.

El producto de los antiautomorfismos $*$ y γ es un automorfismo de la representación espinorial de $D(M,f)$, que deja invariantes los elementos 1 y r_1^σ, pues como r_1 es un elemento de grado 2

$$(r_1^\sigma)^{*\gamma} = ((r_1^*)^\sigma)^\gamma = ((-r_1)^\sigma)^\gamma = -(r_1^\sigma)^\gamma = r_1^\sigma$$

El centro de la representación espinorial de $D(M,f)$, engendrado por 1 y r_1^σ, permanece, pues, invariante ante dicho automorfismo, lo cual demuestra que se trata de un automorfismo interior, ya que $D(M,f)$ es semi-simple, y por tantp, también su representación espinorial.

Sea $P = \sum_{i=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \oplus (P)_i$, donde $(P)_i \in F_{\binom{n}{i}}$ para $i = 0, 1, \ldots, [n/2]-1$,

$(P)_{\left[\frac{n}{2}\right]} \in F_{\binom{n}{r}}$ si $n = 2r+1$ y $(P)_{\left[\frac{n}{2}\right]} \in T$ si $n=2r$; sea P, decimos, un elemento de la representación espinorial de $D(M,f)$ que define un automorfismo interior que coincide con $*\gamma$. Entonces, para todo

$$a^\sigma = A = \sum_{i=o}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \oplus (A)_i$$

donde $(A)_i \in T$ para $i = n/2$ y $(A)_i \in F_{\binom{n}{i}}$ en todos los demás casos,

$$A^{*\gamma} = P^{-1}AP = \sum_{i=o}^{[\frac{n}{2}]} \oplus (P)_i^{-1}(A)_i(P)_i$$

Si al elemento $P^{\gamma} = \sum \oplus (P)_i^{\gamma}$, lo designamos por $Q = \sum_{i=o}^{[\frac{n}{2}]} \oplus (Q)_i$, obtenemos

$$A^{*} = QA^{\gamma}Q^{-1} = \sum_{i=o}^{[\frac{n}{2}]} \oplus (Q)_i(A)_i^{\gamma}(Q)_i^{-1},$$

Es una cuestión elemental de álgebra el probar ahora que podemos tomar el elemento P de forma que las $(Q)_i$ sean hermitianas o antihermitianas respecto de γ. Pues, como el antiautomorfismo $*$ es involutivo se debe verificar,

$$A = (A^{*})^{*} = (QA^{\gamma}Q^{-1})^{*} = QQ^{-\gamma}AQ^{\gamma}Q^{-1} = \sum_i \oplus (Q)_i(Q)_i^{-\gamma}(A)_i(Q)_i^{\gamma}(Q)_i^{-1} =$$

$$= \sum_i \oplus (A)_i;$$

ó sea que $(Q)_i^{\gamma}(Q)_i^{-1}$ es un elemento central del álgebra simple a que pertenece, es decir, $(Q)_i^{\gamma} = d(Q)_i$, donde $d \in F$ ó K, según que $(Q)_i \in F_{\binom{n}{i}}$ ó $(Q)_i \in T$, respectivamente.

Si $(Q)_i$ no es una ~~sola~~ matriz antihermitiana, respecto a γ, $d \neq -1$, y $(Q)_i + (Q)_i^{\gamma} = (1+d)(Q)_i$ es invertible, hermitiana respecto de γ, define el mismo automorfismo interior que $(Q)_i$.

En el caso de que $(Q)_i$ sea antihermitiana, suponemos

1º) $(Q)_i \in F_{\binom{n}{i}}$. Entonces $\theta(Q)_i$ es hermitiana y define el mismo automorfismo interior que $(Q)_i$.

2º) $(Q)_r \in R_{1/2\binom{n}{r}}$. Entonces, si en vez de definir el antiautomorfismo sobre $R_{1/2\binom{n}{r}}$ por la transpuerta conjugada respecto al antiautomorfismo involutivo J' de R, definimos γ cambiando J' por el antiautomorfismo involutivo de R, J", definido de la siguiente manera

$$\beta^{J''} = k^{-1}\beta^{J'}k, \quad \text{donde } \beta,\ k \in R, \text{ y } k \text{ es tal que } k^{J'} = -k,$$

tenemos

$$k^{J''} = -k, \qquad \beta^{J'} = k\,\beta^{J''}\,k^{-1} \qquad y$$

$$(A)^{*}_{r} = (Q)_r (A^{J'})'_r (Q)^{-1}_r = (Q)_r k (A^{J''})'_r k^{-1} (Q)^{-1}_r = (Q)_r k (A)^{\gamma}_r k^{-1} (Q)^{-1}_r \qquad (7)$$

donde $(B)'$ indica la transpuesta de (B); (7) indica que al cambiar J' por J'', la matriz $(Q)_r$ debe ser sustituída por $(Q)_r k$, que es hermitiana respecto al nuevo significado de γ, pues

$$((Q)_r k)^{\gamma} = ((Q)'_r k)^{J''} = -kk^{-1}(Q^{J'})'_r k = (Q)_r k,$$

si tenemos en cuenta que

$$(Q^{J'})'_r = -(Q)_r;$$

y 3º) $(Q)_r \in K_{(\frac{n}{r})}$. Entonces esta matriz antisimétrica no puede ser sustituída por una semétrica.

Podemos estableces por tanto el

Teorema 2.- Hagamos sobre f y F las mismas hipótesis que en el teorema 1. Entonces, el antiautomorfismo involutivo $*$ de la representación espinorial de D(M,f), opera de la manera siguiente:

si $A = \sum_{i=o}^{[\frac{n}{2}]} \oplus (A)_i$ pertenece a la representación espinorial de D(M,f),

$$A^{*} = \sum_{i=o}^{[\frac{n}{2}]} \oplus (Q)_i (A)^{\gamma}_i (Q)^{-1}_i = QA^{\gamma}Q^{-1}$$

donde $(A)_i$ es la matriz transpuesta conjugada de $(A)_i$ respecto al antiautomorfismo idéntico, J, ó un antiautomorfismo involutivo de R, que deja invariantes los elementos de K, según que $(A)_i$ pertenezca a $K_{(\frac{n}{r})}$, $F_{(\frac{n}{r})}$, ó $R_{1/2(\frac{n}{r})}$, respectivamente. Además las $(Q)_i \in F_{(\frac{n}{i})}$ son hermitianas respecto de γ, así como la matriz $(Q)_r \in R_{1/2(\frac{n}{r})}$, si se elige convenientemente el antiautomorfismo de R; en cambio, si $(Q)_r \in K_{(\frac{n}{r})}$ la matriz $(Q)_r$ puede ser simétrica o antisimétrica.

En el § 3 del capítulo siguiente veremos en qué casos $(Q)_r \in K_{(\frac{n}{r})}$ es simétrica y en cuáles antisimétrica.

Llamemos a la matriz $Q = \Sigma \oplus (Q)_i$, en que las $(Q)_i$ son hermitianas, excepto la $(Q)_r \in K_{(\frac{n}{r})}$ que puede ser antisimétrica, matriz ligada al antiautomorfismo $*$ en la representación σ.

Si tomamos otro asomorfismo σ' de $D(M,f)$ sobre $\sum_{i=o}^{r-1} \oplus F_{(\frac{n}{r})}$ ó $\sum_{i=o}^{r-1} \oplus F_{(\frac{n}{i})} \oplus T$, según que $n = 2r-1$ ó $n = 2r$, respectivamente, cada una de las componentes de la nueva matriz $a^{\sigma'} = \sum_{i=o}^{[\frac{n}{2}]} \oplus (\overline{A})_i$ es equivalente a la componente correspondiente de $a^{\sigma} = \sum_{i=o}^{[\frac{n}{2}]} \oplus (A)_i$ ó puede ser equivalente a la conjugada respecto de J si $(A)_i \in F_{(\frac{n}{i})}$. Es decir,

$$(\overline{A})_r = (N)_r (A)_r (N)_r^{-1} \quad \text{si} \quad 2r-n \quad \text{y} \quad (N)_r \in R_{1/2(\frac{n}{r})} \quad \text{ó} \quad K_{(\frac{n}{r})}$$

y para cualquier otro valor de i existen dos posibilidades:

$$(\overline{A})_i = (N)_i (A)_i (N)_i^{-1} \quad \text{ó} \quad (\overline{A})_i = (N)_i (A^J)_i (N)_i^{-1}; \text{ donde } (N)_i \in F_{(\frac{n}{i})}$$

Designaremos por $(A)_i^{\varepsilon_i}$, la matriz $(A)_i$ ó $(A^J)_i$, según que $(A)_i$ sea equivalente a $(A)_i$ ó a $(A^J)_i$, respectivamente, y $A^{\varepsilon} = \Sigma \oplus (A)_i^{\varepsilon_i}$ donde ε_i es la identidad si $2i=n$.

Entonces

$$a^{\sigma'} = \overline{A} = NA^{\varepsilon} N^{-1} = \Sigma \oplus (N)_i (A)_i^{\varepsilon_i} (N)_i^{-1}; \quad \overline{A}^{\gamma} = N^{-\gamma} A^{\varepsilon\gamma} N^{\gamma} \quad \text{y}$$

$$(a^*)^{\sigma'} = \overline{A}^* = N(A^*)^{\varepsilon} N^{-1} = NQ^{\varepsilon} A^{\gamma\varepsilon} Q^{-\varepsilon} N^{-1} = NQ^{\varepsilon} N^{\gamma} N^{-\gamma} A^{\varepsilon\gamma} N^{\gamma} N^{-\gamma} Q^{-\varepsilon} N^{-1} =$$

$$= (NQ^{\varepsilon} N^{\gamma})(N^{-\gamma} A^{\varepsilon\gamma} N^{\gamma})(NQ^{\varepsilon} N^{\gamma})^{-1} = (NQ^{\varepsilon} N^{\gamma}) \overline{A}^{\gamma} (NQ^{\varepsilon} N^{\gamma})^{-1}$$

Si $(Q)_i$ es hermitiana respecto de γ, $(Q)_i^{\varepsilon_i}$ también lo es, por tanto $NQ^{\varepsilon} N^{\gamma}$ es una matriz ligada al antiautomorfismo $*$ en la representación σ'. Eligiendo convenientemente la nueva representación podemos hacer que las $(N)_i (Q)_i^{\varepsilon_i} (N)_i$ sean matrices diagonales si $2i \neq n$; si $2r=n$, ε_r es la identidad y $(N)_r (Q)_r^{\varepsilon_r} (N)_r^{\gamma}$ es congrediente (V. [13] pág. 149) con $(Q)_r$ respecto de γ.

Partiendo de una representación espinorial en que las componentes de Q, la matriz ligada al antiautomorfismo $*$ en dicha representación,

sean todas diagonales, excepto la $(Q)_r$, 2r-n, que puede ser antisimétrica, vemos que la matriz ligada al antiautomorfismo $*$ en cualquiera otra representación es una suma directa de matrices cogredientes respecto de γ a las matrices componentes de Q, porque tratándose de matrices hermitianas diagonales $(Q)_i^{\varepsilon_i} = (Q)_i$.

CAPITULO II

En esta parte nos proponemos demostrar que D(M,f) coincide con el álgebra envolvente de los elementos del grupo de Clifford de C(M,Q) que corresponden a las transformaciones unitarias de (M,f). Demostrado esto, quedan determinadas las componentes simples en que se descompone la representación espinorial del grupo unitario. Suponemos como antes que la característica de F es cero o mayor que (M;F), y que (M,f) es no-degenerada.

Empezemos calculando las dimensiones de los espacios de grado 2h h = 1, 2,..., n, del álgebra D(M,f), y suponemos que las x_i, i = 1, 2,.. .., n, forman una base ortogonal de (M,f), y $\theta x_i \neq y_i$.

§ 1

El subespacio de grado 2h de C(M,Q) tiene como base el conjunto de elementos

$$x_1^{\varepsilon_1} y_1^{\delta_1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{\delta_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} y_n^{\delta_n}, \quad \text{donde} \quad \varepsilon_i, \delta_i = 0,1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i + \sum_{i=1}^{n} \delta_i = 2h \qquad (1)$$

Escribamos ahora en el órden en que aparecen en la expresión (1) los subíndices de los elementos cuyo exponente es 1. Obtenemos entonces para cada elemento de la base un conjunto de 2h números entre 1 y n, en orden no decreciente, y donde cada número aparece a lo sumo dos veces. Al conjunto de los 2h números deducidos de esta forma a partir de un elemento de (1) le llamamos el sistema de índices de dicho elemehtos, y diremos que el sistema tiene grado 2h.

Dividamos el conjunto de elementos (1) de grado 2h, en subconjuntos de elementos con el mismo sistema de índices. Consideremos los espacios vectoriales sobre K engendrado por cada uno de estos subconjuntos. Tendremos entonces una descomposición del espacio de grado 2h de C(M,Q) en

suma directa de subespacios, a los cuales llamaremos espacios del sistema de índices o espacio de índices . Esta descompcsición depende naturalmente de la base ortogonal elegida.

Cuando h=1 los elementos

$$x_i\, y_i;\ x_iy_j;\ x_jy_j;\ x_ix_j;\ y_iy_j; \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \quad j > i$$

forman una base del espacio de grado 2 de $C(M,Q)$.

Todo espacio de un sistema de índices de la forma ii, es decir, el espacio engendrado por el elemento x_iy_i, pertenece a $D(M,f)$, pues salta a la vista que dicho elemento conmuta con

$$r_1 = \sum_{i=1}^{n} Q(x_i)^{-1}\ x_iy_i,$$

y el lema 3 del capítulo I asegura que pertenece a $D(M,f)$.

En cuanto a los elementos del espacio de índices ij, $i \neq j$, calculemos primero como se transforma por el automorfismo τ_θ , de orden 2, de $C^+(M,Q)$, definido por la homotecia θ de razón $-\rho$. Tenemos

$$(x_iy_j)^{\tau_\theta} = (-\rho)^{-1}(x_iT)(y_jT) = -y_ix_j; \quad (x_ix_j)^{\tau_\theta} = (-\rho)^{-1}(x_iT)(x_jT) = -\rho^{-1}y_iy_j$$

y por ser τ_θ de orden 2,

$$(-y_ix_j)^{\tau_\theta} = x_iy_j \quad y \quad (-\rho^{-1}y_iy_j)^{\tau_\theta} = x_ix_j$$

Luego los elementos

$$u_{ij} = x_iy_j - y_ix_j;\ v_{ij} = x_ix_j - \rho^{-1}\, y_iy_j$$

permanecen invariantes ante el automorfismo τ_θ , y los elementos

$$r_{ij} = x_iy_j + y_ix_j; \quad s_{ij} = x_ix_j + \rho^{-1}\, y_iy_j$$

se cambian en sus inversos y no pueden, por lo tanto, pertenecer a $D(M,f)$.

Comprobemos ahora que los elementos u_{ij}, v_{ij} son invariantes ante todos los automorfismos de la forma $\tau_{\alpha+\beta\theta}$, definidos por las homotecias $\alpha+\beta\theta$, calculando directamente su transformado. Resulta entonces,

$$u_{ij}{}^{\tau_{\alpha+\beta\theta}} = (x_i y_j - y_i x_j)^{\tau_{\alpha+\beta\theta}} = (\alpha^2 - \beta^2\rho)^{-1}[(\alpha x_i + \beta y_i)(\alpha y_j + \rho\beta x_j) -$$

$$- (\alpha y_i + \rho\beta x_i)(\alpha x_j + \beta y_j)] = (\alpha^2 - \rho\beta^2)^{-1}[(\alpha^2 - \rho\beta^2)(x_i y_j - y_i x_j) +$$

$$+ (\alpha\beta - \beta\alpha)(\rho x_i x_j + y_i y_j)] = x_i y_j - y_i x_j = u_{ij},$$

$$v_{ij}{}^{\tau_{\alpha+\beta\theta}} = (x_i x_j - \rho^{-1} y_i y_j)^{\tau_{\alpha+\beta\theta}} = (\alpha^2 - \beta^2\rho)^{-1}[(\alpha x_i + \beta y_i)(\alpha x_j + \beta y_j) -$$

$$- \rho^{-1}(\alpha y_i + \rho\beta x_i)(\alpha y_j + \rho\beta x_j)] = x_i x_j - \rho^{-1} y_i y_j = v_{ij}$$

Esto demuestra que todo elemento de grado 2 de $C(M,Q)$, invariante ante el automorfismo τ_θ, pertenece a $D(M,f)$.

Vemos que, en la comprobación de la invarianda de las u_{ij}, y v_{ij} ante el automorfismo $\tau_{\alpha+\beta\theta}$, podemos elegir dos índices distintos cualesquiera, pues para el cálculo es indiferente cuales sean estos índices. Se ve fácilmente que esto también es verdad cuando tratemos con elementos de cualquier espacio de un sistema de 2h índices distintos.

<u>Lema 1.</u> Sea g un elemento de grado 2h de $C(M,Q)$. Para que g pertenezca a $D(M,f)$ es condición necesaria y suficiente que su proyección sobre cada uno de los espacios de índices sea un elemento de $D(M,f)$.

<u>Demostración :</u> Sea $x_1^{\varepsilon_1} y_1^{\delta_1} \ldots, x_n^{\varepsilon_n} y_n^{\delta_n}$ un elemento cualquiera de grado 2h, es decir $\sum_i \varepsilon_i + \sum_i \delta_i = 2h$. El automorfismo de $C(M,Q)$ definido por la homotecia $\alpha + \beta\theta$ de (M,f) transforma el elemento en otro del mismo grado dado por la expresión

$$(\alpha^2 - \beta^2\rho)^{-h}(\alpha x_1 + \beta y_1)^{\varepsilon_1}(\alpha y_1 + \rho\beta x_1)^{\delta_1} \ldots (\alpha y_n + \rho\beta x_n)^{\delta_n}.$$

Teniendo en cuenta que al hacer operaciones sólo aparecerán términos de grado 2h, resulta claro que al expresar este producto como combinación lineal de elementod del conjunto (1), todos los sumandos tienen el mismo sistema de índices que el elemento primitivo.

Si $g \in D(M,f)$, g debe permanecer invariante ante las automorfismos definidos por las homotecias $\alpha + \beta\,\theta$. Por lo que acabamos de demostrar, esto nos dice que es necesario que cada una de sus componentes según los espacios de índices permanezcan invariantes ante dichos automorfismos, esto es, pertenezcan a $D(M,f)$. Es evidente que la condición es suficiente.

Tenemos pues que la descomposición de los espacios de grado 2h de $C^+(M,Q)$ en espacios del sistema de índices induce a una descomposición en los espacios de grado 2h de $D(M,f)$, los cuales resultan, por consiguiente, suma directa de sus espacios del sistema de índices. Consideraremos el espacio de grado cero como el espacio del sistema de índices vacío.

Vamos a calcular la dimensión de los espacios de grado 2h de $D(M,f)$ calculando primero la de sus subespacios de índices. Hacemos notar que si n es la dimensión $(M:F)$, la dimensión del espacio de grado 2h de $D(M,f)$ es la misma que la de grado $2(n-h)$, porque la multiplicación de cada elemento de grado 2h por r_n nos da una transformación lineal biunívoca de un espacio sobre otro. Nos bastará calcular la dimensión de los espacios homogéneos de dimensión 2h, para $2h \leq n$.

Empezamos por agrupar los sistemas de 2h índices en h+1 familias G^0_{2h}, G^1_{2h},..., G^h_{2h}, según que el número de índices que se repiten sea 0, 1,..., h, respectivamente.

Lema 2. La dimensión de los espacios del sistema de índices de $D(M,f)$ es la misma para todos los sistemas de una misma familia. Además, la dimensión de un espacio de un sistema de índices de la familia G^r_{2h} es igual a la de un espacio de un sistema de índices de la familia $G^0_{2(h-r)}$.

Demostración: Comenzamos por la familia G^0_{2h}, es decir, aquella que contiene los sistemas de 2h índices en que ninguno de éstos se repite. Naturalmente esto sólo es posible si la dimensión $n=(M:F)$ es igual o mayor que el grado 2h del sistema de índices considerado.

Sean $i_1, i_2, \ldots, i_{2h}$ $i'_1, i'_2, \ldots, i'_{2h}$ dos sistemas de G^0_{2h}. Tomemos una base del espacio del primer sistema de índices y supongamos que cada elemento de esta base está expresado como combinación lineal de elementos del conjunto (1) pertenecientes, claro está, a dicho sistema de índices. Si en cada elemento de esta base sustituímos el índice i_j por i'_j resultan elementos linealmente independientes desl espacio del segundo sistema de índice, pues en la comprobación directa de que tales elementos permanecen invariantes ante los automorfismos definodos por las homotecias $\alpha + \beta\,\theta$ no interviene el valor de los índices. Por lo tanto la dimensión d del espacio del primer sistema de índices es menor o igual que la dimensión d' del espacio del segundo sistema. Análogamente obtendríamos $d' \leq d$, luego $d' = d$.

Tomemos ahora un sitema de índices en el que aparecen r repetidos; sean estos $j_1, j_2, \ldots, j_r$. Entonces todo elemento del espacio de este sistema de índices puede expresarse como un producto de $\prod_{s=1}^{r} x_{j_s} y_{j_s}$ por un elemento de grado $2(h-r)$ perteneciente al espacio del sistema de índices obtenidos a partir del primitivo suprimiendo los pares de números j_1, j_1; j_2, j_2; $\ldots$ $\ldots$ j_r, j_r. Ppr los tanto la dimensión del espacio de un sistema de índices de la familia G^r_{2h} es igual a la de un espacio de un sistema de la familia $G^0_{2(h-r)}$. Esto prueba nuestro lema.

Lema 3. El espacio de un sistema de índices de la familia G^0_{2h} tiene dimensión $\binom{2h}{h}$.

Demostración: Uasremos indúcción sobre h, empezando por h=1 aunque aceptemos $\binom{0}{0} = 1$.

Si conocemos la dimensión del espacio de un sistema de índices de G^0_{2r} para $r < h$, podemos calcular la dimensión de cada uno de los espacios de grado 2r, pues será igual a la suma de las dimensiónes de los espacios de todos los sistemas de índices de grado 2r, y cada uno de estos espacios tiene una dimensión igual a la de un espacio de un sistema de índices de la familia $G^0_{2(r-i)}$.

Ahora bien el número de sistemas de índices distintos de la familia G^0_{2r}, es $\binom{n}{2r}$, donde n es el número total de índices, es decir, $n = (M:F)$. En general el número de sistemas de índices en la familia G^s_{2r} es igual a

$\binom{n}{s}\binom{n-s}{2(r-s)}$.

Sea d_{2r} la dimensión del espacio de un sistema de índices de G^0_{2r}. La dimensión del espacio de grado $2r$ será

$$e_{2r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}\binom{n-i}{2(r-i)}\, d_{2(r-i)}$$

Para r=1 es cierto que la dimensión d_2 del espacio del sistema de los índices distintos ij es $\binom{2r}{r} = \binom{2}{1} = 2$, porque los dos elementos $u_{ij} = x_i y_j - y_i x_j$, $v_{ij} = x_i x_j - \rho^{-1} y_i y_j$, forman una base de dicho espacio.

Supongamos que para $r < h$, $d_{2r} = \binom{2r}{r}$. Entonces la dimensión del espacio de grado $2r$ será

$$e_{2r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}\binom{n-i}{2(r-i)}\binom{2(r-i)}{r-i} =$$

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{(n-i)!}{(2(r-i))!(n-2r+i)!} \cdot \frac{(2(r-i))!}{(r-i)!(r-i)!} =$$

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{n!}{i!(n-2r+i)!((r-i)!)^2} \qquad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{r} \frac{n!}{r!(n-r)!} \cdot \frac{(n-r)!}{(n-2r+i)!(r-i)!} \cdot \frac{r!}{(r-i)!i!} =$$

$$\binom{n}{r} \sum_{i} \binom{n-r}{r-i}\binom{r}{i} = \binom{n}{r}^2$$

Probemos ahora que si $d_{2r} = \binom{2r}{r}$ para $r < h$, esta fórmula también es verdad para $h=r$,. En efecto, sea $M:F$ un espacio vectorial de dimensión $2h$. Entonces sabemos por el teorema 1 del capítulo I que la dimensión de $D(M,f)$ es

$$\binom{4h}{2h} = \sum_{i=0}^{2h} \binom{2h}{i}^2 = 2 \sum_{i=0}^{h-1} \binom{2h}{i}^2 + \binom{2h}{h}^2 \qquad (4)$$

Por otra parte, puesto que en este caso $e_{2i} = e_{2(2h-i)}$, la dimensión de $D(M,f)$ es

(5) $\sum_{i=0}^{2h} e_{2i} = 2 \sum_{i=0}^{h-1} e_{2i} + e_{2h} = 2 \sum_{i=0}^{h-1} \binom{2h}{i}^2 + e_{2h}$, por (3),:

Igualando los últimos términos de (4) y (5) obtenemos

$$e_{2h} = \binom{2h}{h}^2 .$$

Sabemos también que

$$\binom{2h}{h}^2 = e_{2h} = \sum_{i=1}^{h} \binom{2h}{i}\binom{2h-i}{2(h-i)}\binom{2(h-i)}{h-i} + d_{2h}$$

Si en la expresión (3) sustituímos n por 2h y r por h, comparando la primera suma de dicha expresión con (6) obtenemos

$$d_{2h} = \binom{2h}{h}$$

con lo cual el lema está probado.

Una vez demostrado el lema, la expresión (3) prueba el siguiente

Teorema 1. La dimensión del espacio de grado 2h del álgebra D(M,f) es $\binom{n}{h}^2$, donde n es la dimensión (M:F).

Hemos calculado la dimensión del espacio de grado 2h de D(M,f) considerándolo como una suma directa de los espacios de sistemas de índices de grado 2h. Si sumamos las dimensiones de los espacios de todos los posibles sistemas de índices, obtendremos la dimensión de D(M,f). Esto es lo que vamos a hacer ahora con el fin de obtener una fórmula combinatoria que necesitaremos más tarde.

En el lema 2 hemos visto que todos los espacios cuyo sistema de índices contiene exactamente 2i índices no repetidos tienen la misma dimensión, y probamos en el lema 3 que dicha dimensión es $\binom{2i}{i}$. Llamaremos E_i la dimensión del subespacio de D(M,f) suma diresta de todos los espacios de sistemas de índices que contienen 2i índices no repetidos.

Si la dimensión (M:F) es n, n es el número de índices distintos. Por lo tanto los espacios del sistema de índices pueden ser clasificados según que su sistema contenga 0, 2,..., 2[n/2], índices no repetidos, de donde resulta $\sum_{i=0}^{[n/2]} E_i = \binom{2n}{n}$.

Elegido un sistema de 2i índices distintos podemos añadir a estos

0, 1,..., n-2i pares de índices, tomados estos entre los n-2i índices que no figuran entre los 2i elegidos. En general, para añadir r pares de índices podemos hacerlo de $\binom{n-2i}{r}$ maneras distintas, es decir, fijado un sistema de 2i índices distintos obtenemos a partir de él

$$\sum_{r=0}^{n-2i} \binom{n-2i}{r} = 2^{n-2i}$$

sistemas de índices en que los índices que no se repiten son los 2i prefijados y sólo estos.

Como estos 2i índices pueden ser elegidos de $\binom{n}{2i}$ maneras distintas tendremos en total $\binom{n}{2i}2^{n-2i}$ sistemas de índices con 2i índices no repetidos, por lo que $E_i = \binom{n}{2i}2^{n-2i}\binom{2i}{i}$.

Sumando ahora las E_i, establecemos el

<u>Lema 4</u>. $$\sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i}\binom{2i}{i}2^{n-2i} = \binom{2n}{n}$$

§ 2

Con el fin de poder demostrar que el álgenra D(M,f) está engendrada por sus elementos de grado 2, vamos a definir por inducción bases canónicas para los espacios de los sistemas de índices. Para simplificar las notaciones cuando nos refiramos a un espacio de 2r índices distintos, supondremos que estos son 1, 2,..., 2r, con lo cual no se restringe la generalidad, pues para obtener el sistema de índices $j_1, j_2,..., j_{2r}$, basta con sustituir i por j_i ya que las operaciones que efectuamos no dependen del valor particular de los índices.

Si elegimos una base de la forma (1) para el álgebra $C^+(M,Q)$, el espacio de índices 1, 2,..., 2m tiene por base el conjunto de los 2^{2m} elementos que se obtienen a partir de

$$z_1 z_2 z_3 \cdots z_{2m} \qquad (7)$$

sustituyendo z_j por x_j ó por y_j, j = 1, 2,..., 2m

Como el número de factores es par podemos agruparlos de dos en dos de la forma siguiente

$$(z_1 z_2)\ldots(z_{2i-1}z_{2i})\ldots(z_{2m-1}z_{2m}) \qquad (7')$$

y el elemento $z_{2i-1}z_{2i}$ puede adoptar cuatro formas diferentes, a saber

$$x_{2i-1}x_{2i};\quad x_{2i-1}y_{2i};\quad y_{2i-1}x_{2i};\quad y_{2i-1}y_{2i}.$$

Adoptamos las siguientes notaciones:

$$u_i = u_{2i-1,2i} = x_{2i-1}y_{2i} + y_{2i-1}x_{2i};$$

$$v_i = v_{2i-1,2i} = x_{2i-1}x_{2i} - \rho^{-1}y_{2i-1}y_{2i};$$

$$r_i = r_{2i-1,2i} = x_{2i-1}x_{2i} + y_{2i-1}y_{2i};$$

$$s_i = s_{2i-1,2i} = x_{2i-1}x_{2i} + \rho^{-1}y_{2i-1}y_{2i};$$

y obtenemos

$$x_{2i-1}x_{2i} = (v_i + s_i)/2; \qquad x_{2i-1}y_{2i} = (u_i + r_i)/2$$

$$y_{2i-1}y_{2i} = (r_i - u_i)/2; \qquad y_{2i-1}y_{2i} = \rho(s_i - v_i)/2$$

Sustituyendo esto valores en la expresión (7'), vemos que cada elemento de la forma (7) es una combinación lineal de elementos

$$t_1 t_2 \cdots t_m, \qquad (8)$$

donde t_i es sustutuye por u_i, v_i, r_i ó s_i. Inversamente, cada elemento obtenido de (8) por sustitución de t_i por uno de estos cuatro términos, es una combinación lineal de elementos de la forma (7). Por lo tanto, los distintos elementos obtenidos a partir de (8) engendran el espacio de índices 1, 2,..., 2m.

El número total de estos elementos será $4^m = 2^{2m}$, y por ser igual a la dimensión del espacio de índices que ellos engendran, deben ser linealmente independientes. Es decir, para que una combinación lineal de elementos de la forma (8) sea igual a cero es condición necesaria y suficiente

que cada uno de los distintos elementos obtenidos por distintas sustituciones de t_i tenga coeficiente nulo.

Designemos por

$$w_{i_1 i_2} w_{i_3 i_4} \cdots w_{i_{2m-1} i_{2m}} \qquad (9)$$

el conjunto de los 2^m elementos distintos que se obtienen sustituyendo cada $w_{i_{2j-1} i_{2j}}$ bien por $u_{i_{2j-1} i_{2j}}$ ó por $v_{i_{2j-1} i_{2j}}$. Respecto a los índices suponemos que $i_1, i_2, \ldots, i_{2m}$ es una reordenación de 1, 2,... 2m tal que $i_{2j-1} < i_{2j}$ para todo j. Como las $w_{i_{2j-1} i_{2j}}$ conmutan entre sí para valores distintos de j, no nos fijaremos en el orden en que aparecen.

Diremos que un elemento del espacio de índices 1, 2,..., 2m de D(M,f) es canónico si puede ser obtenido como combinación lineal de elementos (9). Llamaremos a dicha combinación lineal una expresión canónica del elemento.

Se desprende de una definición que todo elemento canónico pertenece al álgebra engendrada por u_{hk}, v_{hk}, $h < k$.

Dado un elemento canónico c del espacio de índices 1, 2,..., 2m, esto es, un elemento que puede ser expresado como combinación lineal de elementos de la forma (9), sustituyendo cada una de las

$$w_{i_{2j-1} i_{2j}} = \begin{cases} u_{i_{2j-1} i_{2j}} = x_{i_{2j-1}} y_{i_{2j}} - y_{i_{2j-1}} x_{i_{2j}} \\ v_{i_{2j-1} i_{2j}} = x_{i_{2j-1}} x_{i_{2j}} - \rho^{-1} y_{i_{2j-1}} y_{i_{2j}} \end{cases}$$

por su valor en función de las x_h e y_h y haciendo operaciones en las que utilizamos solamente la propiedad de que nuestra álgebra es bilineal y asociativa, obtenemos una expresión que es una combinación lineal de

$$z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_{2m}} \qquad (10)$$

que define de la expresión en función de los elementos

$$z_1 z_2 \cdots z_{2m}$$

únicamente en el orden de los factores, lo que puede dar lugar a un cambio de signo del elemento.

Si en la expresión canónica de c sustituímos $w_{i_{2j-1}i_{2j}}$ por

$$W_{i_{2j-1}i_{2j}} = \begin{cases} U_{i_{2j-1}i_{2j}} = s_{i_{2j-1}}r_{i_{2j}} - r_{i_{2j-1}}s_{i_{2j}} \\ V_{i_{2j-1}i_{2j}} = s_{i_{2j-1}}s_{i_{2j}} - \rho^{-1}r_{i_{2j-1}}r_{i_{2j}} \end{cases}$$

al desarrollar esta suma de productos de W_{hg} utilizando sólo el hecho de que el álgebra es bilineal y asociativa, obtenemos el elemento que resulta de sustituir x_i por s_i e y_i por r_i en la expresión de c como combinación lineal de elementos (10):

Ahora bien, como

$$U_{ji} = s_j r_i - r_j s_i = (x_{2j-1}x_{2j} + \rho^{-1}y_{2j-1}y_{2j})(x_{2i-1}y_{2i} + y_{2i-1}x_{2i}) -$$

$$(x_{2j-1}y_{2j} + y_{2j-1}x_{2j})(x_{2i-1}x_{2i} + \rho^{-1}y_{2i-1}y_{2i}) =$$

$$= v_{2j-1,2i-1}u_{2j,2i} + u_{2j-1,2i-1}v_{2j,2i}$$

y $V_{ji} = s_j s_i - \rho^{-1}r_j r_i = -(v_{2j-1,2i}v_{2j,2i} + \rho^{-1}u_{2j-1,2i}u_{2j,2i})$

el elemento de $C(M,Q)$ que obtenemos al realizar la sustitución de w_{ji} por W_{ji} pertenece al espacio de índices 1, 2,... 4m de $D(M,f)$. Además, como r_i (o s_i) conmuta con todas las r_j y s_j con tal que $i \neq j$, es lo mismo sustituir r_i y s_i en la expresión de c como combinación de elementos (10), que como combinación de elementos (7).

Lema 5. De elementos canónicos de grado 2m linealmente independientes se deducen elementos canónicos linealmente independientes de grado 4m,

Demostración: Suponemos, como hicimos antes, que los elementos canónicos de grado 2m corresponden al espacio de índices 1, 2,..., 2m. Acabamos de ver que sin la expresión de dichos elementos como combinaciones

lineales de elementos (7) , sustituímos x_i por s_i e y_i por r_i, obtenemos elementos canónicos del espacio de índices 1, 2,... 4m. Sólo nos falta por ver que si los elementos de grado 2m son linealmente independientes, los elementos de grado 4m, obtenidos a partir de ellos, también lo son. Esto se desprende del hecho mencionado antes, de que, cualquiera que sea el valor de m, los 4m elementos distintos obtenidos a partir de(8) por sustitución de las t_i por u_i, v_i, r_i ó s_i son linealmente independientes; pues si las combinaciones lineles de elementos (7) de que partimos son linealmente independientes, también lo serán las que obtenemos después de la sustitución de cada una de elas x_i ó y_i por s_i ó r_i respectivamente.

Lema 6. Todo espacio de un sistema de 2r índices distintos admite una base de elementos canónicos y pertenece, por lo tanto, a la subálgebra de D(M,f) engendrada por los elementos de u_{ji}, v_{ji}, $j<i$.

Demostración: Supondremos por simplicidad que los índices son 1, 2,.. .., 2r. Como para r = 1 los elementos $u_{1,2}$ y $v_{1,2}$ forman una base del espacio de índices 1, 2, vamos a usar inducción sobre r.

Supongamos pues que para $2r < 2h$ el teorema es cierto. Vamos a ver que también resulta cierto para 2r = 2h; más exactamente, veremos que es cierto para 2r = 2h si lo es para todo r, que verifica $2r \leq h$.

Tenemos como base del espacio de C(M,Q) de índices 1, 2,..., 2h, los 4^h elementos de la forma (8), para m = h. De estos los 2^h que se obtienen sustituyendo t_i por u_i ó v_i, pertenecen a D(M,f), puesto que u_i, $v_i \in D(M,f)$, y además son linealmente independientes.

Elijamos ahora 2j índices, j = 1, 2,... , [h/2], ó,sea $2j \leq h$, y sean estos i_1, i_2,..., i_{2j}. En los $\binom{2j}{j}$elementos canónicos que, por la hipótesis de inducción forman la base del espacio de índices 1, 2,..., 2j, sustituyamos x_m por s_{i_m} e y_p por r_{i_p} , m,p = 1, 2,.., 2j. Por el lema 5 sabemos que de esta forma obtenemos $\binom{2j}{j}$ elementos canónicos linealmente independientes. Sean i'_1 , i'_2 ,..., i'_{h-2j} aquellos de los h primeros números que

no figuran entre las $i_1, i_2, \ldots, i_{2j}$, y multipliquemos cada uno de los elementos arriba obtenidos por los 2^{h-2j} elementos diferentes que se obtienen a partir de

$$t'_{i_1} \quad t'_{i_2} \quad \ldots \quad t'_{i_{h-2j}} \qquad (11)$$

sustituyendo cada t'_{i_m} por u_{i_m} ó v_{i_m}. Resultan así $\binom{2j}{j}2^{h-2j}$ elementos canónicos del espacio de índices 1, 2,..., 2h. Diremos de estos elementos que corresponden a la familia de subíndices $i_1, \ldots, i_{2j}$, y vamos a ver que son linealmente independientes.

Si existiese entre los elementos así elegidos una combinación lineal igual a cero, resultaría que las sumas parciales en que agrupamos los elementos que tienen un mismo factor del tipo (11) deben ser nulas, porque los elementos que contienen a u_{i_g} no pueden anularse con los que contienen a v_{i_g}. En cada una de estas sumas parciales podemos sacar factor común el elemento del tipo (11) que viene multiplicando por una combinación lineal de los $\binom{2j}{j}$ elementos canónicos obtenidos antes, y que hemos visto que son linealmente independientes. Luego todos los coeficientes deben ser iguales a cero. Dicho de otra manera, los $\binom{2j}{j}2^{h-2j}$ elementos canónicos de la familia de subíndices $i_1, i_2, \ldots, i_{2j}$ son linealmente independientes.

Los 2j índices pueden ser elegidos de $\binom{h}{2j}$ formas diferentes, obteniendo $\binom{h}{2j}\binom{2j}{j}2^{h-2j}$ elementos para cada valor de j. Al tomar todos los valores posibles de j tendremos en total.

$$\sum_{j=0}^{[\frac{h}{2}]} \binom{h}{2j}\binom{2j}{j}2^{h-2j} = \binom{2h}{h}$$

de acuerdo con el lema 4.

Supongamos que existen una relación lineal entre estos $\binom{2h}{h}$ elementos. Entonces cada una de las sumas parciales obtenidas sumando los elementos que corresponden a la misma familia de subíndices debe ser idénticamente nula. Pero hemos demostrado ya que los elementos correspondientes a una misma familia de subíndices son linealmente independientes, lo que prueba la independencia de los $\binom{2h}{h}$ elementos canónicos arriba indicados.

Estos forman pues una base del espacio de índices 1, 2,..., 2h, porque sabemos que dicho espacio tiene dimensión $\binom{2h}{h}$.

Teorema 2. D(M,f) está engendrada por sus elementos de grado 2.

Demostración: Hemos visto en el lema 6 que todo espacio de 2r índices distintos pertenece al álgebra engendrada por los elementos u_{ji}, v_{ji}, $j < i$, de grado 2.

Si un elemento d pertenece a un espacio de un sistema de índices con 2r' índices distintos y r" índices repetidos, dicho elemento es el producto de un elemento del espacio de los 2r' índices en cuestión por el elemento $\prod_{j=1}^{r"} x_{i_j} y_{i_j}$, donde $i_1, i_2, \ldots, i_{r"}$ son los índices que se repiten. Como este último elemento pertenece también al álgebra G engendrada por los elementos de grado 2 de D(M,f), d pertenece a G.

En cuanto a los elementos de grado cero que forman el espacio del sistema de índices vacío, como $(x_i y_i)^2 \neq 0$, también pertenecen a G. Por tanto G contiene todos los espacios de índices de los cuales D(M,f) es suma directa y coincide con D(M,f).

Teorema 3. El álgebra D(M,f) está engendrada por los elementos del grupo de Clifford de C(M,Q) que corresponden a las simetrías de la forma hermitiana f. Además D(M,f) contiene todos los elementos del grupo de Clifford que corresponden a transformaciones unitarias, así como los elementos de C(M,Q) que definen automorfismos interiores que inducen sobre $C^+(M,Q)$ auotmorfismos ligados a las semejanzas unitarias.

Demostración: En vista del teorema 2, para probar la primera parte de este teorema basta ver que el álgebra sobre K engendrada por los elementos del grupo de Clifford que corresponden a las simétrías de f, contiene el espacio de grado 2 de D(M,f), y que este espacio contiene todos los elementos del grupo de Clifford que corresponden a las simetrías de f.

Sea H el hiperplano ortogonal el vector no-isotrópico x, respecto de f; $\bar{x}$ la simetría de f respecto de dicho hiperplano. La simetría $\bar{x}$ de f considerada como trasformación de M sobre K, es la transformación ortogonal involutiva que cambia los vectores del plano no-isotrópico P, engendrado por los vectores x e y=θx, en sus inversos y deja invariantes los vectores del subespacio $P^{\perp}$, ortogonal a P respecto de Q.

Los elementos del grupo de Clifford que corresponden a dicha trasformación son de la forma αxy, $0 \neq \alpha \in K$; como αxy es de grado 2 e invariante ante τ_0 pertenece a D(M,f).

Por otra parte, si K tiene más de 3 elementos, es posible determinar $\alpha_{ij} \neq 0$ de tal manera que $z_{ij} = x_i + \alpha_{ij} x_j$ sea un vector no-isotrópico. Entonces, a las simetrías de f que dejan invariantes los hiperplanos ortogonales, respecto de f, a los vectores x_i, z_{ij}, i,j = 1, 2,.... n, i < j, los corresponden los elementos

$$x_i y_i;\ (x_i + \alpha_{ij} x_j)(y_i + \alpha_{ij} y_j) = x_i y_i + \alpha_{ij}^2 x_j y_j + \alpha_{ij}(x_i y_i - y_i x_j);$$

donde $y_i = \theta x_i$. El álgebra engendrada por estos elementos contiene una base del espacio de grado 2 de D(M,f), pues

$$(x_i y_j - y_i x_j) x_j y_j = \rho Q(x_j)(x_i x_j - \rho^{-1} y_i y_j).$$

Por tanto si K tiene más de 3 elementos, los elementos que corresponden a las simetrías engendran el álgebra D(M,f).

Si K contiene 3 elemtnos, F es el cuerpo de 9 elementos y existe entonces una base ortogonal de (M,f) tal que $f(x_i, x_i) = 1$ para todo i; como hemos supuesto que la dimensión n de (M:F) es menor que la característica de K, n < 3. Si la dimensión es 1, el teorema es obvio, y si es 2 podemos tomar $\alpha_{12} = 1$ y aplicar el razonamiento anterior.

Probada ya la primera parte del teorema, vamos a ver que D(M,f) contiene también los elementos que corresponde a las cuasi-simetrías. A la cuasi-simetría que deja invariantes el hiperplano H ortogonal al vector neisotrópico x , y transforma el vector x en $(\alpha + \beta\theta)x$, donde $N(\alpha + \beta\theta)=1$,

correspondenlos elementos del grupo de Clifford de la forma

$$\nu((1+\alpha)/\beta + Q(x)^{-1}xy), \quad \text{donde } y = \theta x, \quad 0 \neq \nu \in K.$$

Luego D(M,f) contiene los elemantos del grupo de Clifford que corresponden a las transformaciones unitarias, ya que el grupo unitario está engendrado por las cuasi-simetrías (véase [8], 6 [9] pág, 41).

Sólo nos falta ver que D(M,f) contiene los elementos invertibles de C(M,Q) que definen automorfismos interiores que operan sobre $C^+(M,Q)$ como los automorfismos definidos por las semejanzas unitarias de f. Estos elementos están definidos salvo un factor invertible de la forma $\alpha + \beta r_n$, porque el espacio $K \oplus Kr_n$ es el centro del álgebra $C^+(M,Q)$.

El automorfismo σ de $C^+(M,Q)$ definidos por una semejanza unitaria de f es homogéneo y por consiguiente debe cambiar r_1, base del espacio de elementos centrales de grado, 2, en un múltiplo de esí mismo, esto es, $r_1^\sigma = \alpha r_1$. Ahora bien, la componente de grado cero de $(r_1^2)^\sigma$, $n\rho \neq 0$, debe ser igual a la componente de grado cero de $(r_1^\sigma)^2$, $\alpha^2 n\rho$; luego $\alpha^2 = 1$ y $\alpha = \pm 1$.

Si α fuese igual a -1, resultaría que $(r_{2i+1})^\sigma = -r_{2i+1}$, y $r_{2i}^\sigma = r_{2i}$ porque r_h es la componente de grado h de r_1^h. Entonces, si a un elemento cualquiera $c \in C^+(M,Q)$ le aplicamos primero el automorfismo definido por la homotecia de norma 1,

$$\frac{\mu^2+\rho}{\mu^2-\rho} - \frac{2\mu\theta}{\mu^2-\rho} = \alpha + \beta\theta, \quad \mu \neq 0,$$

y a continuación el automorfismo σ obtendremos (véase capítulo I, pág. 10)

$$c^{\tau_{\alpha,\beta}\sigma} = [(\mu^n + \mu^{n-1} r_1 + \ldots + \mu^{n-i} r_i + \ldots + r_n)^{-1} c$$

$$(\mu^n + \mu^{n-1} r_1 + \ldots + r_n)]^\sigma =$$

$$(\mu^n - \mu^{n-1} r_1 + \ldots + (-1)^i \mu^{n-i} r_i + \ldots + (-1)^n r_n)^{-1} c^\sigma$$

$$(\mu^n + \ldots + (-1)^i \mu^{n-i} r_i + \ldots + (-1)^n r_n) =$$

$$((-\mu)^n + \ldots + (-\mu)^{n-i} r_i + \ldots + r_n)^{-1} c^\sigma$$

$$((-\mu)^n + \ldots + (-\mu)^{n-i} r_i + \ldots + r_n) = c^{\sigma\tau_{\alpha,-\beta}}$$

ó sea

$$c^{\tau_{\alpha+\beta\theta}\,\sigma} = c^{\sigma\,\tau_{\alpha-\beta\theta}} \qquad (12)$$

Por otra parte si S es una semejanza cualquiera y $T_{\alpha+\beta\theta}$ una homotecia se verifica,

$$ST_{\alpha+\beta\theta} = T_{\alpha+\beta\theta}\,S \qquad (13)$$

Sean σ y $\tau_{\alpha+\beta\theta}$ los automorfismos de $C^+(M,Q)$ ligados a la semejanza S y a la homotecia $T_{\alpha+\beta\theta}$ respectivamente. Entonces la igualdad (13) indica que se debe verificar $\sigma\,\tau_{\alpha+\beta\theta} = \tau_{\alpha+\beta\theta}\,\sigma$, y por tanto, si c es un elemento cualquiera de $C^+(M,Q)$

$$c^{\tau_{\alpha+\beta\theta}\,\sigma} = c^{\sigma\,\tau_{\alpha+\beta\theta}} \qquad (14)$$

Comparando (12) y (14) obtenemos $(c^{\sigma})^{\tau_{\alpha+\beta\theta}} = (c^{\sigma})^{\tau_{\alpha-\beta\theta}}$, lo cual no puede ser verdad para todo $c^{\sigma} \in C(M,Q)$ puesto que las homotecias $\alpha + \beta\,\theta$ y $\alpha - \beta\,\theta$ no difieren en un factor $\delta \in K$. Luego suponer $\alpha = -1$ conduce a una contradicción. Entonces $\alpha = 1$, y el elemento de $C(M,Q)$ que define un automorfismo interior de $C(M,Q)$ que induce sobre $C^+(M,Q)$ el automorfismo σ definido por una semejanza unitaria, conmuta con r_1. El lema 4 del capítulo I nos dice que dicho elemento pertenece a $D(M,f)$ y completa la demostración del teorema.

Hemos visto en el teorema 1 del capítulo I que $D(M,f)$ es una subálgebra semi-simple de $C(M,Q)$ suma directa de $1 + [n/2]$ álgebras simples. El teorema 3 prueba que la representación espinorial de los elementos del grupo de Clifford ligados a las transformaciones ortogonales de Q que son transformaciones unitarias de f, se descomponen en suma directa de $1 + [n/2]$ representaciones simples.

Obtenemos la misma descomposición en representacione simples si consideramos únicamente los elementos del grupo de Clifford ligados a las transformaciones unitarias del grupo de transformaciones engendrado por las simétrías de f, o consideramos la representación espinorial como elementos del álgebra simple $C(M,Q)$, de aquellos elementos invertibles de $C(M,Q)$, los cuales forman un grupo, que define automorfismos interiores que inducen sobre $C^+(M,Q)$ los automorfismos ligados a las semejanzas unitarias.

sobre $C^+(M,Q)$ los automorfismo ligados a las semejanzas unitarias. Cada semejanza unitaria defino uno de estos elementos salvo un factor invertible de la forma $\alpha + \beta r_n$. Las representaciones simples en que se descompone la representación espinorial de los 3 grupos citados, son precisamente las componentes simples de las representaciones espinoriales de $D(M,f)$.

§ 3

Tomemos una representación espinorial σ de $D(M,f)$, sea Q la matriz ligada al antiautomorfismo $*$ en la representación σ. Entonces Q es una suma directa de matrices hermitianas, excepto la componente $(Q)_r$ que en el caso de dimensión $n = 2r$ y cuando $T \in K_{\binom{n}{r}}$, puede ser una matriz simétrica o antisimétrica (v. teorema 2 del capítulo I).

Si c es un elemento de $D(M,f)$ que define en $C^+(M,Q)$ un automorfismo interior igual al automorfismo ligado a la transformación unitaria U, designemos por $(C)_i$ $i = 0, 1, \ldots, [n/2]$ las componentes de la matriz $C = c^\sigma$, En la representación espinorial σ los elementos $\alpha \in K$ están representados por una suma directa de matrices en que la componente i, $i = 0, 1 \ldots, [n/2]$, es el múltiplo α de la matriz identidad $(I)_i$.

Sabemos que la norma cc^* del elemento c, perteneciente al grupo de Clifford, es un elementos $\alpha \in K$. Como $c \in D(M,f)$, tomando la representación espinorial σ, se verificará

$$(cc^*)^\sigma = c^\sigma (c^*)^\sigma = CQC^\gamma Q^{-1} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \oplus (C)_i (Q)_i (C)_i^\gamma (Q)_i^{-1} = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} \oplus \alpha (I)_i$$

Igualando las componentes obtenemos

$$(C)_i (Q)_i (C)_i^\gamma = \alpha (Q)_i . \qquad (15)$$

Cuando $n = 2r+1$, sabemos que todas las $(Q)_i \in F_{\binom{n}{i}}$ y son matrices hermitianas respecto a γ. Cada una de estas matrices hermitianas $(Q)_i$ puede considerarse como la matriz de una forma hermitiana referida a una cierta base, (v. [13] pág. 149-50) siendo J el automorfismo involutivo asociado a esta forma. Entonces las $(C)_i$ son las matrices que representan transformaciones lineales del espacio vectorial sobre el que está definida dicha forma, referida a aquella base. La igualdad (15) demuestra que estas transformaciones son semejanzas unitarias respecto de la forma hermitiana cuya matriz es $(Q)_i$. Dada la representación espinorial σ las $(Q)_i$ quedan definidas salvo un factor $\delta \in K$, por lo tanto, dado σ la forma hermitiana queda definida salvo un factor.

Podemos decir que salvo dicho factor la forma hermitiana está completamente definida por $D(M,f)$; pues si cambiamos la representación espinorial, hemos visto al final del capítulo I que las nuevas matrices $(\overline{Q})_i$ son congredientes con las anteriores, y por lo tanto son matrices de las mismas formas hermitianas referidas a otras bases.

Cuando $n = 2r$ todo lo dicho anteriormente vale para las $(Q)_i$, $i \neq r$. Veamos ahora lo que ocurre con $(Q)_r$. Sabemos que pueden ocurrir dos casos

1º. $(Q)_r \in R_{\frac{1}{2}\binom{n}{r}}$. Entonces también se puede aplicar lo dicho para las $(Q)_i \in F_{\binom{n}{i}}$, con la única diferencia de que ahora se trata de una forma hermitiana definida sobre un espacio vectorial sobre un cuerpo de cuaternios R (v. [7] pág. 74-75), y J' es el antiautomorfismo involutivo asociado a dicha forma.

2º $(Q)_r \in K_{\binom{n}{r}}$. Entonces vamos a ver inmediatamente que $(Q)_r$ puede ser simétrica o antisimétrica, según que $r = 2s$ ó $r = 2s+1$, respectivamente.

a) si $(Q)_r$ es simétrica también se aplica lo dicho anteriormente, teniendo en cuenta que ahora tenemos una forma bilineal simétrica y las $(C)_r$ definen semejanzas (ortogonales) respecto de dicha forma;

b) si $(Q)_r$ es antisimétrica obtenemos una forma bilineal antisimétrica

y las transformaciones definidas por $(C)_r$ pueden considerarse como semejanzas simplécticas.

Demostremos ahora que la $(Q)_r \in K_{\binom{n}{r}}$ puede ser simétrica o antisimétrica. Nuestra prueba consiste en hallar la dimensión sobre K del espacio de elementos simétricos de D(M,f) respecto al antiautomorfismo * y compararla con la dimensión del espacio de elementos simétricos respecto a de la representación espinorial de D(M,f), según que $(Q)_r$ sea simétrica o antisimétrica.

Calculemos primero la dimensión d_o del espacio de elementos simétricos de D(M,f) para n = 2r. Como los elementos de grado 4i son simétricos y los elementos de grado 4i+2 son antisimétricos, teniendo en cuenta el teorema 1, obtenemos,

$$d_0 = \sum_{i=o}^{r} \binom{n}{2i}^2$$

Para hallar el valor de esta suma calculamos primero

$B = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=o}^{n} (-1)^i \binom{n}{i}\binom{n}{n-i}$. Luego B es el coeficiente de x^n en

$$\left(\sum_{i=o}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} x^i\right)\left(\sum_{j=o}^{n} \binom{n}{j} x^j\right) = (1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n,$$

por tanto $B = (-1)^r \binom{n}{r}$.

Como $A = \sum_{i=o}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$, resulta

$$d_0 = \sum_{i=o}^{r} \binom{n}{2i}^2 = (A+B)/2 = \left(\binom{2n}{n} + (-1)^r \binom{n}{r}\right)/2$$

Veamos ahora la dimensión del espacio de elementos simétricos del álgebra de matrices $F_{\binom{n}{i}}$ respecto al antiautomorfismo $(A)_i^* = (Q)_i (A)_i (Q)_i^{-1}$ donde $(Q)_i = \text{diag.}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\binom{n}{i}})$. Los $\binom{n}{i}^2$ elementos

e_{hh}, $e_{hj} + \sigma_j e_{jh} \sigma_h^{-1}$, $\theta e_{hj} - \theta \sigma_j e_{jh} \sigma_h^{-1}$, h, j = 1, 2,..., $\binom{n}{i}$, h < j, donde e_{hj} es la matriz con un 1 en la intersección de la fila h con la columna j y 0 en los demás lugares, forman una base sobre K del espacio de

elementos simétricos

Si $(Q)_r \in K_{\binom{n}{r}}$, $2r = n$, y $(Q)_r = \text{diag.}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\binom{n}{r}})$, el espacio de elementos simétricos del álgebra $K_{\binom{n}{r}}$ respecto al antiautomorfismo $(A)^*_r = (Q)_r (A)'_r (Q)_r$, tiene por base los $\binom{\binom{n}{r}+1}{2}$ elementos e_{hh}, $e_{hj} + \sigma_j e_{jh} \sigma_h^{-1}$.

Tenemos pues, que cuando $(Q)_r \in K_{\binom{n}{r}}$ es simétrica el espacio de elementos simétricos respecto al antiautomorfismo * de la representación espinorial de $D(M,f)$ tiene dimensión

$$\sum_{i=o}^{r-1} \binom{n}{i}^2 + \binom{\binom{n}{r}+1}{2} = \sum_{i=o}^{r-1} \binom{n}{i}^2 + \frac{1}{2}\binom{n}{r}^2 + \frac{1}{2}\binom{n}{r} = \left(\binom{2n}{n} + \binom{n}{r}\right)/2$$

Resulta que este valor no coincide con el dado por (16) cuando r es impar, por tanto, si $n = 4s+2$ la matriz $(Q)_r$ es antisimétrica. Cuando $n = 4s$ los valores coinciden y $(Q)_r$ debe ser simétrica, pues si fuese antisimétrica el número del elementos simétricos de la representación espinorial de $D(M,f)$ debía ser $\binom{2n}{n}/2 - \binom{n}{r}/2$, como puede comprobarse mediante un cálculo directo.

Deseamos hacer notar que cuando el elemento $c \in D(M,f)$ pertenece al grupo de elementos invertibles que definen automorfismos interiores de $C(M,Q)$, que inducen sobre $C^+(M,Q)$ automorfismos ligados a las semejanzas unitarias, cc^* es un elemento de K, si $n = 2r+1$, y pertenece al espacio sobre K engendrado por 1 y r_n, si $n = 2r$ (v. [9] pág. 72, [16] pág. 38, lema 8, teniendo en cuenta que $(M:K) = 2n$). Como r_n pertenece al centro del álgebra $D(M,f)$ y para $n = 2r$, $r_n^2 = 1$, cuando estamos en este caso r_n^σ es una suma directa de matrices en que cada componente es igual a la matriz unidad ó a su inversa; por tanto para cualquier n se verifica $(C)_i (Q)_i (C)_i (Q)_i^{-1} = \sigma_i (I)_i$, es decir, $(C)_i (Q)_i (C)_i^* = \sigma_i (I)_i$.

Lo que hemos dicho antes de las $(C)_i$ para el caso de los elementos del grupo de Clifford que corresponden a las trasnformaciones unitarias también es válido para las componentes $(C)_i$ de la matriz C que representa un elemento del grupo que estamos considerando,. Esto es, las $(C)_i$ son sume-

janzas unitarias de una forma hermitiana definida sobre un espacio vectorial sobre F, si $2i \neq n$; para $2i = n$, $(C)_i$ es una semejanza unitaria de una forma hermitiana definida sobre un espacio vectorial sobre un cuerpo de cuaternios o bien una semejanza ortogonal ó simpléctica, según que las $(C)_i$, $2i = n$, de los elementos del grupo de Clifford que corresponden a transformaciones unitarias, sean semejanzas unitarias o bien semejanzas ortogonales ó simplécticas, respectivamente.

CAPITULO III

En este capítulo vamos a usar el álgebra D(M,f) para obtener representaciones biunívocas del grupo proyectivo de semejanzas unitarias de la forma hermitiana f en grupos ortogonales. Los espacios de la representación van a ser los espacios de grado 2i, i = 1, 2,..., n-1 de D(M,f), que son espacios sobre K. A cada elemento $\overline{S}$ del grupo proyectivo le asociamos una transformación definida por un automorfismo homogéneo ligado a $\overline{S}$. Veremos que de esta forma obtenemos un isomorfismo del grupo proyectivo de semejanzas unitarias en un grupo ortogonal.

Empezamos definiendo sobre cada uno de los espacios de grado 2i de D(M,f) una forma cuadrática, o lo que es lo mismo, una forma bilineal simétrica. Demostramos después qué esta forma es no degenerada, que los automorfismos considerados efectúan transformaciones ortogonales respecto de dicha forma y que la representación definida es biunívoca.

Suponemos siempre que la forma hermitiana f es no degenerada, y que la característica del cuerpo F es 0 o mayor que la dimensión (M:F).

§ 1

Definimos una forma bilineal simétrica (x,y) sobre los espacios de grado r del álgebra C(M,Q) de la manera siguiente:

Sean a y b dos elementos cualesquiera del espacio de grado r de C(M,Q), considerado como espacio graduado. Tomamos como valor de (a,b) la componente de grado cero del producto ab'. Salta a la vista que de esta manera obtenemos una forma bilineal. Veamos ahora que es simétrica; en efecto, como a y b son elementos homogéneos del mismo grado, el antiautomorfismo $'$ los cambia en sí mismo si su grado es 4m ó 4m+1, y en sus inversos si el grado es 4m+2 ó 4m+3. Como la componente de grado cero de

un elemento es la misma que la de su conjugado respecto al antiautomorfismo $*$, ab^* tienen la misma componente de grado cero que $(ab^*)^* = ba^*$, luego $(a,b) = (b,a)$.

Lema 1. La forma bilineal simétrica definida sobre los espacios de grado r, r = 1,..., (M:Q) de C(M,Q) es no degenerada si, y sólo si, Q es no degenerada.

Demostración: Tenemos una base ortogonal $z_1, z_2, \ldots, z_N$ de (M,Q). Entonces los elementos

$$z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_r}, \quad i_1 < i_2 < \ldots < i_r,$$

forman una base ortogonal del espacio de grado r. Si todos los vectores z_i son no-isotrópicos y $a = z_{i_1} z_{i_2} \cdots z_{i_r}$, $(a,a) = Q(z_{i_1})Q(z_{i_2})\ldots Q(z_{i_r}) \neq 0$ y la forma bilineal es no degenerada, pero, si alguno de los vectores z_i es isotrópico, existen vectores isotrópicos en la base ortogonal del espacio de grado r de C(M,Q).

Esta forma induce una forma bilineal simétrica sobre los espacios de grado 2i de D(M,f) de la que vamos a probar que también es no degenerada.

Usaremos la misma notación que en el capítulo II, en particular, u_i, v_i, r_i, s_i tienen el mismo significado que en la definición de la página 34, donde $x_i y_i = \theta x_i$, i = 1, 2,..., n, forman una base ortogonal de (M,Q).

Lema 2. Sea $a = w_{i_1} w_{i_2} \ldots w_{i_m}$ y $b = w'_{i_1} w'_{i_2} \ldots w'_{i_m}$, donde w_{i_k}, w'_{i_k} representan bien a u_{i_k} ó a v_{i_k}. Entonces $(a,b) = (w_{i_1}, w'_{i_1}) \ldots (w_{i_m}, w'_{i_m})$ y es distinto de cero si, y solamente si, a = b, es decir, $w_{i_k} = w'_{i_k}$, k = 1,..., m.

Demostración: En primer lugar recordemos que los elementos w_h y w_k, si $h \neq k$, conmutan entre si cualquera que sea el valor que representan

y que, por ser $w_h^* = -w_h$, lo mismo ocurre con w_h^* y w_k. Así pues

$$ab^* = w_{i_1} w_{i_1}'^* w_{i_2} w_{i_2}'^* \cdots w_{i_m} w_{i_m}'^* .$$

El producto $w_j w_j'^*$ puede adoptar una de las 4 formas siguientes:

$$v_j v_j^* = -v_j^2 = 2Q(x_{2j-1})Q(x_{2j}) - 2\rho^{-1}x_{2j-1}x_{2j}y_{2j-1}y_{2j}$$

$$u_j u_j^* = -u_j^2 = -2\rho Q(x_{2j-1})Q(x_{2j}) - 2x_{2j-1}y_{2j-1}x_{2j}y_{2j} = -\rho v_j v_j^* \qquad (2)$$

$$u_j v_j^* = -2Q(x_{2j-1})x_{2j}y_{2j} + 2Q(x_{2j})x_{2j-1}y_{2j-1}$$

$$v_j u_j^* = -u_j v_j^* .$$

Los subíndices $2i_h-1$, $2i_h$ de x ó y, que aparecen en el producto $w_{i_h} w_{i_k}'^*$ son distintos de los $2i_k-1$, $2i_k$ que aparecen en $w_{i_k} w_{i_k}'^*$ si $h \neq k$. Como al multiplicar dos elementos de la forma $x_1^{\varepsilon_1} y_1^{\delta_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n} y_n^{\delta_n}$ en que los subíndices que aparecen en un factor son distintos de los subíndices del otro, el grado del producto es la suma de los grados de los factores, resulta que la componente de grado cero del producto $\prod_{j=1}^{m} w_{i_j} w_{i_j}'^*$ es el producto de las componentes de grado cero de cada uno de los factores $w_{i_j} w_{i_j}'^*$. Igualando en (1) las componentes de grado cero obtenemos

$$(a,b) = (w_{i_j}, w_{i_1}')(w_{i_2}, w_{i_2}') \cdots (w_{i_m}, w_{i_m}')$$

Por otra parte las igualdades (2) indican que $(w_{i_j}, w_{i_j}') \begin{cases} =0 \text{ si } w_{i_j} \neq w_{i_j}' \\ \neq 0 \text{ si } w_{i_j} = w_{i_j}'^2 \end{cases}$

y por tanto

$$(a,b) \begin{cases} =0 & \text{si } a \neq b \\ \neq 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

<u>Lema 2'.</u> Si en el lema 2 suponemos que las w_{i_k} y w_{i_k}' representan a s_{i_k} ó r_{i_k}, el lema sigue siendo cierto.

La demostración es la misma, sustituyendo las igualdades (2) por

$$s_j s_j^* = -s_j^2 = 2Q(x_{2j-1})Q(x_{2j}) + 2\rho^{-1} x_{2j-1}y_{2j-1}x_{2j}y_{2j}$$

$$r_j r_j^* = -r_j^2 = -2\rho Q(x_{2j-1})Q(x_{2j}) - 2x_{2j-1}y_{2j-1}x_{2j}y_{2j} = -\rho s_j s_j^*$$

$$s_j r_j^* = 2Q(x_{2j-1})x_{2j}y_{2j} + 2Q(x_{2j})x_{2j-1}y_{2j-1} \qquad (2')$$

$$r_j s_j^* = -s_j r_j^*$$

En la demostración del lema 6 del capítulo II, hemos definido por inducción sobre h una base del espacio de 2h índices distintos, que por simplificar supusimos que era el espacio del sistema de índices 1, 2,...,2h, con lo cual habíamos demostrado que no se restinge la generalidad y habíamos visto como de los elementos de este espacio de índices se deducen los elementos del espacio de cualquier otro sistema de 2h índices distintos. Llamaremos a la base allí definida para los espacios de sistemas de 2h índices distintos, base canónica . Nótese que decir de un elemento que es canónico no implica que pertenece a la base canónica.

Vamos a recordar ahora la forma en que se obtiene dicha base, al mismo tiempo que introducimos una nueva notación que nos será útil en lo que sigue.

Suponemos obtenidas ya las bases para los espacios de 2j índices distintos, $2j \leq h$. Elegidos entre los h primeros números 2j números, sean estos $i_1, i_2, \ldots, i_{2j}$. Los $\binom{2j}{j}$ elementos $c_1, c_2, \ldots, c_{\binom{2j}{j}}$ de la base canónica del espacio de índices $i_1, i_2, \ldots, i_{2j}$ pueden ser escritos así

$$c_f = \sum_{\nu_i=0}^{\nu_i=1} a^f_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_j}\, p_{i_1}^{\nu_1} p_{i_2}^{\nu_2} \cdots p_{i_{2j}}^{\nu_{2j}}$$

en donde $a^f_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_{2j}} \in K$,

$$p_{i_k}^{\nu_k} = \begin{cases} x_{i_k} & \text{si} \quad \nu_k = 0 \\ y_{i_k} & \text{si} \quad \nu_k = 1 \end{cases}$$

y la suma se extiende a los 2^{2j} distintos conjuntos de valores que se obtienen a partir de $\nu_1 \nu_2 \dots \nu_{2j}$ sustituyendo cada una de las ν_k bien por 0 ó por 1.

Si cambiamos el significado de las $p_{i_k}^{\nu_k}$ haciendo

$$p_{i_k}^{\nu_k} = \begin{cases} s_{i_k} & \text{si} \quad \nu_k = 0 \\ r_{i_k} & \text{si} \quad \nu_k = 1 \end{cases}$$

obtenemos un elemento canónico del espacio de índices $2i_1-1, 2i_1, \dots 2i_{2j}-1, 2i_{2j}$, que denotaremos por C_f.

Sean $i'_1 < i'_2 < \dots < i'_{h-2j}$ aquellos de los h primeros números que no figuran entre los $i_1, i_2, \dots, i_{2j}$. Multipliquemos cada una de las C_f por cada uno de los elementos D_g, $g = 1, 2, \dots, 2^{h-2j}$, que se obtienen a partir de $w_{i'_1} w_{i'_2} \dots w_{i'_{h-2j}}$ sustituyendo cada $w_{i'_k}$ por $u_{i'_k}$ ó $v_{i'_k}$. Los elementos $C_f D_g$ forman la base canónica del espacio de la familia de subíndices $i_1, i_2, \dots, i_{2j}$ perteneciente al espacio de índices 1, 2, ..., 2h. El conjunto de las bases canónicas de los espacios de todas las familias de subíndices pertenecientes al espacio de índices 1, 2, ..., 2h nos proporciona una base canónica de este espacio.

Nos proponemos probar, primeramente, que si los espacios de grado menor que 2h admiten una base ortogonal de vectores no isotrópicos, lo mismo sucede con el espacio de grado 2h. Esto equivale a decir que dichos espacios son no degenerados respecto a la forma bilineal que hemos definido.

Llegaremos a esta conclusión por medio de una serie de lemas.

Lema 3. Los espacios del mismo grado que tienen distinto sistema de índices son ortogonales entre sí.

Demostración: Supongamos que los elementos a y b de grado 2h están expresados como combinación lineal de los elementos

$$x_1^{\varepsilon_1} y_1^{\delta_1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{\delta_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} y_n^{\delta_n}, \quad \varepsilon_i, \delta_i = 0, 1 \quad \text{y} \quad \sum_i \varepsilon_i + \sum_i \delta_i = 2h. \quad (3)$$

El producto de dos elementos de la forma (3) es de grado cero solamente si dichos elementos tienen los mismos exponentes, de los contrario el grado del elemento producto es la suma de los exponentes que son distintos . Si a y b pertenecen a distintos sistemas de índices, a y b son combinaciones lineales de elementos de la forma (3), tales que los elementos que figuran en la expresión de a, no pueden figurar en la expresión de b, por tanto el producto ab tiene nula su componente de grado cero. Como $a.b^{*} = (1)^{\binom{2h}{2}} ab$, esto indica que $(a,b) = 0$.

Resulta, pues, que si tenemos bases ortogonales formadas por vectores no isotrópicos de cada uno de los espacios de índices de grado 2h, el conjunto de estas bases nos da una base ortogonal de vectores no isotrópicos del espacio homogéneo de grado 2h.

Lema 4. Si los espacios de índices de grado 2(h-1) admiten una base ortogonal de vectores no isotrópicos, lo mismo sucede para los espacios de 2h índices en que al menos uno de los índices aparece repetido.

Demostración: Supongamos que sea k un índice que aparece repetido en un sistema de índices de grado 2h. Si multiplicamos los elementos de una base del espacio del sistema de índices de grado 2(h-1), obtenido suprimiendo los dos índices k en el sistema de grado 2h, por $x_k y_k$ obtenemos una bases del espacio de 2h índices. Designemos por m_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, los elementos de la base ortogonal de vectores no isotrópicos del espacio de índices de grado 2(h-1), es decir, $(m_i, m_j) = 0$, si $i \neq j$, y $(m_j, m_j) \neq 0$

Como $m_i x_k y_k (m_j x_k y_k)^{*} = m_i x_k y_k y_k x_k m_j^{*} = -\rho\, Q(x_k)^2\, m_i m_j^{*}$, igualando los términos de grado cero del primero y último miembro, resulta

$$(m_i x_k y_k,\ m_j x_k y_k) = -\rho\, Q(x_k)^2 (m_i, m_j) \begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j \\ \neq 0 & \text{si } i = j \end{cases}$$

con lo que el lema queda probado.

Necesitamos ahora hallar una base ortogonal de vectores no-isotrópicos para los espacios de 2h índices distintos. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que se trata del espacio de índices 1, 2, 3,...., 2h. Para

llegar a establecer este resultado procederemos por partes, dividiendo dicho espacio de índices en los subespácios de las distintas familias de subíndices.

Lema 5. Los subespacios de las distintas familias de subíndices de un espacio de 2h índices distintos son ortogonales entre sí.

Demostración: Sean a y b dos elementos de la base canónica del espacio de índices 1, 2,..., 2h, que pertenecen a dos ditintos subespacios de la familia de subíndices. Sea k un subíndice que pertenece a una familia de subíndices, que podemos suponer que es la de b, y no pertenece a la otra. Expresemos a y b como combinación lineal de elementos de la forma

$$t_1 t_2 \cdots t_h \qquad (4)$$

donde t_j puede ser sustituída por u_j, v_j, r_j ó s_j, $j = 1,\ldots,h$. En todos los sumandos que aparecen en la combinación lineal que expresa el elemento b, t_k está sustituída por s_k ó r_k, mientras que en la combinación lineal que corresponde al elemento a, t_k está sustituída en todos los sumandos por u_k ó v_k.

Por otra parte el antiautomorfismo * al actuar sobre los elementos de la forma $c\, t_1 t_2 \cdots t_h$ los cambia en $(-1)^h c\, t_1 t_2 \cdots t_h$, pues t_i y t_j, si $i \neq j$, conmutan entre sí, cualquera que sea el valor por que se sustituyen, y el efecto del antiautomorfismo * sobre cada una de las t_j es un cambio de signo por tratarse de elementos de grado 2.

Tenemos entonces que el calcular $ab^* = (-1)^h ab$, obtenemos una suma de productos, y en cada uno de los productos aparecen uno de los siguientes parres de factores u_k, r_k; u_k, s_k; v_k, r_k ó v_k, s_k entre otros facotes que por tener índice distinto conmutan con estos. Puesto que $s_k r_k = u_k s_k = v_k r_k = v_k s_k = 0$ resulta $ab^* = (-1)^h ab = 0$ y por tanto $(ab) = 0$.

En vista de este lema podemos reducir nuestro problema a probar que la base canónica de cualquier subespacio de una familia de subíndices del espacio de índices 1, 2,..., 2h es una base ortogonal de vectores no-isotrópicos.

Lema 5. Si las bases canónicas de los espacios de 2j índices distintos, 2j h, son bases ortogonales de vectores no-isotrópicos, la base canónica de cualquier subespacios de una familia de subíndices del espacio de índices 1, 2,...,2h, es también una base ortogonal de vectores no-isotrópicos.

Demostración: Hemos visto antes que los elementos de la base canónica del subespacio de la familia de subíndices $i_1, i_2, \ldots, i_{2j}$ tienen la forma $C_f D_g$.

Para demostrar el lema probamos primero que dos elementos cualesquiera de la base canónica son ortogonales entre sí. Dividimos esta parte en dos casos.

Caso I. Sean los elementos que consideramos $E_1 = C_{f_1} D_{g_1}$ y $E_2 = C_{f_2} D_{g_2}$ siendo $g_1 \neq g_2$. Quiere esto decir que si $i'_1\ i'_2 \ldots i'_{h-2j}$ son aquellos de los h primeros números que no figuran entre los $i_1, i_2, \ldots, i_{2j}$, el factor D_g de la forma $w_{i'_1}\ w_{i'_2} \ldots w_{i'_{h-2j}}$ es distintos en cada uno de los elementos E_1 y E_2.

Entre los elementos de una misma familia de subíndices las r_k y s_k que aparecen en la expresión de cualquier C_f tienen distintos subíndices que las u_m y v_m que figuran en cualquier D_g, por lo que las C_f conmutan con las D_g. Entonces,

$$E_1 E_2^* = C_{f_1} D_{g_1} (C_{f_2} D_{g_2})^* = C_{f_1} D_{g_1} D_{g_2}^* C_{f_2}^* = C_{f_1} C_{f_2}^* D_{g_1} D_{g_2}^*$$

Ahora bien, $C_{f_1} C_{f_2}^*$ expresando en función de los elementos $x_1^{\varepsilon_1} y_1^{\delta_1} \ldots x_n^{\varepsilon_n} y_n^{\delta_n}$ es una combinación lineal de elementos en los que sólo pueden aparecer los índices $2i_1-1$, $2i_1$, $2i_2-1$, $2i_2, \ldots, 2i_{h-2j}-1$, $2i_{h-2j}$. Ninguno de estos índices figuran en la expresión de D_{g_1}, D_{g_2} en función de dichos elementos; por consiguiente la componente de grado cero de $E_1 E_2^*$ es el producto de las componentes de grado cero de $C_{f_1} C_{f_2}^*$ y $D_{g_1} D_{g_2}^*$. Esto es

$$(E_1, E_2) = (C_{f_1}, C_{f_2})(D_{g_1}, D_{g_2}).$$

El lema 2 afirma que

$$(D_{\varepsilon_1}, D_{\varepsilon_2}) \begin{cases} = 0 & \text{si } \varepsilon_1 \neq \varepsilon_2 \\ \neq 0 & \text{si } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 \end{cases}$$

Luego $(E_1,E_2) = 0$ si $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$.

Caso II. $E_1 = C_{f_1} \cdot D_\varepsilon$, $E_2 = C_{f_2} \cdot D_\varepsilon$. Como suponemos que $E_1 \neq E_2$ se debe verificar $f_1 \neq f_2$.

Hemos definido las

$$C_f = \sum_{\nu_i=o}^{1} \alpha_{\nu_1 \cdots \nu_{2j}} p_{i_1}^{\nu_1} p_{i_2}^{\nu_2} \cdots p_{i_{2j}}^{\nu_{2j}}$$

donde $p_{i_j}^{\nu_j} = \begin{cases} s_{i_j} & \text{si } \nu_j = 0 \\ r_{i_j} & \text{si } \nu_j = 1 \end{cases}$ y $\alpha_{\nu_1 \cdots \nu_{2j}} \in K$, de tal manera

que si hacemos $p_{i_j}^{\nu_j} = \begin{cases} x_{i_j} & \text{si } \nu_j = 0 \\ y_{i_j} & \text{si } \nu_j = 1 \end{cases}$ obtenemos el elementos c_f de

la base canónica del espacio de índices $2i_1-1$, $2i_1$, $2i_2-1$, $2i_2$,..., $2i_{2j}-1$, $2i_{2j}$.

Como por hipótesis suponemos que los elementos de la forma c_f forman una base ortogonal de vectores no-isotrópicos del espacio de índices a que pertenecen, se debe verificar que la componente de grado cero del producto $c_{f_1} \cdot c^*_{f_2}$ es nula si $f_1 \neq f_2$ y distinta de cero si $f_1=f_2$. Teniendo en cuenta que en el producto

$$c_{f_1} c^*_{f_2} = \Big(\sum_{\nu_i=o}^{1} \alpha^{f_1}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_{2j}} p_{i_1}^{\nu_1} \cdots p_{i_{2j}}^{\nu_{2j}} \Big) \Big(\sum_{\nu_i=o}^{1} \alpha^{f_2}_{\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_{2j}} p_{i_{2j}}^{\nu_{2j}} \cdots p_{i_1}^{\nu_1} \Big)$$

sólo obtenemos elementos de grado cero al multiplicar sumandos con el mismo conjunto de valores para $\nu_1 \nu_2 \cdots \nu_{2j}$, tenemos

$$(\sigma_{f_1},\sigma_{f_2})=(\Sigma\,\alpha^{f_1}_{\nu_1\ldots\nu_{2j}}\,\alpha^{f_2}_{\nu_1\ldots\nu_{2j}}\,(-\rho)^{\sum_{i=1}^{2j}\nu_i})Q(x_{i_1})\ldots Q(x_{i_{2j}})\begin{cases}=0 \text{ si } f_1\neq f_2\\ \neq 0 \text{ si } f_1=f_2\end{cases}\qquad(5)$$

Si calculamos la componente de grado cero del producto $C_{f_1}\,C^{*}_{f_2}$, teniendo en cuenta el lema 2' y las fórmulas (2'), obtenemos

$$(C_{f_1},C_{f_2})=\Sigma\,\alpha^{f_1}_{\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_{2j}}\,\alpha^{f_2}_{\nu_1\ldots\nu_{2j}}\,(p_{i_1}^{\nu_1},p_{i_1}^{\nu_1})\ldots(p_{i_{2j}}^{\nu_{2j}},p_{i_{2j}}^{\nu_{2j}})=$$

$$(\Sigma\,\alpha^{f_1}_{\nu_1\ldots\nu_{2j}}\,\alpha^{f_2}_{\nu_1\ldots\nu_{2j}}\,(-\rho)^{\sum_i\nu_i})2^{2j}Q(x_{2i_1-1})Q(x_{2i_1})\ldots$$

$$Q(x_{2i_{2j}-1})Q(x_{2i_{2j}})\begin{cases}=0 \text{ si } f_1\neq f_2\\ \neq 0 \text{ si } f_1=f_2\end{cases}\qquad(6)$$

ya que $\prod_{k=1}^{2j}Q(x_{2i_k-1})Q(x_{2i_k})\neq 0$, y la fórmula (5) indica que

$$\Sigma\,\alpha^{f_1}_{\nu_1\ldots\nu_{2j}}\,\alpha^{f_2}_{\nu_1\ldots\nu_{2j}}\,(-\rho)^{\sum\nu_i}\begin{cases}=0 & \text{si } f_1\neq f_2\\ \neq 0 & \text{si } f_1=f_2\end{cases}$$

Queda demostrado, pues, que los vectores C_fD_g son ortogonales entre sí. Falta por demostrar que son no-isotrópicos. Esto es inmediato, porque, si $E=C_fD_g$, $(E,E)=(C_f,C_f)(D_g,D_g)$. Como la fórmula (6) asegura que $(C_f,C_f)\neq 0$ y el lema 2 afirma que $(D_g,D_g)\neq 0$, resulta que $(E,E)\neq 0$.

Hemos probado hasta ahora que si la base canónica de cualquier espacio de 2j índices distintos, $2j\leq h$, es una base ortogonal de vectores no isotrópicos, lo mismo sucede con la base canónica de un espacio de 2h índices distintos. Cuando j=1, tomemos u_1 y v_1 como base canónica del espacio de índices 1,2 a partir de la cual obtenemos por inducción y sustitución de índices las bases canónicas de todos los espacios de 2h índices distintos. Las fórmulas (2) aseguran que u_1 y v_1 forman una base ortogonal de vectores no-isotrópicos. Resulta entonces que la base canónica de cualquier espacio de 2h índices distintos es una base ortogonal de vectores no-isotrópicos.

Si hallamos ahora bases ortogonales de vectores no-isotrópicos para cada uno de los espacios de 2h índices, que tienen algún índice repetido

el lema 3 nos asegura que el conjunto de estas bases y las bases canónicas de los espacios de 2h índices distintos forman una base ortogonal de vectores no isotrópicos del espacio de grado 2h de D(M,f). Haciendo uso del lema 4 nos basta probar que el espacio de grado 2 admite una base con estas propiedades. Como el elemento $x_i y_i$ es no isotrópico, pues $(x_i y_i, x_i y_i) = -2\, Q(x_i)^2 \neq 0$, los elementos

$$x_i y_i, \quad u_{ij}, \quad v_{ij}, \quad i,j = 1, 2, \ldots, n, \quad i < j$$

forman una base ortogonal de vectores no isotrópicos del espacio de grado 2. Esto demuestra el

Teorema 1. Sea Q la forma cuadrática asociada a la forma hermitiana no degenerada f, definida sobre el espacio M. Entonces , la forma bilineal simétrica (a,b), que hemos definido sobre los espacios de grado r, de C(M,Q), induce una forma bilineal simétrica, no degenerada , sobre los espacios de grado 2i, i = 1, 2,..., n. de D(M,f).

§ 2

En el capítulo I hemos visto como a cada semejanza unitaria de (M,f) podemos hacer corresponder un automorfismo del álgebra $C^+(M,Q)$, donde Q es la forma cuadrática sobre M, asociada a la forma hermitiana f. Si c es un elemento de C(M,Q) que define un automorfismo interior que induce sobre $C^+(M,Q)$ el automorfismo ligado a la semejanza unitaria S, este elemento pertenece a D(M,f), como ha sido probado en el teorema 3 del capítulo II. Esto indica que el automorfismo de $C^+(M,Q)$ ligado a la semenjanza unitaria S induce un automorfismo interior sobre D(M,f). Sabemos, además, que dicho automorfismo es un automorfismo homogéneo de grado 0, por tanto, induce una transformación lineal sobre cada uno de los espacios de grado 2h, h = 0, 1,,1,, n, de D(M,f).

Teorema 2. La transformación lineal que un automorfismo ligado a una

semejanza unitaria induce sobre el espacio de grado 2h, h = 0, 1,..., n, de D(M,f) es una transformación ortogonal respecto de la forma bilineal simétrica (a,b), que hemos definido.

Demostración: Sean a y b dos elementos de grado 2h de D(M,f). El valor de (a,b) es, por definición, la componente de grado cero del producto ab^*

Sea σ el automorfismo ligado a la semejanza unitaria S. Por tratarse de un automorfismo homogéneo, conmuta con el antiautomorfismo involutivo *. Además, como σ es un automorfismo interior, deja invariantes los elementos centrales de D(M,f). En particular, σ deja invariantes los elementos de grado cero y, por consiguiente, la componente de grado cero de ab^* es la misma que la de $(ab^*)^\sigma = a^\sigma (b^\sigma)^*$; esto es, $(a,b) = (a^\sigma, b^\sigma)$, lo cual prueba que la transformación lineal inducida por el automorfismo σ sobre el espacio de grado 2h de D(M,f) es una transformación ortogonal.

Consideremos ahora la aplicación de cada elemento del grupo de semejanzas unitarias de (M,f), S(M,f), en el automorfismo inducido en D(M,f) por el automorfismo de $C^+(M,Q)$ ligado a la semejanza unitaria considerada. Obtenemos de está forma un homomorfismo, que designaremos por k, del grupo de semejanzas unitarias S(M,f) en el grupo de automorfismos homogéneos de D(M,f).

El álgebra D(M,f) ha sido definida como la subálgebra de $C^+(M,Q)$ constituída por los elementos que permanecen invariantes ante los automorfismos ligados a las homotecias de (M,f). Luego el grupo de homotecias de (M,f), que es un subgrupo normal de S(M,f), pertenece al núcleo de homomorfismo k. Entonces, por medio del homomorfismo k podemos definir un homomorfismo g del grupo factor de S(M,f) por su subgrupo de homotecias en el grupo de automorfismos homogéneos de D(M,f); g hace corresponder a un elemento $\overline{S}$ del grupo factor el automorfismo inducido en D(M,f) por el automorfismo de $C^+(M,Q)$ ligado a cualquier semejanza unitaria de la clase lateral $\overline{S}$, ya que esta correspondencia está bien definida.

El grupo factor de S(M,f) por un grupo de homtecias, que es su centro, es el grupo proyectivo de semejanzas unitarias PS(M,f). Luego g es un

homomorfismo del grupo PS(M,f) sobre el grupo de automorfismos homogéneos de D(M,f) ligados a las semejanzas unitarias.

Definimos g_{2h} como el homomorfismo del grupo de automorfismos homogéneos de D(M,f) ligados a las semejanzas unitarias que aplica cada automorfismo de este grupo en la transformación ortogonal que dicho automorfismo induce en el espacio, de grado 2h de D(M,f), respecto a la forma bilineal simétrica (a,b). Resulta, entonces, que el producto gg_{2h} es un homomorfismo de PS(M,f) en el grupo ortogonal del espacio de grado 2h, respecto a la forma (a,b). Nuestro fin es demostrar que para h = 1, 2,..., n-1 dicho homomorfismo es un isomorfismo.

Lema 7. Sea σ el automorfismo de D(M,f) ligado a un elemento $\overline{S}$ del grupo PS(M,f). Entonces, σ es distinto del automorfismo idéntico si, y sólo si, $\overline{S}$ no es la unidad de PS(M,f).

Demostración: Tenemos que probar que el automorfismo ligado a la clase lateral de una semejanza unitaria S, que no es una homotecia, no es el automorfismo idéntico.

Sea $c_s \in D(M,f) \subset C(M,Q)$ el elemento que define sobre $C^+(M,Q)$ el automorfismo interior ligado a la semenjanza unitaria S. Veamos que se obtiene una contradicción si suponemos que dicho automorfismo indice sobre D(M,f) el automorfismo idéntico. En efecto, si así fuese, c_s debía pertenecer al centro de D(M,f) y por tanto conmutar con todos los elementos $c_{s'} \in D(M,f)$ que definen automorfismos interiores de $C^+(M,Q)$ ligados a cualquier semejanza unitaria S'; puesto que $c_{ss'} = c_{s'}c_s = c_{s's}$, el automorfismo de $C^+(M,Q)$ ligado a la semejanza unitaria SS' debía ser igual al automorfismo ligado a la semejanza unitaria S'S y esto sólo es posible si $S'S = SS'T_\alpha$. Para que esto ocurra, como S' puede ser cualquier semejanza unitaria, S debe definir en PS(M,f) una clase lateral que pertenezca al centro de dicho grupo; pero el centro del grupo PS(M,F) es la clase lateral unidad, lo cual contradice nuestra hipótesis de que S no es una homotecia. El lema queda probado.

Lema 8. Si k tiene más de cinco elementos, los elementos de grado

$2h$, $h = 1, 2, \ldots, n-1$, de $D(M,f)$ engendran dicha álgebra.

Demostración: Como $D(M,f)$ está engendrada por sus elementos de grado 2, nos basta probar que los elementos de grado $2h$, $h = 2, \ldots, n-1$, engendran una subálgebra D' que contiene una base del espacio de grado 2.

Como hemos supuesto que $h < n$ y n es el número de índices distintos, es posible elegir $h+1$ índices distintos; sean estos $i_1, i_2, \ldots, i_{h+1}$. Tomemos los elementos de $D(M,f)$ de grado $2h$

$$a = x_{i_1} y_{i_1} \cdots x_{i_h} y_{i_h}, \quad b = x_{i_1} y_{i_1} \cdots x_{i_{h-1}} y_{i_{h-1}} u_{i_h i_{h+1}} \quad y$$

$$c = x_{i_1} y_{i_1} \cdots x_{i_{h-1}} y_{i_{h-1}} v_{i_h i_{h+1}}. \text{ Entonces,}$$

$$ab = \rho^h Q(x_{i_1})^2 \cdots Q(x_{i_{h-1}})^2 Q(x_{i_h}) v_{i_h, i_{h+1}}, \text{ y como}$$

$$\rho^h Q(x_{i_1})^2 \cdots Q(x_{i_{h-1}})^2 Q(x_{i_h}) \neq 0, \quad v_{i_h i_{h+1}} \in D' ;$$

$$ac = + \rho^{h-1} Q(x_{i_1})^2 \cdots Q(x_{i_{h-1}})^2 Q(x_{i_h}) u_{i_h i_{h+1}}, \text{ luego } u_{i_h i_{h+1}} \in D'. \text{ Los}$$

subíndices i_h y i_{h+1} son cualesquiera y por tanto esto indica que todas las u_{ij} y v_{ij} pertenecen a D'.

Si tomamos como base ortogonal de (M,f) los elementos $x_1', x_2', x_3, x_4, \ldots, x_n$, donde $x_1' = x_1 + \alpha_1 x_2$, $x_2' = x_1 - \alpha_1 x_2$ y $\alpha_1 \neq 0$ es tal que $Q(x_1') = Q(x_1) + \alpha_1^2 Q(x_2) = Q(x_2') \neq 0$; como hemos supuesto que K tiene más de 5 elementos, existen por lo menos dos valores de α_i, $i = 1, 2$, que verifican esta condición, además de verificar $\alpha_1^2 \neq \alpha_2^2$.

La primera parte de la demostración nos indica que si $y_i' = \theta x_i'$, $i = 1, 2$, ele elemento

$$u_{1,2}' = x_1' y_2' - y_1' x_2' = (x_1 + \alpha_1 x_2)(y_1 - \alpha_1 y_2) - (y_1 + \alpha_1 y_2)(x_1 - \alpha_1 x_2) = 2x_1 y_1 - 2\alpha_1^2 x_2 y_2 \in D'.$$

Ahora bien, como $x_1 y_1$, $x_2 y_2$ son combinación lineal de los elementos $x_1 y_1 - \alpha_1^2 x_2 y_2$ y $x_1 y_1 - \alpha_2^2 x_2 y_2$, resulta que $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \in D'$.

Lo que hemos hecho con los subíndices 1 y 2, se puede hacer con dos

subíndices cualesquiera y por tanto el elemento $x_i y_i \in D'$, cualquiera que sea el valor de i y el lema queda probado.

Teorema 3. Si K tiene más de cinco elementos el homomorfismo del grupo PS(M,f) en el grupo de transformaciones ortogonales del espacio de grado 2h, h = 1, 2,..., n-1, de D(M,f) respecto a la forma (a,b) es un isomorfismo.

Demostración: Es necesario demostrar que el núcleo del homomorfismo que estamos estudiando contiene únicamente el elemento unidad del grupo PS(M,f). Por el lema 7, sabemos que si $\bar{S}$ es un elemento de PS(M,f) distinto de la unidad, el automorfismo σ ligado a cualquier semejanza unitaria de la clase lateral $\bar{S}$ es distinto del automorfismo idéntico. El efecto de dicho automorfismo sobre cualquier espacio de grado 2h, h = 1, 2,..., n-1, no puede ser la transformación ortogonal idéntica, pues, como los elementos de dicho espacio engendran el álgebra D(M,f), el automorfismo σ sería el automorfismo idéntico. Esta contradicción prueba el teorema.

Teorema 4. Si K tiene más decinco elementos el grupo proyectivo de semejanzas unitarias PS(M,f) admite una representación biunívoca en grupos ortogonales de espacios sobre K de dimensión $\binom{n}{h}^2 - 1$, h = 1, 2,..., [n/2].

Demostración: Hemos visto que existe una representación biunívoca de PS(M,f) en el grupo ortogonal del espacio de grado 2h, h = 1, 2,..., n-1, de D(M,f) respecto a la forma (a,b). Estos espacios tienen dimensión $\binom{n}{h}^2$ sobre K. La transformación ortogonal sobre el espacio de grado 2h que corresponde a un elemento de PS(M,f), está definida por un automorfismo interior homogéneo; por tanto, el elemento $r_h = \sum_{i_1 < \dots < i_h} Q(x_{i_1})^{-1}.2.Q(x_{i_h})^{-1} x_{i_1} y_{i_1} \dots x_{i_h} y_{i_h}$, que pertenece al centro del álgebra, permanece invariante ante dicho automorfismo. Este elemento es no isotrópico, pues

$$(r_h, r_h) = \binom{n}{h} \rho^h \neq 0,$$

porque hemos supuesto que la característica del cuerpo F, y por tanto la de K, es cero o mayor que n. Luego las transformaciones ortogonales respecto a la forma (a,b) del espacio de grado 2 de D(M,f) inducen transformaciones ortogonales sobre el subespacio ortogonal al elemento r_h, subespacio que es

no isotrópicos y tiene dimensión $\binom{n}{h}^2-1$. Salta a la vista que esta representación sigue siendo biunívoca.

Suponemos que estas representaciones son irreducibles, pero, de momento, sólo hemos conseguido demostrarlo para h=1 y, por consiguiente, para h = n-1, ya que la representación que se obtiene sobre el espacio de grado 2i es equivalente a la que se obtiene sobre el espacio de grado 2(n-i).

BIBLIOGRAFIA (1)

1. ARTIN, E .- Geometric algebra. Nueva York: Interscience Publishers (1957).

2. ARTIN, E .- Nesbitt, C J. y Thrall, R. M. Rings with minimun condition. Ann Arbor: University of Michigan Press.(1944)

3. BOURBAKI, N.- Algèbre, chap. III: Algèbre multilinéaire. Actual. Scient. et Ind. nº 1044 . Paris: Hernamm. (1948)

4. CLIFFORD, W.K.- Applications of Grassman's extensive algebra, Math. Papers, p. 266-76. London Macmillan 1882.

5. CHEVALLEY, C.- The algebraic theory of spinors. Nueva York: Columbia University Press (1954).

6. CHEVALLEY, C.- The construction and study of certain important algebras. The Math. Soc. of Japan (1955)

7. DIEUDONNÉ, J.- Sur los grèupes classiques. Act Scient et. Ind. nº 1040 . Paris: Hermann 1948.

8. DIEUDONNÉ, J.- On the structure of unitary grups II. Amer. J. Math. 75, 665-78 (1953)

9. DIEUDONNÉ, J.- La géometrie des groupes classiques. Berlin: Springer Verlag (1955)

10. EICHLER, M .- Idealtheorie der quadratischen Formen. Abh. Math. Sem., Hamburg Univ. 18, 14-37 (1952)

11. EICHLER, M .- Quadratische Formen und Orthogonale Gruppen. Berlin: Springer Verlag. (1952)

12. JACOBSON, N.- A note on hermitian forms, Bull. Amer. Math Soc. 46, 264-68(1940)

13. JACOBSON, N.- Lectures in Abstract Algebra. II: Linear Algebra, Nueva York: Van Nostrand Company (1953(

14. JACOBSON, N.- Structure of Rings. Amer. Math. Soc.Colloquium Public. 37 (1956)

15. WITT, E .- Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpen. J. reine angew, Math. 176, 31-44 (1937)

16. WONENBURGER,M.J.- On the group of similitudes and its proyevtive group. Tesis, Univ. de Yale, New Haven (1957).

(1) [9] contiene una extensa bibliografía, por lo que aquí enumeramos unicamente las obras a las que se hace referencia directa en el texto.

I N D I C E

Introducción . . . . . pág. 1

Capítulo I

1. Definición del álgebra D(M,f) . . . . . " 5

2. Estructura de D(M,f) . . . . . " 13

3. El antiautomorfismo * de D(M,f) . . . . . " 20

Capítulo II

1. Espacios de índices y de grado 2i: su dimensión " 26

2. Elementos que engendran D(M,f). Componentes simples de la representación espinorial del grupo unitario y el grupo de semejanzas unitarias. . . " 33

3. Propiedades de las componentes simples. . . . . " 43

Capítulo III

1. Definición de una forma cuadrática sobre los espacios de grado 2i. . . . . " 48

2. Representaciones del grupo proyectivo de semejanzas unitarias: Demostración de que dichas representaciones son biunívocas . . . . . " 58

Bibliografía . . . . . " 64

