DINÁMICA ECONÓMICA CAÓTICA: UNA APLICACIÓN AL ESTUDIO DEL CICLO Y EL CRECIMIENTO ECONÓMICO.

TESIS DOCTORAL

Lorenzo Escot Mangas

Director: Dr. D. Andrés Fernández Díaz



Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Departamento de Economía Aplicada III (Política Económica)

DINÁMICA ECONÓMICA CAÓTICA: UNA APLICACIÓN AL ESTUDIO DEL CICLO Y EL CRECIMIENTO ECONÓMICO.

Proyecto de Tesis realizado por Lorenzo Escot Mangas para la obtención del título de doctor en Ciencias Económicas y Empresariales por la Universidad Complutense de Madrid, bajo la dirección del Dr. D. Andrés Fernández Díaz, Catedrático de Universidad del Departamento de Economía Aplicada III –Política Económica– de la Universidad Complutense de Madrid

Madrid, 28 de Junio de 2000

ISBN: 84-669-1277-0

UCM

«Ante todo existió el Caos y después la Tierra, de ancho pecho, morada perenne y segura de los inmortales que habitan las cumbres del nevado Olimpo»

Hesiodo, *La Teogonía*

«Antes del mar, de la tierra, y del cielo que todo lo cubre, la naturaleza tenía en todo el universo un mismo aspecto indistinto, al que llamamos Caos: una mole informe y desordenada, no más que un peso inerte, una masa de embriones dispares de cosas mal mezcladas»

Ovidio, *Metamorfosis*

«El Dios ha querido que todas las cosas fuesen buenas: ha dejado aparte, en la medida en que ello estaba en su mano, toda imperfección, y así ha tomado toda esa masa visible, desprovista de todo reposo y quietud, sometida a un proceso de cambio sin medida y sin orden y la ha llevado al orden, ya que estimaba que el orden vale infinitamente más que el desorden»

Platón, *Timeo o de la Naturaleza*

«Sí, del caos salió el mundo. Y todo pueblo cuando está despierto entra en un periodo caótico. Toda esta agitación es anuncio de algo; lo peor sería que nadie se agitara.»

Miguel de Unamuno, *Soliloquios y Conversaciones*

«Es preciso tener un caos dentro de sí para dar a luz una estrella fugaz.»

F. Nietzsche, *Así habló Zaratustra*

«El hombre antiguo parte de un sentimiento de confianza hacia el mundo, que es para él, de antemano, un Cosmos, un Orden. El moderno parte de la desconfianza, de la suspicacia, porque el mundo es para él un Caos, un Desorden.»

J. Ortega y Gasset, *Kant (1724-1924): reflexiones de centenario*

DINÁMICA ECONÓMICA CAÓTICA: UNA APLICACIÓN AL ESTUDIO DEL CICLO Y EL CRECIMIENTO ECONÓMICO.

1. Introducción 1

2. Elementos de la Matemática del Caos (I): Definición de Caos determinista. 21

3. Elementos de la Matemática del Caos (II): El Espectro de Exponentes de Lyapunov y La Dimensión Fractal. 65

4. La Detección del Caos Determinista a partir de Series Temporales (I): El Correlograma, El Periodograma y El Análisis R/S. 109

5. La Detección del Caos Determinista a partir de Series Temporales (II): La reconstrucción del Atractor y Las medidas Invariantes del Caos. 169

6. Dinámica Económica Simple: limitaciones del enfoque tradicional. 229

7. Dinámica Económica Compleja: explicando la irregularidad del crecimiento cíclico económico 277

8. La Detección del caos en las series temporales económicas: Estacionariedad y Test de No-Linealidad 327

9. Análisis de las series temporales de la economía real española. ¿Presenta la evolución observada de la economía un comportamiento caótico?. 375

10. Conclusiones. 453

CAP.1 INTRODUCCIÓN

1.1. Objetivos Generales 2

1.2. Caos y Complejidad 7

Caos: el desorden ordenado 8
¿Qué es la complejidad? 10
Caos determinista y dinámica compleja 12

1.3. Estructura de la Tesis 15

1.4. Agradecimientos 19

CAP.2 ELEMENTOS DE LA MATEMÁTICA DEL CAOS (I). DEFINICIÓN DE CAOS DETERMINISTA

2.1. Concepto y clasificación de los sistemas dinámicos. 22

¿Qué es un sistema dinámico? 22
Sistemas dinámicos en tiempo discreto y en tiempo continuo . . . 23
Sistemas dinámicos autónomos y no-autónomos. 25
Sistemas dinámicos lineales y no lineales (I) 26
Sistemas dinámicos estocásticos y deterministas 27

2.2. La solución de un sistema dinámico 28

Sistemas lineales y no lineales (II):el principio de superposición . 31
Soluciones analíticas y numéricas 32
La representación gráfica de las soluciones 33

2.3. El concepto y tipos de equilibrio dinámico 34

Puntos fijos 35
Ciclos límite 36
Atractores toroidales cuasi-periódicos 37
Atractores extraños 41

2.4. El caos determinista. 42

Dependencia sensitiva a las condiciones iniciales 44
Definición de caos determinista 46
Un ejemplo: La ecuación logística 48

La predicción por analogías de sistemas caóticos 56
La ruta hacia el caos: La duplicación del periodo 58
Caos en el Sentido de Li-Yorke: Periodo Tres Implica Caos 61
Caos en sentido de Ruelle: atractores extraños o caóticos 63

CAP.3 ELEMENTOS DE LA MATEMÁTICA DEL CAOS (II). EL ESPECTRO DE EXPONENTES DE LYAPUNOV Y LA DIMENSIÓN FRACTAL.

3.1. Estabilidad local de los equilibrios dinámicos y el espectro de exponentes de Lyapunov. 66

Estabilidad de los puntos fijos. 66
Estabilidad de los ciclos límite de periodo k. 68
Estabilidad de las órbitas dentro de un atractor extraño: El exponente de Lyapunov 69
Espectro de exponentes de Lyapunov: sistemas *n*-dimensionales . 72

3.2. Atractores extraños y objetos fractales. 75

La dimensión topológica y el problema de la medida de conjuntos geométricos. 76
Dimensión Fractal o de Hausdorff 79
Dimensión por recuento por cajas 81
Los objetos fractales 83
Atractores extraños o atractores fractales 86

3.3. Encuentros con el caos. 87

El atractor de Lorenz 87
El atractor de Rössler 96
El atractor de Hénon. 102

CAP.4 LA DETECCIÓN DEL CAOS DETERMINISTA A PARTIR DE SERIES TEMPORALES (I): EL CORRELOGRAMA, EL PERIODOGRAMA Y EL ANÁLISIS R/S.

4.1. La detección del caos a partir de series temporales: introducción . . 110

¿Cómo diagnosticar la presencia de caos a partir de una serie temporal? 112

4.2. Análisis Gráfico de la evolución temporal 116

4.3. Análisis de las autocorrelaciones lineales en el dominio temporal: El correlograma. 118
La función de autocorrelación simple 118
La función de autocorrelación parcial 119
El correlograma 120

4.4. Análisis Espectral en el Dominio de Frecuencias: La trasformada de Fourier, el espectro de potencias y el periodograma. 123

Fundamentos del análisis espectral: el análisis armónico. 124
Aplicación del análisis armónico a series temporales. 130
Análisis espectral: La transformada de Fourier y el espectro de potencias. 133
Estimación del espectro de potencias con muestras finitas: el periodograma. 134
El periodograma y la detección del caos. 138

4.5. El Exponente de Hurst, Movimientos Brownianos y el Análisis R/S. 146

Movimientos Brownianos y Curvas Fractales Aleatorias 147
Movimientos Brownianos ordinarios: El Ruido Blanco 148
Movimientos brownianos fracionarios 152
El Exponente de Hurst y El Análisis R/S. 157
El análisis R/S y el ciclo medio del ruido. 160
El análisis R/S y la detección de comportamientos caóticos. . . . 161

CAP.5 LA DETECCIÓN DEL CAOS DETERMINISTA A PARTIR DE SERIES TEMPORALES (II): LA RECONSTRUCCIÓN DEL ATRACTOR Y LAS MEDIDAS INVARIANTES DEL CAOS.

5.1. La reconstrucción del atractor a partir de una serie temporal: el método de los retardos. 170

5.2. La determinación del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor 174

5.3. La determinación de la dimensión de inmersión: el porcentaje de falsos vecinos 186

5.4. Teoría ergódica y medidas invariantes del caos. 195

5.5. La estimación del espectro de exponentes de Lyapunov 199

Estimación directa del máximo exponente de Lyapunov: El método de Wolf et al. (1985) 202
Estimación indirecta del espectro de exponentes de Lyapunov: La estimación por redes neuronales 208

5.6. La estimación de la dimensión Fractal 217

La dimensión de correlación 220
La dimensión de información 225
Dimensión de Lyapunov 226
Relación entre la dimensión de Hausdorff, de correlación, de información y de Lyapunov. 226

5.7. Entropía de Kolmogorov y pérdidas de información 227

CAP.6. DINÁMICA ECONÓMICA SIMPLE: LIMITACIONES DEL ENFOQUE TRADICIONAL.

6.1. Dinámica económica y sistemas dinámicos. 231

Hechos estilizados de la dinámica económica. 231
Modelos de dinámica económica, equilibrio económico y equilibrio dinámico. 233

6.2. Dinámica económica simple a largo plazo: Crecimiento Económico 237

Teorías clásicas y modernas del crecimiento económico. 237
Dinámica Keynesiana a largo plazo: El modelo de Harrod-Domar 238
La aportación Neoclásica: modelos de crecimiento exógeno . . . 244
Modelos de crecimiento endógeno 253
Modelos de crecimiento endógeno con tecnología *AK*. 254
Tecnología AK y Capital Humano. 257
Tecnología AK y Capital Público 259
Modelos de crecimiento endógeno con rendimientos crecientes a escala. 261
Externalidades positivas y crecimiento endógeno 261
Modelos de Competencia Imperfecta. 263
Progreso técnico entendido como el aumento del número de bienes de capital disponibles como factores productivos (264). *Progreso técnico entendido como el aumento de la calidad de los nuevos productos* (265).

6.3. Dinámica económica simple a Corto Plazo:
Las Fluctuaciones cíclicas. 265
Teorías del ciclo exógeno 267
Teorías del ciclo endógeno de dinámica simple 271

CAP.7. DINÁMICA ECONÓMICA COMPLEJA: EXPLICANDO LA IRREGULARIDAD DEL CRECIMIENTO CÍCLICO ECONÓMICO

7.1. Dinámica económica caótica en el modelo del ciclo
endógeno de Hicks. 279

La integración del ciclo y el crecimiento económico. 285

7.2. Caos en los modelos neoclásicos de crecimiento 286

Caos a partir del modelo neoclásico de crecimiento de Solow . . 286
Crecimiento cíclico irregular endógeno neoclásico 293
Caos en modelos neoclásicos de crecimiento de óptimo. 294
Caos en modelos de optimización con
horizonte temporal infinito. 296
Caos en modelos de crecimiento óptimo
de generaciones solapadas 299

7.3 Caos y crecimiento cíclico endógeno
evolutivo de tipo Schumpeteriano. 305

7.4 Ciclos, crecimiento y caos:
implicaciones para la política económica 315

CAP.8. LA DETECCIÓN DEL CAOS EN LAS SERIES TEMPORALES ECONÓMICAS: ESTACIONARIEDAD Y TEST DE NO-LINEALIDAD

8.1. La detección de caos determinista a partir de series
temporales económicas: introducción. 328

8.2. Análisis de la estacionariedad de las series temporales 331

El análisis media-desviación típica: la transformación logarítmica332
Tests de raíces unitarias 337
El análisis de la función de autocorrelación simple y
la función de autocorrelación parcial. 343

La extracción del componente cíclico de una serie temporal . . . 344

8.3. Test de No-linealidad 349

Estadístico BDS 351
El test de Kaplan 357
El test ARCH-LM de Engle y el análisis del correlograma de cuadrado de la serie temporal. 362
El análisis R/S como test de No-linealidad 367
8.4. El test residual y el test del barajado. 368

El test Residual de Brock (1986) 369
El test del Barajado de Scheinkman y Lebaron (1989) 370

CAP.9. ANÁLISIS DE LAS SERIES TEMPORALES DE LA ECONOMÍA REAL ESPAÑOLA. ¿PRESENTA LA EVOLUCIÓN OBSERVADA DE LA ECONOMÍA UN COMPORTAMIENTO CAÓTICO?.

9.1. Análisis del crecimiento en la economía española:1850-1999. 379

Extracción del componente cíclico y análisis de estacionariedad 383
Periodograma y correlograma de la serie CLPIBRPC 386
Exponente de Hurst y análisis R/S 387
Filtro Lineal ARMA 389
Test de No-linealidad 390
Reconstrucción del Atractor 393
Dimensión Fractal 395
Exponentes de Lyapunov 400

9.2. Análisis del crecimiento de la economía española durante la segunda mitad del siglo XX: Series trimestrales y mensuales. 403

Extracción del componente cíclico y análisis de estacionariedad 405
Análisis del Peridograma y Correlograma 413
Filtro Lineal ARMA 420
Test de No-linealidad 422
La reconstrucción del atractor 434
Exponentes de Lyapunov 440

CAP.10. CONCLUSIONES.

Sobre el análisis de los fenómenos complejos 453
Sobre el Caos determinista 454
La importancia de ser no-lineal 454
Equilibrios dinámicos y atractors extraños o caóticos 455
Determinismo asintótico y dependencia a las condiciones iniciales 456
Sobre la emergencia de complejidad dinámica en economía . . . 457
Sobre las implicaciones del caos determinista para la política económica 459
Sobre la detección del caos en las series temporales económicas 463

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS. 467

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

En sus orígenes, la palabra *caos*[1] sirvió en las cosmologías antiguas para designar al estado de completo desorden anterior a la formación del mundo, un abismo abierto, un espacio tenebroso, el conjunto mismo de aquellas cosas arrojadas en desorden en el espacio antes de su organización en cosmos (Abbagnano, 1963, pp.141 y Foulquié, 1966, pp.113). Posteriormente, y por analogía, el caos ha servido para referirse a la completa falta de forma u organización sistemática, a una situación de confusión y desorden. A partir de la década de los sesenta surge una nueva acepción para el caos en el ámbito de un todavía joven campo de conocimiento que ha venido a denominarse *teoría o matemática del caos*[2]. Esta teoría del caos está constituida por todo un conjunto de técnicas matemáticas que sirven para estudiar el comportamiento de procesos que, aparentemente, se comportan de forma aleatoria, aperiódica y carente de toda regularidad, aunque de hecho, su desarrollo está determinado por reglas bien precisas, es decir, por leyes deterministas. El objetivo de esta tesis es aplicar las técnicas y herramientas de la matemática del caos al estudio de la dinámica del ciclo y el crecimiento económico.

[1] Del latín *chaos*, y éste del substantivo griego *χάως*, abertura.

[2] La primera vez que se utilizó la palabra *caos* para referirse a esta parcela de conocimiento fue en el artículo de Li y Yorke (1975):. «Period Three Implies Chaos». Posteriormente, esta denominación se afianzó con la publicación del *best-seller* de James Gleick, *Chaos: making a new science*.

1.1 Objetivos generales

La Economía como Ciencia se ha planteado desde sus inicios el propósito de comprender como funcionan los diversos fenómenos socio-económicos de la realidad. Con ello se pretende la sistematización de dichos fenómenos para poder realizar predicciones sobre su evolución futura, elaborar diagnósticos sobre la realidad económica, y proponer medidas con fundamento teórico para alterarla o corregirla cuando ésta resulta insatisfactoria.

Una de las características típicamente observada en la mayoría de series económicas es la presencia de oscilaciones más o menos irregulares, de carácter recurrente pero aperiódicas, de amplitud acotada y –sobre todo en las series reales– acompañadas de una tendencia subyacente de crecimiento. Dentro de la Ciencia Económica, el análisis de estas propiedades se ha llevado a cabo en el ámbito de la dinámica económica, esto es, del estudio sistemático del cambio económico y de las fuerzas que lo generan. Esta dinámica económica trata de explicar o determinar cómo se produce el cambio de las variables económicas –producción, consumo, empleo, precios, bienestar, ...–, por qué ocurren esos cambios y cómo pueden ser controlados o modificados.

En esta tesis nos centramos en el cambio de la dimensión de la economía, es decir, en la dinámica de la actividad económica, del nivel de renta o producción de una economía, tanto a corto como a largo plazo, esto es, lo que ha venido a denominarse como la dinámica del ciclo y el crecimiento económico.

El análisis tradicional de esta dinámica económica ha partido –salvo destacables excepciones como la aportación de Joseph Alois Schumpeter al estudio integrador del ciclo y el crecimiento económico–, de la división de este fenómeno tratando de estudiar, por una parte, los factores que determinan la tasa media de crecimiento tendencial a largo plazo *–teorías del crecimiento económico–*, y por otra, los que explican la aparición de fluctuaciones a corto plazo entorno a esa tendencia media de crecimiento *–teorías del ciclo económico–*.

Situándonos en el ámbito de la denominada teoría del crecimiento económico, las diferentes aportaciones tratan de encontrar cuáles son los factores explicativos determinantes en última instancia del crecimiento tendencia a largo plazo de la renta per cápita de las economías. Según el enfoque doctrinal utilizado en la construcción de los distintos modelos de crecimiento, cada una de las aportaciones encontrará o se centrará en distintos determinantes básicos del crecimiento medio de la economía. En el terreno normativo, según el enfoque considerado, se desprenderán, por tanto, distintas recomendaciones de política económica con las que tratar de mejorar el

crecimiento medio de las economías[3]. Así, dejando a parte la teoría clásica y postkeynesiana, mientras el modelo de Harrod-Domar presenta situaciones de equilibrio inestables que justifican la adopción activa de políticas de demanda de corte keynesiano, las aportaciones neoclásicas del crecimiento exógeno permiten deducir las condiciones necesarias para alcanzar un equilibrio estable en el que se elimina la necesidad de intervención pública mediante políticas estabilizadoras. Bajo este enfoque, sólo aquellas políticas de oferta que mejoren la productividad global de la economía tendrán efectos positivos sobre el crecimiento a largo plazo –políticas de competencia, flexibilización del mercado de trabajo, reforma del sistema financiero, políticas educativas, tecnológicas, de infraestructuras, etc.–. En ambos modelos, sin embargo, las tasas de crecimiento a largo plazo vienen dadas de forma exógena a la propia dinámica del modelo –*modelos de crecimiento exógeno*–, determinadas, básicamente, por la tasa de crecimiento de la población y por el progreso tecnológico o mejoras en la productividad global de la economía.

Por otro lado, los *modelos de crecimiento endógeno* complementan a los anteriores explicando la existencia de crecimiento positivo sin necesidad de recurrir a factores exógenos. Sin duda, los distintos modelos de crecimiento endógeno han servido para comprender mejor el proceso de crecimiento, y al determinar explícitamente cuales son las fuentes del mismo, han proporcionado las bases sobre las que fundamentar políticas encaminadas a mejorar el crecimiento económico a largo plazo. Podemos citar, brevemente, entre ellas: la consideración y el fomento del capital humano –educación, formación

[3] Como consecuencia de la incapacidad de esta teoría del crecimiento para de explicar la situación de los países en vías de desarrollo, y para tratar de dar respuesta a la gran dificultad que encuentran estos países para salir de su situación de atraso, surgen de manera paralela distintas aportaciones que han venido a englobarse bajo la denominación de *Teoría del Desarrollo*. El desarrollo económico implica algo más que crecimiento. Implica la mejora en los niveles de vida y en el nivel de bienestar en un sentido amplio. Es decir, el nivel de desarrollo de un país depende no sólo de su renta per cápita, sino también de otros factores como la distribución de la renta, la salud, la nutrición, la educación, la vivienda, la disponibilidad de puestos de trabajo, las mejoras en el medio ambiente, ... Sin embargo, tradicionalmente se ha pensado que el crecimiento económico, es decir, el aumento en los niveles de producción y renta per cápita, al proporcionar mayores recursos económicos, puede ayudar a solucionar muchos de los problemas asociados a los países en vías de desarrollo: pobreza generalizada, estructuras sanitarias y sistemas educativos deficientes, etc., así como otros factores de carácter más social como la dignidad, la autoestima y el respeto humano –asociados muchas veces al nivel de renta y a sus comparaciones internacionales–. Igualmente, el crecimiento de la renta media permite aumentar el margen de posibilidades de elección, ya que un crecimiento de la renta y la producción, cuando se ve acompañado de situaciones de competencia, supondrá una mayor variedad de productos y también una mayor margen de posibilidades de elección entre trabajo y ocio –para aumentar el consumo de bienes y servicios o para negar estos deseos materiales y dedicarse a la vida contemplativa–. Así, pese a que pueden darse situaciones de crecimiento sin desarrollo o también de desarrollo sin crecimiento –por la simple reasignación de recursos que atienda a un objetivo más social y no meramente aumentar la producción–, en esta tesis nos centraremos únicamente en el análisis del ciclo y el crecimiento económico. Para un análisis de las principales teorías del desarrollo económico véase Thirlwall (1994) y Ghatak (1995). Para una aplicación de la matemática del caos al estudio de desarrollo económico véase Day (1999, pp. 157-323).

continua, etc.– y el capital público –infraestructuras públicas en transporte, comunicación, etc.–; el fomento de las externalidades positivas –*learning by doing*, efectos desbordamiento– y de las actividades de I+D.

Todos estos modelos de crecimiento se enfrentan, entre otras limitaciones, a su incapacidad para explicar las fluctuaciones que acompañan al crecimiento en su evolución temporal. Esta limitación proviene del encorsetamiento al que se ha sometido tradicionalmente a estos modelos en su formulación, esencialmente lineal, remitiendo su análisis únicamente al estudio de soluciones dinámicas del tipo *punto fijo*, es decir, una única solución estable que implica una tasa de crecimiento constante a largo plazo.

Esta manera de enfocar el estudio del crecimiento económico ha generado la necesidad de recurrir a otros modelos que, de forma separada a la dinámica a largo plazo, traten de explicar el por qué se producen oscilaciones cíclicas de la actividad económica entorno a las tendencias medias de crecimiento a largo plazo. Surgen así las teorías del ciclo económico.

Al igual que con el crecimiento, existen diferentes enfoques doctrinales que encuentran el origen de las fluctuaciones en diversos factores exógenos y endógenos a la propia dinámica de la economía y que han servido para justificar o no el papel activo de la política económica. Las primeras aportaciones en cuanto a la explicación del ciclo utilizan formulaciones no-lineales de la dinámica económica que permiten explicar la existencia de oscilaciones cíclicas regulares de tipo sinusoidal en la actividad económica que se derivan de forma endógena como consecuencia del propio funcionamiento de la economía –*modelos del ciclo endógeno*–. Precisamente la elevada regularidad de estas soluciones hizo que se rechazasen estos modelos para explicar el ciclo económico al ser dichos cíclicos incompatibles con los observados en las economías reales –aperiódicos, irregulares, asimétricos y escasamente predecibles–. Surgen así los *modelos del ciclo exógeno*, en los que el mecanismo generador del ciclo se supone que viene determinado de forma exógena a la propia dinámica de la economía, tomando la forma de shocks o perturbaciones exógenas de carácter puramente aleatorio que de forma recurrente bombardean a la economía y que posteriormente se trasladan o propagan al conjunto de la actividad económica mediante diversos mecanismos de propagación. Precisamente los distintos modelos del ciclo exógeno se diferencian en la distinta naturaleza de las perturbaciones aleatorias y de los mecanismos de propagación.

En cualquier caso, los modelos tradicionales del ciclo económico, pueden calificarse como de *modelos deterministas de dinámica simple* ya que requieren de la introducción de factores estocásticos exógenos para la explicación del comportamiento irregular, errático e impredecible que exhiben la gran mayoría de las series temporales económicas.

Frente a este análisis tradicional del ciclo y el crecimiento económico, la utilización de sistemas dinámicos de *caos determinista*[4] para la modelización de la dinámica económica permite, por un lado, la integración del análisis de la dinámica a corto y largo plazo, esto es del crecimiento cíclico de las economías, y por otro, explicar de forma endógena su irregularidad, aperiodicidad y escasa predicibilidad *–modelos deterministas de dinámica compleja–*.

En esta tesis tratamos de explotar esta vía de análisis del ciclo y el crecimiento económico. Trataremos de exponer cómo es posible generalizar los modelos tradicionales del ciclo y el crecimiento económico para que de ellos se deriven soluciones caóticas de dinámica compleja. Sin duda, quedaría pendiente la justificación de la utilización de este tipo de modelos desde el punto de vista empírico. Es por ello que repasaremos cuales son los distintos test para la detección de caos determinista, tratando de proporcionar una guía con la que dirigir el análisis empírico de las series temporales para tratar de encontrar algún tipo de evidencia a favor de la existencia de no-linealidades y comportamientos caóticos frente a la hipótesis tradicional que sostiene que el origen del ciclo se debe a perturbaciones puramente aleatorias. Apoyaremos estas técnicas con una aplicación al caso de las series temporales de la economía española. Los resultados de éste y otros análisis empíricos aun no son concluyentes. A pesar de ello, pensamos que la consideración de este tipo de sistemas dinámicos de caos determinista en el estudio teórico de fenómenos como el ciclo y el crecimiento, al aumentar el rango de posibles comportamientos que desde el punto de vista cualitativo pueden presentar estos sistemas en su evolución temporal, suponen sin duda un paso adelante en el conocimiento de la realidad económica.

El motivo por el que hemos decidido aplicar las herramientas de la matemática del caos al estudio de la dinámica del ciclo y el crecimiento económico se encuentra, precisamente en la posibilidad que ofrecen para explicar endógenamente la complejidad dinámica observada en la mayoría de series temporales económicas. Así, frente al análisis tradicional que para explicar esa aperiodicidad e irregularidad de la evolución temporal de las economías reales requiere de la utilización de factores exógenos puramente aleatorios, en esta tesis pretendemos mostrar cómo la utilización de sistemas dinámicos no lineales en régimen de comportamiento caótico para la modelización cualitativa de la dinámica económica, no sólo impone menos restricciones que el análisis tradicional, sino que permite explicar de forma endógena a través de modelos perfectamente deterministas, el comportamiento irregular, aperiódico y escasamente predecible observado en la evolución de las economías reales.

---

[4] Para una introducción a la teoría del caos sin excesivos formalismos véase Stewart (1991), Gleick (1994), Lorenz (1995), Prigogine (1997), Nieto de Alba (1998) y Escohotado (1999). Para un análisis de las posibilidades de aplicación de la matemática del caos a la economía véase Fernández Díaz (2000).

Antes de continuar con nuestra exposición, pensamos que es necesario aclarar dos cuestiones. En primer lugar, que la posibilidad de explicar de forma endógena la irregularidad observada en la evolución de la actividad económica, no quiere decir que nosotros apostemos por la inexistencia de fuerzas exógenas que perturben a las economías reales con shocks puramente aleatoros. Lejos de esta postura reduccionista, pensamos que dichos shocks exógenos existen, pero dichas perturbaciones son compatibles con un posible comportamiento caótico de la economía. Nuestro enfoque quiere poner de manifiesto la posibilidad de explicar mediante modelos deterministas estructuralmente simples, comportamientos altamente complejos. Modelos con los que es posible reproducir algunas propiedades cualitativas observadas en la evolución de las series temporales económicas. Y todo ello, sin la necesidad de recurrir a variables exógenas. Estos modelos de dinámica caótica serán analizados en los próximos capítulos. Comprobaremos entonces, que dichos modelos resultan más generales que los utilizados por el enfoque tradicional, ya que con ellos podrán representarse comportamientos no sólo simples sino también de dinámica compleja. Ello no implica, tampoco, que apostemos por una falsa creencia en que el sistema económico sea un sistema estructuralmente simple. Por el contrario, el sistema económico es complejo, esto es, con elevados grados de libertad –multitud de agentes interactuando e interaccionando entre sí de manera auto-organizada–, que resulta, en la práctica, imposible de estudiar si no es mediante supuestos simplificadores o recurriendo a la teoría de la probabilidad. Con nuestro enfoque defendemos, únicamente, que la simplificación necesaria para profundizar en el comportamiento de la economía no implica necesariamente soluciones dinámicamente simples.

En segundo lugar, que la teoría del caos, o como reza el título de esta tesis la dinámica económica compleja, no constituye en sí una nueva doctrina de pensamiento económico a modo de alternativa totalmente alejada e independiente de las tradicionales neoclásica, keynesiana, monetarista, neokeynesiana, etc. Por el contrario la teoría o matemática del caos constituye simplemente un conjunto de herramientas que se encuentran a disposición de los economistas para ser utilizadas en el estudio del fenómeno económico. Los modelos de dinámica económica compleja tienen su fundamento tanto en el uso de la matemática del caos, como en los supuestos de carácter económico característicos de cada escuela de comportamiento. Desde este punto de vista, la matemática del caos ayuda a la unión de las distintas doctrinas de la misma forma que lo hace el uso del cálculo diferencial por todas ellas. El uso de la matemática del caos permite, simplemente, una modelización más genérica. Sin embargo, como ya se ha apuntado, el fundamento teórico para crear modelos caóticos deterministas de dinámica económica compleja se encuentra en las distintas aportaciones de la dinámica económica tradicional. Es por ello que estos modelos de dinámica caótica deben considerarse como una generalización de las aportaciones tradicionales al estudio del ciclo y el crecimiento económico.

No pretendemos defender, por tanto, la tesis de que la evolución de las

economías reales pueda describirse perfectamente por ninguno de los modelos de dinámica económica caótica que presentaremos más adelante. Tan sólo queremos mostrar cómo con el uso de la matemática del caos es posible representar y explicar de forma endógena, con modelos no-lineales estructuralmente simples o de baja dimensión, ciertas propiedades cualitativas observadas en la evolución de las economías reales. Las soluciones a estos modelos difieren cuantitativamente de las series macroeconómicas reales, es decir, estos modelos, aunque son capaces de explicar de manera endógena ciertas propiedades cualitativas observadas en las series temporales económicas –crecimiento cíclico irregular–, parecen ser excesivamente simples como para poder recoger la verdadera dinámica de la economía. Por eso, lo único que pretenden estos modelos es mostrar la posibilidad de que los modelos tradicionales empleados para la explicación del ciclo y el crecimiento económico pueden generalizarse, a través de la introducción de no-linealidades, para que presenten comportamientos caóticos y, con ello, poder explicar no sólo la existencia de ciclos endógenos, sino también de dinámica compleja sin la necesidad de introducir variables aleatorias exógenas. En palabras de Richard Goodwin –uno de los primeros autores en destacar la importancia del uso de sistemas no-lineales y en régimen de comportamiento caótico para la modelización de la dinámica económica: «...como todos sabemos, las series económicas temporales son altamente erráticas; así que nosotros debemos, me parece, tomar con seriedad estas nuevas líneas de investigación. Debería recordarse que el análisis probabilístico es una confesión de ignorancia parcial» (Goodwin, 1996, p.18).

1.2 Caos y complejidad

Esas nuevas líneas de investigación que menciona Goodwin hacen referencia a los modernos desarrollos englobados bajo la Teoría o Matemática del Caos, considerada por muchos autores como la gran revolución científica de finales del siglo XX, comparando sus efectos renovadores en el caso particular de la Física, con los introducidos por la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica (Fernández Díaz, 1994, pp 15-24).

Dicha revolución ha sido posible gracias a su aceptación y asimilación por el conjunto de colectividad científica, fundamentalmente en el terreno de las ciencias de la naturaleza –física, química, astronomía, meteorología, biología, etc.[5]–. Precisamente una de las características fundamentales de esta teoría o matemática del caos es la gran generalidad de situaciones en las que es posible observar comportamientos caóticos deterministas –la *ubicuidad del caos*

[5] Una amplia muestra de estas aplicaciones se puede encontrar en Hall (1991).

(Lorenz, 1995, pp.149-154)–. Así, aunque las primeras aportaciones en este ámbito surgieron en la física, las herramientas de la matemática del caos pronto pasaron ha a aplicarse a todas las ramas o parcelas de la ciencia. Podríamos afirmar incluso que la matemática del caos ha traspasado las fronteras puramente científicas instalándose en el conocimiento general de la sociedad –elementos de la teoría del caos como el *efecto mariposa*, los *atractores extraños*, y los *objetos fractales* han sido ya popularizados a través de diversas obras de arte, novelas y películas de cine–.

La teoría del caos determinista nació como un nuevo paradigma científico con el que se esperaba unificar las complejidades de todos los campos de la ciencia. Esta aspiración se ha quedado en una utopía. Siendo menos ambiciosos, deberíamos hablar de la matemática del caos como un conjunto de herramientas, incluidas dentro de la dinámica no-lineal, que permite explicar ciertas irregularidades o complejidades, quedando inmersa dentro de una familia más amplia de herramientas para el estudio de fenómenos complejos[6].

Caos: el desorden ordenado

La teoría del caos pretende encontrar cierto *orden* –cierta regularidad– dentro del *desorden*, dentro del caos en su acepción tradicional, esto es, dentro de la completa falta de forma o de organización sistemática, de situaciones de confusión y desorganización. Para hablar de la teoría del caos, quizás deberíamos empezar por preguntarnos que entendemos por *orden*. Todo apunta a que el concepto de orden frente al de caos, más que ser una propiedad intrínseca del fenómeno objeto de estudio, es una característica que el observador le atribuye al objeto observado. Dicha condición de orden se atribuye a un objeto, fenómeno o situación, cuando el observador dispone de una serie de puntos de referencia adecuados para los fines que éste persigue, una cierta forma de ver el fenómeno que le permite sistematizarlo, comprenderlo y explicarlo –ordenarlo–. El orden estará siempre asociado a algún criterio ordenador, poseyendo, por tanto, un carácter subjetivo dependiente del observador: «El concepto de orden es siempre un intento de poner unidad y articular relaciones en una multiplicidad de elementos, sea tal unidad inherente a las cosas mismas o bien provenga de nuestra forma de pensar»(Sabater, 1999, p.128).

Desde este punto de vista, se podría afirmar que el propósito que persigue el conocimiento científico es el de encontrar aquellas leyes o relaciones causales –ya sean de alcance general o de carácter específico– que permitan ordenar los fenómenos de la realidad –esta concepción de la ciencia responde

[6] Para el papel que ha desarrollado la teoría del caos en el estudio de la complejidad véase Rosser (1999).

a lo que podríamos denominar como de determinismo causal[7]–. Pues bien, con la teoría o matemática del caos se ponen a disposición del observador que pretende ordenar la realidad –del científico– un nuevo conjunto de herramientas que le dotan de un nuevo criterio ordenador que permite explicar ciertas regularidades observadas y que previamente sólo podían ser tratadas de manera estadística.

La cuestión de cuándo el uso de este nuevo criterio ordenador, es mejor que el tradicional estadístico o probabilístico nos lleva a la cuestión metodológica de la evolución del conocimiento científico. En principio, si con la matemática del caos podemos perfeccionar nuestro conocimiento sobre el comportamiento de ciertos fenómenos –mejorando la predicciones obtenidas usando las técnicas tradicionales de análisis–, entonces ¿por qué no incorporarla al conjunto de herramientas que utilizamos para el estudio de la realidad socio-económica?.

A pesar de que con la matemática del caos ha sido posible explicar y mejorar las predicciones sobre una gran generalidad de fenómenos de la naturaleza, existen todavía muchas reticencias para ser utilizada, o mejor, para ser incorporada plenamente en el dominio de las ciencias sociales, y en particular dentro de la economía (Rosser, 1999, p.170). Quizás estas reticencias vengan abonadas por las críticas a las primeras aportaciones en el campo de la economía dinámica caótica, en las que se incorporan supuestos ciertamente ad-hoc sobre el comportamientos de los agentes, sin fundamentación económica y poco plausibles desde el punto de vista de la realidad[8], y porque en el día de hoy aún no existe evidencia clara a favor de la presencia de comportamientos caóticos en las series temporales económicas. Esta tesis pretende acercar este aún joven campo de conocimiento a la ciencia económica para su estudio del fenómeno del ciclo y el crecimiento, mostrando la gran generalidad de situaciones en las que puede ocurrir el caos [9].

---

[7] Frente a éste, se encontraría el indeterminismo causal según el cual debe reconocerse de manera explicita la existencia de cierto componente aleatorio desconocido en las relaciones de causalidad. En una postura más extrema, el indeterminismo causal niega la posibilidad de que existan dichas leyes –sencillamente no existen relaciones de causalidad–.

[8] Algunas de las primeras aplicaciones trataban simplemente de trasladar los modelos de la Física y otras disciplinas a la Economía. No se partía de una fundamentación económica, sino que más bien se trataba de buscar una posible interpretación económica a modelos de la física y otras ciencias de la naturaleza. Estos modelos, que han tratado de englobarse bajo un nuevo enfoque denominado *econofísica*, son los que con un mayor rechazo se han criticado.

[9] Tras una primera etapa a mediados de los años ochenta en la que aparecieron gran cantidad de aplicaciones del caos determinista al estudio de la dinámica económica, el número de aportaciones sobre esta materia se frenó a partir de la década de los noventa. Afortunadamente, a nuestro entender, el ritmo de publicaciones en este ámbito parece haberse acelerado en estos últimos años, retomándose así, con una base renovada –mejor fundamentación microeconómica de los modelos y nuevos y más potentes test para la detección de caos a partir de series temporales–, las posibilidades que ofrece la matemática del caos al estudio del ciclo y el crecimiento económico.

¿Qué es la complejidad?

Como comentábamos anteriormente, la teoría del caos determinista constituye una de las herramientas disponibles para acometer el estudio de los fenómenos complejos. En esta tesis partimos de la proposición inicial de que la economía es un sistema complejo y que su comportamiento es igualmente complejo. La matemática del caos puede, por tanto, utilizarse para ordenar y clarificar dicha complejidad, fundamentalmente la que hace referencia al comportamiento dinámico del fenómeno económico. En general, cuando se habla de sistemas complejos se hace referencia a lo que podríamos denominar como *complejidad estructural*, o número de grados de libertad o elementos fundamentales que componen el sistema. En realidad, existen distintas formas de entender la complejidad.

Atlan (1991, pp.22) identifica tres tipos básicos de complejidad: la complejidad algorítmica, la complejidad probabilística y la complejidad natural o de comprensión. La primera hace referencia a la complejidad en la formalización y el diseño de una máquina programada para cumplir una determinada tarea. Esta complejidad algorítmica es cuantificable. La medida de complejidad viene dada por el tiempo necesario de cálculo para resolver un problema, o mínimo número de instrucciones de un programa en la máquina de Turing –Ordenador Ideal– para realizar una tarea. La segunda hace referencia al grado de ignorancia explicativa, a la incertidumbre probabilística –por carencia de información o imposibilidad práctica de su tratamiento sistemático– dentro de una estructura observada. También es cuantificable a través de la probabilidad como medida de la incertidumbre. La tercera, la complejidad natural o de compresión, representa más una intuición, no cuantificable, sobre nuestra dificultad para comprender una exposición, una idea –la teoría del caos está vinculada fundamentalmente a esta forma de entender la complejidad–.

Desde otra perspectiva, Waldrop (1992, pp.9-13) define los sistemas complejos como aquellos que poseen las siguientes tres propiedades a la que nosotros añadimos una cuarta:

1) *Auto-organización* –estos sistemas pueden estar compuestos por muchas partes, pero siempre organizadas de forma espontánea–

2) *Adaptabilidad* –existe un proceso de adaptación o ajuste entre el sistema y su entorno–

3) *Retroalimentación* –los sistemas complejos son esencialmente dinámicos en el sentido de que su estado presente va a estar necesariamente influido por lo que le haya ocurrido en el pasado–

4) *No-linealidades* –son sistemas a los que no se les aplica el principio de superposición: el todo es más que la mera suma de las partes–

Estas cuatro *regularidades* de los sistemas complejos son el objeto de estudio de lo que ha venido a denominarse ciencia de la complejidad (véase Rosser, 1999), en la que se sostiene que la complejidad no proviene de factores exógenos al sistema, sino que emerge de forma endógena del propio comportamiento o funcionamiento del mismo. Los sistemas complejos están gobernados por un gran número de fuerzas interaccionando entre sí, con la propiedad de autoorganización espontánea y adaptabilidad, es decir, que no se limitan únicamente a responder a los sucesos de forma pasiva, sino que por el contrario tratan activamente de adaptarse a esos sucesos para poder tomar ventaja de los mismos. Por último los sistemas complejos poseen un tipo de retroalimentación temporal que los hace cualitativamente diferentes de los objetos o fenómenos estáticos que son simplemente complejos como un ordenador o un chip[10]

El estudio de estos sistemas complejos se ha realizado tradicionalmente a través de modelos que incluían componentes estocásticos, es decir, considerando que los sistemas lineales en equilibrio estático estaban sujetos a perturbaciones puramente aleatorias. La matemática del Caos supone una posible vía alternativa para el estudio de comportamientos complejos junto a otros instrumentos como la *teoría de las catástrofes* de Rene Tom –que tuvo cierta profusión en la economía sobre todo en la década de los 70 y 80– y la teoría de la *sinergia* –que aunque todavía ha sido escasamente utilizada en economía puede constituir un importante instrumento para el análisis dinámico de sistemas en el que coexisten multitud de subsistemas interaccionando de manera cooperativa pero no deliberada creando así una autoorganización no-lineal del sistema (véase Gandolfo 1997, p. 535) [11]–.

---

[10] Un ejemplo económico serían los mercados, constituidos por un gran número de agentes interaccionando –oferentes y demandantes– bajo ciertas restricciones –normas o reglas que condicionan las decisiones de los agentes que intervienen en el mercado– que adquieren una autoorganización. Los mercados responden de manera activa ante cambios en los estilos de vida, preferencias de los consumidores, las dotaciones de factores productivos, nuevos desarrollos tecnológicos, la estructura de costes, de forma que son capaces de adaptarse y crear nuevas estructuras o sistemas autoorganizados.

[11] La teoría de la sinergia ha sido aplicada en economía para estudiar los rendimientos crecientes a escala. Las propias fuerzas el mercado hacen que la economía se autoorganice haciendo uso de los rendimientos crecientes. Para aclarar el origen de esa autoorganización podemos utilizar el siguiente ejemplo (Waldrop, 1992, pp.45-46). Un agente debe afrontar la decisión de comprar un automóvil entre dos posibilidades A y B que le resultan completamente indiferentes. Sus decisiones se basan entonces en cuestiones de confianza o de costumbre. Sus decisiones podrían tomarse, por ejemplo, preguntando a otros agentes conocidos que les merecan confianza. Si se diese la casualidad de que al preguntar, supongamos, a tres agentes y dos de ellos se hubiesen comprado el A, seguramente él se decidirá ha comprar esta marca. En el mercado entonces habrá un usuario más de A que en caso de ser preguntado promocionará también su compra. Habrá más posibilidades, por tanto, de que un nuevo consumidor, tras las oportunas consultas, se compre un automóvil tipo A, aunque inicialmente haya el mismo número de usuarios del A que del B. Existen unos rendimientos crecientes que pueden traducirse en la implantación en todo el mercado del automóvil del tipo A. El enfoque

Caos determinista y dinámica compleja

En adelante nos referiremos a la complejidad de un sistema en el sentido de comportamiento complejo, esto es, cuando su evolución sea irregular, aperiódica, asimétrica, sin que aparentemente siga una pauta o regla precisa en su evolución, es decir, presente *dinámica compleja*. La teoría del caos trata precisamente con sistemas sencillos hablando en sentido estructural –con pocos grados de libertad–, pero que presentan un comportamiento altamente irregular y aperiódico –caos de baja dimensión–. En esta tesis estaremos especialmente interesados en analizar cómo a través de leyes de movimiento sencillas, aunque no-lineales, se pueden representar comportamientos complejos y sin la necesidad de introducir ningún componente aleatorio. Esta es una de las propiedades de la matemática del caos que queremos explotar en nuestra aplicación al estudio del ciclo y el crecimiento económico. El caos permite estudiar fenómenos con comportamiento complejo que sin embargo siguen leyes deterministas sencillas.

Los sistemas caóticos se caracterizan porque en su evolución sigue un comportamiento oscilatorio acotado irregular, aperiódico y escasamente predecible. La consideración de estos sistemas caóticos supone una ruptura frente a la visión tradicional de los sistemas dinámicos deterministas. Hasta la aparición del caos, y debido a la regularidad que alcanzaban las soluciones en equilibrio de los sistemas dinámicos conocidos –lineales o linealizables–, era necesaria la superposición de comportamientos puramente estocásticos a esos sistemas deterministas para poder explicar la complejidad e irregularidad observada en la evolución temporal de multitud de fenómenos dinámicos.

Esa dualidad tradicional entre los sistemas deterministas y los sistemas estocásticos ha quedado rota con la consideración de los sistemas caóticos[12]. Los sistemas en régimen de comportamiento caótico se sitúan en una posición intermedia, haciendo necesaria la distinción, dentro del ámbito puramente determinista, de los sistemas deterministas de *dinámica simple* frente a los que exhiben *dinámica compleja* (Day 1994, pp. 19). La dinámica simple será aquella que converge a comportamientos cíclicos regulares y puede considerarse como simple porque puede caracterizarse perfectamente por un número finito de valores que se repiten de forma periódica a intervalos fijos de tiempo. La dinámica compleja será aquella que converge a comportamientos cíclicos irregulares y aperiódicos sin necesidad de introducir componentes estocásticos –caos determinista–.

---

tradicional neoclásico no considera este tipo de situaciones. La teoría sobre la competencia imperfecta y el análisis de los problemas derivados de la falta de información, los modelos de racionalidad acotada –*bounded rationality*–, y los distintos enfoques de la *economía evolutiva* –*evolutionary economics*– permiten un estudio riguroso de esas situaciones de economías a escala y autoorganización. Véase Krugman (1996).

[12] Sobre el papel de los sistemas caóticos en la ruptura de la polémica determinismo vs. indeterminismo véase Prigogine (1997) y Fernández Díaz (1995).

Este cambio de paradigma ha requerido, entre otros factores, el abandono de la hipótesis de linealidad heredada de la tradición mecanicista de la época de Newton (S. XVIII). Este cambio de paradigma implica un cambio en el objeto de estudio. Se pasa a estudiar el todo, después de muchos años donde la preocupación fundamental era estudiar las partes más simples y pequeñas por separado con el pensamiento de que ello conduciría a un mejor conocimiento del propio sistema. Detrás de esa forma de proceder se encontraba la postura reduccionista de la linealidad y el *principio de superposición:* el todo es igual a la suma de las partes. Los sistemas deterministas o estocásticos utilizados tradicionalmente para representar la realidad se restringen en la mayoría de los casos a especificaciones estructurales esencialmente lineales.

Este enfoque lineal legitima, por el principio de la superposición, el estudio aislado de cada uno de los elementos del sistema por separado bajo la cláusula *ceteris paribus*. Una vez comprendido el funcionamiento de cada uno de esos elementos esenciales del sistema, se derivará automáticamente el comportamiento agregado del mismo, ya que éste vendrá perfectamente determinado por la superposición lineal de cada uno de ellos. Bajo esta postura, y fundamentalmente desde la ortodoxia neoclásica, se ha llegado con un alto grado de formalismo matemático a un considerable avance en la comprensión del fenómeno económico. Ese formalismo no ha conseguido, sin embargo, un entendimiento exacto de la realidad económica. Es más, recordando el carácter normativo o finalista que inevitablemente posee la ciencia económica, no se ha conseguido solucionar muchos de los problemas que todavía hoy amenazan el bienestar de los pueblos –pobreza, paro, desigualdades, etc.–.

Los fenómenos complejos son fenómenos esencialmente no-lineales, esto es, que rechazan la validez del principio de la superposición. El todo es algo más que la mera suma de sus partes. El comportamiento global de un sistema se determina por la interacción no-lineal de los comportamientos individuales de cada uno de sus componentes. El estudio aislado de los elementos esenciales de un sistema no mejora necesariamente el conocimiento del sistema en su conjunto[13]. Para ello será necesario considerar de forma explícita la relación no-lineal entre el todo y sus partes Esas partes estás interconexionadas, y se establece una retroalimentación o *feedback* no-lineal entre cada una de esas partes y el todo. La matemática del caos puede utilizarse para estudiar fenómenos de dinámica compleja, por lo que ha de tener en cuenta esta no-linealidad, es decir, debe incluirse dentro de lo que podríamos denominar dinámica económica no-lineal.

[13] Quizás en esta no-linealidad reside la gran dificultad a la que se enfrenta la economía a la hora de tratar de ir desde el comportamiento microeconómico del agente individual al comportamiento macroeconómico –problemas de la agregabilidad y separabilidad–. Este problema de la fundamentación microeconómica del comportameinto macroeconómico sólo ha podido solucionarse bajo el paradigma lineal mediante la introducción de supuestos extremos como el del agente representativo.

Como ya se ha comentado, la evolución futura de los fenómenos de dinámica compleja resultan en la práctica de difícil predicción. Un rasgo diferenciador de los sistemas caóticos es la propiedad conocida como *dependencia sensitiva a las condiciones iniciales*. Un sistema dinámico presentará esta propiedad cuando dos órbitas cuya evolución venga gobernada por dicho sistema pero que partan de situaciones iniciales diferentes aunque arbitrariamente próximas, nunca convergerán en su comportamiento. Es más, estas dos órbitas tenderán a alejarse en su comportamiento a un ritmo exponencial.

La implicación inmediata de esta dependencia a las condiciones iniciales es la incapacidad práctica de realizar cualquier tipo de predicción ajustada sobre la evolución futura de un sistema caótico más alla del corto plazo. La previsión sobre el futuro de un sistema requiere medir de alguna forma el estado del mismo en el instante a partir del cual se desea realizar la proyección. Cuando nos enfrentamos a un sistema caótico, debido a la dependencia respecto a las condiciones iniciales, cualquier desviación o error de medida se traducirá en evoluciones futuras del sistema totalmente distintas a las previsiones incluso cuando el modelo estructural que define al sistema sea perfectamente conocido. Estamos, por tanto, ante sistemas deterministas que exigen para una perfecta predicción un grado de conocimiento del sistema infinitamente exacto. Nos encontramos de nuevo ante la ruptura del dualismo tradicional entre sistemas deterministas y estocásticos, situándose el caos determinista en una posición intermedia. Haciendo referencia a la visión tradicional del determinismo, podríamos calificar entonces a los sistemas caóticos, haciendo uso de las palabras del profesor Fernández Díaz, como de asintóticamente deterministas, debido precisamente a esa necesidad de conocimiento del estado del sistema con exactitud infinita para poder determinar de forma exacta la evolución futura del sistema

Hasta la aparición de la matemática del Caos, el único instrumento disponible para estudiar los sistemas con comportamiento complejo irregular y escasamente predecible era la teoría de la probabilidad –la complejidad se suponía que venía determinada de forma exógena por algún tipo de proceso estocástico, lo que explicaba también la falta de predicciones precisas pora esos sistemas con comportamiento complejo–. Con la aparición de la teoría del Caos, se dispone de un instrumento adicional para explicar la complejidad dinámica observada en multitud de fenómenos económicos.

La matemática del caos proporciona un nuevo instrumento con el que endogeneizar la irregularidad observada en las series económicas, permitiendo un mejor entendimiento del fenómeno económico –y también, tal vez, las predicciones sobre su evolución futura–. No tratamos con ello de afirmar que la economía se comporte de manera puramente determinista aunque caótica. Pensamos más bien que en la dinámica real coexisten, por el contrario, comportamientos estocásticos y deterministas. A pesar de esto, la matemática del caos conduce irrevocablemente a un cambio de paradigma. No nos

podemos limitar ya al recurso reduccionista de los modelos lineales, que necesariamente deben recurrir a factores exógenos para explicar la irregularidad. Con el caos se explica de manera endógena ese comportamiento errático que emerge del funcionamiento del propio modelo, sin necesidad de recurrir obligatoriamente al supuesto de los shocks estocásticos recurrentes.

1.3 Estructura de la Tesis

Podemos concretar ahora algo más el contenido de este proyecto de tesis doctoral. El objetivo que se pretende alcanzar es el de explicar *endógenamente*, o al menos tratar de entender algunas de las características cualitativas del proceso dinámico del crecimiento económico –irregular, asimétrico, aparentemente aleatorio e impredecible–.

Las herramientas que utilizaremos para tal fin, son las que proporciona la teoría o matemáticas del caos. Trataremos de encontrar los mecanismos que generan el *desorden* observado en el movimiento de la actividad económica. Para ello será necesario introducir las herramientas de la matemática del caos, labor que se desarrollará a lo largo de los capítulos 2 a 5. Comenzando por el análisis de los elementos fundamentales de los sistemas dinámicos –concepto, clasificación, solución y equilibrios dinámicos– a lo largo del capítulo 2 será introducido y definido el concepto de caos determinista. El capítulo 3 está dedicado al análisis de dos de los elementos fundamentales de la matemática del caos el espectro de *exponentes de Lyapunov* y la *dimensión fractal*. Estos conceptos sirven para determinar cuándo un sistema se encuentra en régimen de caos determinista, constituyendo la base en que se fundamentan los métodos de detección del caos determinista a partir de series temporales. Los capítulos 4 y 5 se dedican precisamente al análisis de las distintas técnicas con las cuales revelar la posible presencia de caos determinista a partir de una serie temporal –análisis de su evolución temporal, correlograma, periodograma, análisis R/S, la reconstrucción del atractor y la estimación de su espectro de exponentes de Lyapunov y dimensión fractal–. A partir del capítulo 6 trataremos de aplicar todas estas técnicas y herramientas al estudio del ciclo y el crecimiento económico.

En las ciencias sociales no-experimentales nos encontramos ante una doble dificultad metodológica a la hora de analizar sistemas o fenómenos bajo el prisma del caos. Nos referimos por un lado, a que no podemos hacer experimentos controlados sobre el fenómeno económico para estudiar bajo qué situaciones surgen comportamientos complejos. En segundo lugar, tampoco se conocen exactamente cuáles son las verdaderas leyes que rigen el fenómeno económico, por lo que tampoco podemos sustituir la experimentación por la

simulación del fenómeno haciendo uso de sus leyes de comportamiento. Debido a estas dificultades, la forma de analizar el caos en la economía difiere en cierta medida del método de investigación en las ciencias de la naturaleza.

En una primera etapa se estudia la *posibilidad* teórica de que aparezcan comportamientos caóticos en los modelos tradicionales con los que se intenta representar, aunque sea de manera aproximada, el fenómeno económico. Cuando se observa que es posible que en los modelos teóricos surjan comportamientos caóticos deterministas con una plausibilidad económica adecuada, habremos demostrado que estos modelos caóticos pueden utilizarse para representar la complejidad dinámica del ciclo y el crecimiento económico sin necesidad de introducir supuestos sobre la existencia de variables aleatorias en la economía. Ello no implicará, sin embargo, que la economía real se esté comportando de hecho de manera caótica. Simplemente, que existen modelos con mayor o menor fundamento económico donde bajo ciertas condiciones pueden aparecer comportamientos caóticos. Se justifica así que, al menos desde un plano teórico, la economía puede presentar comportamiento complejo sin necesidad de introducir supuestos sobre la existencia de variables aleatorias en la economía.

En este punto hay que recordar el comentario anterior sobre la modelización de la dinámica económica caótica. No resulta en absoluto correcto la aplicación de las leyes tomadas de la Física o cualquier otra rama de la ciencia –que se sabe que representan o determinan perfectamente el comportamiento de ciertos fenómenos reales- y utilizarlos ad-hoc para el estudio de fenómenos económicos. Sabemos por el contrario que el análisis económico, si se quieren evitar la críticas, debe poseer una fundamentación microeconómica rigurosa del comportamiento de los agentes[14]. Es por ello que en el capítulo 6 se repasarán los principales ingredientes del análisis tradicional del ciclo y el crecimiento económico, esencialmente lineal, y por ello, necesitado de la superposición de perturbaciones puramente aleatorias exógenas para explicar la irregularidad observada en la dinámica económica. Estos modelos tradicionales del ciclo y el crecimiento económico serán generalizados en el capítulo 7 a través de la introducción de diversas no linealidades en su formulación para que admitan soluciones en régimen de comportamiento caótico. Destacaremos en este mismo capítulo las implicaciones que para la política económica se desprenden del caos determinista, en particular la posibilidad de que la política económica recupere el papel activo en la estabilización, regulación o control de la dinámica económica que el enfoque tradicional neoclásico le había negado. A este respecto conviene hacer notar que la teoría o metodología de la política económica estabilizadora deberá tener en cuenta explícitamente el carácter caótico y no lineal de la dinámica económica. Ello se traduce en una nueva

[14] Hay que recordar que esta polémica en torno a la fundamentación micro del comportamiento macro tiene ya una larga historia, que en absoluto se inicia con al consideración de la dinámica caótica compleja.

concepción de la política estabilizadora –control o gestión del caos– en las que las intervenciones para eliminar o reducir las fluctuaciones de carácter caótico tienen que ser estructurales, en el sentido de que la estabilización no se alcanza sin modificar los valores de los parámetros estructurales que gobiernan el comportamiento asintótico del sistema.

En una segunda etapa del análisis de la dinámica económica caótica, y una vez confirmada la posibilidad de que los modelos teóricos puedan exhibir comportamientos caóticos, se debe tratar de encontrar empíricamente evidencia de la posible existencia de este comportamiento en las series temporales económicas. No pretendemos con ello, repetimos, contrastar la hipótesis a nuestro parecer no defendible, de que en la evolución real de las economías no existen componentes aleatorios. Pretendemos por el contrario dar fiabilidad y reforzar los resultados teóricos obtenidos en los capítulos anteriores. Se trata por tanto de intentar contrastar la hipótesis de que los procesos generadores de las series temporales económicas puedan tener, al menos en parte, una explicación caótico determinista, y ello sin introducir a priori ningún supuesto sobre la forma estructural concreta del sistema generador de las series temporales.

Para la detección del caos determinista a partir de series temporales utilizaremos las herramientas introducidas en los capítulos 4 y 5. Sin embargo, cuando tratamos de aplicar dichas técnicas a las series reales económicas nos enfrentamos ante una serie de problemas y limitaciones que será necesario superar. Nos referimos en particular a que la mayoría de test propuestos en la literatura son válidos únicamente cuando se aplican sobre series estacionarias, limpias de cualquier tipo de perturbación puramente aleatoria y suficientemente largas. En el capítulo 8 introduciremos distintas técnicas con las cuales convertir a las series temporales en estacionarias –transforación Box-Cox, test de raíces unitarias y de estacionariedad estacional y el filtro Hodrick-Presccot para la extracción del componente tendencial de una serie temporal–. En este mismo capítulo se analizarán igualmente distintos *test de no-linealidad* –test BDS, de Kaplan, de Engle y R/S– con los cuales superar los problemas del tamaño y calidad de las series económicas. Estos test, aunque no permiten revelar la posible presencia de caos determinista sí pueden utilizarse para contrastar la hipótesis de que las leyes estructurales del proceso generador de las series son no-lineales. Como se recordará, la no-linealidad constituye una condición necesaria, pero no suficiente, para la posible presencia de comportamientos caóticos, por lo que serán utilizados de forma complementaria al periodograma, el correlograma, la estimación del espectro de exponentes de Lyapunov y la dimensión fractal para detectar posibles comportamientos caóticos en las series temporales.

Una vez introducidas todas las técnica para la detección de caos determinista, éstas será aplicadas en el capítulo 9 a una selección de series temporales económicas representativas del nivel de actividad de la economía española. Tratamos, en definitiva, de comprobar si la irregularidad observada

en estas series puede deberse, al menos en parte, a la posible existencia de un sistema generador en régimen de comportamiento caótico o si por el contrario debe atribuirse exclusivamente al carácter estocástico de dicho sistema generador. Este tipo de análisis tendrá importantes implicaciones cuando de él se desprenda un resultado a favor de la hipótesis del caos determinista. Desde el punto de vista teórico obligará al abandono o reformulación de los diversos modelos tradicionales del ciclo y el crecimiento económico para que se de cabida a la existencia de equilibrios dinámicos en régimen de comportamiento caótico. Para la política económica supondrá abandonar el enfoque de la estática comparativa y sustituirlo por un enfoque de dinámica comparativa, donde el objetivo de la estabilización se afronte mediante el control de los distintos regímenes de comportamiento y no tanto por el valor que tome la variable en cada instante del tiempo. En cuanto a los modelos de predicción, deberá rechazarse la utilización de modelos lineales estocásticos ya que cuando estamos ante sistemas caóticos de baja dimensión, es posible mejorar sus predicciones utilizando métodos como la predicción por analogías.

Concluimos esta introducción mencionando, a modo de anticipo, dos de los resultados que obtendremos lo largo de los distintos capítulos que conforman esta tesis. En primer lugar, podemos señalar que resulta relativamente sencillo generalizar los modelos tradicionales del ciclo y el crecimiento económico para, manteniendo una estricta fundamentación económica, formular modelos de dinámica económica caótica, con unas exigencias de no-linealidad decrecientes con el número de dimensiones del sistema. Los diversos modelos que expondremos a lo largo del capítulo 7 muestran que a medida que aumenta el grado de reacción, impaciencia, adaptación o respuesta de los agentes económicos ante variaciones en su entorno, aumenta también la posibilidad de que emerjan comportamientos caóticos –igualmente, cuanto mayor sea la atonía de los agentes, mayor la posibilidad de acabar atrapados en estados estacionarios (estáticos), para los cuales la aproximación lineal resulta más que satisfactoria–.

En segundo lugar, que los resultados del análisis empírico de las series temporales de la economía española no resultan concluyentes en cuanto a la hipótesis de caos determinista. Teniendo en cuenta la insuficiencia de datos, la mala calidad de los mismos y la escasa potencia de los test propuestos hasta la fecha cuando las series se encuentran contaminadas por perturbaciones puramente aleatorias, estos resultados no deben considerarse como concluyentes ni definitivos. Si parece clara, por contra, la evidencia a favor de la existencia de estructuras dinámicas no lineales en la mayoría de series temporales consideradas. Ello parece indicar que, independientemente de que las técnicas para la detección de caos determinista deben seguir avanzando para poder obtener nuevos y más robustos resultados, se hace necesario recoger esas no linealidades en el estudio del fenómeno económico –el todo es más que la suma de las partes–, abandonando el enfoque tradicional esencialmente lineal, culpable, entre otras cuestiones, de la división artificial entre el ciclo y el crecimiento económico, y del recurso a factores exógenos de carácter aleatorio

–y por tanto no controlables por la política económica– para explicar, en el mejor de los casos, el carácter irregular de las oscilaciones observadas en la evolución de las economías reales.

1.4 Agradecimientos.

Deseo en este punto hacer explícitos mis agradecimientos a todas aquellas personas que han ayudado en mayor o menor medida a la realización de la presente tesis doctoral. En primer lugar quiero hacer patente que sin estas ayudas habría sido imposible finalizar mi trabajo, sin que en ningún caso se les pueda responsabilizar de los errores que, muy a mi pesar, puedan existir en el mismo.

Una vez dicho esto, quiero destacar el papel central que ha jugado el profesor Dr. D. Andrés Fernández Díaz en este proyecto, responsable no sólo de la dirección de esta tesis, sino también de mis estudios –primero en la Licenciatura de Economía General y posteriormente en el programa de doctorado del Departamento de Política Económica– y de mi labor docente e investigadora. El entusiasmo con el que me presentó y defendió las posibilidades de la Matemática del Caos, su continuo empeño en reivindicar el estudio de la complejidad en la ciencia económica y su demostrada notoriedad, reputación, prestigio e incombustible inquietud por el estudio de la dinámica económica compleja, son responsables de la elección del tema de esta tesis. Sin su apoyo, orientación, consejo, adiestramiento y ánimo continuos, no hubiese iniciado, ni concluido el proyecto de tesis doctoral que aquí se presenta.

En este apartado de agradecimientos hay otra persona a quien debo señalar con especial gratitud por su apoyo, colaboración y dedicación. Me refiero al profesor Dr. D. Miguel Ángel Galindo Martín, quien es responsable de muchos de mis trabajos de investigación, de mi labor como docente y de la conclusión del presente trabajo –aunque hay que reconocer que en un principio no confiase demasiado, y creo que sigue desconfiando, en las posibilidades o alcance de la aplicación de la teoría del caos en economía. Seguimos tratando de que cambie de opinión–.

No puedo olvidar tampoco el apoyo recibido en distintos ámbitos por: Luis Rodríguez Sáiz, José Alberto Parejo, José Andrés Fernandez Cornejo, Pilar Grau, Alberto Alonso, Agustín Alonso, Oscar Alfranca, Fernando Rodríguez y Rodríguez de Acuña, Marta Fosas, Inés Pérez Soba, Ana Rosa Martínez, Victor Martín, Nieves Bayo, Albert Carreras, Esther Touza Fernández, Javier Alonso, José Ramón Sánchez Galán, Ruth Mateo Cabo, Elena Olmedo y Ricardo Gimeno. Todos ellos me han ofrecido su colaboración, consejo y ánimo para cerrar el presente trabajo. Pido disculpas por el olvido inevitable de

aquéllos que, aun debiendo, no estén aquí mencionados.

Igualmente quiero agradecer la ayuda recibida por los profesionales encargados de los servicios administrativos y de biblioteca que trabajan en los distintos centros donde he desarrollado mi actividad docente e investigadora: Facultad de CC.EE. Y EE. de la Universidad Complutense de Madrid, C.U. María Cristina, C.E.S San Pablo CEU, C.U. Luis Vives CEU y C.U. Cardenal Cisneros.

No debo olvidar, por último, el apoyo de mis padres Antonio y Cecilia, de mis hermanos Ceci, Tito y Sergio –con quien he mantenido apasionantes discusiones filosóficas sobre el orden y el caos– y demás familiares y amigos a quienes en última instancia debo la consecución de esta meta y a quienes quisiera dedicar la misma. En especial a Esther, quien es la que más directamente ha tenido que sufrir mis largas horas frente al ordenador, mis desesperaciones y frustaciones a lo largo de todos estos años y qué ha sido sometida a una excesiva desatención involuntaria, por supuesto, que en ningún caso merece.

CAPÍTULO 2.

ELEMENTOS DE LA MATEMÁTICA DEL CAOS (I)

DEFINICIÓN DE CAOS DETERMINISTA.

Como ya se ha comentado, la matemática del caos constituye una alternativa al análisis estadístico o probabilístico de los fenómenos que se comportan de manera compleja o no regular. Precisamente, el estudio de los sistemas caóticos se justifica por la existencia de un gran número de fenómenos de la realidad que presentan una evolución temporal aparentemente aleatoria, irregular, aperiódica y escasamente predecible. Con la matemática del caos se hace posible la representación y explicación de esa complejidad en la dinámica de ciertos fenómenos a partir de modelos perfectamente deterministas y estructuralmente simples. El caos determinista abre así una opción intermedia entre los sistemas deterministas de la dinámica clásica –regulares, periódicos y perfectamente predecibles– y los procesos de dinámica puramente aleatoria –irregulares, aperiódicos y escasamente predecibles.

Como ya adelantamos en el anterior capítulo, tres son las propiedades fundamentales que caracterizan a los sistemas caóticos:

- Son procesos dinámicos no-lineales, es decir, presentan retroalimentación no-lineal entre sus variables de estado con cierto desfase temporal.
- Las soluciones a estos sistemas dinámicos no-lineales presentan una elevada irregularidad y aperiodcidad.
- Son sistemas con una dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

En este capítulo trataremos de analizar el alcance y las consecuencias que se derivan de estas tres propiedades. La matemática del caos, es decir, el conjunto de herramientas que tienen como objeto de estudio de los sistemas caóticos –más adelante daremos una definición precisa de dichos sistemas–,

cae de lleno dentro del ámbito del análisis de los *sistemas dinámicos no-lineales*. Así, comenzaremos el capítulo repasando algunos de los conceptos fundamentales de dichos sistemas con el objeto de fijar el entorno en el cual encuadrar a la teoría del caos. Una vez, introducida la definición y los principales elementos de la dinámica caótica, estaremos en condiciones de utilizar estas herramientas para el análisis de la dinámica del ciclo y el crecimiento económico.

2.1. Concepto y clasificación de los sistemas dinámicos.

En este apartado repasaremos los aspectos más significativos de los sistemas dinámicos como son la definición y clasificación de los sistemas dinámicos, sus soluciones y el concepto y tipos de equilibrios dinámicos.

¿Qué es un sistema dinámico?

La *Dinámica*, en términos generales, hace referencia al estudio matemático del movimiento y de las fuerzas que lo generan. Con el análisis dinámico se intenta determinar cómo cambian las cosas, porqué ocurren esos cambios y cómo éstos pueden ser controlados o modificados. Un sistema o un fenómeno se dirá dinámico si está sometido al cambio respecto a una o varias variables, exigiéndose adicionalmente que en dicho cambio exista una relación de retroalimentación o *feed-back*, es decir, que el movimiento al que se vea sometido el sistema dependa, entre otros factores, de la situación o estado en la que se haya encontrado el propio sistema anteriormente. *El estado de un sistema* dinámico estará constituido por toda aquella información necesaria para poder determinar qué es lo que el sistema hará a continuación.

Cuando se analiza el cambio respecto a una única variable hablamos de sistemas dinámicos ordinarios. Cuando el sistema puede cambiar respecto a dos o más variables se habla de sistemas dinámicos en diferencias o derivadas parciales. En economía se trata normalmente con sistemas dinámicos ordinarios donde la variable respecto a la que se considera que cambia el sistema es el tiempo. Es decir, su propósito es el de estudiar la evolución temporal de los fenómenos económicos. Es por ello que en adelante nos referiremos siempre a este tipo de sistemas que cambian o evolucionan en el tiempo[1].

[1] Aunque el uso en Economía de sistemas dinámicos en derivadas parciales es todavía escaso, podemos indicar que entre otras aplicaciones se han utilizado en el análisis de la economía espacial (Puu, 1991) y en la valoración de activos financieros (Fernández Díaz, 2000, pp.243-250). Para el estudio general de sistema en derivadas parciales puede consultarse Peral (1995).

Los sistemas dinámicos están constituidos por un conjunto de elementos, cuyo estado en cada instante del tiempo se caracteriza a su vez por el valor que tomen un conjunto de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ denominadas *variables de estado*, entre las que existen relaciones matemáticas llamadas leyes o ecuaciones de movimiento o evolución (Fernández Díaz, 1994, pp. 29). Un sistema dinámico quedará determinado, por tanto, por un sistema de relaciones funcionales –tantas como variables de estado tenga el sistema– en las que se hace explícita la retroalimentación temporal entre las variables que definen el fenómeno dinámico. Dicho de otro modo, los sistemas dinámicos están formados por n ecuaciones dinámicas, expresando cada una de ellas cómo cambian en el tiempo cada una de las n variables de estado[2].

Estos sistemas pueden clasificarse, siguiendo distintos criterios no excluyentes, como sistemas en tiempo discreto y tiempo continuo, sistemas autónomos y no autónomos, lineales y no-lineales, deterministas y estocásticos.

Sistemas dinámicos en tiempo discreto y en tiempo continuo

Una primera clasificación de los sistemas dinámicos es aquella que distingue entre los sistemas diferenciales y los sistemas en diferencias finitas. Un sistema dinámico en *tiempo continuo* o un *sistema de ecuaciones diferenciales* puede representarse de forma genérica como[3]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1(t), x_2(t), .., x_n(t), t) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t) \\ &\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t), t) \end{aligned} \tag{2.1}$$

donde $\dot{x}_i \equiv dx_i(t)/dt$, es decir, que cada ecuación en (2.1) representa la derivada respecto al tiempo de cada una de las n variables de estado. El sistema (2.1) puede representarse también de forma compacta como:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, t) \quad ; \; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^n \; ; \; t \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

donde $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_n(t))'$ es el vector de variables de estado o vector de estados. Este vector de estados es una función del tiempo. Sin

[2] Existen numerosos textos que tratan sobre el estudio de sistemas dinámicos. Podemos citar entre otros Luenberguer (1979), Edwards y Penney (1986), Zill (1988) y Blanchard, Devaney y Hall (1998). Para un análisis de los sistemas dinámicos ordinarios y sus aplicaciones a la economía puede consultarse Gandolfo (1997).

[3] Hemos representado, sin pérdida de generalidad un sistema diferencial de primer orden de dimensión n. En general, el orden de una sistema diferencial viene dado por el orden de la máxima derivada respecto al tiempo que aparezca en dicho sistema. En adelante trataremos únicamente con sistemas dinámicos de primer orden, ya que tras un adecuado cambio de variables, un sistema de cualquier orden superior al unitario siempre puede transformase en otro equivalente de mayor dimensión pero de primer orden.

embargo, por motivos de simplicidad, en adelante omitimos la variable temporal t en su designación. Por otra parte, $\boldsymbol{f}:D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial cuyo dominio D es el *espacio de los estados* o *espacio de fases*. Este espacio contiene a todos los posibles estados que puede adoptar el sistema y su dimensión estará determinada por el número $n \in \mathbb{N}$ de variables de estado. El campo vectorial $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ indicará la pendiente o variación en el tiempo de cada punto del espacio de estados $\boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$.

Un sistema dinámico en *tiempo discreto* o un *sistema de ecuaciones en diferencias finitas* puede a su vez representarse como:

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= f_1(x_1(k), x_2(k), .., x_n(k), k) \\ \Delta x_2 &= f_2(x_1(k), x_2(k), .., x_n(k), k) \\ &\ldots \\ \Delta x_n &= f_n(x_1(k), x_2(k), .., x_n(k), k) \end{aligned} \tag{2.3}$$

con $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$ [4] y donde $\Delta x_i \equiv x_i(k+1) - x_i(k)$, por lo que el sistema (2.3), puede rescribirse como[5]:

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= f_1(x_1(k), x_2(k), .., x_n(k), k) \\ x_2(k+1) &= f_2(x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k), k) \\ &\ldots \\ x_n(k+1) &= f_n(x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k), k) \end{aligned} \tag{2.4}$$

o en forma compacta:

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k), k) \quad ; \; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^n \; ; \; k \in \mathbb{N} \tag{2.5}$$

donde nuevamente, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(k) = (x_1(k), x_2(k), x_3(k), \ldots, x_n(k))'$, representa el vector de variable de estados o vector de estado del sistema en el espacio de estados n-dimensional D.

---

[4] En realidad, el único requisito que debe cumplirse es que Δk sea finito y regular, de forma que a partir de un instate inicial k_0, los instantes siguientes $k_1, k_2, k_3, \ldots$ puedan escribirse como $k_0+\Delta k$, $k_0+2\Delta k$, $k_0+3\Delta k$, ... Nosotros consideramos, sin pérdida de generalidad, que $\Delta k=1$ y $k_0=0$. Posteriormente introduciremos la posibilidad de que la variable temporal k tome valores negativos cuando hablemos de reversibilidad. De momento sólo consideramos la evolución hacia adelante en el tiempo.

[5] De manera análoga al caso continuo, los sistemas en tiempo discreto de primer orden engloban a los de cualquier otro de orden mayor. El orden de un sistema en diferencias viene dado por el máximo retardo de la variable de estado que aparezca en sus ecuaciones. Nosotros trataremos sólo con sistemas de primer orden porque, nuevamente, tras el oportuno cambio de variable siempre es posible encontrar un sistema en diferencias de primer orden equivalente a cualquier otro de orden superior.

De lo anterior se desprende que la diferencia fundamental entre los sistemas en tiempo discreto y en tiempo continuo se encuentra en que mientras que en los primeros el incremento temporal de referencia, Δk, es finito, en los segundos el incremento temporal se considera infinitesimalmente pequeño. Así, la relación entre sistemas en tiempo discreto y continuo puede establecerse como:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} = \lim_{\Delta t = \Delta k \to 0} \frac{\Delta x_i}{\Delta k} \tag{2.6}$$

Ambas representaciones para los sistemas dinámicos están conectadas, por tanto, por el paso al límite (2.6). Es por ello, que la utilización de sistemas en tiempo discreto o continuo será, en la mayoría de los casos una cuestión de conveniencia. Debido a que el número de grados de libertad dinámica –dimensión *n*– necesaria para que aparezcan comportamientos caóticos en los sistemas en diferencias finitas es menor que para el caso continuo, muchos de los ejemplos que desarrollaremos posteriormente vendrán representados de forma discreta, aunque, dichos modelos siempre podrán generalizarse para mostrar el mismo comportamiento cualitativo cuando se representan en forma de sistemas diferenciales.

Sistemas dinámicos autónomos y no-autónomos.

Un sistema se dice autónomo cuando la variable temporal de referencia (*k* ó *t*) *no* aparece de manera explícita en las relaciones funcionales del sistema. En los sistemas autónomos, por tanto, la variable temporal sólo afecta al sistema de manera indirecta a través de las variables de estado $\boldsymbol{x(k)}$ o $\boldsymbol{x(t)}$. Es decir, el cambio del sistema depende del valor que tome la variable de estado en cada instante del tiempo pero no del tiempo de forma directa.

Una propiedad de los sistemas no-autónomos como (2.2) y (2.5), es que mediante un apropiado cambio de variable siempre se pueden rescribir como otros autónomos equivalentes aunque de mayor dimensión. Dicho cambio de variable implica incorporar una nueva variable de estado $x_{n+1}=t$ con su correspondiente ley de movimiento: $\dot{x}_{n+1}=1$ o $\Delta x_{n+1}=1$. Es por ello que a partir de ahora nos referiremos de forma genérica a sistemas dinámicos autónomos, que en tiempo continuo y en tiempo discreto pueden representarse respectivamente como:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad ; \ \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \ ; \ t \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) \quad ; \ \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n \ ; \ k \in \mathbb{N} \tag{2.8}$$

Un caso particular entre los sistemas no-autónomos es aquél en el que a los campos vectoriales (2.7) y (2.8) se añaden unas fuerzas exógenas a la evolución del propio sistema que se utilizan para *controlar* su evolución. Estas fuerzas o

variables de control representan, como decimos, una acción exógena al propio sistema en el sentido de que la evolución de éstas afecta al comportamiento del sistema sin que, en principio, se de la dependencia inversa.

Las variables de control pueden actuar superponiéndose a la acción del sistema dinámico *–control aditivo–*, o sobre los propios parámetros que definen dicho sistema *–control paramétrico–*. Si denominamos por $\boldsymbol{g}(t)$ y $\boldsymbol{\mu}(t)$ a las variables de control aditivo y paramétrico respectivamente, el sistema dinámico (2.7)-(2.8) podrá escribirse entonces como:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}(t))+\boldsymbol{g}(t) \quad ; \; \boldsymbol{x}\in D\subset\mathbb{R}^n; \; t\in\mathbb{R}; \; \boldsymbol{\mu}\in V\subset\mathbb{R}^p; \; \boldsymbol{g}\in W\subset\mathbb{R}^q \tag{2.9}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{\mu}(k))+\boldsymbol{g}(k) \; ; \boldsymbol{x}\in D\subset\mathbb{R}^n; k\in\mathbb{N}; \boldsymbol{\mu}\in V\subset\mathbb{R}^p; \boldsymbol{g}\in W\subset\mathbb{R}^q \tag{2.10}$$

Estas fuerzas exógenas son el componente fundamental de la teoría del control de los sistemas dinámicos. Esta teoría trata de determinar cuál es la trayectoria que deberían seguir las variables de control para poder conducir la evolución de las variables de estado hacia las trayectorias deseadas o consideradas óptimas. A su vez, esta teoría del control supone el sustento teórico en el que se apoya el diseño y ejecución de la política económica encaminada a regular la dinámica del ciclo y el crecimiento económico, ya que los instrumentos de la política económica pueden considerarse, precisamente, como integrantes del conjunto de variables de control. Este tema será tratado en el capítulo 7, por lo que posponemos el análisis de la teoría del control hasta entonces. Por el momento, nos centraremos en sistemas dinámicos de la forma (2.7) y (2.8)

Sistemas dinámicos lineales y no lineales (I)

Otro criterio de clasificación de los sistemas dinámicos es el que distingue entre los *sistemas lineales y los no-lineales*. Un sistema dinámico es lineal cuando la forma funcional de todas las ecuaciones que lo forman $f_i(\cdot)$ $(i=1...n)$ son lineales. En caso contrario, el sistema será no-lineal. Dicho de otra forma, los sistemas dinámicos autónomos (2.7) y (2.8) serán lineales si se pueden representar, respectivamente, de la forma:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c} \quad ; \; \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n; \; t\in\mathbb{R} \tag{2.11}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}(k)+\boldsymbol{c} \quad ; \; \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \; ; \; k\in\mathbb{N} \tag{2.12}$$

siendo las matrices $\boldsymbol{A}(n\times n)$ y $\boldsymbol{c}(n\times 1)$, sendas matrices de coeficientes fijos.

Como tendremos ocasión de comprobar más adelante, existen importantes diferencias entre los sistemas dinámicos lineales y los no lineales. Estas diferencias se encuentran, fundamentalmente, en las propiedades de sus

soluciones, tanto en lo que hace referencia al *principio de superposición*, como en los distintos *comportamientos asintóticos*. Así, el principio de superposición, que permite analizar el todo como la suma de las partes, sólo es aplicable a los sistemas lineales. El comportamiento a largo plazo de estos sistemas está restringido a los puntos fijos o a situaciones explosivas. En los puntos fijos el sistema alcanza un estado estacionario en el que se mantiene –en ausencia de fuerzas exógenas– inmóvil de manera permanente. En las situaciones explosiva los valores de las variables de estado tienden a crecer o decrecer indefinidamente sin que se alcance en ningún momento ningún estado estacionario.

Los sistemas dinámicos no-lineales, por el contrairo, no verifican el principio de la superposición –el comportamiento del sistema no se determina por la suma de sus partes–, y su comportamiento asintótico o alargo plazo puede estar constituido, además de por los puntos fijos y las soluciones explosivas, por otras situaciones cualitativamente diferentes –ciclos límite, toros cuasiperiódicos y atractores caóticos–. Existen, adicionalmente, otras diferencias entre los sistemas dinámicos lineales y los no-lineales. Así, sólo excepcionalmente para casos particulares podrán obtenerse expresiones analíticas explícitas para las soluciones de sistemas dinámicos no lineales, mientras que, en general, siempre será posible obtenerlas si el sistema dinámico es lineal.

Sistemas dinámicos estocásticos y deterministas

Un sistema dinámico es *estocástico* cuando su evolución temporal se ve afectada por alguna variable aleatoria, es decir, cuando alguna de las variables de estado en (2.7)-(2.8) es una variable aleatoria. En caso contrario, el sistema será *determinista*, esto es, cuando la evolución en el tiempo de cada una de las variables de estado queda perfectamente determinada por el sistema (2.7)-(2.8) sin necesidad de recurrir a ninguna variable aleatoria.

Una de las principales características de los sistemas estocásticos es que sus soluciones constituyen procesos estocásticos, es decir, sucesiones de variables aleatorias, de las que sólo se conoce su función de distribución de probabilidad. Como consecuencia de ello, la diferencia fundamental entre los sistemas deterministas y los estocásticos radicará en la unicidad de sus soluciones a partir de un estado inicial. En efecto, a partir de un estado inicial, los sistemas deterministas *determinarán* perfectamente la evolución futura del sistema de manera inequívoca, de forma que dadas dos soluciones de un mismo sistema determinista que arranquen del mismo estado inicial, serán idénticas. Por el contrario, la condición inicial de la que parte un sistema dinámico estocástico debe considerarse como una realización concreta de un proceso estocástico, determinando el sistema en este caso, únicamente, una distribución de probabilidad de estados posibles para instantes futuros. Es decir, en los

sistemas estocásticos, dos realizaciones idénticas del proceso podrán ser seguidas de evoluciones distintas en el futuro.

Tradicionalmente, el estudio de los fenómenos con una evolución temporal compleja e irregular, se ha realizado suponiendo que la dinámica subyacente, generadora de dicha complejidad, debía representarse a través de procesos estocásticos, rechazando así la hipótesis determinista. Este enfoque ha venido propiciado, en parte, porque las soluciones a los sistemas deterministas, al menos hasta la aparición de los sistemas caóticos, perfectamente regulares, ordenadas y periódicas, eran incapaces de reproducir la dinámica compleja observada en los fenómenos reales. De hecho, el grado máximo de complejidad que podían describir los sistemas deterministas estaba restringido a los movimientos cuasiperiódicos.

El propósito que perseguimos en esta tesis se centra precisamente en mostrar la capacidad de los sistemas caóticos deterministas para explicar los fenómenos de dinámica compleja, proporcionando así una alternativa a la explicación exógena estocástica. Es decir, con la matemática del caos se abre la posibilidad de que el comportamiento complejo emerja, de forma endógena, de la propia dinámica de modelos perfectamente deterministas –caos determinista–. Nos centraremos, por tanto, a partir de ahora en las características fundamentales de los sistemas deterministas[6]. Posteriormente, retomaremos la hipótesis de comportamientos estocásticos cuando nos refiramos a la capacidad explicativa de los modelos tradicionales del ciclo y el crecimiento económico. En este punto sólo queremos apuntar que en el análisis de la complejidad cabe una tercera posibilidad a la que no debemos renunciar. Esta sería la constituida por la presencia de comportamientos caóticos y estocásticos conjuntamente. En ella existirán, por tanto, dos fuentes de complejidad una determinista y otra puramente aleatoria. Así mismo, debemos comentar que aunque esta alternativa nos parece la más atractiva y realista, no será analizada en profundidad en esta tesis, proponiendo desde aquí su consideración para próximas investigaciones.

2.2. La solución de un sistema dinámico

Una vez que tenemos representado la evolución de un fenómeno a través de un sistema dinámico, hay que resolverlo al igual que se hace con los modelos estáticos, esto es, debemos encontrar su solución.. Sin embargo, a diferencia de éstos, la solución de un sistema dinámico no será un único valor para cada una de las variables de estado, sino toda una *trayectoria* temporal,

[6] Sobre la integración de las soluciones y el análisis de los sistemas dinámicos estocásticos véase Øksendal (1998).

todo un conjunto de valores para cada una de las variables de estado y para cada instante del tiempo, que en general dependerán de las relaciones funcionales del sistema y de las condiciones iniciales desde las que parta.

La solución de un sistema dinámico es, por tanto, una trayectoria temporal completa para cada variable de estado, quedando los valores instantáneos de cada una de ellas conectados en el tiempo con los estados anteriores del sistema a través del sistema de ecuaciones que lo definen. Así, la solución de un sistema dinámico vendrá da por aquellas trayectorias para las variables de estado cuya evolución temporal venga determinada por las ecuaciones que definan el sistema.

Esta solución se define en general como una función del tiempo. Cuando nos encontramos ante sistemas continuos:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad ; \ \boldsymbol{x}\in D\subset\mathbb{R}^n \ ; \ t\in\mathbb{R} \tag{2.13}$$

una solución a (2.13) será una función

$$\Phi: I\rightarrow D\subset\mathbb{R}^n \tag{2.14}$$

definida en un intervalo $I\in[a,b]$ ($0\leq a<b$; $a,b\in\mathbb{R}$; $I\subset\mathbb{R}$), tal que para todo $t\in$I, entonces Φ verifica (2.13), es decir:

$$\dot{\Phi}(t)=\boldsymbol{f}\left[\Phi(t)\right] \tag{2.15}$$

La soluciones (2.14) al sistema (2.13) no serán únicas[7]. En general serán familias *n* paramétricas de soluciones. Para garantizar la unicidad de las soluciones se introduce el concepto de *condición inicial*. Así, se dice que cuando una solución verifica que en un instante $t_0\in$I, $\Phi(t_0)=\boldsymbol{x}_0$, la solución cumple con la condición inicial $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$.

Si suponemos que *D* es abierto y que existen y son continuas las derivadas parciales respecto a todas las variables del campo vectorial $\boldsymbol{f}$ en *D*, el teorema de la existencia y unicidad nos dice que si fijamos una condición inicial $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ arbitraria con la única condición de que $\boldsymbol{x}_0\in D$, entonces existirá un intervalo *I* que contiene a t_0, y una única función $\Phi(t)$ definida en *I* que es solución del sistema y cumple la condición inicial $(t_0 , \boldsymbol{x}_0)$[8].

---

[7] La obtención de la solución de un sistema dinámico implica, en general, el proceso opuesto al de la diferenciación de funciones continuas. A partir de una ecuación conocida dada que depende, por ejemplo, linealmente de una variable *x*, $y=a+bx$ (*), podemos calcular su derivada respecto a *x* aplicando las técnicas tradicionales del cálculo diferencial: $dy/dx=b$ (**). En un sistema dinámico la ecuación conocida es la que nos expresa de qué depende la derivada (**), y su solución implica precisamente la integración de la correspondiente ecuación (*), por lo que sólo se podrán integrar soluciones del tipo $y=bx+C$, que constituye en realidad una familia de soluciones, tantas como posibles valores tome la constante *C*.

[8] Recordemos que estamos hablando de sistemas dinámicos deterministas, ya que, como se recordará, en los sistemas estocásticos no existe una única solución –aunque se parta de una condición inicial dada, a ésta le pueden seguir dos realizaciones diferentes–. En estos casos, la solución es un proceso estocástico susceptible sólo de análisis probabilístico.

La solución de (2.13) para la condición inicial $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ será, entonces, única y se podrá escribir como $\Phi(t;\ t_0\ ,\ \boldsymbol{x}_0\ )$[9]. Dicha solución presenta ciertas propiedades. Una de ellas es la de su invarianza ante traslaciones en el tiempo –$\Phi(t;\Phi(s;\ s_0,\boldsymbol{x}_0)) = \Phi(\ t+s;\ s_0,\boldsymbol{x}_0\ )$–. Esta propiedad muestra que el instante en el que comience la solución es irrelevante –no así el estado del sistema en dicho instante inicial–, por lo que en adelante definiremos , sin pérdida de generalidad, $t_0=0$ [10].

Una *órbita*, será aquel conjunto de puntos del espacio de fases que se obtiene cuando se dan valores a t posteriores a $t_0=0$: $\{\ \Phi(t\ ;\boldsymbol{x}_0)\colon\ t\geq 0\}$. Es decir, la trayectoria descrita por la solución en el espacio de fases. Una cuestión importante que cabe destacar es que como consecuencia de la unicidad de la solución para una condición inicial, estas órbitas nunca se podrán cruzar en su evolución por el espacio de fases. Recordemos que a cualquier punto de la órbita le seguirá otro que vendrá determinado de forma inequívoca por el sistema dinámico (2.13), es decir, su derivada en el tiempo, que indica cual será el movimiento de la órbita a partir a dicho punto, será única. Por lo tanto no es posible que la órbita se corte en ningún punto, es decir, que a partir de un mismo punto le sigan dos posibles estados distintos del sistema. Este es un resultado importante que será utilizado posteriormente en la reconstrucción de órbitas en el espacio de fases a partir de una serie temporal.

El *flujo* del sistema (2.13) será el conjunto de todas las soluciones (3,14) posibles al sistema para distintas condiciones iniciales $\boldsymbol{x}_0$., esto es, la familia de soluciones para distintas $\boldsymbol{x}_0$. Dicho de otro modo, dado un abierto $U \subset D \subset \mathbb{R}^n$, el flujo del sistema se define como $\Phi(t\ ;U\ )=\{\Phi(t\ ;\ \boldsymbol{x}_0)\colon\ \boldsymbol{x}_0\in U\}$. La representación gráfica de los flujos en el espacio de fases, nos proporciona información cualitativa de las soluciones y constituyen la base para la solución gráfica de los sistemas dinámicos.

Lo comentado hasta ahora sobre las soluciones para sistemas continuos puede aplicarse también al caso discreto. Dado un sistema dinámico en tiempo discreto:

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) \quad ;\ \boldsymbol{f}\colon D\subset\mathbb{R}^n\rightarrow D;\ k\in\mathbb{N} \tag{2.16}$$

La solución del sistema dinámico (2.16) será una función de variable natural en la que a cada instante k le va a corresponder un estado del sistema, es decir, un valor para cada una de sus n variables de estado:

$$\boldsymbol{\Phi}\colon\mathbb{N}\rightarrow D\subset\mathbb{R}^n \tag{2.17}$$

[9] Estas soluciones dependerán adicionalmente de los parámetros estructurales y, en su caso, de los valores que tomen las variables de control que definen el campo vectorial. Estos elementos serán introducidos más tarde cuando tratemos los temas del análisis de dinámica comparativa y la teoría del control.

[10] Esta propiedad es aplicable sólo a los sistemas autónomos (2.13).

para la cual se verifica el sistema (2.16), es decir,

$$\Phi(k+1)=f\left[\Phi(k)\right] \;\; ; \; \forall k\in\mathbb{N} \tag{2.18}$$

Esta solución (2.17) no será única. Para garantizar la existencia y unicidad de la solución habrá que tener en cuenta las condiciones iniciales. Si para el instante inicial $k_0=0$, se verifica que $\Phi(0)=\boldsymbol{x}_0$, entonces se dice que la solución $\Phi(k)$ satisface la condición inicial $\boldsymbol{x}_0$. Dado un punto arbitrario $\boldsymbol{x}_0$ que pertenece al dominio D del sistema ($\boldsymbol{x}_0\in D$), existe una única solución del sistema que satisface esa condición inicial $\boldsymbol{x}_0$: $\Phi(k\,;\boldsymbol{x}_0)$.

De manera análoga al caso continuo podemos definir la órbita y el flujo de un sistema en tiempo discreto como $\{\Phi(k\,;\boldsymbol{x}_0)\colon k\geq 0\}$ y $\Phi(k\,;U)=\{\Phi(k\,;\boldsymbol{x}_0)\colon \boldsymbol{x}_0\in U\subset \mathrm{D}\subset\mathbb{R}^n\}$ respectivamente.

Sistemas lineales y no lineales (II): el principio de superposición

Como ya comentamos en el capítulo 1 la diferencia fundamental entre el paradigma lineal y el no-lineal se encuentra en el principio de superposición de los sistemas lineales, según el cual *el todo es igual a la suma de las partes*. Este principio asume, por tanto, que la interacción de los distintos elementos integrantes de un sistema se realiza de forma aditiva, es decir, que el comportamiento global de un sistema, por complicado que éste sea, no es más que la superposición lineal de los comportamientos correspondientes a cada uno de sus elementos constituyentes.

Bajo este principio de superposición, el paradigma lineal ha enfocado el análisis de los fenómenos de la naturaleza identificando y aislando sus elementos esenciales. A partir de aquí, los estudios deben centrarse en el funcionamiento de cada uno de esos elementos por separado, ya que por el principio de superposición, el comportamiento agregado quedará perfectamente determinado por la superposición lineal o agregación de cada uno de ellos.

Por el contrario, el paradigma no-lineal rechaza este principio de superposición. *El todo es algo más que la simple suma de las partes*. El comportamiento global de un sistema se determina por la relación no-lineal entre los comportamientos individuales de cada uno de sus componentes esenciales. El estudio aislado de los elementos integrantes de un sistema no mejora, necesariamente, el conocimiento del todo. Para que ello sea posible, debe considerarse de forma explícita la interacción no lineal entre el todo y sus partes.

Este principio de superposición puede aplicarse a la solución de un sistema dinámico para diferenciar los sistemas lineales de los no-lineales. Se dice que un sistema es lineal si la suma de sus soluciones es también solución del sistema. Es más, podemos considerar que un sistema será lineal cuando

cualquier combinación lineal de dos de sus soluciones es de nuevo una solución al sistema:

$$\alpha_1\Phi(t/k;\ x_1)+\alpha_2\Phi(t/k;\ x_2)=\Phi(t/k;\ \alpha_1x_1+\alpha_2x_2) \qquad (2.19)$$

En caso contrario se dice que el sistema es no lineal. Retomaremos la consideración del supuesto sobre la linealidad cuando analicemos los posibles comportamientos que desde el punto de vista cualitativo pueden presentar los distintos tipos de sistemas dinámicos. Como ya se ha comentado, el principio de superposición y el supuesto de linealidad juegan también un papel importante a la hora de estudiar la posibilidad de obtener expresiones analíticas explícitas para las soluciones de un sistema dinámico.

Soluciones analíticas y numéricas

Dado un sistema dinámico (2.13) o (2.16), cuando se puede encontrar de forma explícita la expresión exacta para su solución (2.14) o (2.17), entonces se dice que el sistema tiene solución analítica. En general, para la mayoría de los sistemas resulta altamente complicado obtener una expresión explícita para la solución analítica de un sistema dinámico, en particular de los caóticos. Esto sólo será posible para los sistemas lineales y algunos casos particulares de los no-lineales (véase Fernández Díaz 2000, pp. 62-69). En cualquier caso, y gracias a las modernas técnicas computacionales siempre es posible obtener o simular, aunque sea de manera aproximada, la solución numérica del sistema. Estas soluciones numéricas se basan en la recursiva iteración numérica del sistema dinámico a partir de una condición inicial dada y una vez establecida una forma funcional o especificación concreta del sistema. En los sistemas en tiempo discreto este método no presenta problemas si éstos están bien definidos. Así, la solución o la *órbita* de un sistema de ecuaciones en diferencias (2.16) podría calcularse como

$$\Phi(k,x_0)=\left\{ f(x_0),\ f\left(f(x_0)\right),\ f\left(f\left(f(x_0)\right)\right),\ldots\right\}=\left\{ f^{k)}(x_0):\ k\in\mathbb{N}\ \right\} \qquad (2.20)$$

donde $f^{k)}$ representa la *k-esima* iterada del sistema.

Por otra parte, en el caso de los sistemas en tiempo continuo, la órbita o solución del sistema será una función continua del tiempo. Para la obtención de la solución numérica de estos sistemas diferenciales, habrá que utilizar algún método que permita la *discretización* del tiempo de forma que sea posible iterar el proceso con el mínimo error de aproximación posible. Este error será tanto mayor cuanto mayor sea la longitud de paso. La mayoría de estas técnicas parten de un desarrollo en series de Taylor del sistema, permitiendo así la elección del mínimo error mediante la elección del orden de dicho desarrollo–[11].

[11] Sobre el cálculo numérico de soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias véase Fraile (1991, pp. 271-295), Zill (1988, pp 395-427) y Edwards y Penney (1986, pp 453-470). Actualmente la mayoría de paquetes informáticos incluyen distintas aplicaciones para la

En cualquier caso, la obtención de la solución numérica implica la repetición de un gran cantidad de operaciones de cálculo. Afortunadamente, el uso del ordenador, facilita enormemente esta tarea de cálculo para la iteración de dichas soluciones. Es por ello que por una parte, el desarrollo de la dinámica no-lineal no tuvo su arranque hasta que comenzó a generalizarse el uso del ordenador, y por otra parte, que éste se ha convertido, hoy por hoy, en una herramienta imprescindible para el estudio de sistemas dinámicos. Esto resulta especialmente importante para el caso de los sistemas *no-lineales*, ya que por regla general, para estos sistemas no es posible integrar una solución analítica explícita.[12]

La representación gráfica de las soluciones

La solución a un sistema dinámico, ya sea analítica o numérica, puede representarse gráficamente como una senda temporal. Es decir, mediante un gráfico en el que se represente el valor de cada una de las variables de estado en función del tiempo. Este gráfico proporcionará información sobre el movimiento, los estados que adopta el sistema en su evolución temporal y la velocidad de dicha evolución respecto al tiempo –la pendiente de dicha gráfica vendrá dada por la ecuación dinámica correspondiente a la variable de estado que estemos considerando–. Esta representación será esencial para estudiar la velocidad de convergencia hacia el equilibrio dinámico a largo plazo.

Otras veces interesa representar cuál es el valor que toman cada una de las variables de estado en un mismo instante temporal de forma conjunta. Esto puede realizarse dibujando un gráfico en un espacio que tenga tantas dimensiones como número de variables de estado tenga el sistema[13]. Este espacio recibe el nombre de *espacio de fases*, y cada punto del mismo representa un estado concreto del sistema dinámico, ya que las coordenadas de un punto en el espacio de fases serán numéricamente iguales a los valores que tomen cada una de las variables de estado en un mismo instante temporal. De

---

solución de sistemas de ecuaciones diferenciales. En nuestras simulaciones utilizaremos la función ODE23 del programa Matlab, que utiliza el método de Runge-Kutta de órdenes 2-3 y donde la longitud de paso se calcula de forma óptima en cada iteración para minimizar el error de aproximación.

[12] Además de la solución analítica y la numérica podríamos hablar también de la solución gráfica. Este tipo de análisis se ha utilizado ampliamente en economía, y a él nos referiremos en el apartado 2.4 y el capítulo 5. En este método de integración de soluciones se utiliza la representación gráfica de las formas funcionales del modelo –curva de fases o gráfico de transición– junto al análisis del flujo del sistema y para el análisis del comportamiento asintótico a largo plazo.

[13] Esto puede realizarse gráficamente sólo cuando el sistema tiene dimensión –número de variables de estado– 3 o inferior. Para dimensiones superiores se pueden utilizar otras técnicas de representación gráfica como los mapas de Poincaré, que suponen básicamente cortaduras del espacio de fases *n*-dimensional. Véase Alligood, et al. (1996, pp.48-49)

esta forma, una solución particular del sistema dinámico, es decir, una secuencia cronológica de estados del sistema, se podrá representar como una curva en el espacio de fases, una *órbita*, correspondiendo cada punto de la misma al estado que toma el sistema en un instante temporal concreto.

La representación de la órbita en el espacio de fases no proporciona imagen de velocidad del movimiento del sistema, sólo las distintas posiciones que éste va adoptando a medida que transcurre el tiempo, esto es, su órbita. Cuando estamos en el espacio de fases, el campo vectorial que define al sistema indica como se debe pasar de un estado a otro con el trascurso del tiempo. Cuando tratamos con sistemas en tiempo continuo la órbita que sigue a una condición inicial será una curva continua, mientras que en sistemas de tiempo discreto será una colección o secuencia de puntos en el espacio de fases.

La representación del flujo del sistema en el espacio de fases permite el análisis del comportamiento cualitativo global de todas las posibles órbitas que se inicien en algún $x_0 \in U \subset D$. El flujo permitirá por tanto detectar la posible existencia de *conjuntos atractores* o equilibrios dinámicos estables en la evolución temporal del sistema.

2.3. El concepto y tipos de equilibrio dinámico

En el estudio de la dinámica de un sistema, y una vez que se ha integrado su solución, se analiza cuál es el *equilibrio* a largo plazo. Estos equilibrios serán conjuntos invariantes bajo la acción del sistema. Esto es, un conjunto invariante será aquel subconjunto del espacio de fases $I \subset D \subset R^n$ tal que, si el sistema se sitúa en dicho conjunto invariante en algún instante del tiempo, entonces la dinámica del propio sistema hace que éste permanezca en dicho conjunto invariante de forma permanente. Es decir, un conjunto invariante será aquél $I \subset D \subset R^n$ tal que si $\Phi(t; \boldsymbol{x}) \in I$ para algún instante t^*, entonces $\Phi(t; \boldsymbol{x}) \in I$ $\forall t > t'$

Estos equilibrios podrán ser *atractores* o *repulsores* (Stewart, 1991, pp. 101-117). Un conjunto atractor será un equilibrio dinámico no-reducible con una cuenca de atracción, es decir, un equilibrio que posee un entorno del mismo para el cual el sistema termina atrapado dentro del equilibrio y que no se puede descomponer en otros subconjuntos disjuntos invariantes bajo la acción del sistema[14]. Esto es, un conjunto atractor, será un conjunto invariante cerrado $A \subset D$ tal que en un entorno del mismo $U \supset A$ el sistema acaba quedando atrapado en el mismo, $\Phi(t; \boldsymbol{x}) \in A$ a partir de algún t. La *cuenca de atracción*

[14] Como se verá más adelante, el atractor será no irreducible si el sistema dinámico es topológicamente transitivo.

será aquel entorno del atractor para el cuál toda trayectoria que parta de dicha cuenca acaba atrapada dentro del atractor (Ruelle ,1992 pp. 23-27) [15].

Los conjuntos repulsores serán aquellos equilibrios dinámicos o conjuntos invariantes que no son atractores. Dicho de otro modo, los conjuntos repulsores serán aquellos que no son estables, en el sentido de que si el sistema parte de un entorno del repulsor, se irá apartando de él a medida que pasa el tiempo.

Desde el punto de vista de la dinámica económica, los equilibrios dinámicos con mayor interés serán los conjuntos atractores –que siempre estarán presentes en los sistemas dinámicos disipativos o que disminuyen su volumen–. Es decir,
en el estudio de la dinámica de un sistema, y una vez que se ha integrado su solución, se analiza hacia dónde tiende la órbita que describe el sistema en el espacio de fases a medida que transcurre el tiempo. La región del espacio de fases hacia la que converge una órbita transcurrido un cierto periodo de tiempo transitorio será el *atractor* y los valores que tomen las variables de estado en dicho atractor determinarán el equilibrio a largo plazo alcanzado por el sistema.

No tenemos aquí en consideración las condiciones de existencia y unicidad de estos equilibrios[16]. Simplemente apuntaremos que dichos equilibrios pueden existir o no existir, ser únicos o múltiples y que la cuenca de atracción puede estar constituida por ciertas regiones acotadas del espacio de fases o por todo el dominio de definición del sistema. En este último caso hablaremos de equilibrios globalmente estables, reservando la denominación de estabilidad local para referirnos al comportamiento de las soluciones dentro del atractor.

Puntos fijos

Cuando el atractor está constituido por un único punto del espacio de fases, el equilibrio se dice que es del tipo *punto fijo* lo que implica que cuando el sistema alcanza dicho estado, permanece en él de forma permanente –figura 2.1–:

$$\boldsymbol{f}(\bar{\boldsymbol{x}}) = \bar{\boldsymbol{x}} \; ; \; \bar{\boldsymbol{x}} \in D \subset \mathbb{R}^n \tag{2.21}$$

Este es el típico equilibrio presente –y el único posible– en los sistemas lineales. Estos puntos fijos son puntos singulares del sistema dinámico que a su vez pueden clasificarse en nodos, puntos de silla –*saddle point*–, focos o centros. Los puntos fijos podrán ser asintóticamente estables, estables o inestables en función de la evolución temporal del sistema cuando éste se encuentra en un entorno dado del mismo: si el sistema converge a dicho punto

[15] Se dice que U $\subset$D es un *entorno* de $\boldsymbol{x} \in$ D si U contiene un abierto que contiene a $\boldsymbol{x}$.

[16] Sobre estos temas puede consultarse Brock y Malliaris (1989 , pp. 53-85)

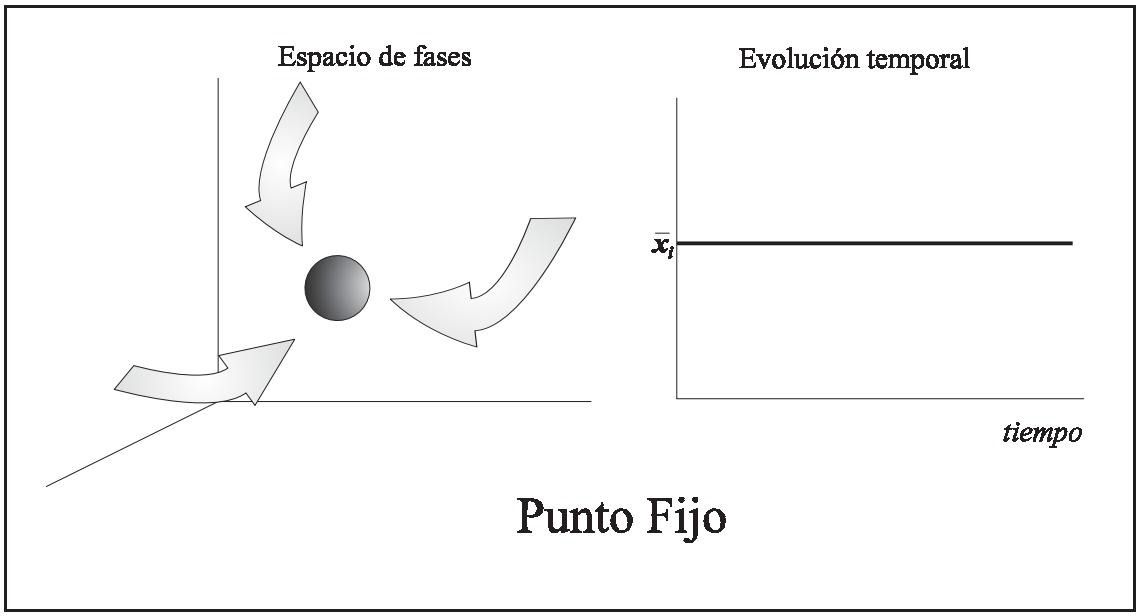


Figura 2.1. Punto Fijo.

fijo éste será asintóticamente estable; si se mantiene a cierta distancia de él se dice que el equilibrio es estable y si la solución del sistema se aleja o diverge del punto fijo a medida que transcurre el tiempo se dirá que es inestable (Gandolfo ,1997, pp. 346-359). Los puntos fijos constituyen los equilibrios típicamente considerados en los modelos tradicionales de dinámica económica en los que el equilibrio a largo plazo implica alcanzar un estado estacionario.

La existencia de no-linealidades en la modelización del sistema dinámico posibilita que aparezcan nuevos comportamientos a largo plazo, es decir, nuevos tipos de atractores: ciclos límite, toroes cuasi-periódicos y atractores extraños.

Ciclos límite

Los *ciclos límites* son atractores en los que las órbitas evolucionan siguiendo un ciclo regular en el que se irán repitiendo los mismos estados cada cierto de tiempo. En sistemas en tiempo discreto, los ciclos límite están integrados por un conjunto finito de puntos del espacio de fases que la órbita va recorriendo secuencialmente de forma regular y periódica –figura2.2–:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k+T_p)) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k)) \tag{2.22}$$

En el caso de sistemas continuos, los ciclos límites estarán compuestos por órbitas continuas cerradas en el espacio de fases:

$$\Phi(t)=\Phi(t+T_p) \tag{2.23}$$

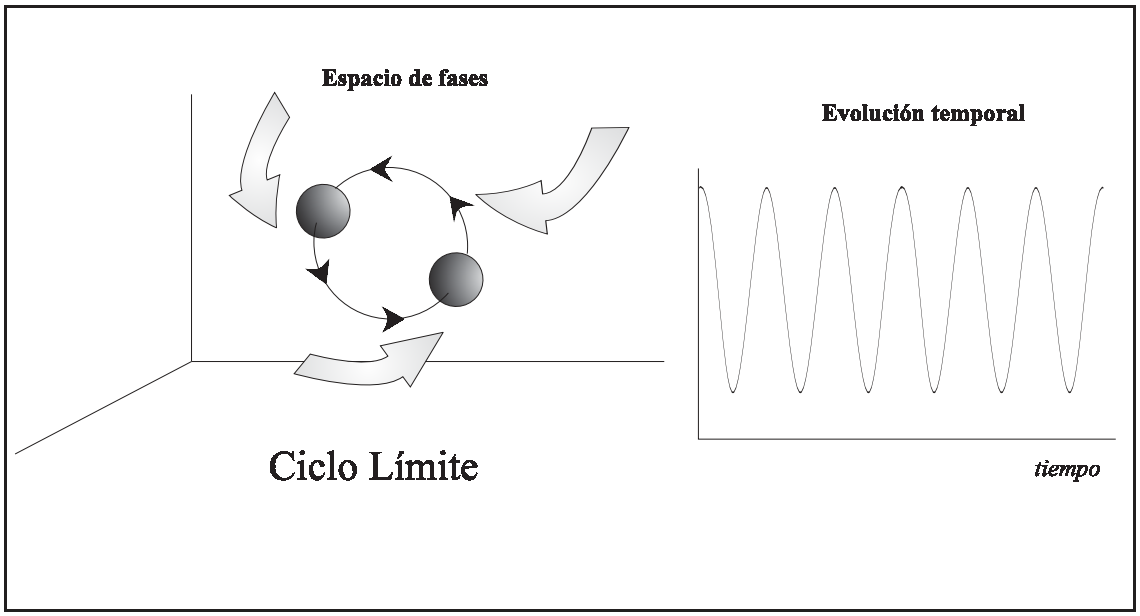


Figura 2.2. Ciclo límite periodo 2.

El periodo del ciclo límite será el mínimo valor temporal T_p para el cual se verifica (2.22) o (2.23), es decir, el mínimo lapso de tiempo que tarda en repetirse la misma secuencia de estados. Estos ciclos límite suponen la base sobre la que se sustentan las teorías del ciclo endógeno, en las que la propia dinámica del modelo conducirá a la economía hacia oscilaciones cíclicas perfectamente regulares. Las oscilaciones de estos ciclos límite presentarán un único periodo simple. Los atractores cuasi-periódicos y los atractores extraños permiten la aparición de oscilaciones más complejas.

Atractores toroidales cuasi-periódicos

Las soluciones a los sistemas dinámicos una vez alcanzados los atractores del tipo punto fijo y ciclo límite muestran una evolución temporal perfectamente regular y periódica. Los atractores cuasi-periódicos, constituyen un tercer tipo de equilibrio dinámico que permiten la presencia de un comportamiento oscilatorio cualitativamente más complejo a los anteriores.

Los movimientos toroidales están compuestos por dos o más osciladores periódicos no lineales independientes que se superponen. Es decir, los comportamientos dinámicos en estos atractores serán el resultado del solapamiento de varios movimientos periódicos simples bien definidos. Un toro-bidimensional, por ejemplo, procederá de un sistema dinámico del tipo (Lorenz, 1993, 174-180):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x) \\ \dot{y} &= f_2(y) \end{aligned} \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \tag{2.24}$$

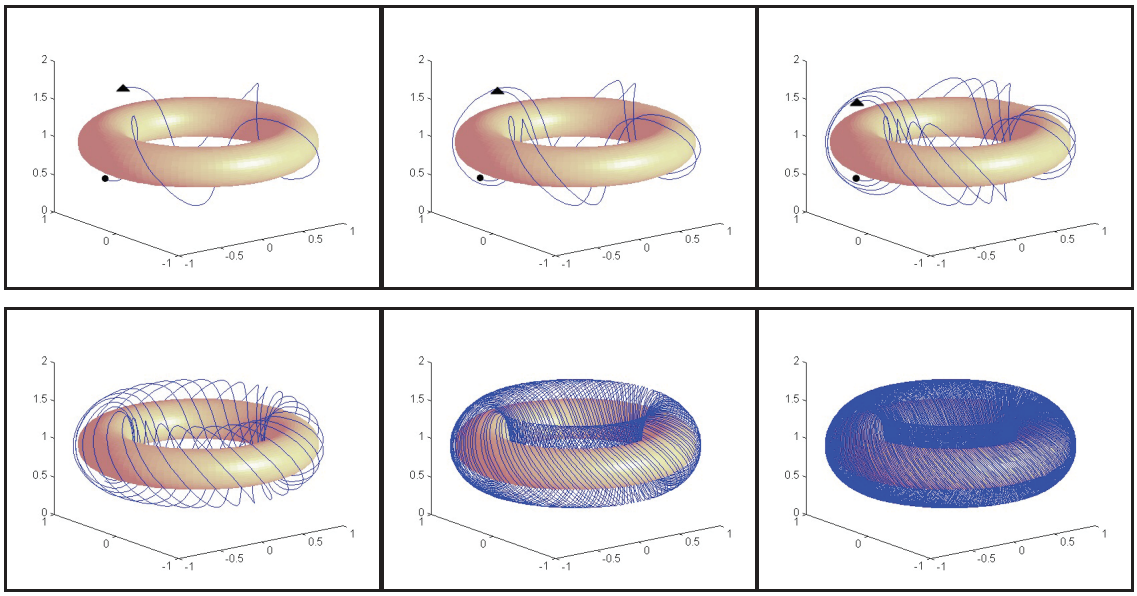


Figura 2.3. Atractor toroidal

El atractor que describe este sistema en el espacio de fases 4-dimensional –toro bidimensional– se forma a partir de la superposición de los dos ciclos límite independientes generados por los osciladores f_1 y f_2.

A propósito de su representación gráfica, resulta interesante dibujar el toro en un espacio de fases tridimensional. En la figura 2.3 representamos un toro bidimensional en el que, el movimiento del sistema en el atractor aparece como la superposición de dos movimientos circulares en distinta dirección y con distinto radio –un movimiento horizontal y otro vertical–. El sistema utilizado para obtener este toro es el siguiente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(a - b + z + d(1 - z^2)) - cy \\ \dot{y} &= y(a - b + z + d(1 - z^2)) + cx \\ \dot{z} &= az - (x^2 + y^2 + z^2) \end{aligned} \tag{3.25}$$

con $a = 2.01$, $b = 3$, $c = 0.25$, $d = 0.2$, $x_0 = -0.26$, $y_0 = 0.1$ y $z_0 = 1.1$.

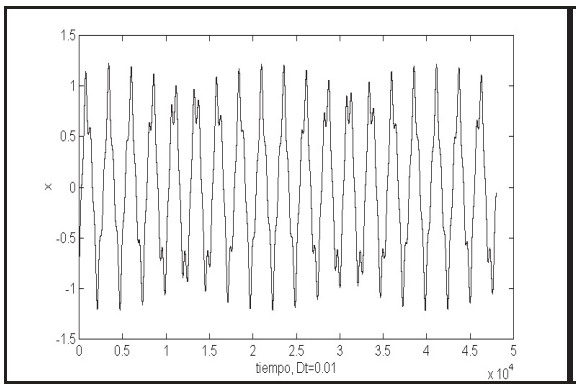


Figura 2.4

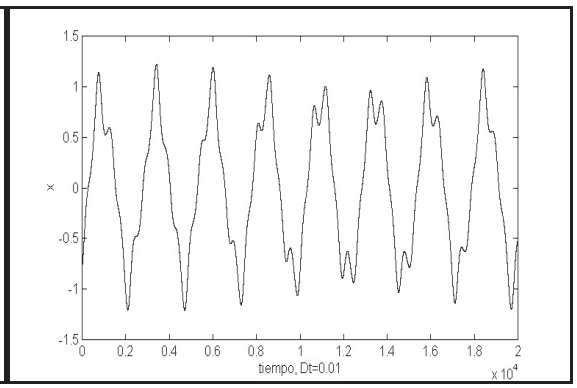


Figura 2.5

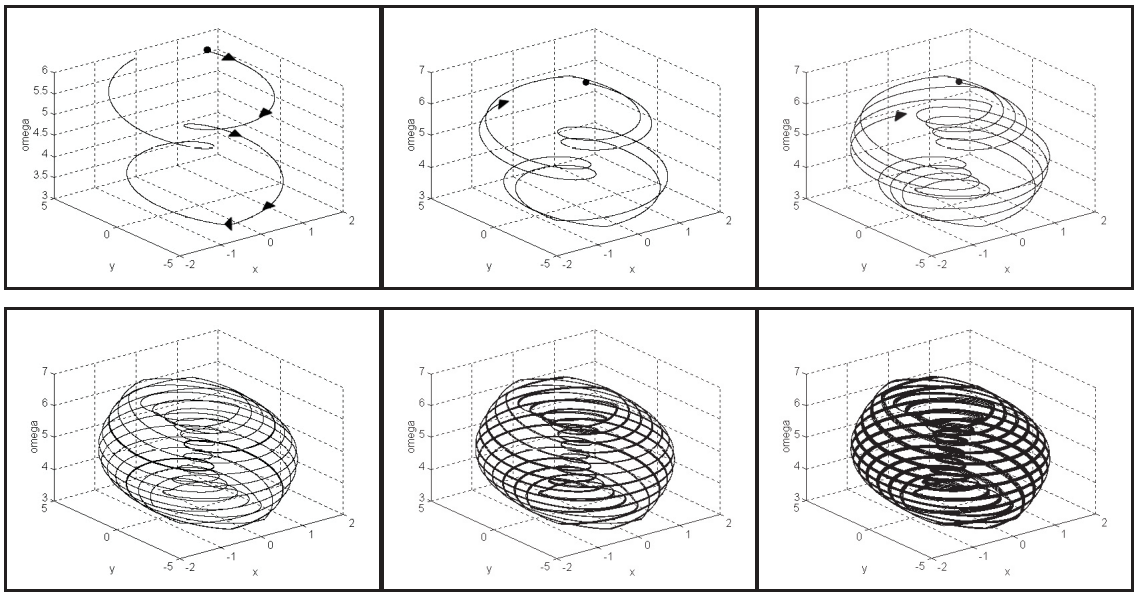


Figura 2.6

Las trayectorias que muestran la solución particular del sistema (2.25) –figuras 2.4 y 2.5–, es más compleja que la descrita por los ciclos límite, aunque sin llegar a la complejidad de las trayectorias caóticas. De hecho, estas trayectorias se denominan cuasi-periódicas y no caóticas ya que no presentan las características propias de los movimientos caóticos.

Los toros son, por tanto, atractores que aunque presentan un elevado nivel de complejidad están compuestos por dos o más movimientos periódicos regulares en distintas direcciones. Esta periodicidad o cuasi-periodicidad –en el sentido de que la periodicidad de las variables de estado no es simple sino la suma de dos o más periodicidades independientes– es lo que permite englobar a estos sistemas toroidales dentro de lo que denominaremos sistemas de dinámica simple.

Terminamos este apartado dedicado a los movimientos cuasi-periódicos toroidales de dinámica simple apuntando, de nuevo, que estos sistemas pueden converger a atractores aparentemente complejos, –distintos a los del tipo *donut* como el anterior, aunque topológicamente equivalentes–, pero que siguen sin presentar dinámica compleja en el sentido apuntado por los sistemas caóticos que analizaremos en el próximo apartado.

Para mostrar la complejidad que pueden presentar estos sistemas toroidales representamos en la figura 2.6 el toro resultante de la integración del siguiente sistema (Alligood, Sauer, Yorke,1996, pp350-352):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -c^2 x + (c^2 - 1) sen\theta \\ \dot{\theta} &= 1 \end{aligned} \qquad (3.26)$$

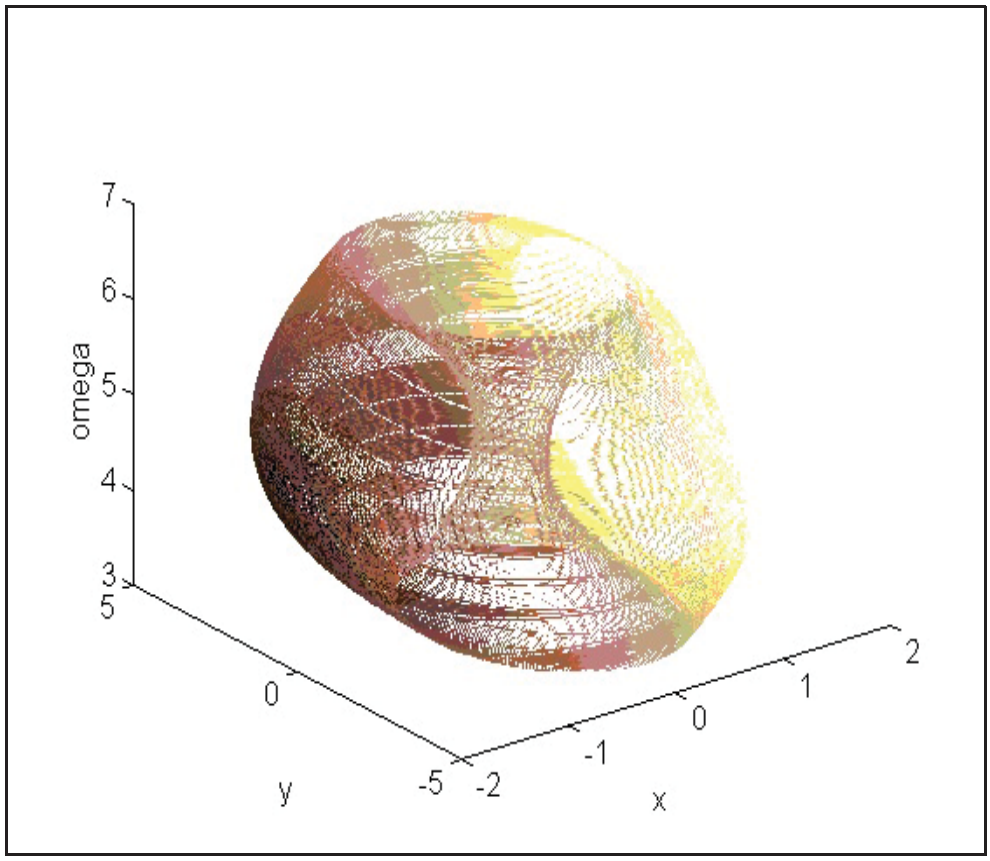


Figura 2.7

con $c=\pi$, $x_0=0$, $y_0=\pi+1$, $\theta_0=0$. Como puede observarse –figura 2.7–, a medida que transcurre el tiempo tiende a llenarse toda la superficie ocupada por el toro.

En las figuras 2.8 y 2.9, representamos la evolución temporal cuasi periódica descrita por la variable x bajo la acción del sistema (2.26). La complejidad presente en las soluciones a estos sistemas cuasi-periódicos fue utilizada por la dinámica clásica determinista para explicar los fenómenos de

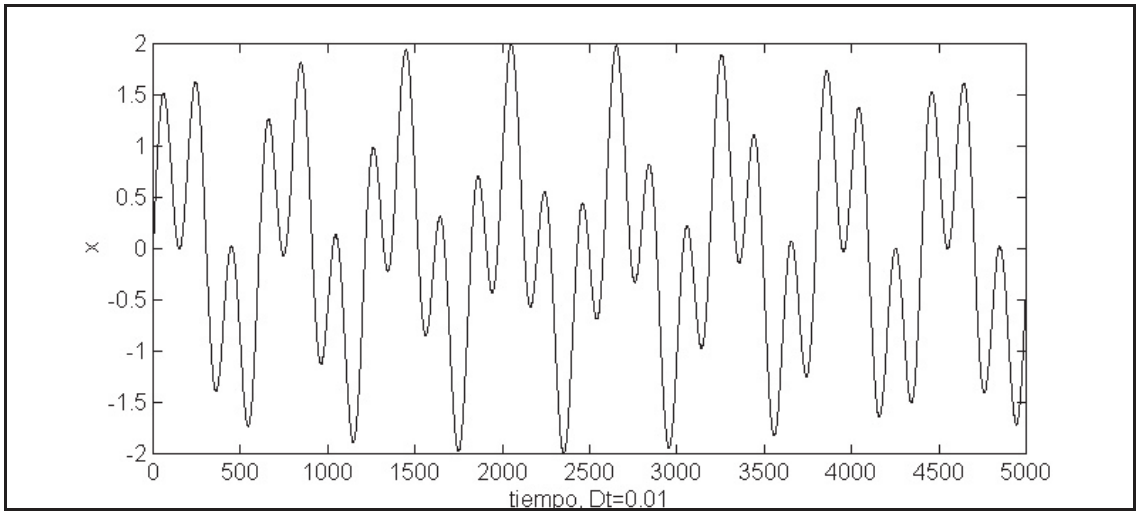


Figura 2.8

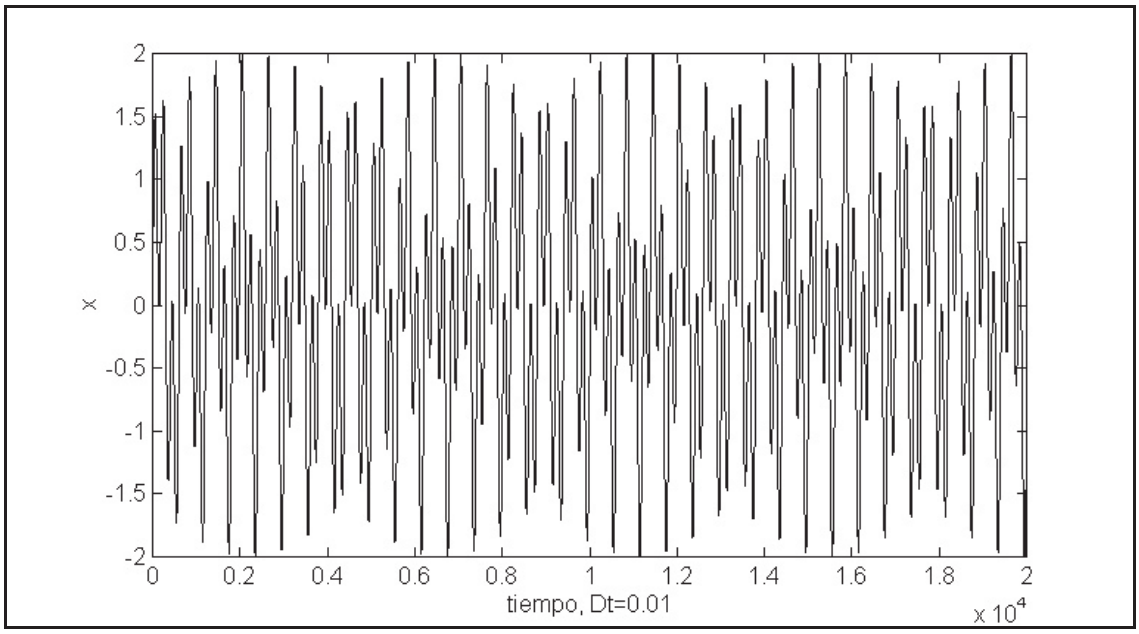


Figura 2.9

evolución dinámica irregular. Estos sistemas pueden estudiarse utilizando el análisis armónico, con el que es posible revelar las periodicidades ocultas componen el movimiento cuasi-periódico –apartado 4.4–. Estos sistemas quedan incluidos dentro de los que hemos denominado de dinámica simple debido a su incapacidad para representar la complejidad dinámica de muchos fenómenos observados en la realidad sin recurrir a variables puramente aleatorias o a sistemas de elevada dimensión.

Atractores extraños

Los *atractores extraños*[17] serán aquéllos distintos al punto fijo, al ciclo límite y a los atractores cuasiperiódicos, es decir, una región acotada del espacio de fase compuesta por un número *infinito* de puntos que la órbita irá recorriendo secuencialmente y de manera totalmente –figura 2.10–. Estos atractores poseen una estructura extraña, en el sentido de que están integrados, como ya hemos comentado, por un número infinito de puntos, pero concentrados en una región finita del espacio de fases. Esto se consigue con el continuo plegamiento, estiramiento y retorcimiento del espacio de fases[18].

[17] Los primeros en utilizar esta denominación de atractor extraño para este tipo de equilibrios dinámicos a largo plazo fueros Takens y Ruelle en su artículo sobre el estudio de las turbulencias de 1971: RuelleD. Y Takens, F. «On the nature of Turbulence». Commun. Math. Phys. no.20, pp. 167-192 (1971) y no. 23, pp.343-344 (1971) (Ruelle 1993, p.61).

[18] Este comportamiento extraño es lo que hace que este tipo de atractores pueda considerarse como un *fractal* , figuras geométricas con dimensión fractal o de Hausdorff superior a su dimensión topológica. véase el próximo apartado 3.2.

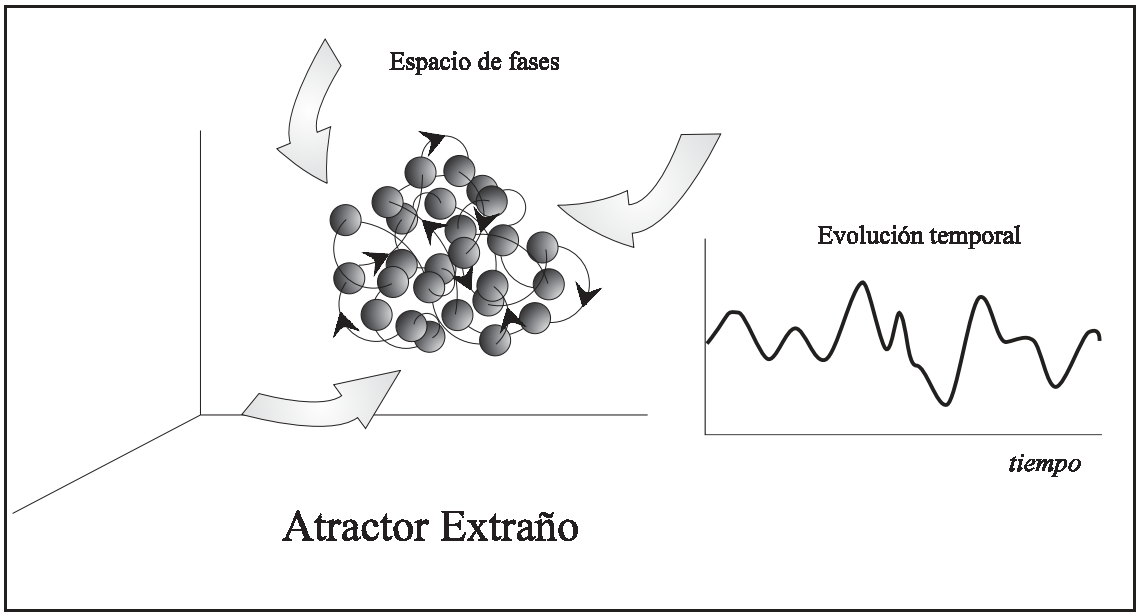


Figura 2.10 Atractor Extraño

Como consecuencia de ello, la evolución de la trayectoria solución del sistema en el atractor extraño presentará un comportamiento cíclico aperiódico –en el que no se observa un periodo finito regular o en el que el periodo tiende hacia infinito– y altamente inestable. La estructura de estos atractores extraños se encuentra en el núcleo del comportamiento irregular y aparentemente aleatorio de los sistemas denominados *caóticos* deterministas.

2.4. El caos determinista.

A partir de la década de los 60, con la aparición de sistemas con equilibrios dinámicos del tipo atractor extraño, los *sistemas dinámicos caóticos,* surge un nuevo y todavía joven campo de conocimiento que ha venido a denominarse *teoría o matemática del caos*. Esta teoría del caos está constituida por todo un conjunto de técnicas matemáticas que sirven para estudiar el comportamiento de procesos que, aparentemente, se comportan de forma aleatoria, aperiódica y carente de toda regularidad, aunque de hecho, su desarrollo está determinado por reglas bien precisas, es decir, por leyes deterministas[19]. El estudio de procesos deterministas que muestran comportamientos altamente complicados fue iniciado ya por Henri Poincaré a finales del siglo pasado, aunque hubo que esperar a los trabajos de Lorenz (1963) y Smale (1967) para retomar el análisis de estos sistemas caóticos. A partir de entonces empezaron a surgir distintas

[19] Para una primera introducción a la teoría del caos puede consultarse Stewart (1991), Gleick (1994), Lorenz (1995), Prigogine (1997), Nieto de Alba (1998) y Escohotado (1999). De una forma más formal esta primera aproximación a la teoría del caos puede realizarse con Martín; Morán y Reyes (1995) y Alligood, Sauer y Yorke(1996).

aplicaciones del caos determinista primero en la física, y posteriormente en a otras disciplinas de conocimiento como la biología, la química, la meteorología, la medicina, la sociología, y la economía[20].

Los sistemas caóticos se caracterizan, como hemos comentado, porque su evolución en el espacio de fases converge hacia atractores extraños, resultando el comportamiento de estos sistemas irregular y aperiódico. Es por ello, que la consideración de estos sistemas caóticos supone una ruptura frente a la visión tradicional de los sistemas dinámicos deterministas. Hasta la aparición del caos, y debido a la regularidad que alcanzaban las soluciones en equilibrio de los sistemas dinámicos conocidos –puntos fijos, ciclos límites y atractores cuasi-periódicos–, era necesaria la introducción de comportamientos estocásticos en los sistemas deterministas para poder explicar con modelos estructuralmente simples la complejidad e irregularidad observada en la evolución temporal de multitud de fenómenos dinámicos. Esa dualidad entre los sistemas deterministas y los sistemas estocásticos ha quedado rota con la consideración de los sistemas caóticos[21], que se sitúan en una posición intermedia, haciendo necesaria la distinción, dentro del ámbito puramente determinista, de la *dinámica simple* frente a la *dinámica compleja* (Day 1994, p. 19). La dinámica simple será aquella que converge a comportamientos cíclicos regulares –ciclos límites [22]– y puede considerarse como simple porque puede caracterizarse perfectamente por un número finito de valores que se repiten de forma periódica a intervalos fijos de tiempo. En el caso de los atractores toroidales las trayectorias cuasi-periódicas están compuestas por la superposición de varios ciclos límite de periodicidad simple aunque independiente. Así, aunque su evolución presenta cierta complejidad dinámica, deben incluirse también dentro de este grupo de sistemas denominados de dinámica simple. Por otra parte, la dinámica compleja será aquella que converge a comportamientos cíclicos irregulares y aperiódicos sin necesidad de introducir componentes estocásticos –caos determinista–.

De forma esquemática podemos resumir en tres las propiedades fundamentales de los sistemas caóticos[23]. Las dos primeras ya han sido comentadas con anterioridad: se trata de sistemas dinámicos deterministas no lineales que convergen a atractores extraños –sus movimientos a largo plazo

[20] Una amplia muestra de estas aplicaciones se puede encontrar en en Hall (1991). Para una visión de las posibles aplicaciones en Economía puede consultarse Fernández Díaz (1994 y 2000)

[21] Sobre el papel de los sistemas caóticos en la ruptura de la polémica determinismo vs. indeterminismo véase Prigogine (1997) y Fernández Díaz (1995a y 2000).

[22] Obsérvese que el punto fijo puede considerarse como un ciclo límite de período uno

[23] Una definición más rigurosa de las propiedades que han de cumplir los sistemas caóticos puede encontrarse más adelante en este apartado en el que seguimos la definición de Devaney (1989, p. 50).

están acotados–; sus soluciones presentan una elevada irregularidad y aperiodicidad; y presentan una dependencia sensitiva a las condiciones iniciales. Debido a la importancia de ésta última propiedad vamos a comentar, aunque sea brevemente, en qué consiste, cuál es su origen y qué consecuencias se desprenden de la misma.

Dependencia sensitiva a las condiciones iniciales

La dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales se deriva, nuevamente, de la compleja estructura de los atractores extraños[24]. Antes de comentar en qué consiste esta propiedad, retomemos por un momento los atractores periódicos del tipo punto fijo y ciclo límite. Como el número de estados que componen estos equilibrios es finito, independientemente de cual sea el primer punto del atractor que alcance la órbita en su camino desde su posición inicial, con el transcurso del tiempo, y una vez completado un periodo, las órbitas volverán a repetirse periodo tras periodo perdiendo entonces el sistema la memoria sobre el estado inicial de partida. Es decir, dos órbitas que partan de condiciones iniciales distintas pero arbitrariamente próximas, permanecerán igualmente próximas con el transcurso del tiempo sin que la solución del sistema exhiba ninguna dependencia a las condiciones iniciales[25].

Los toros cuasi-periódicos son, por otro lado, atractores que aunque presentan un elevado nivel de complejidad están compuestos por dos o más movimientos periódicos en distintas direcciones. Estos toros no presentarán, en general, dependencia sensitiva a las condiciones iniciales. Para mostrar la escasa dependencia respecto a las condiciones iniciales de los atractores cuasi-periódicos, mostramos en la figura 2.11 el efecto que tiene sobre la trayectoria descrita por la variable de estado x del anterior sistema (2.25) un cambio en la condición inicial x_0. Como puede observarse, este cambio en las condiciones iniciales no produce una alteración importante en la trayectoria temporal, manteniéndose acotada en pequeños valores la distancia entre ambas soluciones a lo largo de toda la trayectoria. Es decir, pequeñas desviaciones en las condiciones iniciales producen pequeñas desviaciones en la evolución futura de las trayectorias. Este fenómeno es el característico del paradigma tradicional determinista, y en el que descansa la afirmación de que cuando trabajamos con sistemas deterministas, pueden realizarse predicciones ajustadas de la evolución futura del mismo, siendo los errores de predicción tanto más bajos cuanto menores sean los errores iniciales de medida.

---

[24] Sobre la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales y otras propiedades de los atractores extraños puede consultarse Ruelle (1992, pp. 23-27).

[25] Dicha diferencia inicial se eliminará por completo si estamos ante sistemas dinámicos que convergen a un atractor del tipo punto fijo.

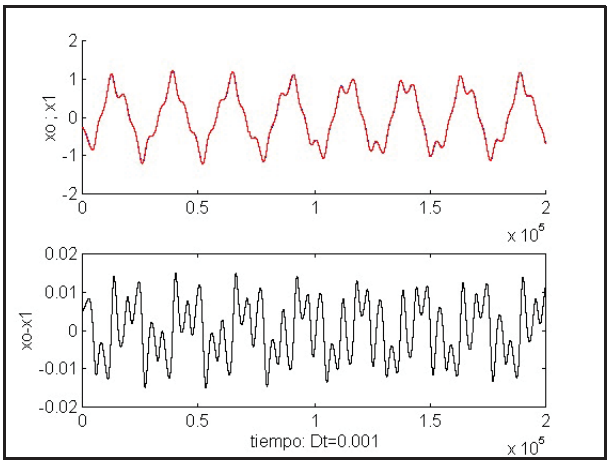


Figura 2.11

Como ya se ha apuntado, con los sistemas deterministas de dinámica caótica este postulado sobre la capacidad de predicción de los sistemas deterministas se verá alterado debido a la existencia de una fuerte dependencia de la evolución futura del sistema respecto de sus condiciones iniciales. En el interior de los atractores extraños la evolución del sistema está sujeta a una inestabilidad intrínseca debido a que en estos equilibrios el periodo tiende a infinito. De esta forma, y a diferencia de lo que sucede en la dinámica simple, dos órbitas que partan de estados iniciales diferentes aunque arbitrariamente próximos, nunca convergerán en su comportamiento. Es más, estas dos órbitas tenderán a alejarse en su comportamiento a un ritmo exponencial. Esta característica de los sistemas caóticos es conocida como dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

La implicación inmediata de esta dependencia a las condiciones iniciales es la incapacidad práctica para realizar cualquier tipo de predicción ajustada en la evolución futura de la órbita más allá del corto plazo. En efecto, la previsión sobre el futuro de un sistema dinámico caótico conocido, requiere medir de alguna forma cuanto valen cada una de las variables de estado del sistema en el instante a partir del cual queremos realizar la predicción. Al tratarse de un sistema determinista y conocido, podría esperarse una predicción tan ajustada como lo sea la medición del estado del sistema, en el sentido de que si se comete un pequeño error en la medida, la predicción resultante se separará de la verdadera trayectoria del sistema también en una pequeña cantidad. De hecho esto es lo que ocurre si estamos ante sistemas no caóticos de dinámica simple. Sin embargo, el carácter caótico del sistema hace que éste presente dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales. Los errores de medición del sistema irán creciendo exponencialmente, de forma que aunque inicialmente el comportamiento real del sistema se encuentre próximo al de la predicción, aquél irá alejándose a medida que transcurra el tiempo, con lo que las predicciones irán perdiendo credibilidad. En la práctica y por muchos recursos de los que se disponga, la precisión o exactitud de la medida de los fenómenos dinámicos reales siempre está limitada y, por tanto, también la fiabilidad de las previsiones si dichos fenómenos se comportan caóticamente.

Y todo ello incluso cuando se conozca el verdadero sistema que rige la evolución del sistema –cuando éste sea desconocido, los problemas de predicción se verán agravados–.

Estamos, por tanto, ante sistemas deterministas que exigen para una perfecta predicción un grado de conocimiento del sistema infinitamente exacto. Nos encontramos de nuevo ante la ruptura del dualismo tradicional entre sistemas deterministas y estocásticos, situándose el caos determinista en una posición intermedia. Haciendo referencia a la visión tradicional del determinismo, podríamos calificar entonces a los sistemas caóticos como de asintóticamente deterministas (Fernández Díaz, 2000, pp.35-37), debido precisamente a esa necesidad de conocimiento del estado del sistema con exactitud infinita para poder determinar de forma precisa la evolución futura del sistema. De manera análoga, las predicciones hacia atrás en el tiempo tampoco serán posibles en la práctica bajo regímenes caóticos. El caos determinista, por tanto, proporciona también una posible explicación a la irreversibilidad del tiempo, es decir, a la imposibilidad de reconstruir el pasado de un fenómeno dinámico a partir del conocimiento presente –la flecha del tiempo[26]–. Por el contrario, el caos determinista estaría apuntando a la existencia en la práctica de una memoria limitada sobre el comportamiento del sistema en el pasado, es decir, un periodo de tiempo a partir del cual resulta imposible hacer retrovisiones ajustadas sobre el estado pasado del sistema. Esta postura –imposibilidad de realizar previsiones o retrovisiones ajustadas en la práctica– es precisamente la que sostienen los defensores del paradigma del indeterminismo. El paradigma indeterminista afirma que es imposible en la práctica encontrar las leyes deterministas que rigen la evolución temporal de los fenómenos porque dichas leyes, simplemente, no existen. Los sistemas caóticos suponen por el contrario, que sí existe una relación o ley determinista que explica la evolución de los fenómenos de la naturaleza, pero que aunque dicho sistema sea perfectamente conocido, existe un *indeterminismo práctico* que imposibilita realizar predicciones o retrovisiones sobre el comportamiento futuro o pasado de los sistemas observados en la naturaleza, precisamente, por la incapacidad práctica de obtener un conocimiento infinitamente exacto de la realidad (Fernández Díaz, 2000, p.35).

A modo de conclusión podemos decir que la dependencia a las condiciones iniciales puede explicar la incapacidad práctica de realizar predicciones más allá del corto plazo. A pesar de ello, con la utilización de las técnicas del caos determinista es posible obtener predicciones sobre el futuro de los sistemas que, al menos en el corto plazo, mejoren las predicciones basadas modelos lineales puramente estocásticos.

[26] Sobre la importancia de la irreversabilidad del tiempo en economía, y sus aplicaciones a la economía, véase Nieto de Alba (1998)

Definición de caos determinista

Retomamos ahora el estudio de los sistemas caóticos, proporcionando una definición formal del caos determinista. A este respecto debemos comenzar apuntando que no existe una definición formal aceptada con generalidad. En principio, los sistemas caóticos serán aquellos que presentan las tres propiedades apuntadas anteriormente, esto es, se trata de sistemas dinámicos que se mantienen en el largo plazo en una región acotada del espacio de fases, en los que las trayectorias que describe el sistema son aperiódicas y altamente irregulares y que presentan una alta dependencia respecto a las condiciones iniciales. A continuación, y por ser una de las más utilizadas, recogemos la definición de caos determinista en sentido topológico introducida por Devaney (1989, p.50) para las aplicaciones discretas. Bajo esta definición, se entiende que un sistema será caótico si presenta las siguientes propiedades:

(i) Transitividad topológica o mezclado.

La aplicación $\boldsymbol{f}: D \rightarrow D$ se dice topológicamente transitiva si para cualquier par de subconjuntos $V,\ U \subset D$, entonces, existe un número real $s \geq 0$ tal que

$$\boldsymbol{f}^{s)}(U) \cap V \neq \varnothing \tag{2.27}$$

La interpretación intuitiva de esta propiedad es que las aplicaciones topológicamente transitivas tienen puntos que se mueven, bajo la acción del sistema, desde un conjunto arbitrariamente pequeño a otro vecino. Es decir, que el atractor caótico no se puede descomponer en dos conjuntos abiertos disjuntos invariantes bajo la acción del sistema

(ii) Dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales.

La aplicación $\boldsymbol{f}: D \rightarrow D$ presenta dependencia sensitiva a las condiciones iniciales si existe un $\delta>0$ tal que, para cualquier $\boldsymbol{x} \in D$ y cualquier entorno $V \subset D$ de $\boldsymbol{x}$, entonces, existe un $\boldsymbol{y} \in V$ y un número real $s \geq 0$ tal que

$$\left|\boldsymbol{f}^{s)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}^{s)}(\boldsymbol{y})\right| > \delta \tag{2.28}$$

Es decir, sus respectivas órbitas tienden a separarse o evolucionar de manera distinta. Esta condición no necesita que *todos* los puntos del entorno tengan, necesariamente, que separarse. Se exige, tan sólo, que exista alguno que sí lo haga, de hecho en el interior del atractor coexisten puntos fijos y equilibrios periódicos que no se separarán entre sí. Dichos equilibrios serán, sin embargo inestables.

(iii) Los puntos periódicos son densos en el atractor.

Formalmente, se dice que un conjunto $U \subset S$ es denso en S si la frontera de U coincide con S. Más intuitivamente, se dice que U será denso en S, si arbitrariamente cerca de cada punto de U existe algún punto de S, esto es, si para cada $\boldsymbol{x} \in U$ cualquier entorno arbitrariamente pequeño de $\boldsymbol{x}$ contiene algún punto $\boldsymbol{y} \in S$

Esta propiedad introduce cierto elemento de regularidad en los sistemas caóticos, en el sentido de que para que un sistema sea caótico es necesario que existan puntos periódicos arbitrariamente cerca de cualquier punto del atractor extraño. Estos puntos periódicos serán, sin embargo, inestables, y tendrán un papel central en la teoría del control del caos cuyo objetivo será, precisamente, estabilizar, de alguna manera, alguno de esos puntos periódicos inestables.

Antes de continuar con nuestra exposición, queremos apuntar que con posterioridad a esta definición del caos determinista, se demostró que las propiedades (*i*) y (*iii*) implican la propiedad (*ii*), y que bajo ciertas condiciones la propiedad (*i*) implica la (*ii*) y la (*iii*), por lo que en muchos casos la definición de caos puede reducirse a la propiedad de mezcla (Martín et al.1995, p.160). En muchos manuales y textos sobre el caos, por otra parte, la definición de caos se limita a la existencia de sensibilidad a las condiciones iniciales dentro del atractor –Lorenz (1995) y Alligood et al.(1996), entre otros–. Aquí seguimos a Fernández Díaz (2000, p.88) quién utiliza la anterior de Devaney.

Un ejemplo: La ecuación logística

Uno de los ejemplos más utilizados para mostrar las propieades básicas de los sistemas caóticos es la conocida como ecuación logística. La ecuación logística, introducida por P.F. Verhulst en 1845 (Nieto de Alba, 1998, p. 69), es uno de los sistemas dinámicos caóticos más ampliamente estudiados, comenzando su relación con la matemática del caos cuando fue utilizada para el estudio de la dinámica de las poblaciones en ecosistemas cerrados por el biólogo Robert May (1976). Con la ecuación logística, May pretendía extender la ley geométrica de crecimiento de la población de Malthus, según la cual, por cada individuo en el periodo t, existirán α en el siguiente periodo $t+1$:

$$x_t=\alpha x_{t+1} \tag{2.29}$$

Para tener en cuenta los posibles efectos de una saturación del ecosistema que frenase el crecimiento de la población, May introdujo en (2.29) el supuesto de que la tasa media de crecimiento de la población, α, decrecía linealmente con el número de individuos previamente existentes en el ecosistema, llegando así a la conocida como ecuación logística:

$$x_{t+1}=f(x_t)=\mu x_t(1-x_t) \quad ; \; t\in\mathbb{N} \tag{2.30}$$

con $x_t \in[0\ ,\ 1]$, esto es, normalizando el número máximo de individuos que pueden coexistir en el sistema. Por su parte el parámetro $\mu\in[0\ ,\ 4]$ recoge la tasa de crecimiento potencial de la población cuando no existe presión sobre el ecosistema, es decir, μ será la tasa de crecimiento para valores pequeños de x_t, coincidiendo en este caso ($1-x_t \approx 0$) la ecuación logística (2.30) con la ley de Malthus (2.29)[27].

[27] Devaney (1984) extiende el estudio de la ecuación logística (2.30) para un mayor rango de posibles valores de μ.

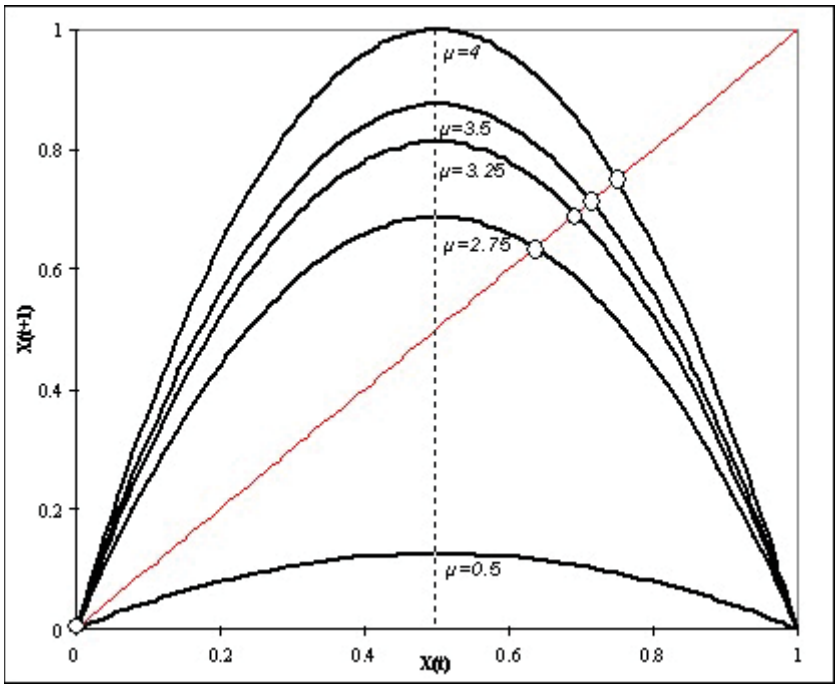


Figura 2.12

La ecuación o aplicación logística presenta una estructura simple aunque no lineal, y a pesar de ello, permite la aparición de comportamientos dinámicos altamente complejos. La logística pertenece a una clase de funciones continuas caracterizadas por tener un único punto crítico donde se anula la derivada de la función –funciones *unimodales (unimodals*)–. Esta clase de funciones serán posteriormente utilizadas en el capítulo 7 para la representación de la dinámica económica. Como las propiedades básicas de esta ecuación logística son fácilmente extrapolables a toda las funciones de esa clase de aplicaciones con forma de campana, repasaremos a continuación las características básicas de la dinámica de la ecuación logística.

La ecuación (2.30), proporciona toda una familia de posibles sistemas dinámicos en función de los valores concretos que tome el parámetro μ, denominado también parámetro de control. Es decir, existirán tantas soluciones a (2.30) como posibles valores del parámetro de control μ. Desgraciadamente, resulta altamente complicado integrar la solución analítica de la aplicación logística[28]. Es por ello, que limitamos su estudioal análisis cualitativo de las soluciones numéricas o gráficas obtenidas por la iteración sucesiva de (2.30) a partir de una condición inicial. El *análisis de la dinámica comparativa* de la ecuación logística consiste precisamente en estudiar los

[28] Si bien la solución analítica de la versión en tiempo continuo de la ecuación logística es bien conocida, para el caso discreto sólo es posible integrar la solución para algunos valores concretos del parámetro de control. Así, por ejemplo, la solución cuado $\mu=4$ será $x_t=1/2\cdot(1-cos(2^t+c)$, siendo c la constante arbitraria de integración, $c=arcocos(1-2x_0)$, siendo x_0 el estado inicial del sistema. Utilizando esta solución explícita es posible demostrar que para este valor del parámetro μ, se verifican las propiedades (i), (ii) y (iii), demostrándose así que la aplicación es caótica (Gandolfo, 1997, pp.508-509).

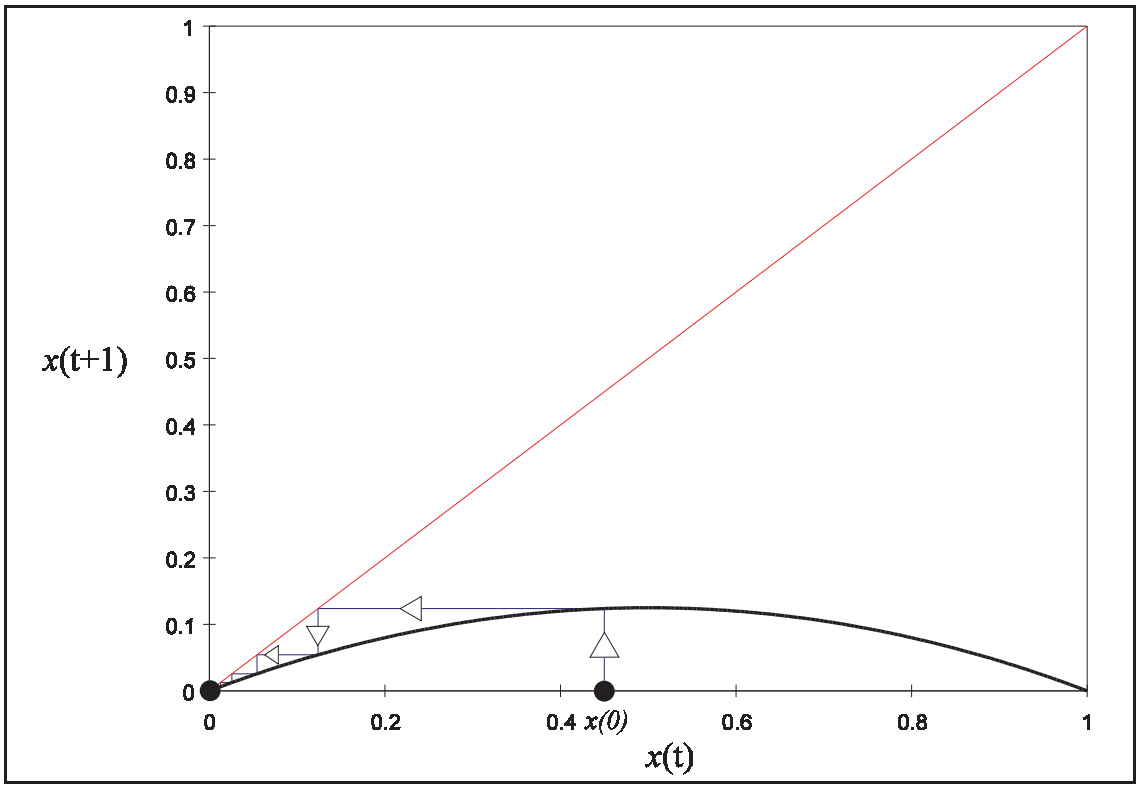


Figura 2.13. Curva de fase de la ecuación logística μ=0.5

distintos regímenes de comportamiento del sistema desde el punto de vista cualitativo para los posibles valores de μ en el espacio paramétrico (Day, 1994, pp.19-20).

La aplicación logística es un sistema dinámico en tiempo discreto de dimensión uno. Por lo tanto, el espacio de fases de dicha aplicación será el intervalo [0,1] de la recta real. Para la representación gráfica de las soluciones de la ecuación logística –y en general, para todas las aplicaciones dinámicas unidimensionales– suele utilizarse, en lugar de la representación de la órbita sobre el espacio de fases –sucesión de puntos sobre un intervalo de la recta real–, el denominado gráfico de la *curva de fase* o *gráfico de transición*. En este gráfico se representa el grafo la propia ecuación dinámica, que en el caso de (2.30) será una parábola que pasa por el origen (0,0) y por el punto (1,0). El máximo de dicha función se encontrará en el punto (1/2, μ/4) –figura 2.12– .

Para cualquier valor del parámetro de control en el espacio paramétrico, $\mu \in [0\ ,\ 4]$, el segmento de la curva de fase correspondiente a $0 \le x \le 1$ está contenido en el cuadrado unidad [0,1]×[0,1], por lo que la ecuación logística está bien definida (Martín et al. 1995, p.114).

La curva de fases permite la representación gráfica de las soluciones de la aplicación logística. Partiendo de una situación inicial x_0, la curva de fases proporciona el siguiente valor en el tiempo de la variable de estado $x_1=f(x_0)=\mu x_0(1-x_0)$. A partir de este nuevo valor, haciendo uso de la recta de 45º

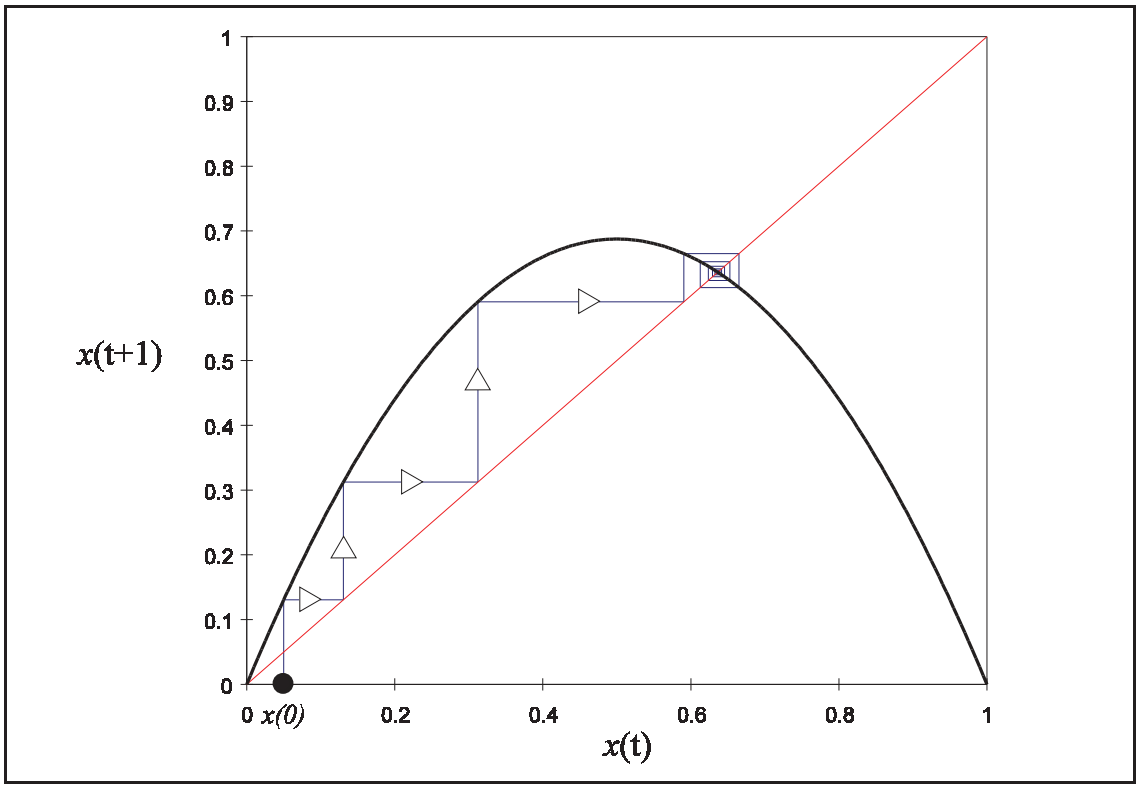


Figura 2.14. Curva de fase de la ecuación logística, μ=2.75

es posible obtener la transición que sigue la trayectoria descrita por el sistema para instantes posteriores por iteración sucesiva del sistema (2.30).

La representación del gráfico de transición permite, a su vez, identificar los puntos fijos de la ecuación logística como los puntos de corte entre la curva de fase y la recta de 45º:

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 &= 0 \\ \bar{x}_1 &= (\mu - 1)/\mu \end{aligned} \tag{2.31}$$

Con ayuda del gráfico de la curva de fases, realizaremos a continuación el análisis de dinámica comparativa de la ecuación logística para distintos valores del parámetro μ. Cuando $0<\mu<1$, $\bar{x}_1$ será negativo, quedando fuera del dominio de definición de la aplicación (2.30), por lo que el único punto fijo del sistema será $\bar{x}_0=0$. Este equilibrio constituye un atractor del tipo punto fijo globalmente estable[29], esto es, que a partir de cualquier estado inicial, el sistema acaba convergiendo al punto fijo $\bar{x}_0=0$. Una vez alcanzado este equilibrio dinámico, y en ausencia de perturbaciones exógenas que lo aparten de él, el sistema permanecerá estacionario en dicho punto fijo de forma indefinida. En la figura 2.13 representamos el gráfico de transición para μ=0.5

Cuando $1<\mu<3$ el punto fijo $\bar{x}_0=0$ pierde su estabilidad convirtiéndose en un punto repulsivo. Las soluciones a la ecuación logística para este rango del

[29] Sobre el concepto de estabilidad, véase el próximo apartado 3.1.

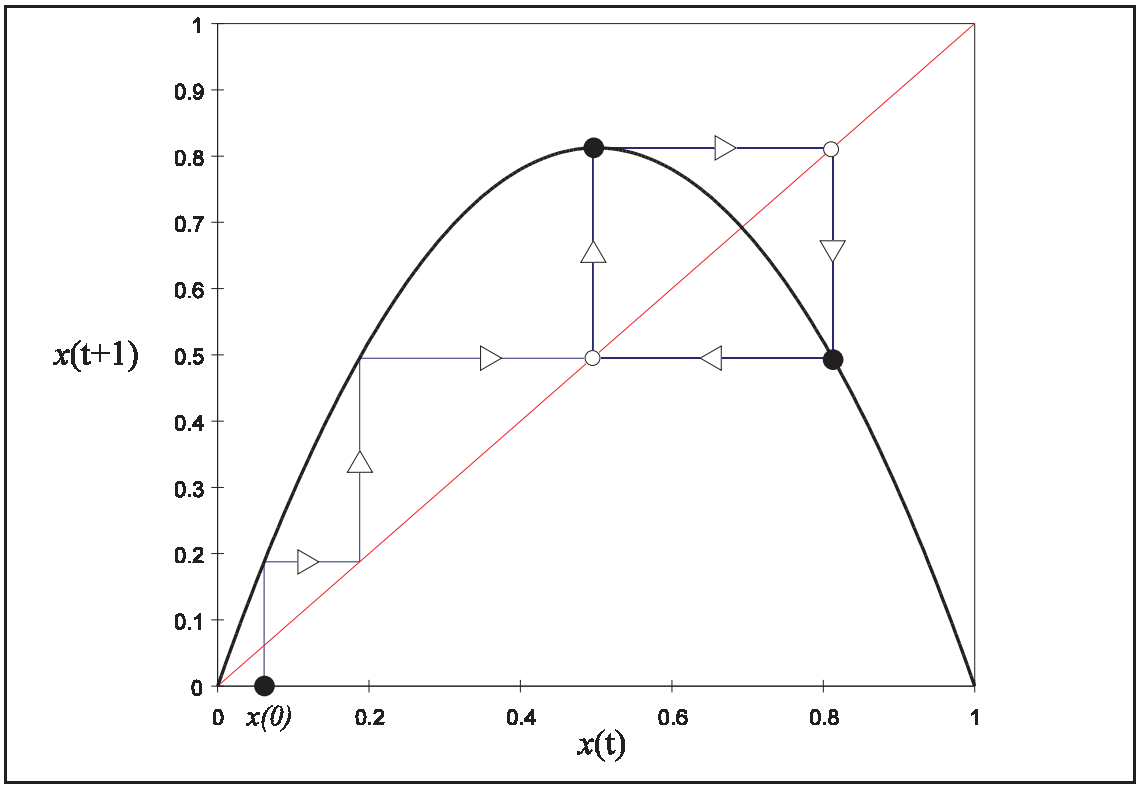


Figura 2.15. Curva de fase de la ecuación logística, μ=3.25

espacio paramétrico converge al punto fijo $\bar{x}_1$. En la figura 2.14 se muestra la curva de fase para μ=2.75, en el que se observa la convergencia hacia el atractor $\bar{x}_1$.

Para μ>3 los dos puntos fijos (2.31) se vuelven inestables, mostrando las soluciones de la ecuación logística comportamientos oscilatorios acotados con distintas propiedades en cuanto a su periodicidad y estabilidad local o dependencia respecto a las condiciones iniciales.

Cuando $3<\mu<1+\sqrt{6}\simeq 3.45$ aparece un nuevo atractor del tipo ciclo límite, en el que el periodo se ha duplicado respecto a la situación anterior, es decir, el nuevo equilibrio dinámico será un ciclo límite de periodo 2, que la solución del sistema irá recorriendo secuencialmente a medida que transcurra el tiempo. Este ciclo límite estará caracterizado, por tanto, por dos estados del espacio de fases p_1 y p_2 tales que

$$p_i=f^{2)}(p_i) \quad ; \; i=1,2 \tag{2.32}$$

siendo $f^{2)}(\cdot)$ la segunda iterada de la aplicación logística (2.30), esto es, $f^{2)} = f(f(\cdot))$. El ciclo límite periodo dos estará dado por los siguientes estados:

$$\begin{aligned} p_1&=\frac{1+\mu+\sqrt{\mu^2-2\mu-3}}{2\mu} \\ p_2&=\frac{1+\mu-\sqrt{\mu^2-2\mu-3}}{2\mu} \end{aligned} \tag{2.33}$$

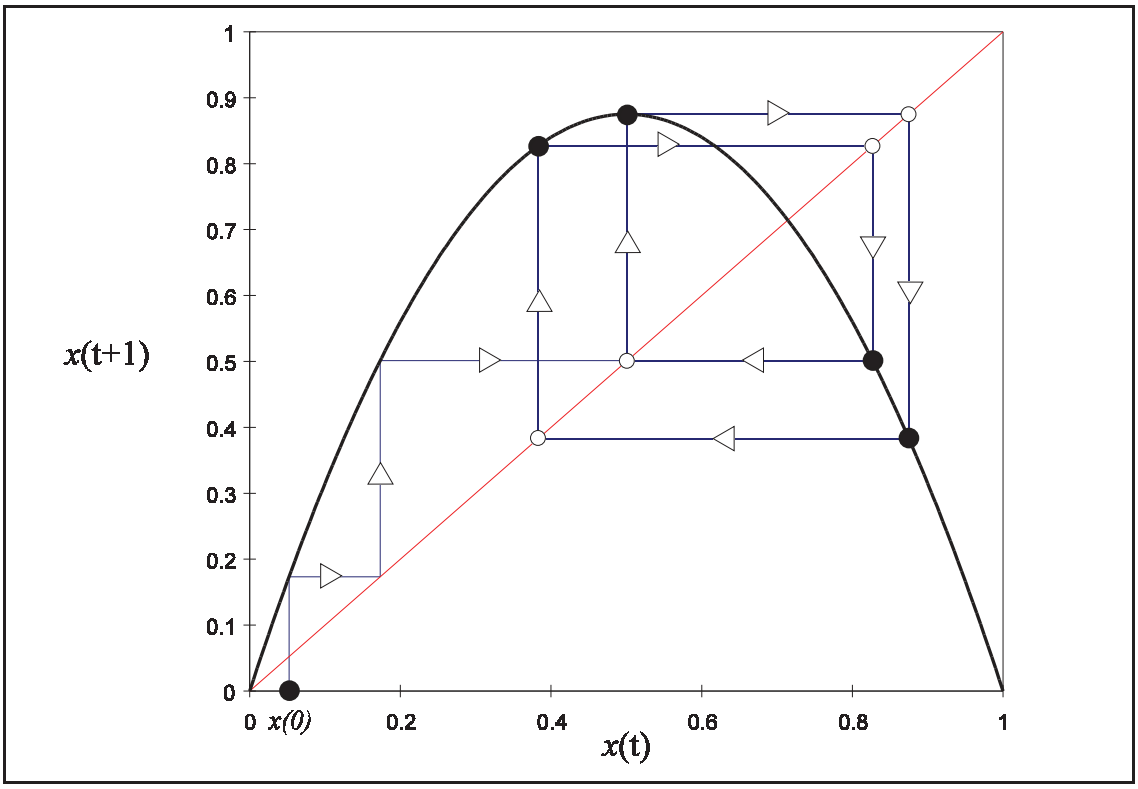


Figura 2.16. Curva de fase de la ecuación logística, μ=3.5

Nótese que los puntos fijos $\bar{x}_0$ y $\bar{x}_1$ satisfacen también la condición (2.32), aunque ni constituyen parte del ciclo límite ni son estables para μ>3, por lo que ahora no serán equilibrios dinámicos atractores del sistema. En la figura 2.15 hemos representado la curva de fase de la ecuación logística para μ=3.25. El periodo dos al que convergen las soluciones en este caso estará compuesto por los puntos $p_1 \simeq 0.81242714$ y $p_2 \simeq 0.49526517$.

Para valores $\mu > 1+\sqrt{6} \simeq 3.45$ el ciclo límite periodo 2 (2.33) se inestabiliza, emergiendo nuevos comportamientos cualitativos en el largo plazo. En primer lugar aparecerá un ciclo límite de periodo 4, esto es, un atractor formado por 4 estados que se irán repitiendo secuencialmente una vez alcanzado el atractor:

$$p_i = f^{4)}(p_i) \quad ; \; i=1,2,3,4 \tag{2.34}$$

En la figura 2.16 mostramos el ciclo límite periodo 4 alcanzado cuando μ=3.5 ($p_1 \simeq 0.8749926$; $p_2 \simeq 0.38281968$; $p_3 \simeq 0.82694071$; $p_4 \simeq 0.50088421$).

Este proceso de inestabilización y aparición de nuevos ciclos límite con desdoblamiento, bifurcación o duplicación del periodo continúa a medida que vamos aumentando el valor del parámetro de control μ (periodo ocho, dieciséis, veinticuatro ...).

Para valores de μ a partir de $\mu_\infty \simeq 3.5699$, la cascada de duplicaciones hace que el número de puntos tienda a cubrir una mayor región del espacio de

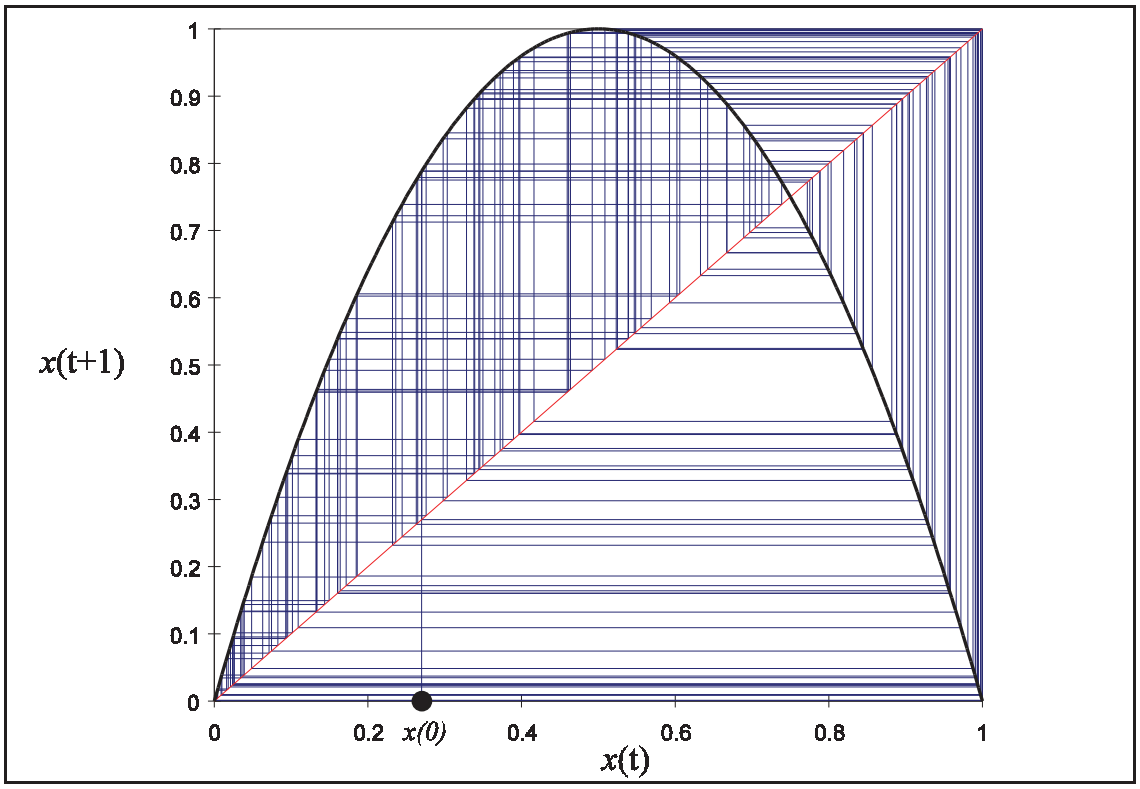


Figura 2.17. Curva de fase de la ecuación logística, μ=4

estados, hemos encontrado la ruta hacia el caos, el atractor se ha convertido en extraño y la ecuación logística se comporta de manera caótica.

En la figura 2.17 mostramos la curva de fases para μ=4 bajo el cual, la ecuación logística se comporta de manera caótica y tiende a llenar todo el espacio de fases [0,1] aunque concentrándose en los extremos del intervalo

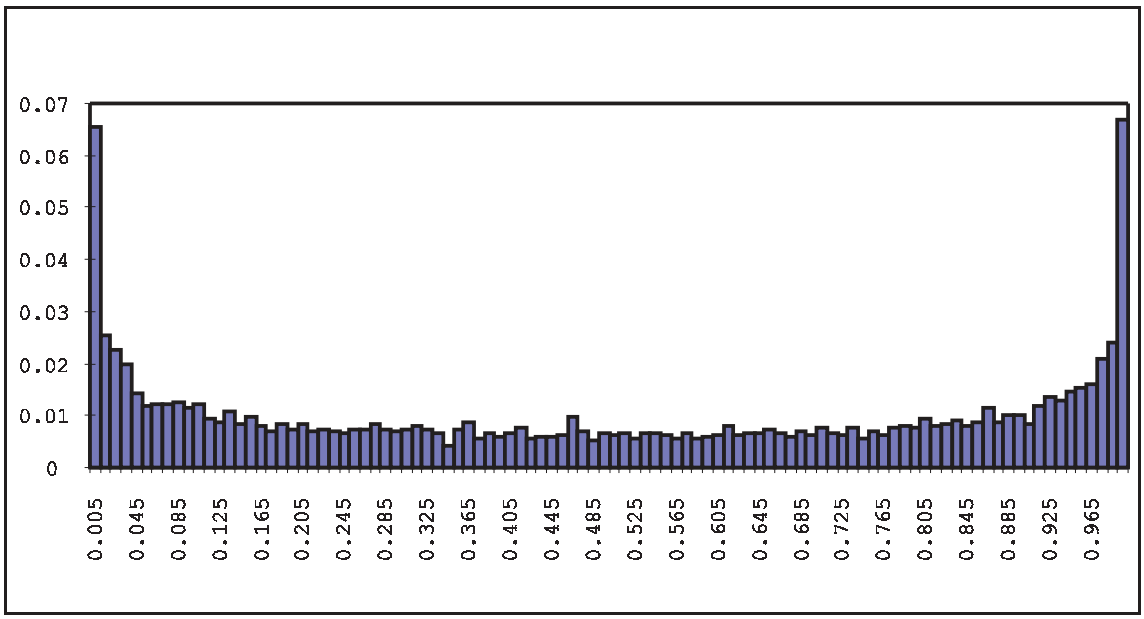


Figura 2.18. Histograma de la aplicación logística con μ=4

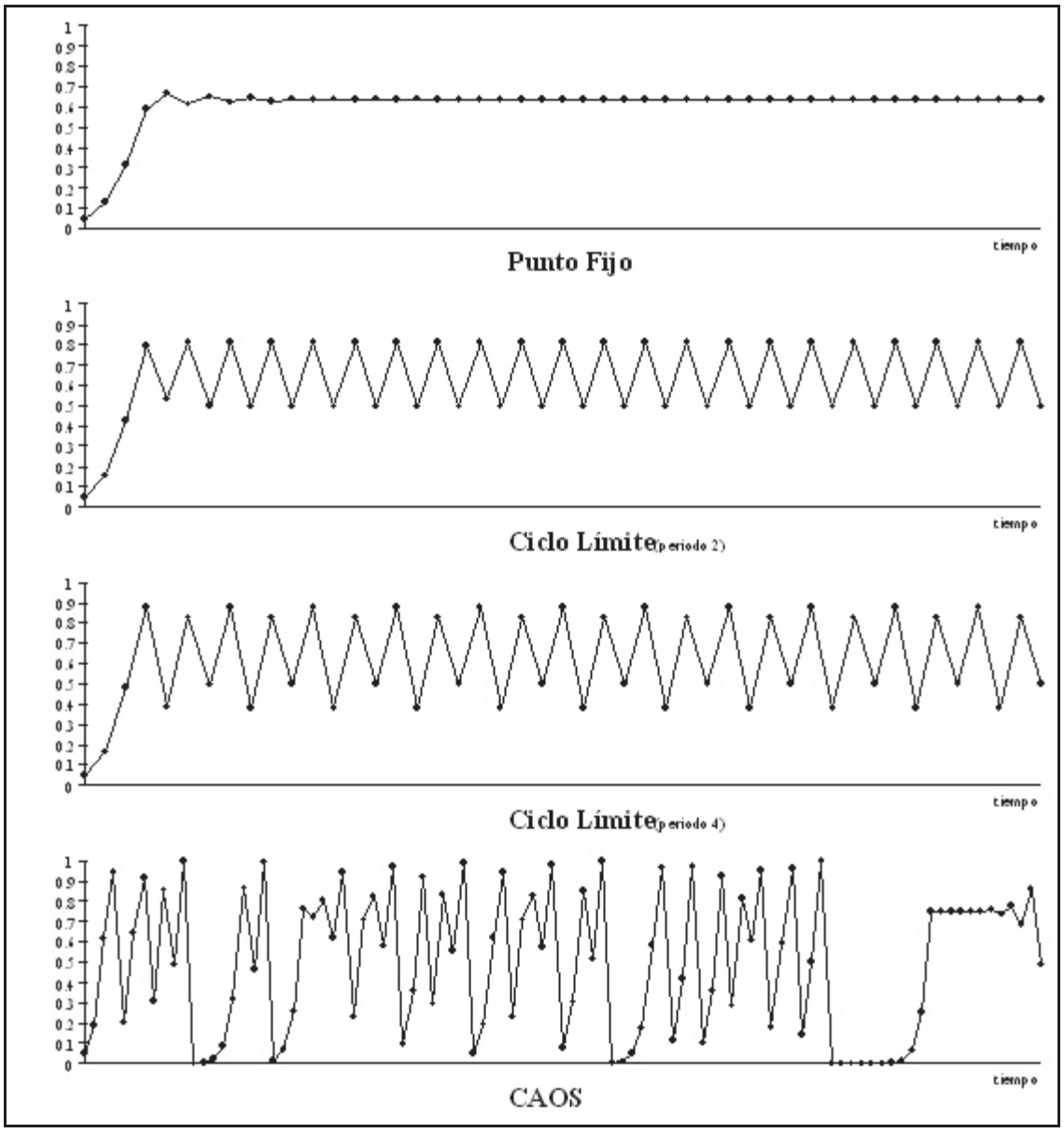


Figura 2.19. trayectorias temporales de la aplicación logística para μ= 2.75, 3.25, 3.5 y 4.

–figura 2.18–. Además, la forma en la que se llena el espacio de fases verifica la propiedad de mezcla o transitividad topológica. En consecuencia, y como se observa en la curva de fase, la órbita no parece converger a ningún ciclo límite de periodo simple finito. Por el contrario, el atractor al que converge la ecuación logística se caracteriza por tener un periodo infinito, por lo que la órbita resultante resulta irregular, aperiódica y aparentemente carente de cualquier orden o irregularidad –dichas órbitas proceden, sin embargo, de la iteración de un sistema perfectamente determinista– (figura 2.19). Igualmente, debe hacerse constar que tanto los puntos fijos $\overline{x_0}$ y $\overline{x_1}$, como los ciclos límite de periodo finito que caracterizan el comportamiento de las soluciones para valores de $\mu<\mu_\infty\approx3.5699$, siguen siendo equilibrios dinámicos invariantes bajo la acción del sistema cuando éste se encuentra en régimen caótico. Es más, constituyen un conjunto denso dentro del intervalo [0,1].

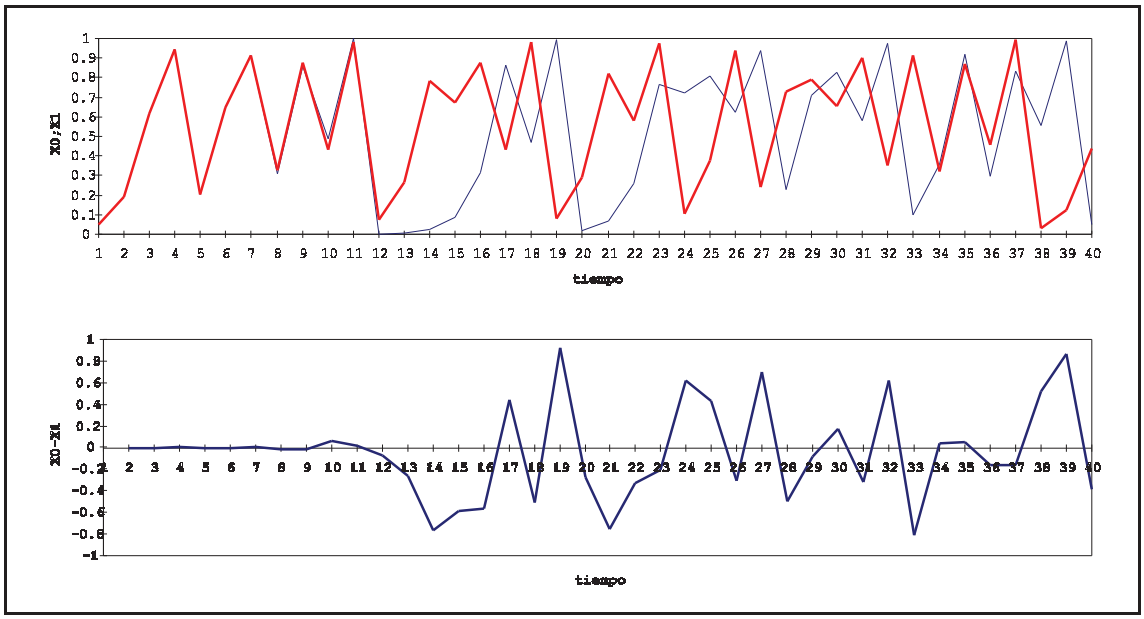


Figura 2.20. Sensibilidad a las condiciones iniciales en la ecuación logística μ=4

Bajo el régimen caótico, las trayectorias que solucionan la ecuación logística, además de las propiedades anteriores, presentan una alta dependencia respecto a las condiciones iniciales, es decir, son localmente inestables dentro del atractor.

En la figura 2.20, hemos ilustrado esta propiedad, representando conjuntamente dos soluciones con $\mu=4$ que se diferencian en su condición inicial tan sólo en 0.00001 unidades. Puede observarse que tras un lapso de tiempo en el que ambas soluciones evolucionan juntas, dichas trayectorias divergen rápidamente en su comportamiento. Esta dependencia a las condiciones iniciales es la responsable, como ya vimos, de la incapacidad que en la práctica se tiene para realizar predicciones más allá del corto plazo. A pesar de ello, y en la medida en que las órbitas con estados iniciales próximos permanecen cercanos durante un cierto periodo de tiempo antes de empezar divergir, es posible obtener, en el corto plazo, predicciones ajustadas del sistema.

La predicción por analogías de sistemas caóticos

Las predicciones de sistemas caóticos se basan en el método *de predicción por analogías* propuesto inicialmente por Lorenz (1969) aunque fueron Farmer y Sidorowich (1987) quienes mayor impulso dieron a su utilización (Fernández Rodríguez, 1995, 32-34). Estas predicciones se apoyan en el carácter determinista del proceso generador de las trayectorias, proponiendo como mejor predictor para el estado inmediatamente posterior a uno dado, x_0, el que sigue al estado x_N más cercano al primero x_0. La idea que subyace en este método es que a pesar de la dependencia a las condiciones iniciales, a dos puntos próximos les deben seguir dos puntos igualmente próximos, al menos

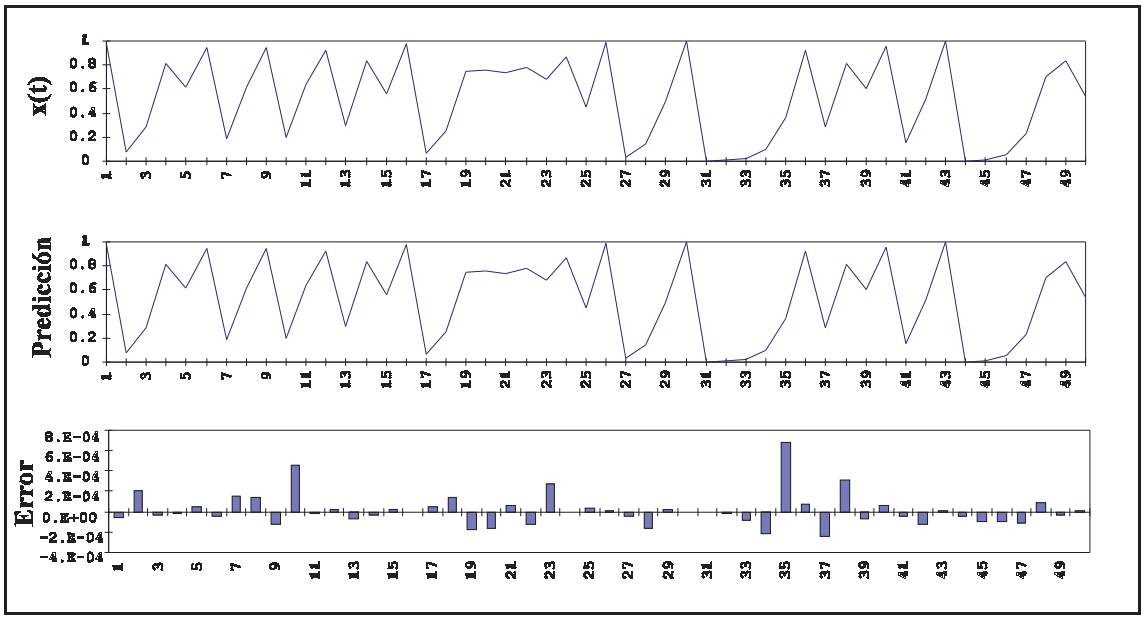


Figura 2.21. Predicción por analogías de la aplicación logística μ=4

en el corto plazo. El horizonte de predicción para el cual podrán obtenerse predicciones ajustadas dependerá inversamente del grado de dependencia respecto a las condiciones iniciales del sistema caótico. Las ventajas de este método de predicción es que es posible utilizarlo aunque se desconozca el sistema generador de las soluciones observadas –para ello será necesario reconstruir, a partir de una muestra, el espacio de fases correspondiente al sistema desconocido–.

Esta técnica puede ser aplicada para la predicción de series temporales caóticas obteniendo mejores resultados que las técnicas estadísticas lineales tradicionales[30]. Para ilustrar este método de predicción mostramos en la figura 2.21 la evolución de una solución particular a la logística con μ=4 junto a la trayectoria resultante de su predicción periodo a periodo utilizando el método de predicción por analogías[31]. Como se observa la trayectoria resultante de la predicción por analogías replica casi perfectamente la trayectoria original con errores de predicción prácticamente despreciables.

[30] Este método de predicción puede utilizarse incluso como base para contrastar la posible presencia de comportamientos caóticos en las series temporales. Véase Mizrach (1993), Fernández Rodríguez (1995), Fernández Rodríguez y Martín González (1995) y Sosvilla, Andrada y Fernández Rodríguez(1999). Su utilización en la predicción de ciertas series financieras parecería apuntar que frente a la hipótesis de mercados eficientes, la búsqueda de analogías en la evolución de las series podría mejorar las predicciones a corto plazo, proporcionando así un sustento teórico al menospreciado –al menos desde el mundo académico– análisis técnico o chartista de los valores financieros.

[31] Para la obtención del predictor, x_t*, calculamos primero una serie de 10000 datos de la ecuación logística, y a partir de ella, elegimos el punto con una distancia euclidea menor. En la figura 2.21 se muestra también el error de predicción definido como Error=[x_t*-x_t]

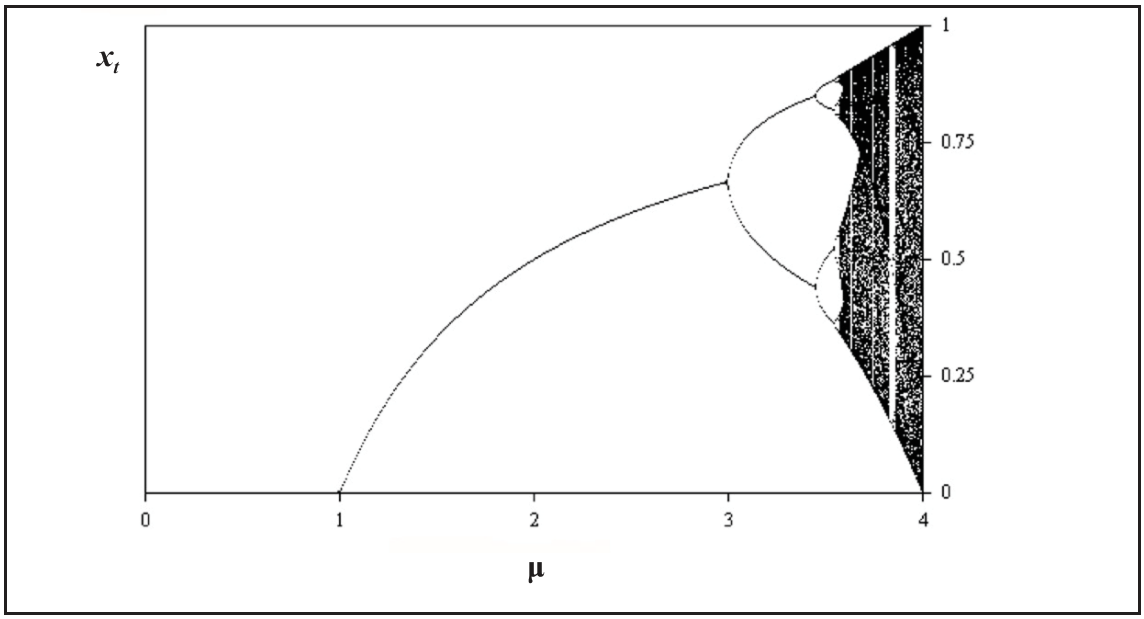


Figura 2.22. Gráfico de bifurcaciones de la aplicación logística $\mu \in [0,4]$

La ruta hacia el caos: La duplicación del periodo

Para terminar con este ejemplo, apuntamos que es posible realizar una visión conjunta de los distintos regímenes de comportamiento a largo plazo de la aplicación logística para distintos valores del espacio paramétrico haciendo uso del conocido como diagrama de Feigenbaum o gráfico de *bifurcaciones*.

Cuando la evolución de un sistema dinámico depende del valor específico que tome un parámetro –parámetro de control–, pueden existir valores críticos del mismo, en los que se producen cambios cualitativos en la naturaleza del comportamiento a largo plazo del sistema, esto es, cambios cualitativos en su atractor. Al valor del parámetro en el cual se produce el cambio cualitativo del régimen de comportamiento se le denomina *valor de bifurcación*. Bajo estos valores, el sistema dinámico será por tanto estructuralmente inestable. La *estabilidad estructural*, precisamente, hace referencia a la permanencia del comportamiento del sistema dinámico desde el punto de vista cualitativo ante pequeñas variaciones en el valor de sus parámetros estructurales –para una definición formal véase Gandolfo, 1997, p.339–.

Algunas de estas bifurcaciones –por ejemplo, la bifurcación de horca–, implican una situación en la que un sistema situado en un equilibrio dinámico estable pasa a un nuevo equilibrio con duplicación del periodo, en el que el equilibrio anterior, aunque sigue presente, ha perdido su poder atractivo, esto es, se ha convertido en inestable o repulsivo, dando lugar a la aparición de de nuevos equilibrios de mayor periodicidad. Formalmente, la bifurcación se produce, en los sistemas dinámicos discretos, cuando el cambio en el parámetro de control hace que los autovalores de la matriz Jacobiana asociada al sistema evaluada en el equilibrio dinámico cruza el círculo unidad. Se pueden

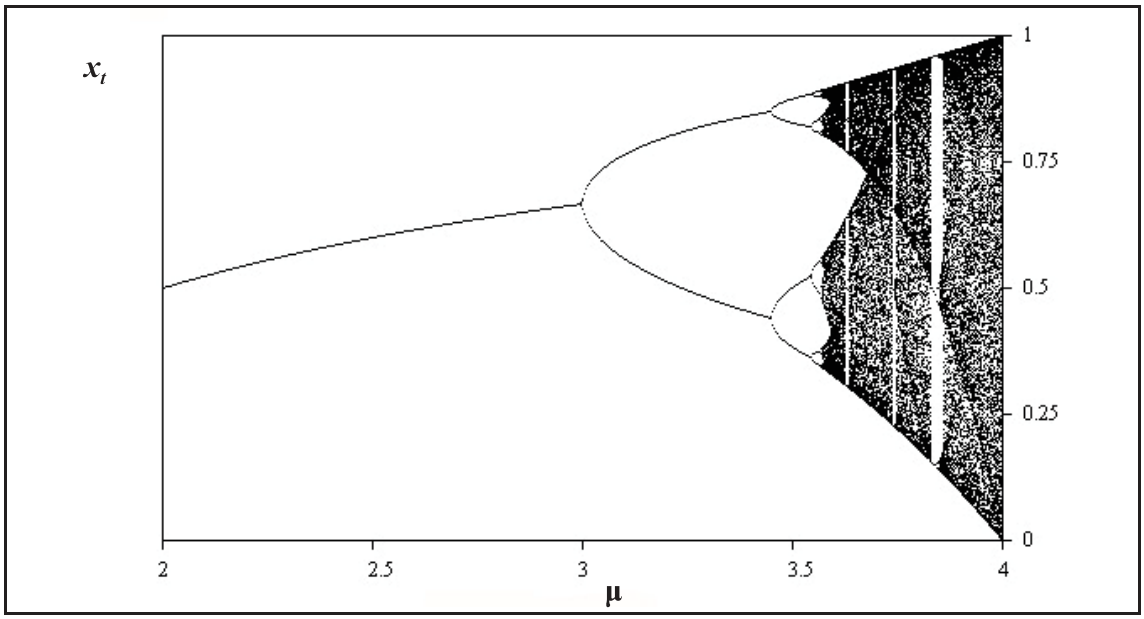


Figura 2.23 Gráfico de bifurcaciones de la aplicación logística $\mu \in [2,4]$

considerar, de este modo, distintos tipos de bifurcaciones: la bifurcación de horca o de duplicación de periodo cuando un autovalor real pasa por -1; la bifurcación de punto de silla cuando algún autovalor cruza +1; y la bifurcación de Hopf o Neimank cuando el módulo de un par de autovalores complejos conjugados cruza el círculo unidad, pudiendo dando lugar la bifurcación en este último caso a nuevos equilibrios cuasiperiódicos –ruta cuasiperiódica al caos– (sobre el concepto y tipos de bifurcaciones véase Lorenz ,1993, pp. 80-118).

En las figuras 2.22 y 2.23 mostramos el gráfico de bifurcaciones para la ecuación logística. En estos gráficos se representa el valor o conjunto de valores al que converge el estado de la variable x_t , para cada valor del parámetro μ. Como se observa para valores comprendidos entre 0 y 1, el sistema converge a un único valor, $\bar{x}_0$, mientras que cuando $1<\mu<3$, el sistema converge a $\bar{x}_1$,es decir, el valor $\mu=1$ es un punto crítico en el cual se produce un cambio desde el punto de vista cualitativo en el comportamiento a largo plazo del sistema. El punto fijo $\bar{x}_1$ pierde su estabilidad y se convierte en repulsivo cuando $\mu=3$. Aparece entonces un nuevo atractor a largo plazo del tipo ciclo límite de periodo dos . El valor de $\mu=3$ es, por tanto, un nuevo punto crítico o de bifurcación (bifurcación de horca) donde el comportamiento a largo plazo del sistema duplica su periodo. Este proceso de desdoblamiento o duplicación del periodo continúa a medida que vamos aumentando el valor de μ, apareciendo nuevas ramas que se corresponden con ciclos límite de periodos cuatro, ocho, dieciséis, ...

En este comportamiento aparece cierto componente de regularidad. Nos referimos a que la secuencia de puntos de bifurcación con duplicación del periodo, μ_i, está gobernado por una ley de potencia cuyo factor de escala, conocido como la *constante de Feigenbaum*, se mantiene no sólo para la ecuación logística sino que aparece en todas las aplicaciones unidimensionales

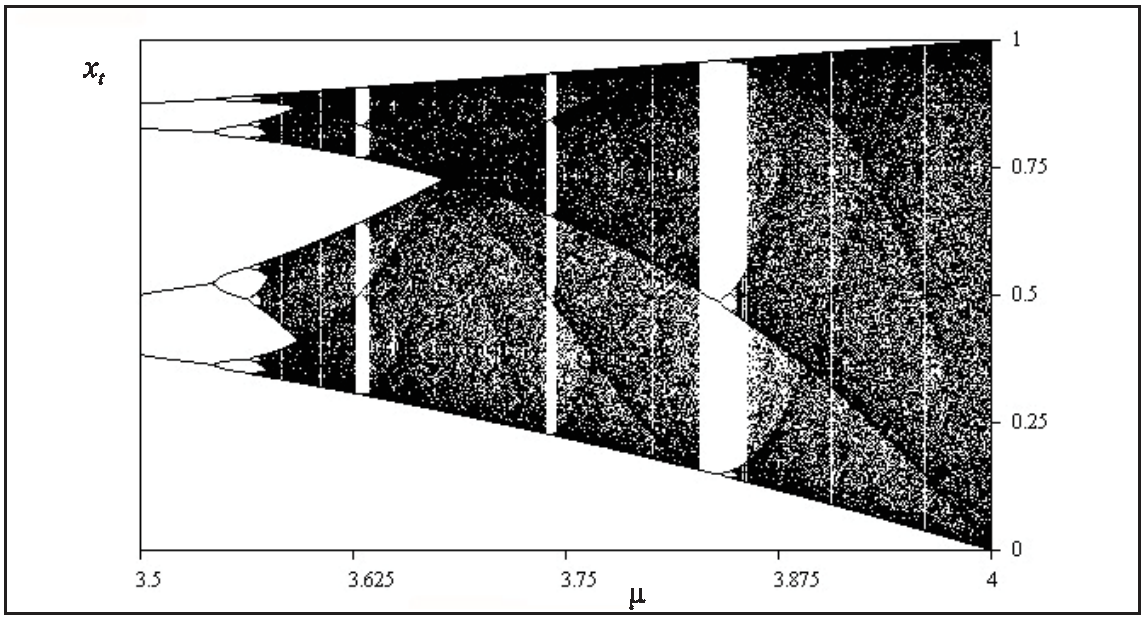


Figura 2.24. Gráfico de bifurcaciones de la aplicación logística $\mu \in [3.5, 4]$

de su clase –aplicaciones unimodales o con forma de campana–:

$$\delta = \lim_{i \to \infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} \approx 4.6692016... \tag{2.35}$$

Para valores de μ a partir de $\mu_\infty \approx 3.5699$, la cascada de duplicaciones es tan rápida que el periodo tiende a infinito, y el número de estados al que tiende el sistema tienda a cubrir toda una región del espacio de fases. El atractor se ha convertido en extraño. A parir del punto de saturación μ_∞ se entra en la región caótica. Este proceso de duplicación del periodo hasta entrar en la región caótica es conocido como la ruta hacia el caos por duplicación del periodo.

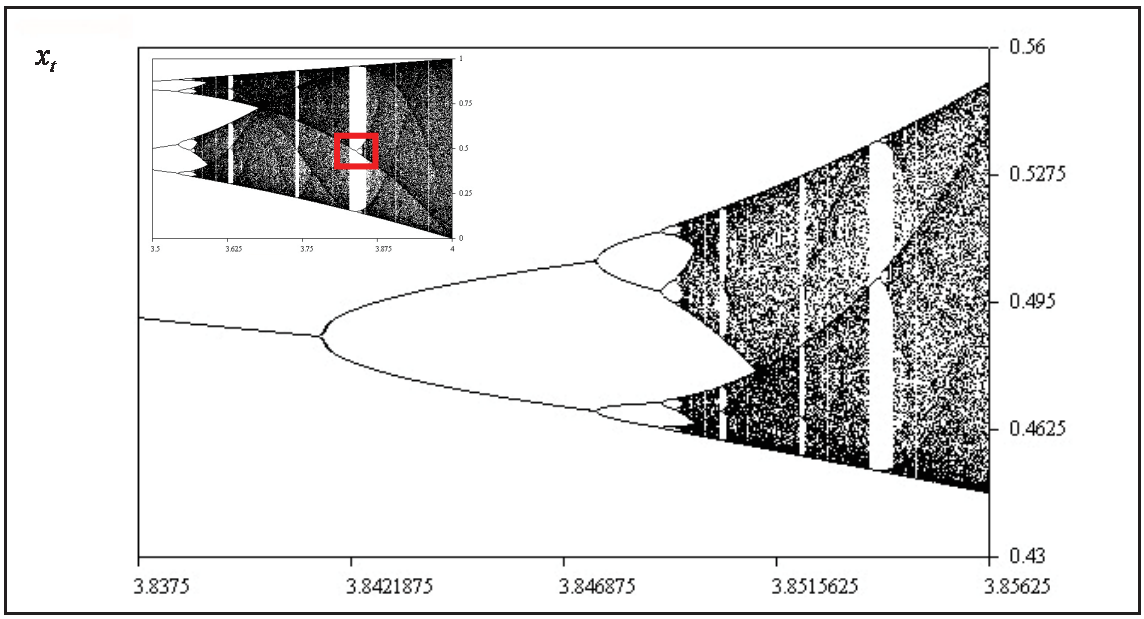


Figura 2.25. Gráfico de bifurcaciones de la aplicación logística $\mu \in [3.8375, 385625]$

En la región caótica del diagrama de bifurcaciones se observan pequeñas zonas en blanco, *las ventanas de regularidad*, donde el sistema presenta comportamientos periódicos regulares, algunos de ellos de orden impar –figura 2.24–, que se bifurcan o doblan su periodo a medida que sigue aumentando los valores del parámetro de control –figura 2.25– hasta entrar de nuevo en regiones con comportamiento caótico. Precisamente en la existencia de estos ciclos límite de periodo impar se basa el teorema de Li-Yorke (1975) para verificar la existencia de caos determinista.

Caos en el Sentido de Li-Yorke: Periodo Tres Implica Caos

Para comprobar si un sistema dinámico se comporta de manera caótica se debe demostrar de que dicho sistema verifica las tres propiedades de la anterior definición de caos topológica de Devaney (1989, p.50). En la práctica, esta tarea puede resultar altamente complicada. Afortunadamente existen otros teoremas más interesantes desde el punto de vista operativo, que de forma alternativa sirven para identificar cuando un sistema es topológicamente caótico. Quizás el más ampliamente utilizado es el propuesto por Li y Yorke (1975).

Este teorema se basa a su vez en el de Svarkovskii, en el que se propone la siguiente relación de orden entre los números naturales (Alligood, Sauer y Yorke, 1996,pp. 135-139) :

$$\begin{aligned} &3\prec 5\prec 7\prec 9\prec \cdots \prec 2\cdot 3\prec 2\cdot 5\prec 2\cdot 7\prec 2\cdot 9\prec \cdots \\ &\cdots \prec 2^2\cdot 3\prec 2^2\cdot 5\prec 2^2\cdot 7\prec 2^2\cdot 9\prec \cdots \prec 2^3\cdot 3\prec 2^3\cdot 5\prec 2^3\cdot 7\prec 2^3\cdot 9\prec \cdots \\ &\qquad \cdots \prec 2^4\cdot 3\prec 2^4\cdot 5\prec 2^4\cdot 7\prec 2^4\cdot 9\prec \cdots \prec 2^3\prec 2^2\prec 2\prec 1 \end{aligned} \tag{2.36}$$

Dada esta relación de orden y una aplicación *f* continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$ que tiene una solución periódica de periodo *p*, el teorema Svarkovskii establece que si $p \prec q$ entonces *f* tiene también una órbita de periodo *q*.

Este teorema es aplicable no sólo a las ecuaciones dinámicas unimodales del tipo ecuación logística, sino a todas las aplicaciones continuas. Por el contrario, sólo es aplicable a los sistemas dinámicos unidemensionales. Como colorario al teorema, puede establecerse que si la aplicación *f* tiene algún punto periódico cuyo periodo es impar, entonces *f* debe tener infinitos periodos (Medio, 1992, p.156).

A partir de este resultado, el teorema de Li-Yorke establece que si es posible detectar un ciclo límite de periodo tres como posible solución de un sistema, entonces, como el tres es el primer número que aparece en la ordenación 2.36, también existirán soluciones de cualquier otro periodo, incluidas las soluciones caóticas –periodo tres implica caos–. Más

específicamente, el teorema de Li-Yorke puede enunciarse de la siguiente forma (Day, 1994, pp. 85-86 y Gandolfo, 1997, pp.513-514).

Sea f:I→I, I =[0,1] una aplicación continua. Supongamos que existe un punto x^*∈I talque las tres primeras iteradas de x^* verifican

$$f^{3)}(x^*) \leq x^* < f(x^*) < f^{2)}(x^*) \tag{2.37}$$

o

$$f^{3)}(x^*) \geq x^* > f(x^*) > f^{2)}(x^*) \tag{2.38}$$

entonces existen ciclos de cualquier periodo k =1, 2, ..., en I y existe un subconjunto no numerable U⊂I que contiene puntos no periódicos que satisfacen las siguientes condiciones:

(i) para todo $x,y \in$U, $x \neq y$

($i.a$) $$\underset{n\to\infty}{Limsup}\ |f^{n)}(x)-f^{n)}(y)|>0 \tag{2.39}$$

y

($i.b$) $$\underset{n\to\infty}{Liminf}\ |f^{n)}(x)-f^{n)}(y)|=0 \tag{2.40}$$

(ii) para todo $x \in$U y todo punto periódico $x_0 \in$ I

$$\underset{n\to\infty}{Limsup}\ |f^{n)}(x)-f^{n)}(x_0)|>0 \tag{2.41}$$

La condición (i) implica que en el conjunto U, las trayectorias aperiódicas que partan de puntos distintos –pero arbitrariamente cercanos–, se encontrarán infinitamente a menudo finitamente separadas unas de las otras, e igualmente infinitamente a menudo se encontrarán muy cercanas entre sí, aunque nunca se cortarán en un mismo punto. Esta condición es prácticamente equivalente a la propiedad de dependencia sensitiva respecto a las condiciones inicialesdefinida anteriormente (2.28).

La condición (ii) implica, por otro lado, que si en algún instante alguna trayectoria aperiódica se acercase a algún ciclo límite periódico, dicha trayectoria deberá apartarse del ciclo límite, esto es, las órbitas aperiódicas no deben tener ningún punto en común con ninguna de las posibles órbitas periódicas del sistema dinámico.

El teorema de Li-Yorke establece por tanto que, bajo condiciones específicas, existirán órbitas aperiódicas con dependencia respecto a las

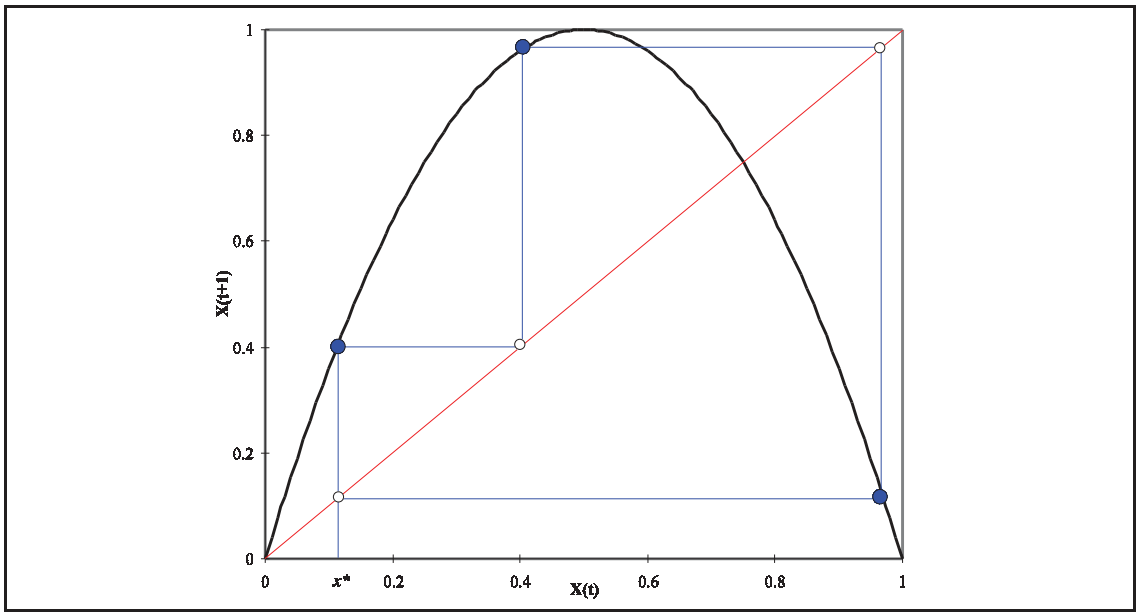


Figura 2.26. Ciclo límite de periodo tres en la ecuación logística con μ=4

condiciones iniciales, esto es, en presencia de comportamientos caóticos –*caos en sentido de Li-Yorke*–.

Como ejemplo de aplicación del teorema de Li-Yorke, volvamos a la ecuación logística (2.30). Utilizando el gráfico de bifurcaciones –figuras 2.24 y 2.25– es posible identificar dentro de la región caótica ventanas de regularidad en las que las soluciones convergen a un ciclo límite de periodo tres cuando $3.83<\mu<3.84$, (por ejemplo para 3.835 el ciclo límite estaría compuesto por $p1\approx 0.49451437$, $p2\approx 0.9586346$, $p3\approx .15207427$), por lo que por el teorema de Li-Yorke, para este intervalo del espacio paramético, la aplicación logística tendrá órbitas periódicas de periodo T_p, para todo $T_p\geq 1$, que serán todas repulsivas menos la correspondiente a $T_p=3$. Como ya comentamos, cuando se aumenta el parámetro μ este periodo tres se inestabiliza, aunque sigue siendo una posible solución de la ecuación logística. Así, en la figura 2.26 mostramos el ciclo periodo tres –instable– que verifica (2.37) cuando μ=4, por lo que aplicando el teorema de Li-Yorke, podemos concluir que la ecuación logística será entonces caótica –en sentido de Li-Yorke–

Caos en sentido de Ruelle: atractores extraños o caóticos

Como se comentó anteriormente, las órbitas caóticas están altamente relacionadas con la evolución de los sistemas dinámicos dentro de los equilibrios dinámicos del tipo atractor extraño. De hecho, existe otra definición de sistema caótico alternativa proporcionada por D. Ruelle que se apoya en la existencia de dichos atractores extraños. Según esta definición, se dice que un sistema es caótico si posee un atractor extraño –*caos en sentido de Ruelle*–. A su vez, un atractor extraño será aquel conjunto atractor en el cual las

trayectorias presentan dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales (2.28) (Ruelle,1992, pp.24).

Recordemos a su vez que, en general, un conjunto atractor será un conjunto invariante bajo la acción del sistema dinámico, no-reducible y con una cuenca de atracción, es decir, un equilibrio dinámico que posee un entorno del mismo para el cual el sistema termina atrapado dentro del equilibrio y que no se puede descomponer en otros subconjuntos disjuntos invariantes bajo la acción del sistema.

Por otra parte, puede demostrarse que los sistemas disipativos convergen en su evolución hacia conjuntos atractores (Ruelle, 1992, p.23). Un sistema conservativo en términos de la Física, será aquél para el cual la energía total permanece constante en el tiempo –no existe fricción–. Por el contrario, un sistema disipativo será aquél para el cual la energía total disminuye o se disipa con el paso del tiempo (Gandolfo 1997, p. 456). La conversión de estos concepto al lenguaje de los sistemas dinámicos implica definir a un sistema dinámico disipativo como aquel para el cual existe un conjunto *U* en el espacio de fases *n*-dimensional, que se contrae o reduce asintóticamente hasta un conjunto compacto *A*, de forma que el *n*-volumen (energía) del conjunto inicial *U* se reduce o contrae de manera continua bajo la acción del sistema con el transcurso del tiempo. Por el contrario, los sistemas conservativos será aquellos que preservan o mantienen el *n*-volumen de *U* (Lorenz, 1993, pp65-67)[32]. En términos de lo expuesto anteriormente, el conjunto *A* de los sistemas disipativos sería el conjunto atractor y el conjunto *U* sería su cuenca de atracción.

Teniendo en cuenta estas propiedades de los sistemas disipativos, es posible establecer la siguiente definición para identificar a los sistemas caóticos *n*-dimensionales, válida tanto en tiempo discreto como en tiempo continuo. Un sistema disipativo será caótico *–caos en sentido de Ruelle–* si presenta soluciones con dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales. A efectos operativos, esta dependencia respecto a las condiciones iniciales puede cuantificarse haciendo uso de los exponentes de Lyapunov.

[32] Formalmente, si definimos la tasa de variación del volumen de un sistema dinámico (2.17-18) *n*-dimensional como $\dot{V}/V=\sum_i \partial f_i/\partial x_i$, i=1,2, ..., n, *(derivada de Lie*), entonces el sistema será disipativo si este sumatorio es negativo, y será conservativo cuando el sumatorio sea nulo.

CAPÍTULO 3

ELEMENTOS DE LA MATEMÁTICA DEL CAOS (II): EL ESPECTRO DE EXPONENTES DE LYAPUNOV Y LA DIMENSIÓN FRACTAL

En este capítulo vamos a centrar nuestra atención en el estudio de dos de los elementos básicos de la matemática del caos: El espectro de Exponentes de Lyapunov y la Dimensión Fractal de los atractores extraños.

Los exponentes de Lyapunov constituyen una medida de la estabilidad o inestabilidad del comportamiento de los sistemas dinámicos una vez que éstos alcanzan un equilibrio dinámico. Como ya ha sido apuntado en el capítulo 2, los sistemas caóticos, aunque presentan cierta estabilidad en el sentido de que convergen a conjuntos atractores extraños, se caracterizan por su alta dependencia respecto a las condiciones iniciales, esto es, porque su evolución dentro del atractor es altamente inestable. En el primer apartado de este capítulo trataremos precisamente de caracterizar la estabilidad local de las soluciones dentro de los atractores haciendo uso del espectro de exponentes de Lyapunov asociados al sistema.

Por otra parte, la dimensión fractal puede utilizarse para cuantificar o medir la complejidad geométrica de los atractores de un sistema dinámico. Como veremos en el apartado 3.2, la complejidad dinámica que muestran los sistemas caóticos se basa en la complejidad geométrica de sus atractores extraños. De hecho, estos atractores forman parte de los objetos geométricos denominados fractales. Estos objetos fractales no son susceptibles de ser analizados con las herramientas tradicionales de la geometría diferencial –los fractales son verdaderos *monstruos* geométricos desde el punto de vista de la geometría diferencial–, dando origen a una nueva geometría no-diferencial. La complejidad geométrica de los fractales puede medirse utilizando el concepto de la dimensión fractal, y por ello, podremos utilizar dicho concepto de dimensión para caracterizar la estructura geométrica de los conjuntos atractores de los sistemas dinámico.

A partir de estos dos elementos, analizaremos en los próximos capítulos como pueden diseñarse toda una serie de herramientas para detectar comportamientos caóticos a partir de una serie temporal observada. En principio, cuando alguno de los exponentes de Lyapunov sea positivo el sistema presentará dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales. Por otra parte, cuando se estime, haciendo uso de la dimensión fractal, que el atractor asociado a la serie temporal tienen dimensión finita y además tiene una estructura geométrica fractal, podremos concluir que dicha serie temporal ha sido generada por un proceso determinista caótico.

Terminaremos este capítulo mostrando algunos ejemplos de sistemas dinámicos que permiten la aparición de comportamientos caóticos. Algunos de estos modelos serán posteriormente utilizados para representar la dinámica del ciclo y el crecimiento económico.

3.1. Estabilidad local de los equilibrios dinámicos y el espectro de exponentes de Lyapunov.

La consideración de los conjuntos atractores y repulsores elude el problema de la estabilidad o inestabilidad de los equilibrios dinámicos, ya que dichos atractores se caracterizan por tener una cuenca de atracción –sobre las distintas definiciones de estabilidad véase Brock y Malliaris (1989, pp. 53-85)–. A continuación nos referiremos a la cuestión de la estabilidad local de los equilibrios dinámicos, esto és, sólo en referencia al comportamiento del sistema dentro de estos atractores. Aplicaremos además la definición de estabilidad en sentido de Lyapunov que cuando se aplica al análisis de la estabilidad de los atractores extraños dará origen a los denominados exponentes de Lyapunov.

Analizaremos únicamente el caso de los sistemas discretos, ya que para los sistemas en tiempo continuo el análisis de la estabilidad local en sentido de Lyapunov de una órbita continua se realiza discretizando dicha solución, es decir, analizando la estabilidad local en sentido de Lyapunov de los estados que alcanza la órbita continua en los instantes t=1,2,3,... (Alligood, Sauer y Yorke, 1997, .pp.381-385).

Estabilidad de los puntos fijos.

Comencemos por el caso de los sistemas unidimensionales. Un punto fijo p, será aquél para el que $f(p)=p$ (2.21) y será estable si $|f(x)-f(p)|<|x-p|$ para un x en un entorno de p. Por tanto, para comprobar la estabilidad de un punto fijo basta con analizar cómo es la derivada:

$$\frac{|f(x)-f(p)|}{|x-p|}=\frac{|f(p+h)-f(p)|}{|h|}\simeq|f'(p)| \qquad (3.1)$$

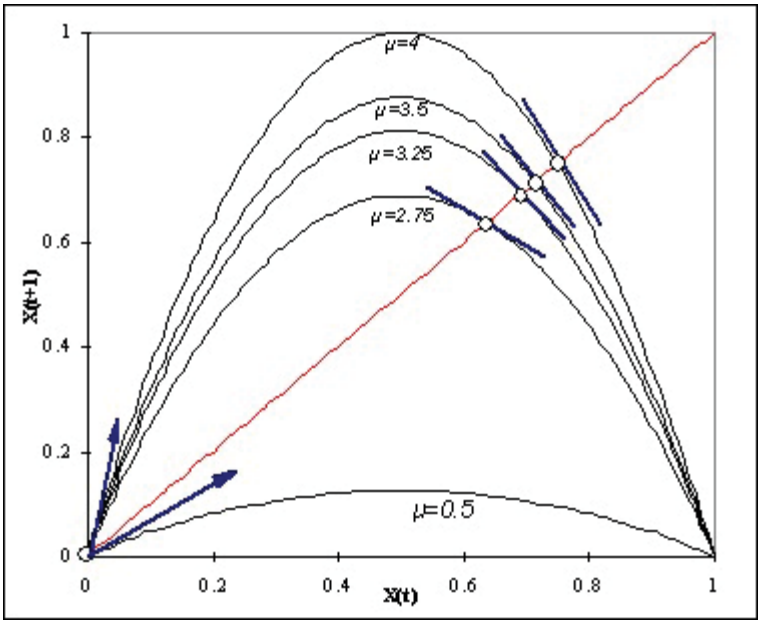


Figura 3.1. Estabilidad de los puntos fijos de la aplicación logística

En general, si la deriva $|f'(p)|=a$, entonces la diferencia entre un punto fijo p y un estado x en un entorno al mismo verificará que bajo la acción del sistema:

$$|f^{k)}(x)-f(p)|\leq a^{k}|x-p| \tag{3.2}$$

Por lo tanto, cuando la derivada $|f'(p)|<1$ el punto fijo p será estable, y si $|f'(p)|>1$ el punto fijo será inestable.

A modo ilustrativo, podemos analizar aquí la estabilidad de los punto fijos de la ecuación logística (2.31) $\bar{x}_0=0$ y $\bar{x}_1=(\mu-1)/\mu$. La derivada de la ecuación logística (2.30) respecto a la variable de estado viene dada por:

$$f'(x)=\mu(1-2x_t) \tag{3.3}$$

La derivada (3.4) evaluada en el punto fijo $\bar{x}_0=0$ será $f'(0)=\mu$, por lo que este punto fijo será estable cuando $0<\mu<1$, e inestable o repulsivo para $\mu>1$. Por su parte, el punto fijo $\bar{x}_1$ sólo estará definido para valores de $\mu>1$, siendo el valor de la derivada (3.3) cuando se evalúa en este punto $f'((\mu-1)/\mu)=2-\mu$, por lo que $\bar{x}_1$ será estable cuando $1<\mu<3$, e inestable cuando $\mu>3$ [1]. Gráficamente, la estabilidad de estos puntos fijos (puntos de corte entre la recta de 45º y la curva de fase) puede estudiarse inspeccionando la pendiente de la curva de transición o curva de fase en el punto de intersección con la recta de 45º –figura 3.1–.

[1] Precisamente, ya vimos en el capítulo anterior que los valores $\mu=1$ y $\mu=3$ constituyen puntos de bifurcación de la aplicación logística. Cuando $\mu=1$ el punto $\bar{x}_0$ pierde su estabilidad dando origen a la aparición de $\bar{x}_1$ como el nuevo punto fijo estable. Cuando $\mu=3$, entonces $\bar{x}_1$ pierden su estabilidad y da origen a la aparición de un ciclo límite periodo dos estable.

Estabilidad de los ciclos límite de periodo *k*.

La estabilidad de un ciclo límite de periodo k se realiza analizando la estabilidad de cada uno de los k puntos p_i $i=1,2,..,k$ que lo integran. Teniendo en cuenta que por definición $f^{k)}(p_i)=p_i$; $i=1, ..., k$ (2.22), entonces se puede analizar la estabilidad del ciclo límite a partir de la estabilidad de cada p_i como si éstos fuesen los puntos fijos de la k-ésima iterada de la ecuación dinámica. Así, si consideramos, por ejemplo, el primer punto, p_1, diremos que éste será un punto fijo estable de la aplicación $f^{k)}$ cuando:

$$\frac{|f^{k)}(p_1+h)-f^{k)}(p_1)|}{|h|}=\simeq|f^{k)'}(p_1)|<1 \qquad (3.4)$$

ahora bien, aplicando la regla de la cadena, (3.4) podrá escribirse como:

$$|f^{k)'}(p_1)|=|f'(p_k)\cdot f'(p_{k-1})\cdot f'(p_{k-2})\cdot \ \dots \ \cdot f'(p_1)| \qquad (3.5)$$

por lo que la estabilidad del punto p_1 podrá analizarse encontrando el valor que toma el producto de las k derivadas de la aplicación evaluadas lo largo de todo el ciclo límite de orden k. Si este producto es menor que uno el ciclo límite será estable, siendo inestable si dicha variable es mayor que uno. Obsérvese que aplicando la regla de la cadena, la derivada en (3.5) será la misma para todos los puntos p_i ($i=1, ..., k$) del ciclo límite, por lo que la estabilidad del ciclo límite se puede analizar estudiando la estabilidad de cualquiera de sus puntos.

Como ejemplo ilustrativo, podemos analizar la estabilidad del ciclo límite periodo dos de la ecuación logística (2.33). Para ello necesitamos representar la curva de fase de la segunda iterada de la ecuación logística y analizar la pendiente de dicha curva en sus correspondientes puntos fijos –figura 3.2–. En

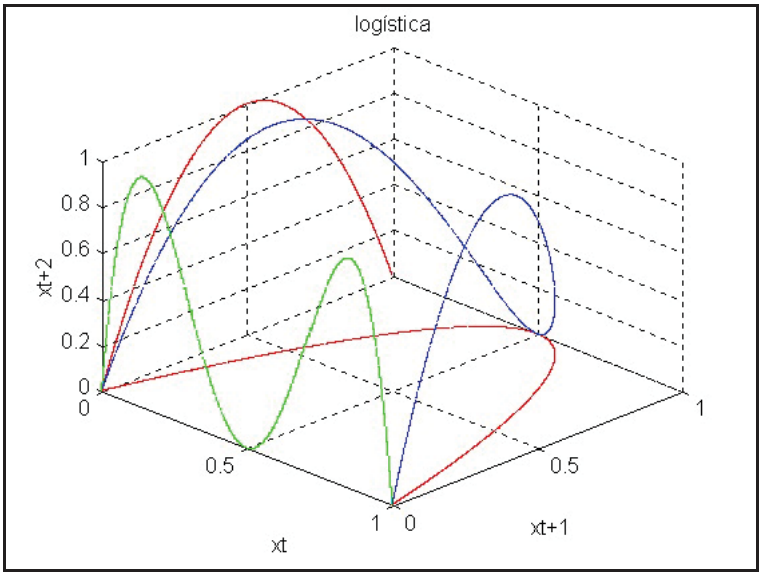


Figura 3.2 Construcción de la segunda iterada de la ecuación logística.

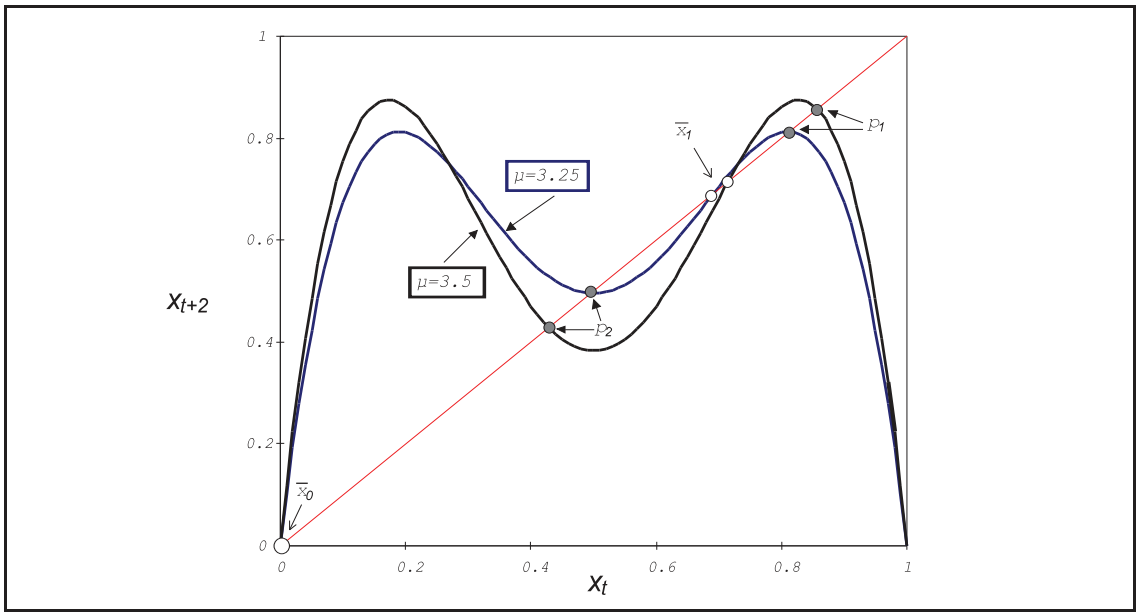


Figura 3.3. Curva de fase de la segunda iterada de la ecuación logística μ=3.25 y μ=3.5

la figura 3.3 realizamos dicha representación para μ=3.25 y μ=3.5. La segunda iterada presenta cuatro puntos fijos –puntos de corte de su la curva de fase y la recta de 45º–, dos corresponden a los puntos fijos de la logística $\bar{x}_0=0$ y $\bar{x}_1=(\mu-1)/\mu$ y otros dos correspondientes al ciclo límite –los puntos p_1 y p_2 en (2.33)–. Como se observa visualmente analizando la pendiente de estos puntos, tanto $\bar{x}_0$ como $\bar{x}_1$ son inestables mientras que sólo cuando μ =3.25 el ciclo límite periodo dos –puntos p_1 y p_2– resulta estable en el sentido de Lyapunov. Este es precisamente el resultado que obtuvimos anteriormente mediante el análisis gráfico de bifurcaciones.

Estabilidad de las órbitas dentro de un atractor extraño: El exponente de Lyapunov

Cuando los sistemas son caóticos no es posible evaluar la derivada (3.4), ya que en este caso la órbita que describe el sistema no presenta una periodicidad simple finita, por el contrario, las soluciones caóticas son aperiódicas, esto es, con un periodo que puede considerarse infinito. Así, el método para estudiar la estabilidad local en sentido de Lyapunov de estas órbitas caóticas debe realizarse llevando la derivada (3.4) al límite, hablando ahora de números de Lyapunov en lugar de derivadas. Con estos números de Lyapunov se intenta cuantificar la tasa media geométrica de separación de dos puntos cercanos. Más concretamente, dada una órbita $\{x_1, x_2, ..., x_T\}$, el número de Lyapunov vendrá dado por:

$$L(x_1)=\lim_{T\to\infty}\left(|f^{T)\prime}(x_1)|\right)^{\frac{1}{T}}=\lim_{T\to\infty}\left(|f'(x_1)|\cdot|f'(x_2)|\cdot\ldots\cdot|f'(x_T)|\right)^{\frac{1}{T}} \qquad (3.6)$$

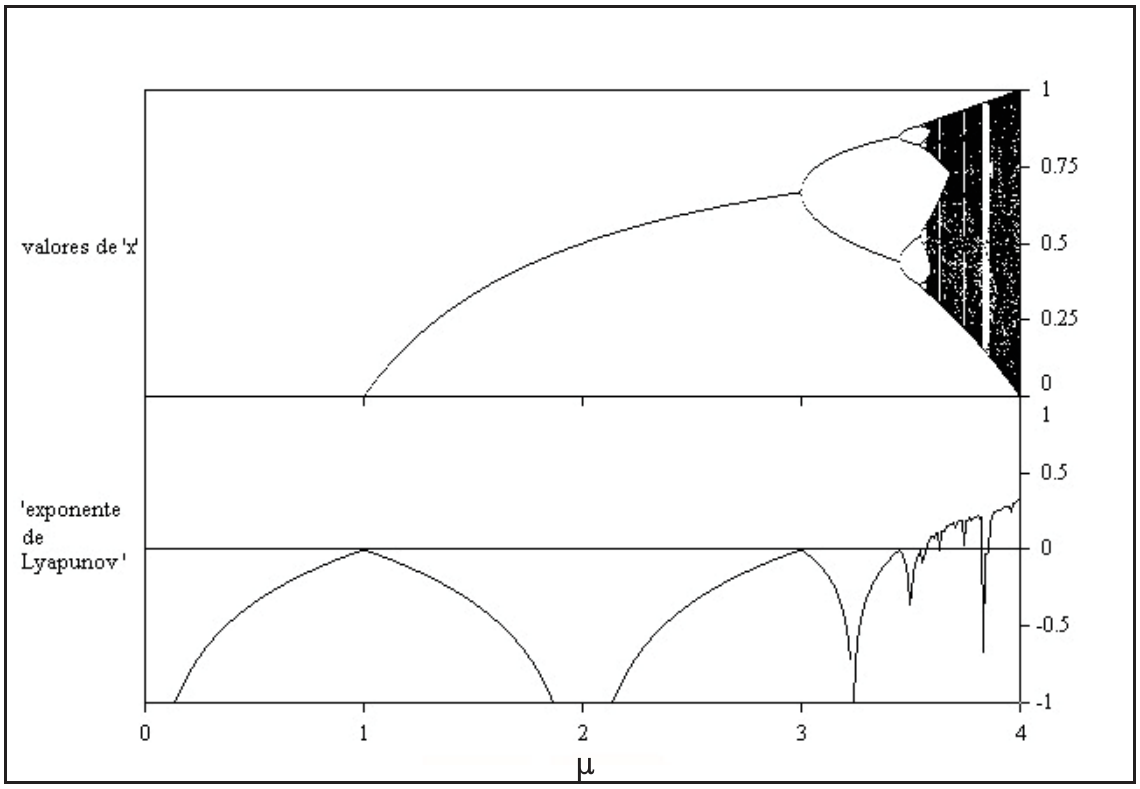


Figura 3.4. Exponente de Lyapunov de la ecuación logística $0 \leq \mu \leq 4$ –base $\log_{10}$–

El exponente de Lyapunov será el logaritmo del número de Lyapunov:

$$\lambda(x_1)=\ln[L(x_1)]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\left[\left|f^{T)\prime}(x_1)\right|\right]= \\ =\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\ln|f'(x_1)|+\ln|f'(x_2)|+\ldots+\ln|f'(x_T)|\right]\ ;\quad \forall f'(\cdot)\neq 0 \tag{3.7}$$

El número –o el exponente– de Lyapunov proporciona una medida de la estabilidad –en sentido de Lyapunov– de los equilibrios dinámicos independientemente de su periodicidad. En particular, el número de Lyapunov coincide con la expresión (3.1) y (3.4) para el caso de los puntos fijos y los ciclos límite respectivamente. Así, cuando el número de Lyapunov es mayor que uno –el exponente de Lyapunov es negativo– el equilibrio dinámico será localmente estable, mientras que si es mayor que uno –exponente positivo– será localmente inestable.

Por la propia definición de la estabilidad en sentido de Lyapunov, esta inestabilidad local debe interpretarse como aquella situación en la que órbitas que parten de situaciones arbitrariamente próximas, se van separando en el tiempo a la tasa media dada por el número de Lyapunov. Esta interpretación coincide precisamente con la definición de la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, por lo que podemos utilizar los números o exponentes de Lyapunov para cuantificar la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales y por tanto, para caracterizar los sistemas caóticos. Así, si aplicamos la

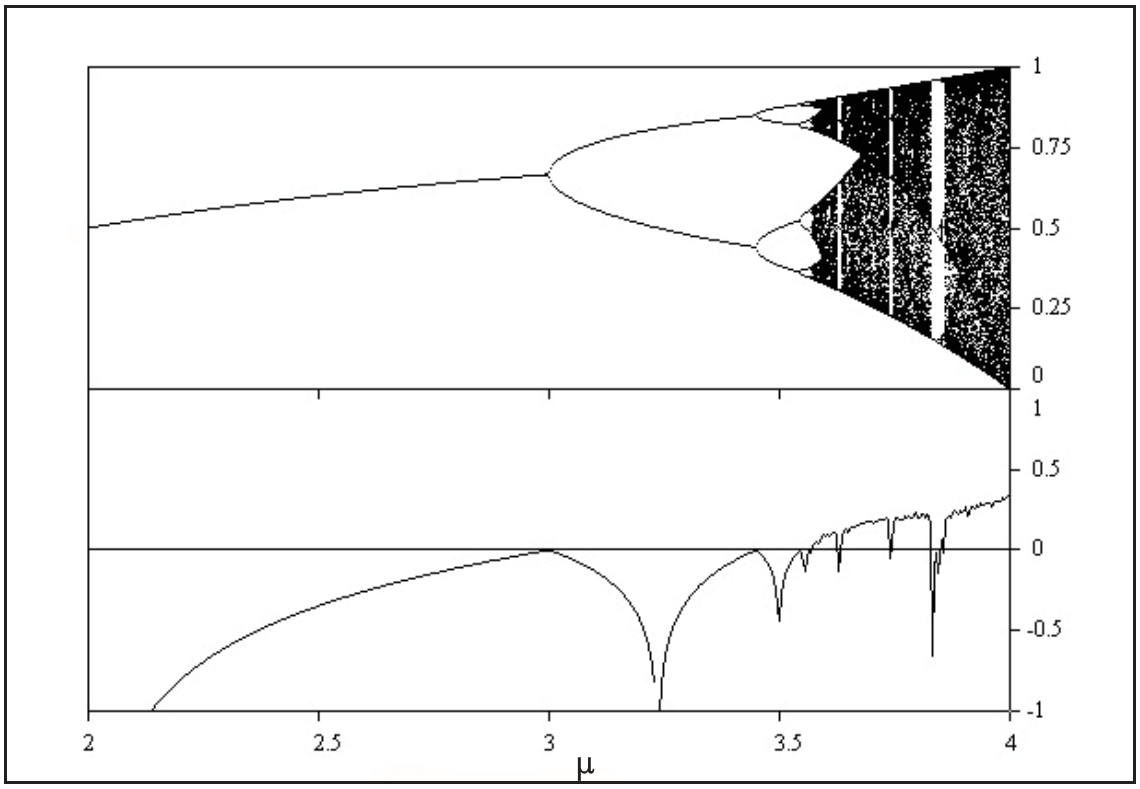


Figura 3.5. Exponente de Lyapunov de la ecuación logística $2 \leq \mu \leq 4$ –base log $_{10}$–

definición de caos en sentido de Ruelle, un sistema disipativo será caótico si es localmente inestable, es decir, si presenta un exponente de Lyapunov positivo. Obsérvese que el hecho de que el sistema sea disipativo implica que converge a un atractor, en el que el sistema queda atrapado y su movimiento acotado, aunque la evolución del sistema dentro del atractor resulte ser altamente inestable.

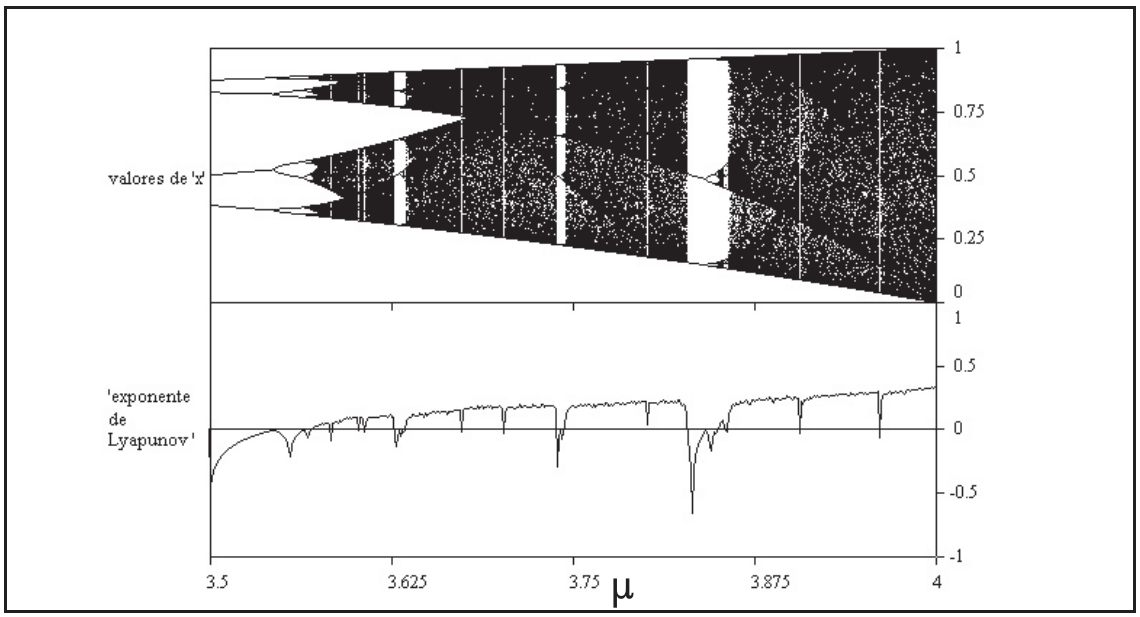


Figura 3.6. Exponente de Lyapunov de la ecuación logística $3.5 \leq \mu \leq 4$ –base log $_{10}$–

Como aplicación, mostramos en las figuras 3.4-3.5 el exponente de Lyapunov de la ecuación logística para distintos valores del parámetro de control junto al correspondiente gráfico de bifurcación $0 \leq \mu \leq 4$. Estos exponentes han sido calculados a partir de la expresión 3.7, es decir, evaluando la derivada 3.3 a lo largo de la solución numérica de la ecuación logística. Como se observa, para valores de $\mu < \mu_{\infty} \approx 3.5699$, las trayectorias de la ecuación logística converge a soluciones periódicas de dinámica simple, y sus respectivos exponentes de Lyapunov son no positivos. Resulta interesante apuntar que en los puntos de bifurcación –en aquellos valores de los parámetros de control donde se inestabilizan unos equilibrios y aparecen otros nuevos estables– los exponentes se anulan. En cualquier caso, sólo a partir del punto de saturación $\mu_{\infty} \approx 3.5699$, en el que se entra en la región caótica, el exponente de Lyapunov toma valores positivos. Dentro de esta región, aparecen también exponentes no positivos, que se corresponden precisamente con las ventanas de regularidad del caos –figura 3.6–.

Espectro de exponentes de Lyapunov: sistemas *n*-dimensionales

Cuando estamos ante sistemas dinámicos *n*-dimensionales, el análisis de la estabilidad de los equilibrios dinámicos en sentido de Lyapunov, se basa en lugar de en la derivada (3.1)-(3.4), en la matriz jacobiana ($\boldsymbol{Df}$)asociada al sistema dinámico:

$$\boldsymbol{Df} = \begin{pmatrix} \partial f_1/\partial x_1 & \partial f_1/\partial x_2 & \cdots & \partial f_1/\partial x_n \\ \partial f_2/\partial x_1 & \partial f_2/\partial x_2 & \cdots & \partial f_2/\partial x_n \\ \vdots & & & \\ \partial f_n/\partial x_1 & \partial f_n/\partial x_2 & \cdots & \partial f_n/\partial x_n \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Más concretamente, la estabilidad de los equilibrios debe analizarse utilizando los *n* autovalores de dicha matriz jacobiana. Estos autovalores se utilizan para transformar el sistema de forma que se normalice el espacio de fases original *n*-dimensional. Cada uno de estos autovalores caracteriza la estabilidad o inestabilidad del equilibrio en cada una de las *n*-variedades o direcciones que caracterizan el espacio de estados o espacio de fases. De esta manera es posible analizar la estabilidad de los equilibrios dinámicos *n*-dimensionales de manera análoga a los sistemas unidimensionales, quedando caracterizada la estabilidad en sentido de Lyapunov cuando la parte real de todos los autovalores se encuentra dentro del círculo unidad.

Cuando trasladamos este análisis de la estabilidad a los equilibrios aperiódicos o caóticos de sistemas *n*-dimensionales, debe sustituirse también la derivada por la matriz jacobiana, definiéndose ahora, de manera análoga a (3.7), el espectro de exponentes de lyapunov como:

$$\lambda_i(x_1)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\left[\left|\boldsymbol{Df}^{T)}(x_1)\right|\right]=$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\ln|\Lambda_i(x_1)|+\ln|\Lambda_i(x_2)|+\ldots+\ln|\Lambda_i(x_T)|\right];\quad \forall\Lambda_i(\cdot)\neq 0,\ i=1,\ldots,n \tag{3.9}$$

siendo $\Lambda_i(x_j)$, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, T$ los autovalores de la matriz jacobiana evaluada a lo largo de la trayectoria $\{x_1, x_2, \ldots, x_T\}$. Para un sistema n-dimensional existirán, por tanto, n exponentes de Lyapunov, indicando cada uno de ellos cómo se separan las trayectorias –a qué tasa media geométrica– inicialmente próximas en cada una de las n direcciones del espacio de fases. Nótese que para que el equilibrio dinámico sea localmente estable, todo el espectro de exponentes de Lyapunov debe ser no-positivo. La presencia de algún exponente positivo, implicaría automáticamente que la solución es localmente inestable, es decir, presenta una dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales y, por tanto, el sistema se comporta de manera caótica.

De esta forma, es posible caracterizar los equilibrios dinámicos en función de sus correspondientes exponentes de Lyapunov. En primer lugar, recordemos que el signo de cada exponente muestra las propiedades de divergencia ($\lambda_i>0$), convergencia ($\lambda_i<0$) o ausencia de ambas ($\lambda_i=0$) en los movimientos de las soluciones inicialmente próximas en una cada una de las n direcciones del espacio de fases.

En primer lugar, debemos apuntar que si bien los comportamientos caóticos pueden aparecer en sistemas unidimensionales en tiempo discreto –como se ha mostrado ya en la ecuación logística–, cuando estamos en sistemas en tiempo continuo es necesario que la dimensión del sistema –número de ecuaciones o variables de estado– sea como mínimo de tres. En ecuaciones dinámicas en tiempo continuo unidimensionales sólo pueden existir equilibrios atractores del tipo punto fijo, mientras que en los bi-dimensionales el teorema de Poincaré- Bendixon –Fernández Rodríguez, 1995, pp. 54– garantiza que como mucho podrán aparecer atractores del tipo ciclo límite.

La explicación intuitiva de este hecho se encuentra en que la solución de un sistema dinámico en tiempo continuo se representa por una trayectoria o una órbita *continua* en el espacio de fases, que no podrá cortarse a sí misma si efectivamente es solución del sistema –recuérdese la definición de solución en (2.14-2.15)–. Así, en sistemas diferenciales bi-dimensionales, los únicos comportamientos acotados posibles serán necesariamente regulares y periódicos, esto es, el comportamiento, convergerá necesariamente o a un punto fijo o a una órbita cerrada, que por compleja que sea, representará siempre la existencia de un ciclo límite (Gandolfo, 1997, pp.518). Para que puedan aparecer comportamientos más complejos, como por ejemplo los movimientos cuasi-periódicos y los caóticos, será necesario que el sistema dinámico en tiempo continuo sea como mínimo tridimensional.

Esta limitación en el número mínimo de variables de estado no aparece en el caso de los sistemas discretos, ya que en este caso, la trayectoria no es una linea continua. Por el contrario, la órbita solución al sistema irá *saltando* –a intervalos iguales de tiempo Δt en los que el sistema se encuentra definido– de un estado a otro en el espacio de fases, con la única restricción de que tras un mismo estado no pueden seguirle dos estados distintos si la secuencia de puntos es efectivamente solución del sistema. Esos saltos pueden describir secuencias o soluciones irregulares o caóticas sin que se necesite una dimensión mayor a la unitaria y sin que se pase dos veces por el mismo punto, lo que conduciría a un corte de la solución y por lo tanto a la llegada a soluciones regulares –puntos fijos o ciclos límite–. Insistimos en que en el caso de los sistemas en tiempo continuo, nos encontraríamos con secuencias cuyos saltos temporales tienden a ser infinitamente pequeños. Es decir, la evolución de la órbita descrita por los sistemas dinámicos diferenciales en el espacio de fases es suave, sin que puedan aparecer los saltos irregulares de los sistemas caóticos discretos que son los que permiten que en ellos las oscilaciones aperiódicas no se corten o intercepten en ningún punto (Lorenz, 1993, pp167). De esta manera, para dimensiones inferiores a 3 sólo es posible encontrar simultáneamente comportamientos acotados que además son localmente inestables –caóticos en sentido de Ruelle– en las aplicaciones en tiempo discreto, nunca en los sistemas diferenciales en tiempo continuo. Así, cuando estamos ante sistemas unidimensionales, si el exponente de Lyapunov es negativo el atractor será periódico y estable –puntos fijos o ciclos límite de periodicidad simple si la ecuación está definida en tiempo discreto; y únicamente puntos fijos si el sistema está definido en tiempo continuo–. Si el exponente es positivo, entonces la ecuación dinámica presentará dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales, y por tanto, será caótico si estamos en tiempo discreto, y tendrá un comportamiento explosivo –sin atractores– si estamos en tiempo continuo.

Para garantizar que, con independencia de si nos encontramos en sistemas en tiempo discreto o continuo, la dependencia respecto a las condiciones iniciales, esto es, que algún exponente de Lyapunov sea positivo, se convierta en condición suficiente para la existencia de comportamientos caóticos –en sentido de Ruelle–, es necesario que la evolución de las soluciones se encuentren acotada en alguna región del espacio de fases, es decir, converjan a equilibrios dinámicos atractores. Esta última condición siempre se verifica cuando el sistema dinámico es disipativo. De esta forma, una condición necesaria y suficiente para que un sistemas sea caótico será que dicho sistema sea disipativo y que tenga algún exponente de Lyapunov positivo(Lorenz 1993, pp. 216-218).

En caso de los sistemas continuos, para que un sistema sea disipativo, es decir, contraigan el volumen del espacio de fases bajo la acción del sistema, será necesario que la suma de todos sus exponentes sea negativa, $\sum \lambda_i < 0$. Además, en el caso de sistemas en tiempo continuo, cuando uno o más de los exponentes de Lyapunov son no-negativos entonces al menos uno de los

exponentes debe ser cero (Eckman y Ruelle 1985, p632.). De esta forma, encontramos, de nuevo, una explicación al por qué el número de exponentes de Lyapunov de los sistemas dinámicos diferenciales –su dimensión o número de variables de estado– para que éstos puedan presentar comportamientos caóticos debe ser como mínimo tres: al menos un exponente debe ser negativo para garantizar que el sistema es disipativo y que existe efectivamente un atractor, $\Sigma \lambda_i < 0$; al menos otro debe ser positivo para que exista dependencia respecto a las condiciones iniciales; y, por consiguiente, al menos un exponente deberá ser nulo ya que el sistema es continuo y tiene algún exponente positivo (Abarbanel, 1996, p. 27). Teniendo presente lo anterior, es posible caracterizar a los atractores a los que convergen los sistemas dinámicos disipativos en tiempo continuo haciendo uso del signo del espectro de exponentes de Lyapunov. Así, en dimensión uno, el exponente será negativo, (-), y el único atractor posible será el punto fijo. En dimensión dos es posible que aparecerán punto fijos (-,-) y ciclos límite (0,-). En dimensión tres será posible obtener atractores con dinámica más compleja: (+,0,-) caos; (0,0,-) toro bidimensional; (0,-,-) ciclos límite; (-,-,-) punto fijo (Fernández Díaz, 2000, pp.82-83). Nótese que en dimensiones mayores a la tres, para que existan comportamientos caóticos será necesario que al menos un exponente sea positivo, otro nulo y alguno negativo. Por ejemplo, en dimensión 4, cualquiera de las siguientes combinaciones garantizaría que el sistema es caótico:(+,+,0,-); (+,0,0,-); (+0,-,-) (Wolf et al.,1985, p. 287). En general, para sistemas *n*-dimensionales, cuando todos los exponentes son negativos el atractor será un punto fijo; cuando uno de ellos es cero y el resto negativos estaremos ante ciclos límite; cuando $m>1$ son nulos y el resto negativos estaremos ante toros *m*-dimensionales; y por último cuando al menos uno de los exponentes sea positivo, entonces estaremos ante atractores extraños.

3.2. Atractores extraños y objetos fractales.

Bajo la denominación de fractales, nombre acuñado por Benoît Mandelbrot a finales de los setenta, se recoge toda una familia de objetos y conjuntos matemáticos con los que se trata de representar los fenómenos de la naturaleza. Estos conjuntos presentan geometrías altamente irregulares y complejas que van más alla de un simple punto, una recta, un plano o una esfera y que por consiguiente, no quedan suficientemente bien representados por la geometría euclidea o diferencial[2].

[2] Sobre el concepto y alcance de los objetos fractales para estudiar y representar los distintos fenómenos de la naturaleza véase Mandelbrot (1997). Tenemos que apuntar que si bien ha sido este autor quién a ayudado a divulgar y popularizar la geometría fractal, los primeros trabajos en esta materia–el estudio de curvas no diferenciables–, datan de finales del siglo XIX, asociados a nombres bien conocidos, Cantor, Peano, Hilbert, Hausdorff, Sierpinski y von Koch entre otros. El desarrollo reciente ha ido unido a la generalización en el uso del ordenador como herramienta matemática. Los primeros trabajos de Mandelbrot sobre fractales

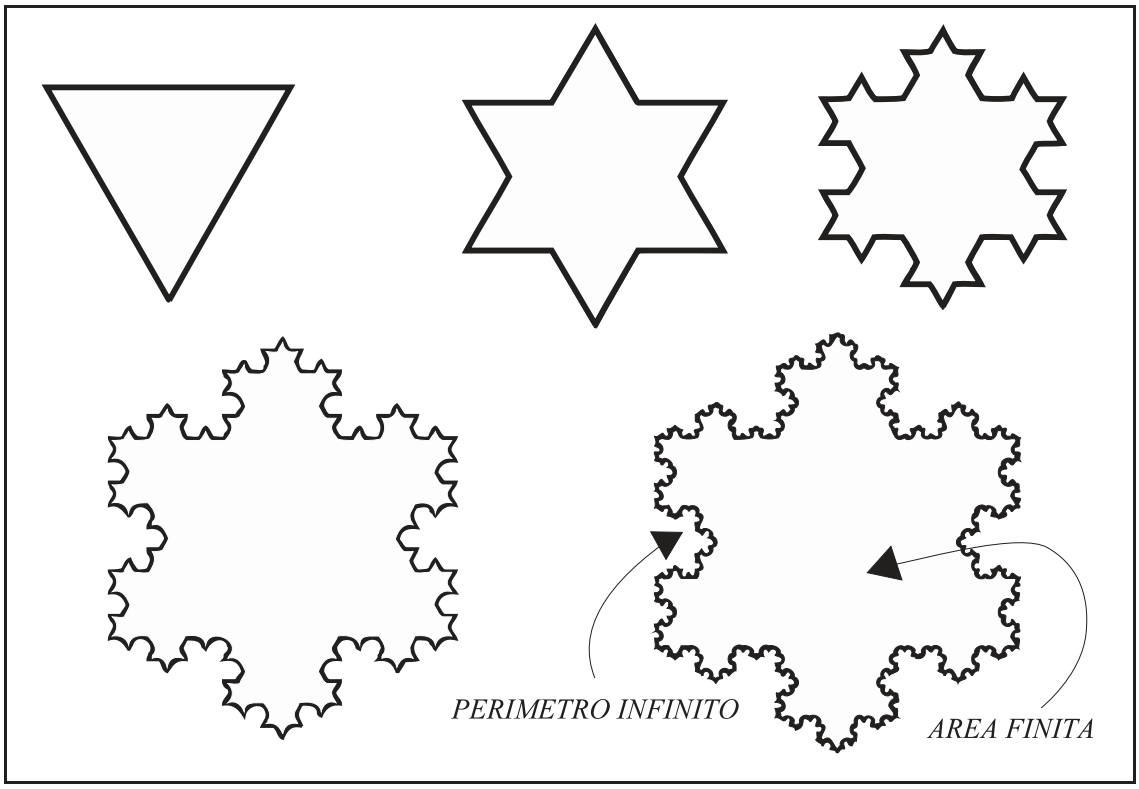


Figura 3.7. Copo de Nieve de Koch.

La geometría diferenciable estudia las formas geométricas que miradas en pequeño son lisas –una curva diferenciable, se comporta localmente como una recta–. La geometría fractal supone una extensión de la anterior, ya que permite también el análisis de figuras geométricas no diferenciables o quebradas a cualquier escala desde la que se mire –los objetos fractales–. Con la geometría fractal se trata de encontrar cierta regularidad en estos objetos. Dicha regularidad se encuentra en la relación o ley de potencia entre el objeto y sus partes cuando es observado a diferentes escalas. El exponente de dicha ley de potencia es conocida como la dimensión fractal, concepto éste que constituye el eje central de la geometría de los conjuntos fractales.

La dimensión topológica y el problema de la medida de conjuntos geométricos.

Hay diferentes conceptos matemáticos que responden al nombre de dimensión de un conjunto geométrico. Un primer concepto sería el de dimensión euclidea –o envolvente– que asigna a cada conjunto geométrico un entero determinado por el número de coordenadas necesarias para su representación.

Otro concepto es el de dimensión topológica (D_T). Esta dimensión topológica hace referencia a la configuración espacial de los puntos del

surgen, precisamente, de su labor como investigador de la IBM.

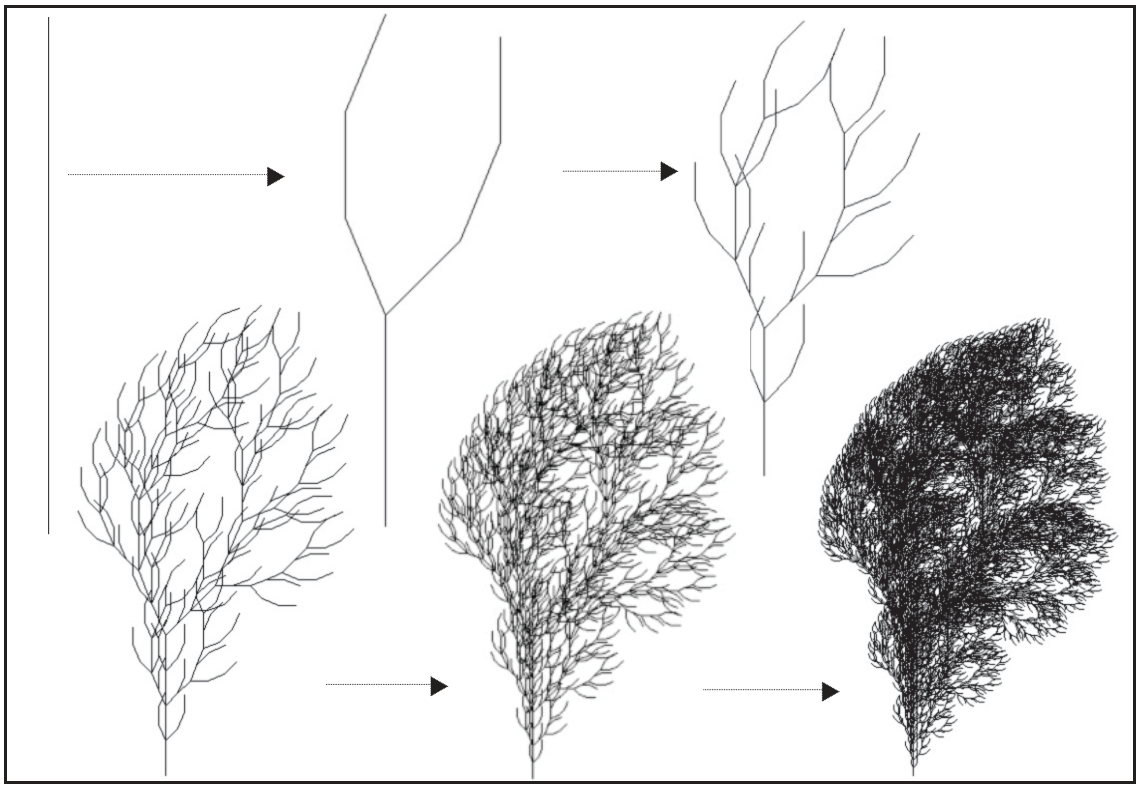


Figura 3.8. Generación de un fractal auto-semejante.

conjunto geométrico, y aunque de alguna forma tal configuración puede estar relacionada con el tamaño del conjunto, lo que esencialmente proporciona dicha dimensión es la forma de ocupar el espacio en el que se inserta dicho conjunto(Guzmán et al.1993, p.25). Así, siguiendo la concepción Euclidea sobre las formas geométricas: el *punto* es lo que no tiene partes y su dimensión topológica es cero($D_T = 0$) –un conjunto inconexo de puntos tendría, igualmente, $D_T = 0$– ; una *línea* –recta, curva o quebrada– es una longitud sin anchura ($D_T = 1$); una *superficie* –con o sin pliegues o curvaturas– es lo que sólo tiene longitud y anchura ($D_T = 2$); y un *sólido* –esfera, cubo, o cualquier otro sólido con forma más irregular– es lo que tiene longitud, anchura y profundidad ($D_T = 3$)[3]. La definición de D_T asigna un número entero a un conjunto en el espacio $\mathbb{R}^{m.}$.

La comprensión correcta de las formas irregulares o fragmentadas no es posible cuando se utilizan la dimensión topológica o la euclidea. En efecto, estos conceptos otorgan la misma dimensión a conjuntos con apariencias arbitrariamente complejas –una nube o una piedra tendría la misma dimensión que un cubo o una esfera perfectamente regular y lisa–.

Quizás la mejor manera de introducir las propiedades de los objetos fractales es haciendo referencia a algún ejemplo en el que se ponga de

[3] Véase Mandelbrot (1997, pp.569-572) para un repaso de los orígenes históricos del concepto de dimensión topológica.

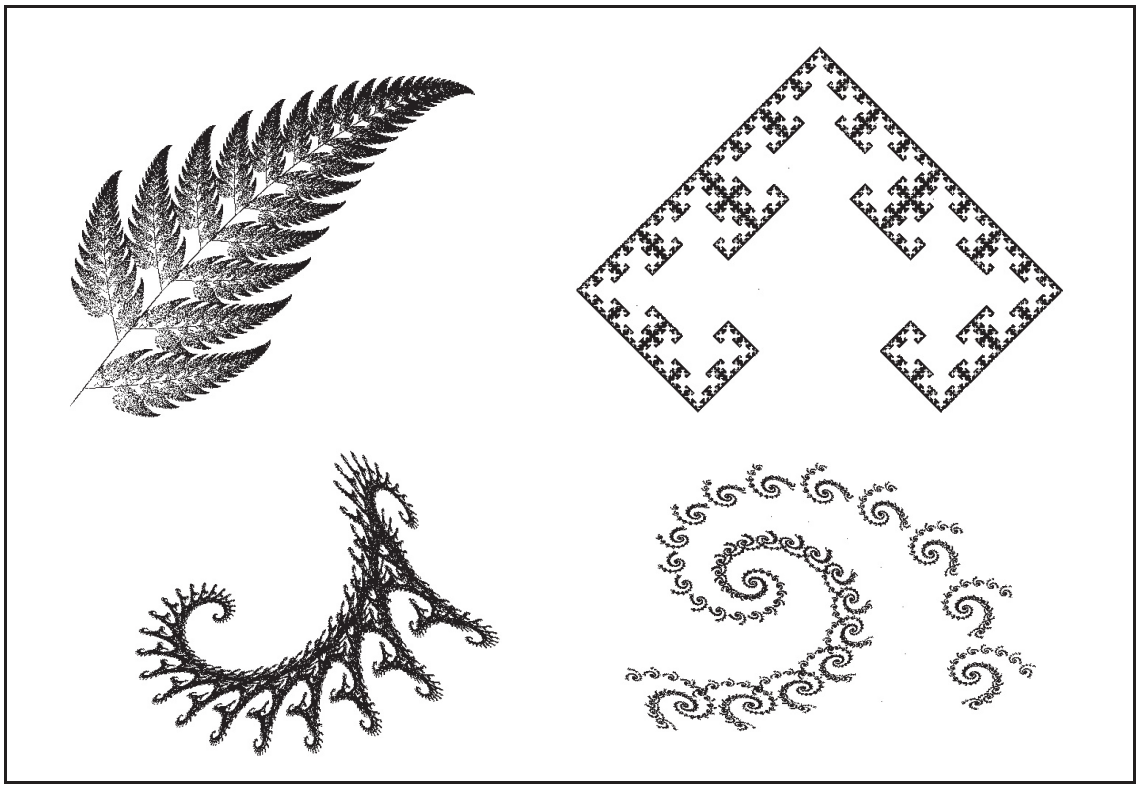


Figura 3.9 Fractales auto-semejantes.

manifiesto el problema de su medida cuando se utilizan los conceptos euclideos de longitud, área o volumen. Los objetos fractales más sencillos de construir son aquellos que proceden de la iteración de algoritmos relativamente simples, pero que implican un proceso de ruptura o quebramiento. El resultado de estos procesos iterativos son unas figuras altamente complejas y autosemejantes. En la figura 3.7 se ha representado uno de estos objetos fractales, el conocido como Isla triádica o copo de nieve de Koch[4].

La construcción comienza por un *iniciador*, en este caso un triángulo equilátero de lado unidad. A continuación, el tercio central de cada lado, se sustituye por una poligonal con lados de longitud 1/3 manteniendo la conexión con los vecinos –este primer paso es conocido como *generador*–. El resultado es una estrella de seis puntas o de David. Esta transformación se repite sobre el tercio central de cada uno de los segmentos de la figura resultante del paso previo de forma sucesiva e indefinida (Mandelbrot, 1997, p.70).

El resultado es una figura *autosemejante* con forma de copo de nieve –parte inferior derecha de la figura 3.7– que presenta extrañas propiedades desde el punto de vista de la geometría euclidea o diferencial. Se trata de una linea infinitamente plegada y por tanto no derivable en ningún punto. Por ser una linea cerrada –sin área ni volumen– su dimensión topológica $D_T = 1$. Esta linea

[4] Esta figura procede de los trabajos de principios del siglo XX de la matemática sueca Helge von Koch sobre curvas no diferenciables en ningún punto.

se encuentra encerrada en una región acotada del espacio bidimensional –el área que encierra la curva es finito–, pero su longitud tiende a crecer hasta infinito a medida que disminuye la escala de medición, esto es, a medida que vamos considerando mayor detalle en los infinitos plegamientos, recovecos, entrantes y salientes de la curva[5]. No es posible, por tanto, obtener una medida precisa de la longitud asociada a su dimensión topológica $D_T = 1$. La explicación a este resultado se encuentra en que estamos ante un objeto geométrico cuya dimensión –dimensión fractal– es superior a uno –como veremos su dimensión fractal es log 4/log 3 ≈ 1.2618– y por tanto su longitud no es el instrumento adecuado de medida –tampoco lo sería el área, ya que al tratarse de una linea, aunque infinitamente plegada, su área sería nula–. Parecidos procesos iterativos a los de la curva de Koch darán lugar a la formación de otros tantos objetos fractales autosemejantes a los que tampoco es posible aplicar los métodos tradicionales de medida –figuras 3.8 y 3.9–[6].

Para el estudio de los objetos fractales, se hace necesario, por tanto, la utilización de otras definiciones de medida y de dimensión de un conjunto. Mandelbrot (1997, p. 33) propone el uso de la medida y la dimensión de Hausdorff.

Antes de pasar a la siguiente sección, queremos destacar aquí, aunque sea brevemente, una interesante propiedad de este tipo de fractales, su *autosemejanza*. Esta propiedad viene a decir que la apariencia, más o menos irregular, de ciertos objetos fractales es siempre la misma, independientemente de la escala a la que se observen. Dicho de otro modo, un conjunto autosemejante es el que puede ser descompuesto en partes que son copias a escala del conjunto total (Guzmán et al. 1993, pp. 93-96).Como tendremos ocasión de comprobar más adelante, aunque no necesariamente todos los objetos fractales sean autosemejantes, dicha propiedad sí aparecerá con frecuencia en los modelos dinámicos caóticos y en algunos procesos estocásticos que serán utilizados para la detección de movimientos caóticos en las series temporales.

Dimensión Fractal o de Hausdorff

La medida de Hausdorff trata de generalizar el concepto euclideo de longitud, área y volumen[7]. Esta medida parte del recubrimiento o enlosado de una figura geométrica por una familia de infinitos subconjuntos de área

[5] Más adelante indicaremos cómo medir la longitud del perímetro del conjunto final.

[6] Estos objetos fractales junto a los conjuntos de Mandelbrot y Marksjulia que se presentarán más adelante han sido iterados con el programa informático fractint.

[7] Se trata, en realidad, de una generalización de la medida de Lebesgue en la que se permite, a diferencia de ésta última, que la dimensión sea cualquier número real y no necesariamente un entero.

arbitrariamente pequeña (seguimos aquí, básicamente, a Guzmán et al. 1993, pp.32-35). A partir de esta medida es posible definir la dimensión de Hausdorff, con la que se trata de recoger el grado de ocupación del espacio por el conjunto en cuestión de manera independiente a su estructura topológica o geométrica. La idea intuitiva de este concepto de dimensión es la de medir cómo escalan ciertos parámetros que se espera que estén relacionados, a través de leyes de potencia, con el tamaño del conjunto –dado por la medida de Hausdorff– cuando éste es observado a escalas cada vez más pequeñas. El exponente de escalamiento será la dimensión de Hausdorff (Martín et al. 1995, p. 276).

Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y un número real positivo, δ, diremos que una familia $\{A_i\}$, i=1, 2, ... de subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es un δ-*recubrimiento* de E si la unión de tales subconjunto contiene a E, esto es

$$E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \tag{3.10}$$

y el diámetro de todos los miembros del recubrimiento es menor o igual que δ,

$$|A_i| \leq \delta \ ; \ \forall i = 1,2,.. \tag{3.11}$$

siendo $|\cdot|$ la norma euclidea. Con este recubrimiento se podrá apreciar y medir todos los recovecos e irregularidades que presente el objeto geométrico por compleja que sea su apariencia.

Dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ y un número real s>0, definimos:

$$H_{\delta}^{s}(E) = \textit{ínfimo} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |A_i|^s \ : \ \{A_i\} \ \delta - \textit{recubrimiento de } E \right\} \tag{3.12}$$

que será un número que mide el *s-tamaño* del conjunto E, es decir, mide el conjunto E ignorando la irregularidades de tamaño menor que δ.

La medida s-dimensional de Hausdorff se define, a partir de (3.12), como

$$H^s(E) = \lim_{\delta \to 0} H_{\delta}^{s}(E) \tag{3.13}$$

es decir, esta medida es un paso al límite de (3.12) incorporando irregularidades de tamaño cada vez menor. Esta medida s-dimensional podrá ser nula, algún número real positivo o infinita[8]. Se puede demostrar que existe un único valor de s tal que, dado un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$, entonces

- si $t < s \rightarrow H^t(E) = \infty$
- si $t > s \rightarrow H^t(E) = 0$

[8] Puede demostrarse que H^s verifica las propiedades que se exigen para ser medida, esto es: $H^s(\emptyset)=0$; si $E \subset F$ entonces $H^s(E) \leq H^s(F)$; y, si $\{E_k\}$ k=1,2, ... es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces:

$$H^s\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} H^s(E_k)$$

Este número real s es conocido como la *dimensión de Hausdorff* o *dimensión fractal*.

Dimensión de recuento por cajas

La dimensión de Hausdorff utiliza para su definición recubrimientos arbitrarios (3.10). A efectos operativos, pueden utilizarse otras clases más restringidas de recubrimientos y obtener el mismo valor para la dimensión fractal. La *dimensión de recuento por cajas* (*box-counting*) es una definición equivalente a la dimensión de Hausdorff que utiliza hiper-cubos para recubrir los conjuntos y obtener así una medida de su tamaño. Como consecuencia de esta equivalencia y de su mayor operatividad práctica, suele identificarse la dimensión fractal con esta dimensión de recuento por cajas. En el próximo capítulo, analizaremos otros métodos alternativos para calcular la dimensión fractal –dimensión de correlación, de información y de Lyapunov–.

La idea en la que se apoya la dimensión de recuento por cajas es la misma que la de la dimensión de Hausdorff. Hay que construir algún proceso de medida a una cierta escala δ, es decir, que ignore irregularidades de tamaño menor a δ, y posteriormente analizar como varía dicha medida cuando δ tiende a cero cuando disminuye la escala de medida para poder recoger irregularidades más pequeñas.

En la este caso, la medida de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ se obtiene a partir de δ-recubrimientos formados por cubos n-dimensionales con lado de longitud δ. Contando el número de cubos necesarios para recubrir todo el conjunto $N_\delta(E)$ puede obtenerse una medida del tamaño del conjunto denominada δ-*longitud del conjunto*, $L_\delta(E)$:

$$L_\delta(E) = \sum_{i=1}^{N_\delta(E)} \delta^s = N_\delta(E) \cdot \delta^s \tag{3.14}$$

La dimensión de recuento por cajas vendrá dada por aquel número real s, para el cual el paso al límite de (3.14) cuando $\delta \to 0$ ni se anula ni diverge a infinito. En este caso, a partir de (3.14) la dimensión fractal puede obtenerse como[9]

$$s = \lim_{\delta \to \infty} \frac{\log N_\delta(E)}{-\log \delta} \tag{3.15}$$

En la figura 3.10 hemos recogido el proceso de obtención de la dimensión de recuento por cajas para una recta, un plano y un cubo con longitud de lado normalizado a uno(Solé y Manrubia, 1996, p79-81). Esta normalización supone que $L_\delta(E)=1$, independientemente del valor de δ, lo que permite escribir (3.14) como:

[9] Obsérvese que hemos eliminado $L_\delta(E)$ del numerador ya que ésta es una constante y queda dominado por $N_\delta(E)$ que tiende a infinito cuando $\delta \to 0$

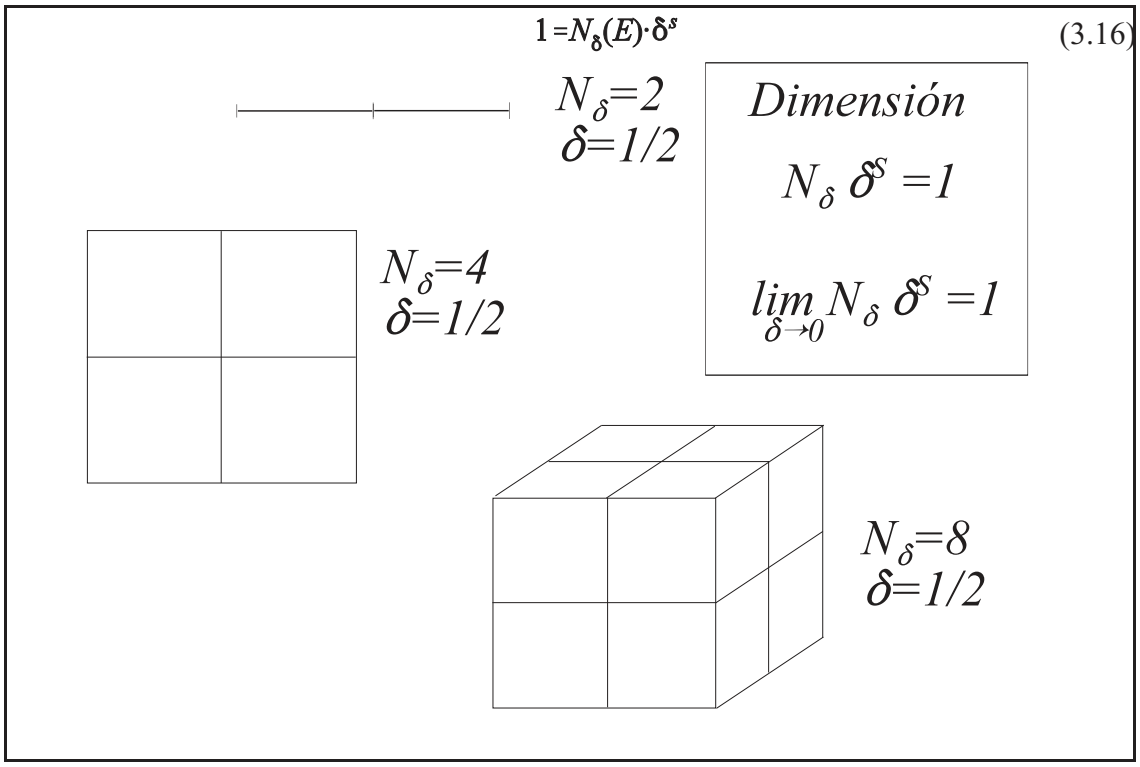


Figura 3.10.

Cuando δ=1/2, necesitaremos para cubrir la recta, el plano y el cubo 2, 4 y 8 cajas respectivamente. En este caso, el exponente *s* que se deriva de (3.16) sería *s=1* para la recta, *s=2* para el plano y *s=3* para el cubo. Con el paso al límite de (3.16) deben mantenerse los mismos valores para los correspondientes exponentes (*s*), ya que en caso contrario, dicho límite convergería a cero o divergiría a infinito[10]. La dimensión fractal en cada caso será, por tanto, $D_F=1$, $D_F=2$ y $D_F=3$, para la recta, el plano y el cubo respectivamente, coincidentes a su vez con sus correspondientes dimensiones topológicas.

Apliquemos ahora este método del recuento por cajas al copo de nieve de Koch. Para ello, supongamos que la longitud del perímetro del triangulo inicial es uno. Al aplicar la transformación generadora del objeto fractal observaremos que la longitud total del perímetro en cada una de las iteraciones vendrá dada por 1, 4/3, $(4/3)^2$, $(4/3)^3$,... . Como ya comentamos, dicha longitud diverge a infinito. Sin embargo, esta sucesión nos permitirá calcular la dimensión fractal del conjunto final considerando que para recubrimientos de longitud $\delta=(1/3)^n$ es necesario un número de cajas de $N_\delta=4^n$. De esta forma, aplicando (3.15)

[10] Para la recta, por ejemplo el número de segmentos necesarios para cubrir la recta cuando δ=1/4 es $N_\delta=4$, y cuando δ=1/8 sería $N_\delta=8$. En general con $\delta=(1/2)^n$ será $N_\delta=2^n$, por lo que aplicando (3.15) $D_F=1$. De manera análoga, para el plano tendríamos que para $\delta=(1/2)^n$ será $N_\delta=2^{2n}$, por lo que por (3.15) $D_F=2$, y para el cubo para $\delta=(1/2)^n$ se necesitarán $N_\delta=2^{3n}$, con $D_F=3$.

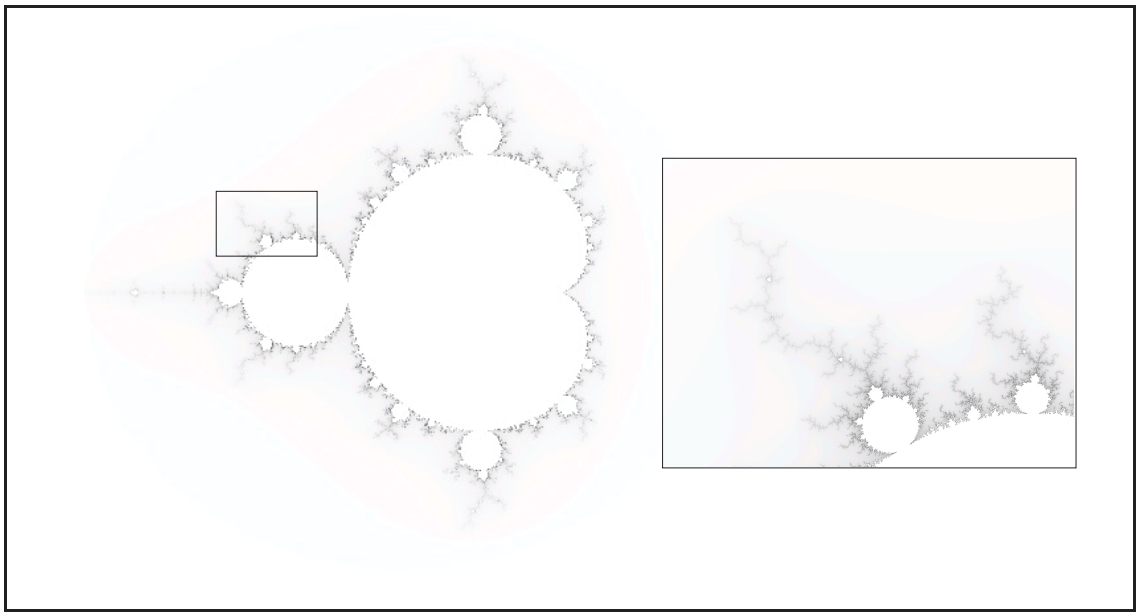


Figura 3.11. Conjunto de Mandelbrot

obtendríamos que la dimensión fractal del copo de nieve de Koch será D_F = log(4)/log(3)≃1.2618, que es superior a su dimensión topológica $D_T=1$.

Los objetos fractales

Hasta ahora hemos considerado dos definiciones de dimensión, la topológica (D_T) y la dimensión fractal (D_F). Ambas hacen referencia al grado de ocupación del espacio por un conjunto geométrico. Ambas dimensiones suponen la asignación de un número a cada conjunto geométrico, con la diferencia de que dicho número está restringido a los números enteros en la D_T, mientras que la D_F, permite que sea cualquier número real. Siempre que se trabaje en el espacio euclideo $\mathbb{R}^n$, la D_T y la D_F tomarán valores comprendidos entre *0* y *n*. Además debe cumplirse siempre que $D_F \geq D_T$.

Para todas las formas euclideas regulares se tendrá que $D_F = D_T$. Sin embargo, para objetos complejos o irregulares como el copo de nieve de Koch no se cumple esta igualdad. De hecho, esta última propiedad es la que utiliza Mandelbrot (1997, p.33) para definir los objetos fractales, esto es, un objeto o conjunto fractal será aquel para el cual $D_F > D_T$.[11]

[11] La mayoría de los fractales tienen dimensión no entera o fraccionaria –de hecho si D_F es no entera, entonces necesariamente $D_F > D_T$–, aunque es posible encontrar objetos fractales con D_F entera, por ejemplo, el atractor de la aplicación logística con $\mu=4$ tiene $D_F=1 > D_T=0$. Igualmente muchos objetos fractales son autosemejantes, aunque ésta tampoco sea una propiedad general presente en todos los conjuntos fractales. El carácter de fractal se adquiere, por tanto, cuando su dimensión fractal es estrictamente superior a su dimensión topológica.

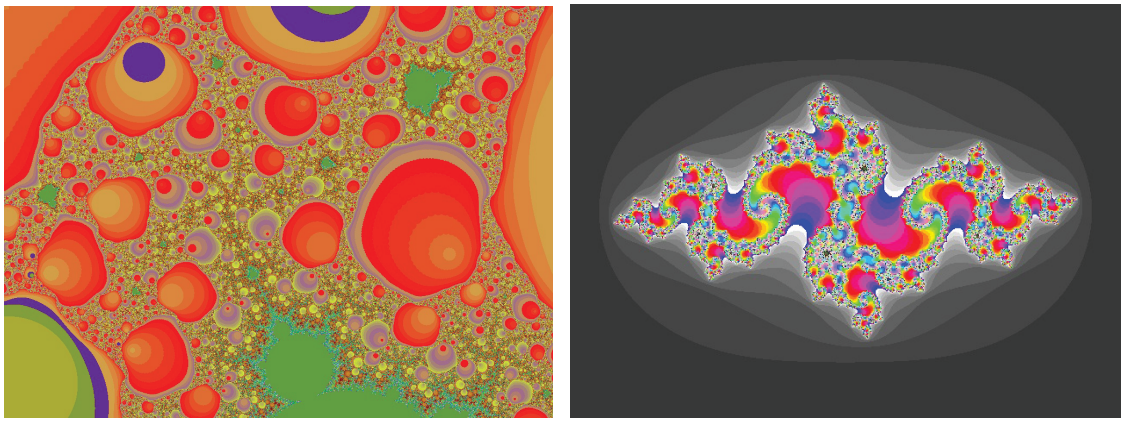


Figura 3.12. Objetos fractales. Variaciones del conjunto de Mandelbrot y Marksjulia

Existen multitud de fenómenos de la naturaleza que presentan estructuras fractales. Considerese a modo de ejemplo ilustrativo una cartulina o una hoja de papel. Se trata de un objeto regular, una superficie sin volumen, y por consiguiente un conjunto con $D_T = D_F = 2$. Cuandoarrugamos y aplastamos la hoja hasta conseguir algo parecido a una pelota, todos coincidiremos en que el nuevo objeto, sin ser un sólido perfecto, ocupa más espacio, ha ganado volumen, y por tanto debe haber aumentado de dimensión ($3 > D_F > 2$). Sin embargo, topológicamente sigue siendo equivalente a la cartulina de papel, y por tanto, su $D_T = 2$. Hemos construido un fractal.

En las figuras 3.11 y 3.12 hemos representado algunos de estos fractales en los que se observa la compleja estructura, así como el atractivo visual de algunos de estos conjuntos fractales. La consideración de la geometría fractal en esta tesis procede del hecho de que los atractores extraños son objetos fractales.

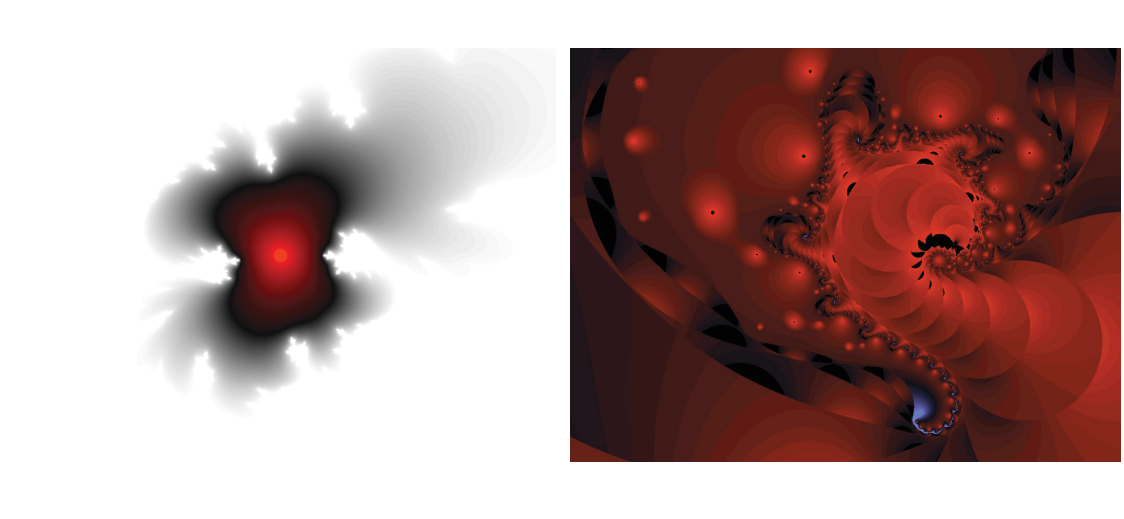


Figura 3.13. Objetos Fractales. Fuente Wegner y Tyler (1995)

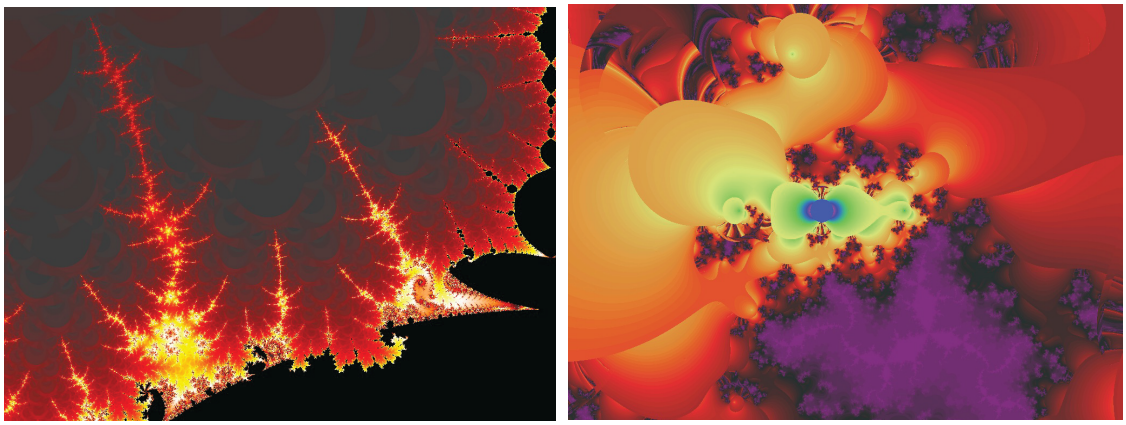


Figura 3.14. Objetos Fractales. Fuente Wegner y Tyler (1995)

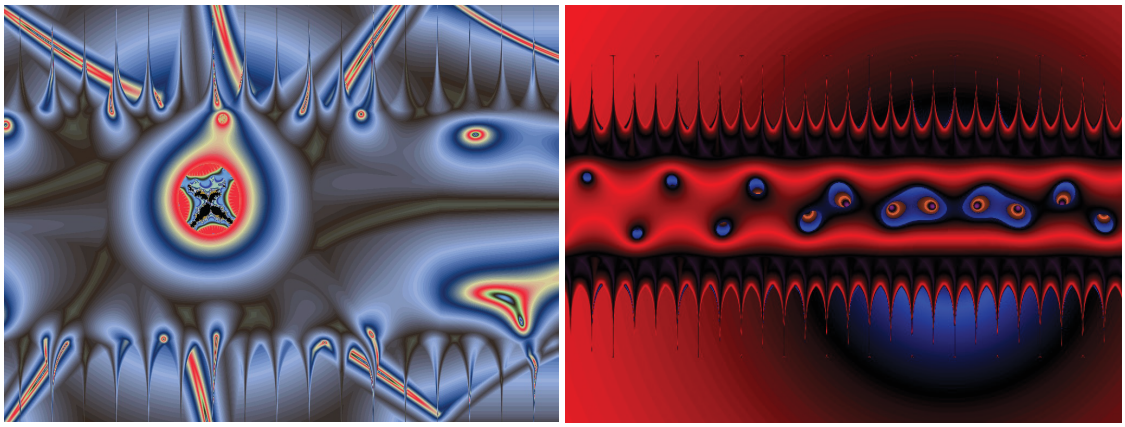


Figura 3.15. Objetos Fractales. Fuente Wegner y Tyler (1995)

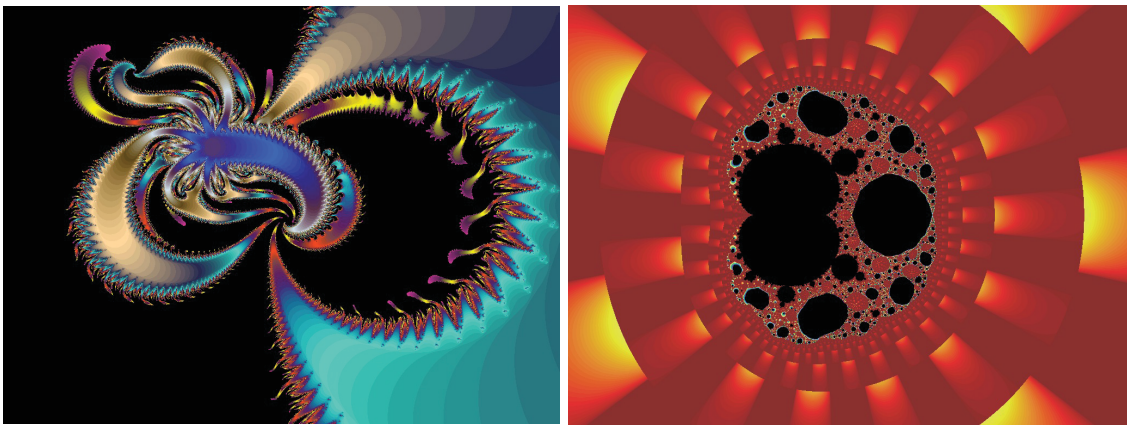


Figura 3.16. Objetos Fractales. Fuente Wegner y Tyler (1995)

Atractores extraños o atractores fractales

Matemática del Caos y Geometría fractal, lejos de ser conceptos rivalizantes –ambas tratan de encontrar regularidades dentro de la complejidad–, son totalmente complementarios. Con los sistemas caóticos se estudia el comportamiento de fenómenos que evolucionan en el tiempo de manera compleja e irregular. La forma estructural de esos procesos caóticos en el espacio de fases será, por otro lado, la de un conjunto geométrico fractal. Recordemos que una de las propiedades de los atractores extraños es que a pesar de ser asintóticamente estables, son localmente inestables. En los sistemas en tiempo continuo, la órbita que siguen los sistemas caóticos tenía longitud infinita a pesar de encontrarse acotados en una región del espacio de fases. Esta estructura extraña recuerda a las propiedades del copo de nieve de Koch. En el caso de los atractores caóticos su estructura compleja procede del continuo plegamiento y estiramiento de la órbita en el espacio de fases –derivados de las fuerzas centrípetas del sistema que hacen que éste tienda hacia el atractor y de las fuerzas centrífugas que surgen cuando la órbita del sistema se acerca a alguno de sus infinitos equilibrios periódicos que son inestables en el régimen caótico–. La órbita descrita por el sistema en los atractores extraños aunque sea una linea diferenciable en todos sus puntos –las órbitas de los sistemas diferenciales son curvas suaves– llenará más espacio que el que cabría esperar de su dimensión topológica $D_T = 1$. Su dimensión fractal debe ser $D_F > 1$. En las aplicaciones discretas podríamos argumentar, de manera análoga, que los atractores están compuestos por un conjunto infinito de puntos en un espacio acotado del espacio de fases, y aunque su dimensión topológica sea $D_T = 0$, ocupan un espacio correspondiente a una $D_F > 0$.

Los atractores extraños tienen, por tanto, una estructura geométrica invariante bajo la evolución del sistema que los convierte en objetos fractales (Ruelle, 1992 pp.78-84). A modo ilustrativo, podemos apuntar que la dimensión fractal estimada para la aplicación logística ($\mu = 4$) es $D_F = 1 > D_T = 0$ (Grassberg y Proccacia, 1983a, p.193). Igualmente, para el resto de sistemas dinámicos cáoticos se obtendrán atractores extraños que también serán objetos fractales. Así, por ejemplo para el modelo de Hénon ($b=0.3$, $a=1.4$) $D_F = 1.2$; para el de Lorenz ($\sigma=10$, $r=28$, $b=8/3$) $D_F = 2.06$; y para el de Rössler ($a=0.2$, $b=0.2$, $c=5.7$) $D_F = 2.01$ –estos modelos serán introducidos en el próximo apartado–[12] . Podemos indicar también en este punto, que algunos de los atractores extraños presentan la propiedad de autosemejanza. Mostramos, a modo ilustrativo, en la figura 3.64 la autosemejanza presente en el atractor de Hénon.

Un resultado importante que se deriva de la estructura fractal de los atractores extraños es que permitirá reconocer si una serie temporal procede de

[12] Estas dimensiones fractales han sido calculadas utilizando el concepto equivalente de dimensión de Lyapunov. Véase el próximo capítulo 5.

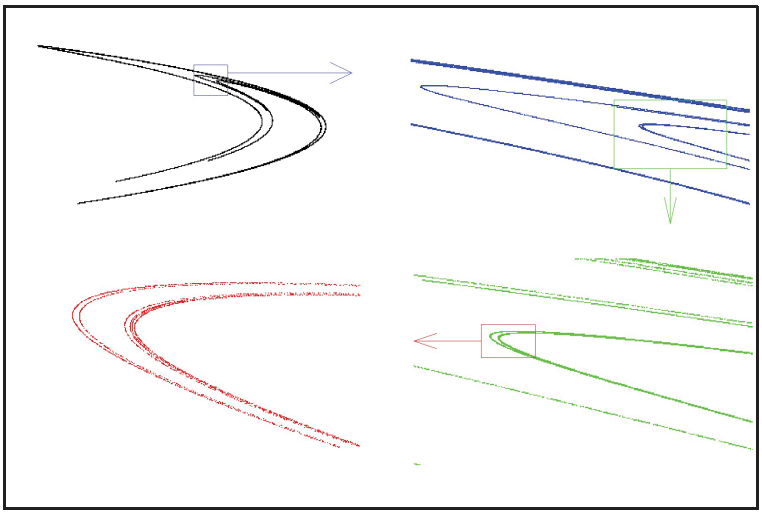


Figura 3.17. Estructura autosemejante del atractor de Henon

un sistema dinámico caótico aunque desconozcamos cual es la forma explícita del mismo. Para ello bastará con reconstruir el atractor a partir de dicha serie y estimar su dimensión fractal por el método de recuento por cajas o algún otro equivalente. Una vez que hemos calculado la dimensión fractal asociada al atractor, podremos decir cuándo éste *no* se comporta de manera caótica, ya que como hemos visto anteriormente, para que un atractor pueda considerarse extraño, es condición necesaria que su dimensión fractal sea estrictamente mayor que la topológica. Desgraciadamente, esta condición no es suficiente, esto es, cuando se encuentra evidencia de que el atractor tiene estructura fractal, no se puede garantizar que éste sea caótico. Existen casos en los que atractores de dinámica simple –atractores cuasiperiodicos toroidales– también presentan esta estructura fractal (Guzmán et al. 1993, p.85-86). Igualmente existen procesos estocásticos capaces de generar órbitas irregulares con una estructura fractal. Todos estos resultados serán utilizados y ampliados en el próximo capítulo cuando analicemos los test de detección de caos.

3.3. Encuentros con el caos.

A continuación, y como complemento a lo expuesto hasta el momento mostraremos algunos de los ejemplos mejor conocidos y más ampliamente estudiados, en los que es posible encontrar comportamientos caóticos de dinámica compleja.

El atractor de Lorenz

Ya ha sido comentado anteriormente que para la aparición de comportamientos caóticos es condición necesaria –aunque no suficiente– la existencia de no-linealidades en la especificación estructural del sistema dinámico. Esta no-linealidad es la responsable a su vez de que, en general, no

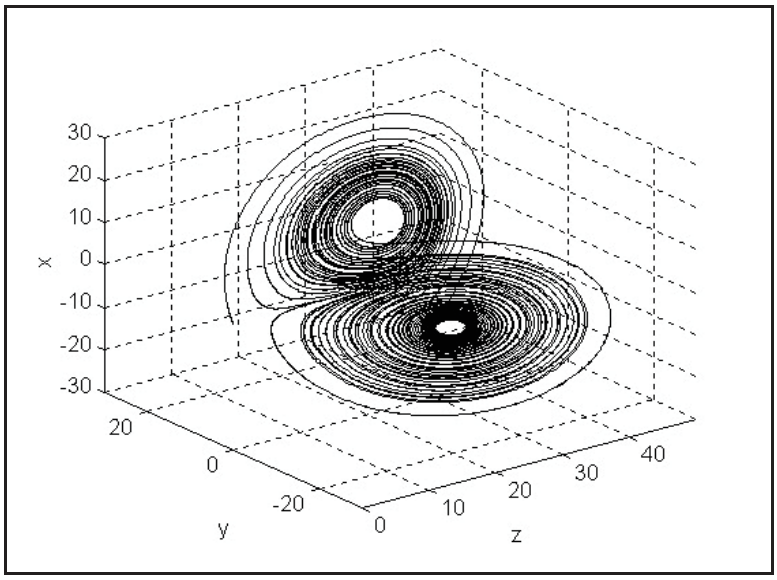


Figura 3.18. El atractor extraño de Lorenz

puedan integrarse expresiones analíticas explícitas que solucionen los sistemas dinámicos. En estos casos, hay que conformarse con las soluciones numéricas, lo que implica la necesidad de realizar un gran número de operaciones de cálculo. Es por ello, que en el estudio de los sistemas caóticos no-lineales, el uso del ordenador se ha convertido en una herramienta casi imprescindible, con la que se facilita y agiliza el proceso de integración numérica de las soluciones al sistema.

En este sentido, una de las primeras aportaciones en el campo de los modelos de dinámica caótica, el atractor extraño de Lorenz –figura 3.18– tuvo su origen precisamente en las simulaciones numéricas de un sistema dinámico realizadas por su descubridor con la ayuda del ordenador. En este apartado repasaremos las principales características de dicho atractor.

El principal interés de Edward Lorenz, como meteorólogo del Massachusetts Institute of Technology, era el estudio de la dinámica de las estructuras atmosféricas[13] A mediados de la década de los 50, y con el objetivo de investigar la capacidad de los modelos estadísticos lineales para la predicción atmosférica, utilizó un pequeño ordenador personal con el que generar la solución numérica de un sistema no lineal de 12 ecuaciones diferenciales que trataba de recoger el comportamiento de la atmósfera. Utilizando dicha solución como si fuera una serie de datos meteorológicos reales, trataba de demostrar que las predicciones basadas en modelos estadísticos lineales eran incapaces de recoger la estructura no lineal que rige el verdadero tiempo atmosférico. Para Lorenz existía algún tipo de factor endógeno en el comportamiento atmosférico que disminuía el poder predictivo de los modelos lineales utilizados por aquella época, y su intuición le señalaba que dicho factor endógeno se encontraba en la no-linealidad.

[13] Seguimos aquí el propio relato de Lorenz (1995, pp. 132-139)

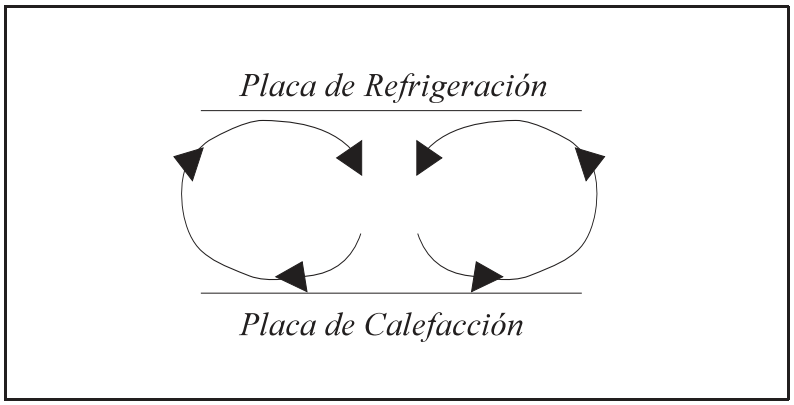


Figura 3.19

Debido a que el modelo incluía un gran número de parámetros cuyo valor debía especificar, y con el objeto de poder explorar más rápidamente el espacio paramétrico –buscaba alguna solución no periódica como las observadas en el tiempo atmosférico real–, trató de acelerar el proceso de simulación programando el ordenador para que sólo imprimiese los resultados aproximando la solución a los tres primeros dígitos decimales, aunque interiormente los cálculos se hacían usando un número mayor de dígitos. Después de encontrar una solución interesante decidió volver a calcularla para examinarla con mayor detalle. Para ello seleccionó los puntos iniciales que debía utilizar el ordenador en la integración numérica de la solución calculada anteriormente y que estaba impresa redondeada a tres decimales. Al examinar la nueva solución encontró que, tras algunas iteraciones, no tenía nada que ver con la calculada anteriormente. Su primera impresión ante este hecho fue pensar una avería del ordenador. Sin embargo, tras muchas pruebas observó que el cambio que se producía en la trayectoria partiendo de las condiciones iniciales ajustadas a tres dígitos era gradual, es decir, que los nuevos valores repetían los anteriores en un principio, pero que en seguida empezaban diferir. Tras muchos ensayos con distintos grados de aproximación en las condiciones iniciales en las simulaciones algorítmicas del modelo, concluyó que se encontraba ante un fenómeno que no procedía de ningún error de cálculo del ordenador, sino ante un fenómeno de dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

Para comprobar que esta dependencia no se debía a la estructura compleja del sistema dinámico, simplificó el modelo hasta reducirlo a un sistema de tres ecuaciones diferenciales (Lorenz 1963)[14], encontrando de nuevo que, para un amplio rango de valores del espacio paramétrico, dicho sistema también era sensible a pequeñas variaciones en las condiciones iniciales. Dicho sistema de tres ecuaciones diferenciales no lineales recogía de forma simplificada el proceso de convección de Rayleigh-Bérnard, esto es, el flujo circular que describe un fluido entre dos placas con diferenctes temperaturas –figura 3.19–:

[14] Recuérdese que en sistemas dinámicos en tiempo continuo como los utilizados por Lorenz, sólo es posible encontrar trayectorias caóticas a partir de la dimensión tres.

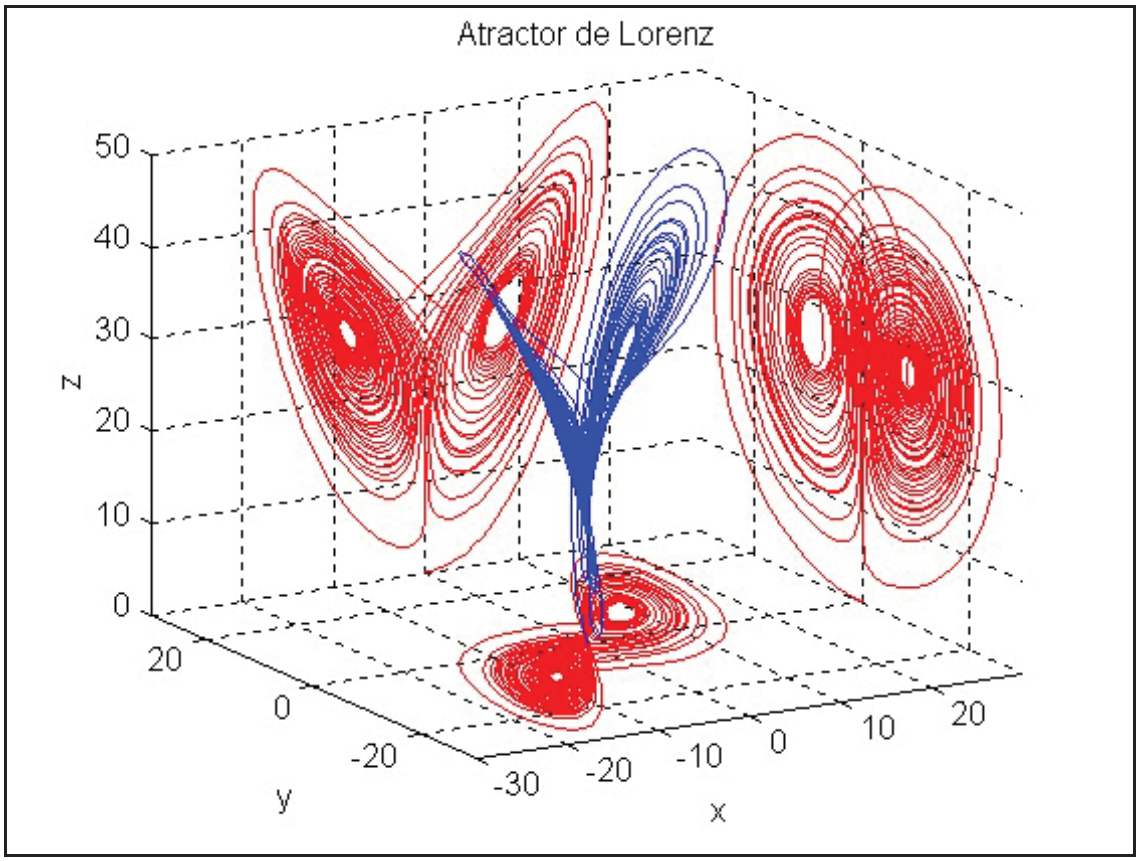


Figura 3.20. El atractor de Lorenz y sus proyecciones sobre los ejes cartesianos.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \tag{3.17}$$

Dicho sistema depende únicamente de tres parámetros: σ (*el número de Prandtl* –razón entre viscosidad del fluido y la conductividad térmica–); *r* (*el número de Reynolds* –razón entre las fuerzas de inercia y las de viscosidad–); y el parámetro *b* que recoge la amplitud de los círculos de convección entre las dos placas. La variable *x* es proporcional a la velocidad de circulación del fluido –si $x>0$, el fluido circula en el sentido de las agujas del reloj, y en sentido opuesto cuando $x<0$–; la variable *y* es proporcional a la diferencia entre las temperaturas del fluido en su etapa ascendente y descendente; y *z* es proporcional a la desviación de la temperatura del perfil vertical respecto a su nivel de equilibrio –que depende linealmente de la distancia entre las placas–.

Para $\sigma=10$, $b=8/3$, Lorenz encontró, numéricamente, que el sistema se comporta de manera aperiódica cuando *r* es mayor que el valor crítico $r_c \approx 24.75$ ($24+14/19$), presentando además dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, esto es, que el sistema se comporta de manera caótica.

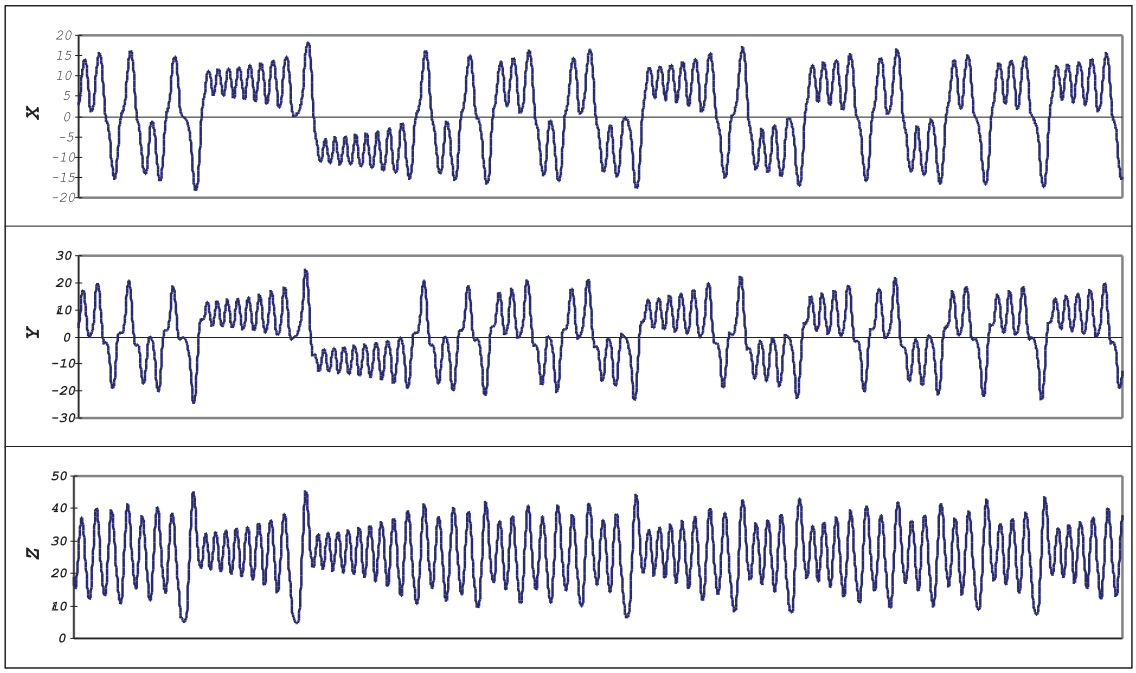


Figura 3.21. Trayectorias temporales del atractor de Lorenz.

En la figura 3.20 mostramos el atractor extraño de Lorenz para r=28 –con sus correspondientes proyecciones sobre los planos cartesianos–, y en la figura 3.21 las trayectorias seguidas por cada una de las variables de estado. Como se observa en estas figuras, la evolución del sistema dentro del atractor presenta una dinámica más compleja que la descrita por los sistemas de dinámica simple –puntos fijos, ciclos límites y atractores cuasiperiódicos–.

La dinámica del sistema dibuja una órbita con dos bucles circulares en una región acotada del espacio de fases –el atractor extraño–, sin que la órbita se cruce, esto es, pase dos veces por el mismo punto. Así, aunque se observa una fuerte recurrencia en el comportamiento global del sistema, la órbita que describe su solución no presenta una periodicidad simple finita. Esta aperiodicidad es la que explica la fuerte irregularidad y complejidad que describen las trayectorias temporales de las variables de estado. Una irregularidad y aperiodicidad que se asemeja a la presente en procesos puramente estocásticos, aunque procedente, en este caso, de un sistema perfectamente determinista.

Para estos valores de los parámetros el sistema se comporta de manera caótica, y por tanto, presenta además de esa alta irregularidad y aperiodicidad una significativa dependencia respecto a las condiciones iniciales. Dicha sensibilidad a las condiciones iniciales, recordamos, hace que dos trayectorias que partan de estados iniciales próximos diverjan en su comportamiento con el paso del tiempo.

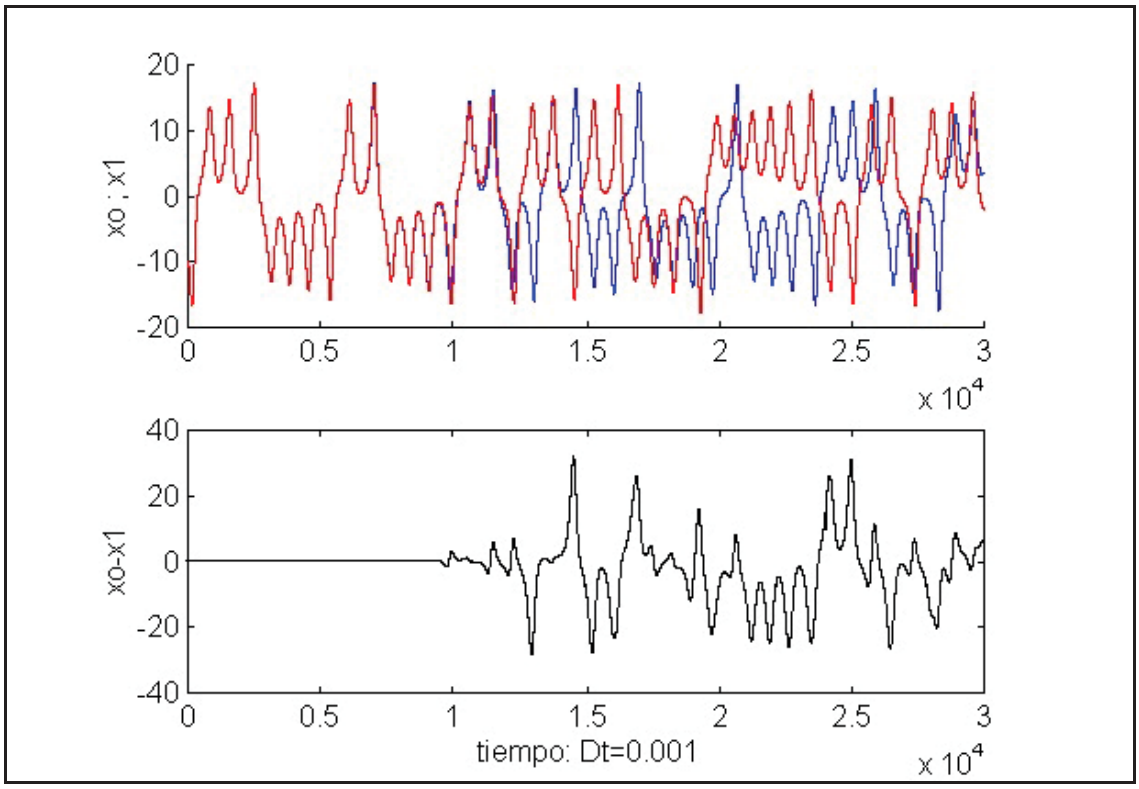


Figura 3.22. Sensibilidada las condiciones iniciales en el modelo de Lorenz

Para ilustrar esta dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, en la figura 3.22 mostramos la evolución en el tiempo de dos trayectorias que parten de las condiciones iniciales (-10.0, -10.0, 10.0) y (-10.005, -10.0, 10.0) respectivamente. Como se observa en la figura, la divergencia entre estas dos trayectorias es gradual, siendo a partir del instante 10 cuando aparece una clara y rápida divergencia en el comportamiento de ambas series.

Este descubrimiento sobre la dependencia respecto a las condiciones iniciales permitió a Lorenz concluir que si la atmósfera real se comportaba como su sencillo modelo, la predicción a largo plazo sería imposible. Esta afirmación se apoya en el hecho de que temperaturas, vientos y demás magnitudes utilizadas para la predicción atmosférica se miden con precisión finita o limitada. Incluso aunque pudieran medirse con precisión excata, las interpolaciones entre los observatorios no permitirían obtener medidas lo suficientemente ajustadas a la realidad como para garantizar la bondad de las predicciones a medio y largo plazo, esto es, más allá del instante en el que trayectorias que se inician arbitrariamente próximas comienzan a divergir en su comportamiento.

Esta dependencia a las condiciones iniciales, junto a la forma que dibuja el atractor –figura 3.23– y el título de la charla que presentó Lorenz en la 139 reunión de la American Association for the Advancement of Science de 1972 *–Predicibilidad. El aleteo de una mariposa en Brasil, ¿originó un tornado en Texas?–*, dio origen al denominado *efecto mariposa* según el cual, el aleteo de

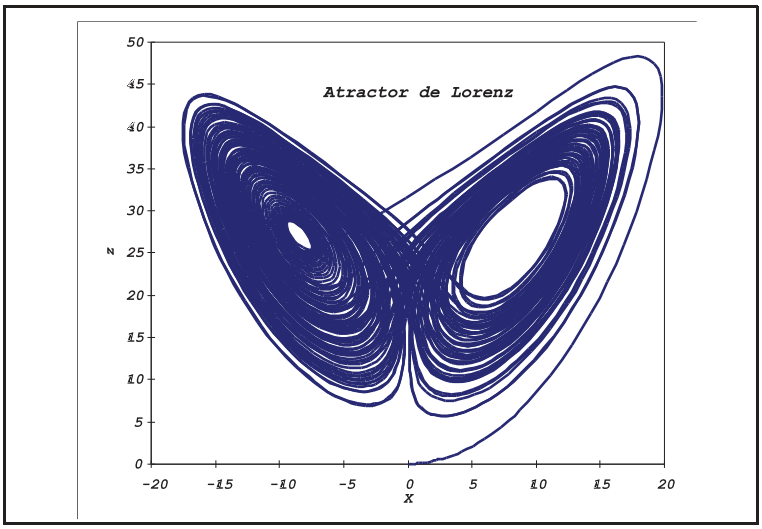


Figura 3.23. Atractor de Lorenz y el efecto mariposa

una mariposa –o cualquier otra actividad de cualquier criatura, incluyendo las humanas–, si bien ni incrementan ni disminuyen la frecuencia con la que aparecen de diversos sucesos meteorológicos como los tornados, sí suponen una pequeña variación en las condiciones atmosféricas y por lo tanto, pueden modificar la secuencia en que se dan esos sucesos. Es decir, dos situaciones meteorológicas concretas que difieran únicamente en la influencia inmediata del aleteo de una mariposa, pueden, en general y después de transcurrido un tiempo suficiente, evolucionar hacia dos situaciones que difieren en algo tan grande como un tornado (Lorenz, 1995, pp.185-188). Con este efecto mariposa se pretendía poner el énfasis en la dificultad para realizar previsiones ajustadas del tiempo atmosférico si éste se comporta de forma caótica, como consecuencia de las pequeñas variaciones en las condiciones iniciales, ya tengan éstas su origen en el aleteo de una mariposa o en cualquier otro factor que limite la capacidad de exactitud de las medidas empíricas –observaciones muestrales– sobre el estado en el que realmente se encuentra el sistema . Esta dependencia a las condiciones iniciales característica de los sistemas caóticos, queda reflejada en la estimación de los exponentes de Lyapunov asociados al sistema. La estimación del espectro de exponentes de Lyapunov estimado para el sistema (3.17) con los valores utilizados por Lorenz (σ=10, r=28, b=8/3), muestra como efectivamente aparece un exponente positivo, condición suficiente para denominar al sistema como caótico –en sentido de Ruelle–[15]:

$$\lambda_1 \approx 1.3$$
$$\lambda_2 \approx 0$$
$$\lambda_3 \approx -21.0$$

La Dimensión fractal de Lyapunov (véase el próximo apartado 5.6) asociada será $D_L \approx 2.06$, por lo que el atractor de Lorenz puede considerarse

[15] El espectro de exponentes ha sido estimado utilizando el jacobiano del sistema siguiendo la definición (3.9) –base $\log_2$–.

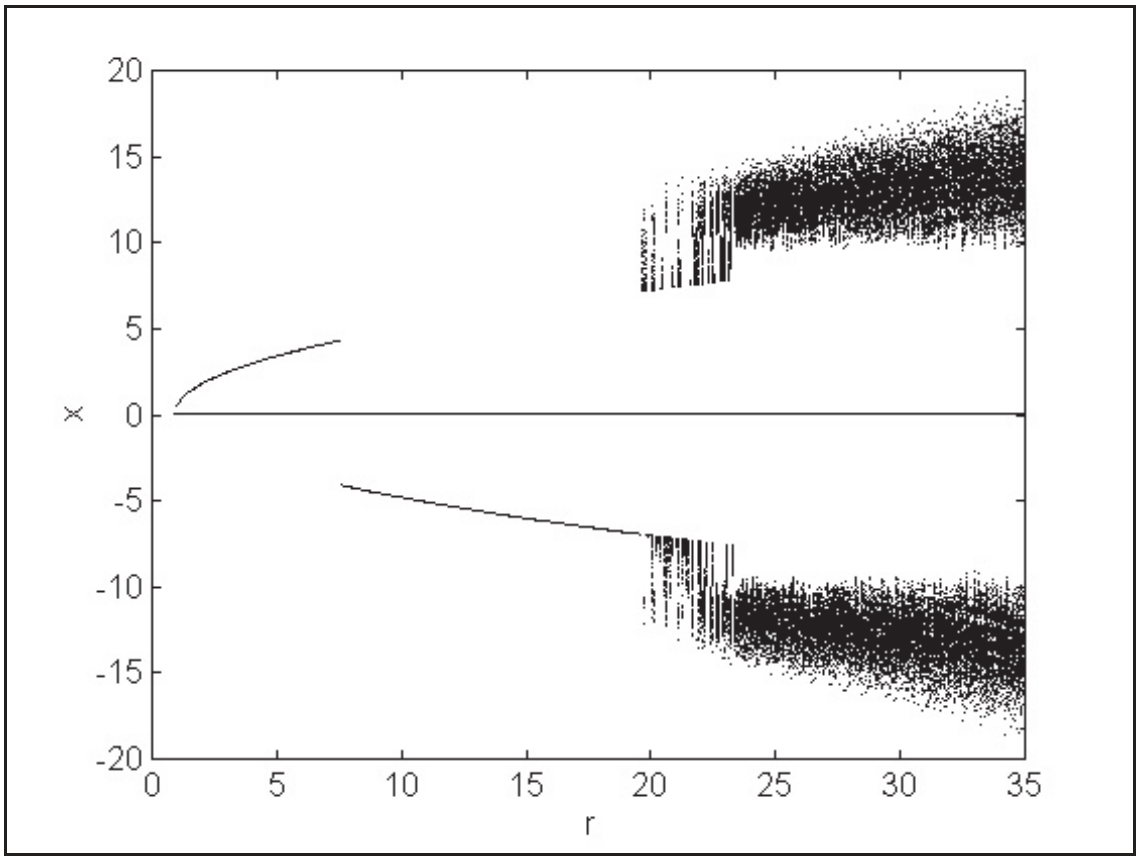


Figura 3.24. Gráfico de bifurcación del modelo de Lorenz $0 \leq r \leq 35$

como una figura fractal –no autosemejante–, ya que su dimensión topológica (D_T=2) es inferior a su dimensión fractal. Esta estructura fractal del atractor, se encuentra detrás de la irregularidad y la dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales como ya se apuntó anteriormente.

Una vez analizado el comportamiento del sistema bajo régimen caótico, estudiaremos a continuación los otros comportamientos cualitativos del mismo cuando los parámetros del modelo toman valores distintos a los anteriormente utilizados. Para ello comenzamos analizando los puntos críticos del sistema. El sistema (3.17) tiene tres puntos fijos o estados estacionarios:

$$C_0=(0,0,0)$$
$$C+=([b(r-1)]^{1/2},[b(r-1)]^{1/2}, r-1)$$
$$C-=(-[b(r-1)]^{1/2},-[b(r-1)]^{1/2}, r-1)$$

El primer punto (C_0) corresponde físicamente a la situación de fluido estable, sin movimiento y con trasporte de calor por conducción (Solé y Manrubia, 1996, pp.148-149). Este equilibrio es estable para valores de $r \in (0,1)$, volviéndose inestable cuando $r>1$. El proceso de convección de Rayleigh-Bérnard, esto es, el flujo circular del sistema se inicia cuando $r=1$.

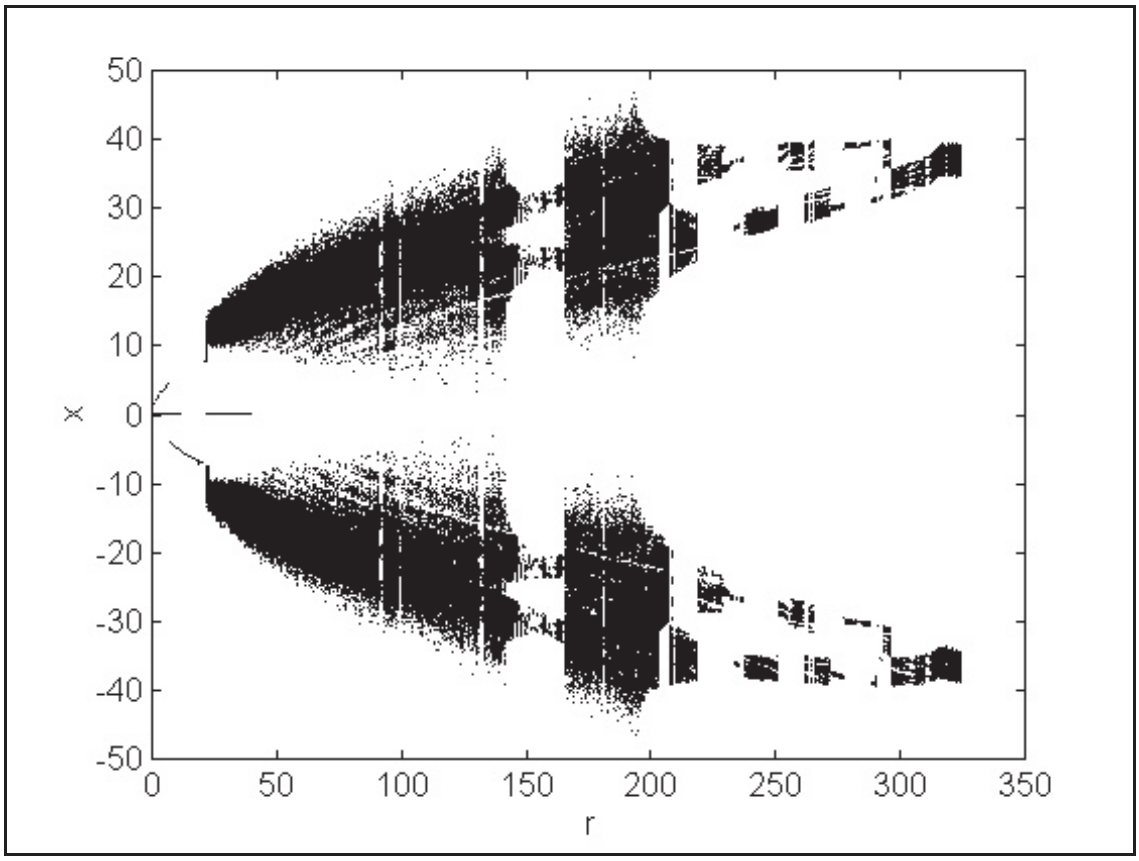


Figura 3.25. Gráfico de bifurcación del modelo de Lorenz $0 \leq r \leq 350$

Si fijamos los parámetros de σ y *b* en los valores utilizados por Lorenz, el comportamiento cualitativo del sistema a largo plazo puede resumirse en la siguiente tabla en función de los distintos valores que tome el parámetro *r* (Alligood, Sauer y Yorke, 1997, p. 365):

Valores de *r*	**Atractor**
[-∞, 1]	(0,0,0) es un equilibrio estable
[1, 13.93]	Los puntos fijos C+, C- son estables, y C_0 pierde la estabilidad.
[13.93, 24.06]	Transición al caos: aunque existen trayectorias caóticas no hay atractores extraños
[24.06, 24.74]	Coexisten atractores extraños con equilibrios estables C+ y C-
[24,74, ?]	Caos: atractores extraños (C+ y C- pierden la estabilidad)

En la tabla se observa como para valores de r superiores al valor crítico $r_c \approx 24.75$ los puntos fijos C+ y C- pierden su estabilidad, entrando entonces el sistema en régimen caótico. Como complemento, en las figuras 3.24 y 3.25 representamos el gráfico de bifurcaciones del modelo de Lorenz para distintos valores de *r*. Para la elaboración de estos gráficos, y a diferencia de los sistemas discretos, hemos representado los valores que va tomando la variable *x* en la sección de Poincaré para $z=r-1$ una vez transcurrido el periodo de transición.

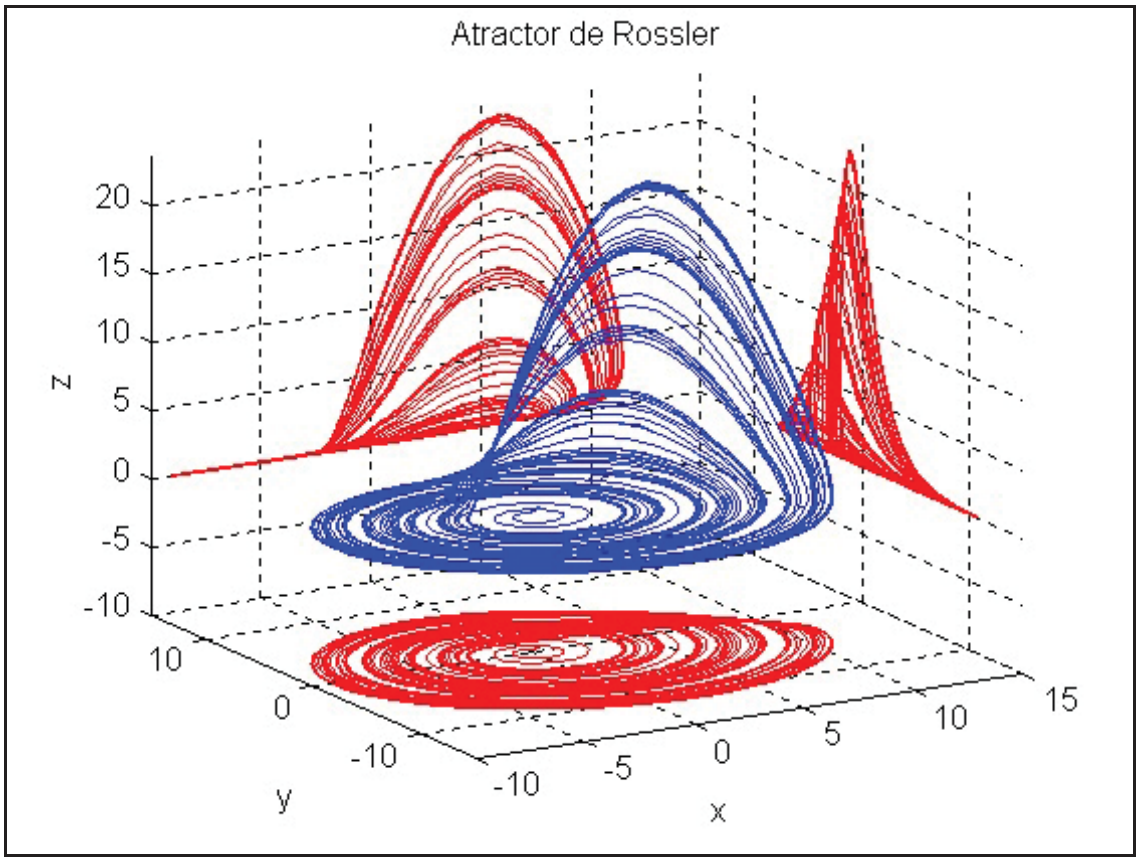


Figura 3.26. Atractor de Rössler y proyecciones sobre planos cartesianos

Este análisis gráfico de dinámica comparativa muestra como el comportamiento cualitativo a largo plazo del sistema va cambiando a medida que aumenta el valor del parámetro *r*. Cuando este parámetro toma valores suficientemente grandes –por encima de 200–, el comportamiento caótico vuelve a dar paso a ciclos límite de periodicidad simple.

El atractor de Rössler

Otro de los sistemas dinámicos en tiempo continuo más ampliamente estudiados capaz de generar comportamientos caóticos es el formulado por el alemán O. Rössler (1976).Una de las propiedades básicas de este modelo frente al anterior de Lorenz, es que rompe la simetría de éste respecto al eje OZ en el espacio de fases. El sistema de ecuaciones diferenciales del modelo de Rösler es el siguiente[16]:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z \\ \dot{y} &= x + ay \\ \dot{z} &= b + (x - c)z \end{aligned} \tag{3.18}$$

[16] Para un análisis detallado de este sistema véase Alligood, Sauer y Yorke (1996, p.370).

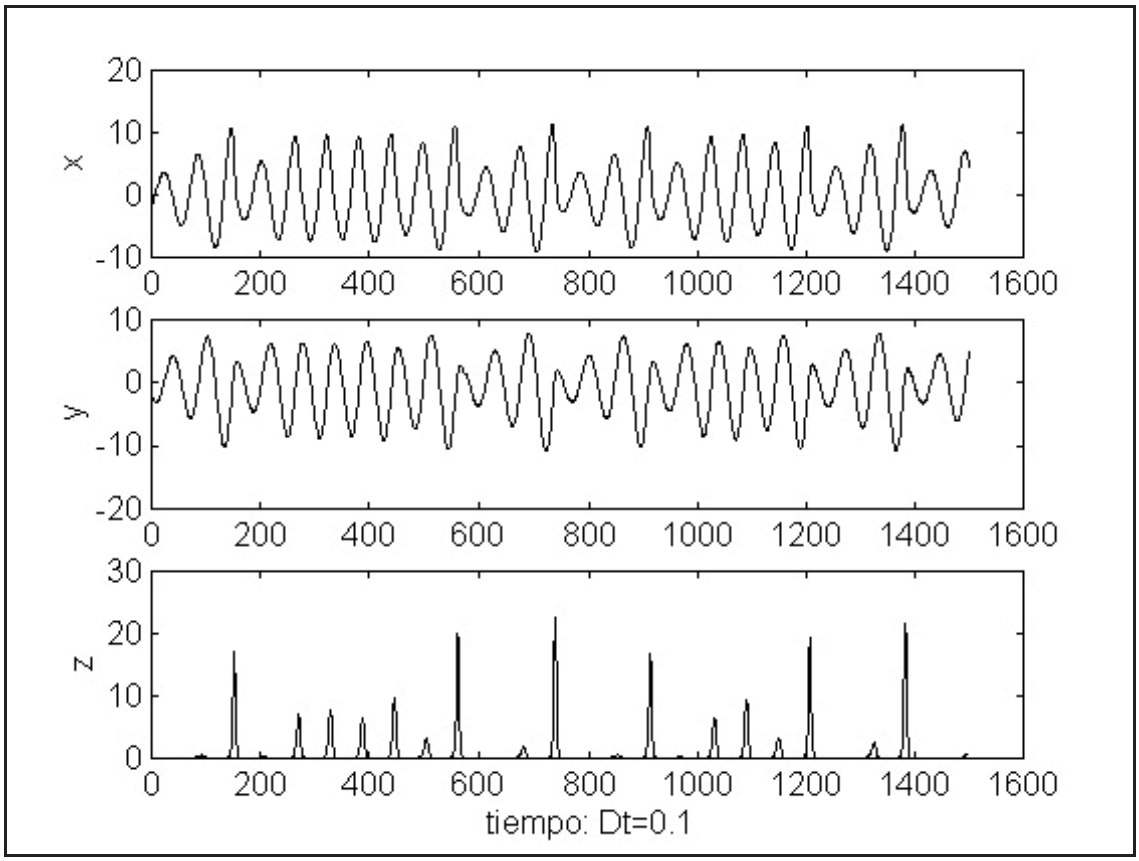


Figura 3.27. Evolución temporal del modelo de Rössler –*a*=0.2, *b*=0.2 y *c*=5.7–

Rössler encontró que para los siguientes valores de los parámetros $a = 0.2$, $b = 0.2$, $c = 5.7$, las trayectorias que dibuja el sistema (3.18) dentro del atractor se comportan de forma caótica. En la figura 3.26 hemos representado el atractor de Rösler para estos parámetros –con sus correspondientes proyecciones sobre los ejes cartesianos– y en la figura 3.27 las trayectorias de las variables de estado, que como se observa, presentan la irregularidad y aperiodicidad característica de los sistemas caóticos de dinámica compleja.

El espectro de exponentes de Lyapunov del sistema estimado para estos parámetros es el siguiente[17]:

$$\lambda_1 \approx 0.098$$
$$\lambda_2 \approx 0$$
$$\lambda_3 \approx -7.528$$

La estimación de un exponente de Lyapunov positivo muestra que efectivamente el sistema se comporta de manera caótica, siendo la dimensión fractal asociada –dimensión de Lyapunov– de $D_L \approx 2.01$.

[17] Al igual que en el modelo de Lorenz, los exponentes de Lyapunov se han estimado utilizando la matriz jacobiana del sistema (3.9) –base $\log_2$–.

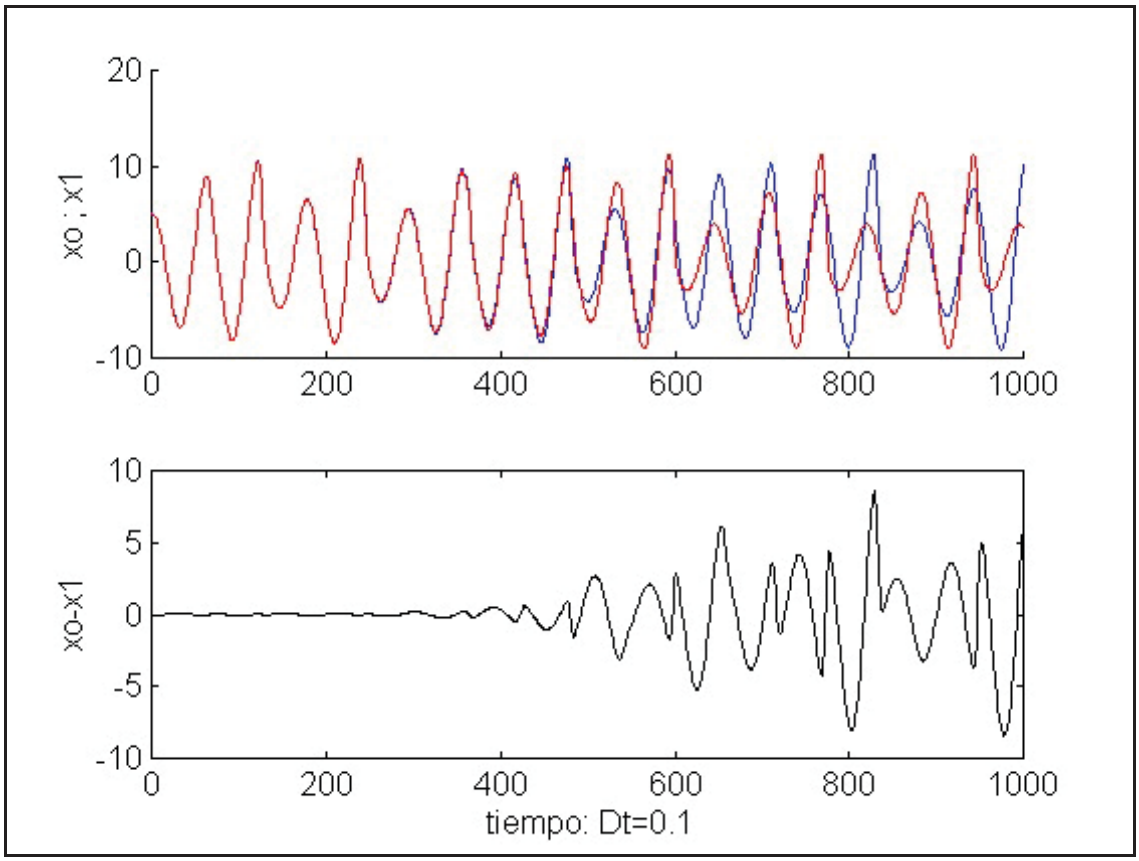


Figura 3.28. Sensibilidad a las condiciones iniciales en el modelo de Rössler

El comportamiento caótico del sistema –asociado al exponente de Lyapunov positivo–, implica que sus soluciones deben presentar dependencia respecto a las condiciones iniciales. En la figura 3.28 mostramos la existencia de dicha dependencia. Para ello hemos representado conjuntamente dos soluciones calculadas para las condiciones iniciales (5.0, 0.0, 0.0) y (5.005, 0.0, 0.0) respectivamente. Como se observa en el la parte inferior de esta figura 3.28, llegado un instante –aproximadamente *t=40*– comienza a evidenciarse una significativa diferencia entre ambas trayectorias.

Para estudiar los distintos comportamientos cualitativos que puede generar el modelo de Rössler, realizamos a continuación un simple ejercicio gráfico de dinámica comparativa con el sistema (3.18). Así, representamos en la figura 3.29 el gráfico de bifurcación del atractor alcanzado por el sistema fijando los valores de $a=b=0.1$ y permitiendo que los del parámetro c vayan aumentando[18]. Este gráfico de bifurcaciones ha sido calculado representando los valores alcanzados por la variable x en una sección de Poincaré del atractor en $y=0$. En dicho gráfico de bifurcación se observa como a medida que aumenta el valor del parámetro c se van sucediendo una serie duplicaciones del período del

[18] Aunque cambiamos los valores respecto a los utilizados originariamente por Rösler, las características cualitativas de la dinámica del sistema (3.18) no sufren grandes modificaciones. Véase Alligood et al. (1997 pp 370-374.)

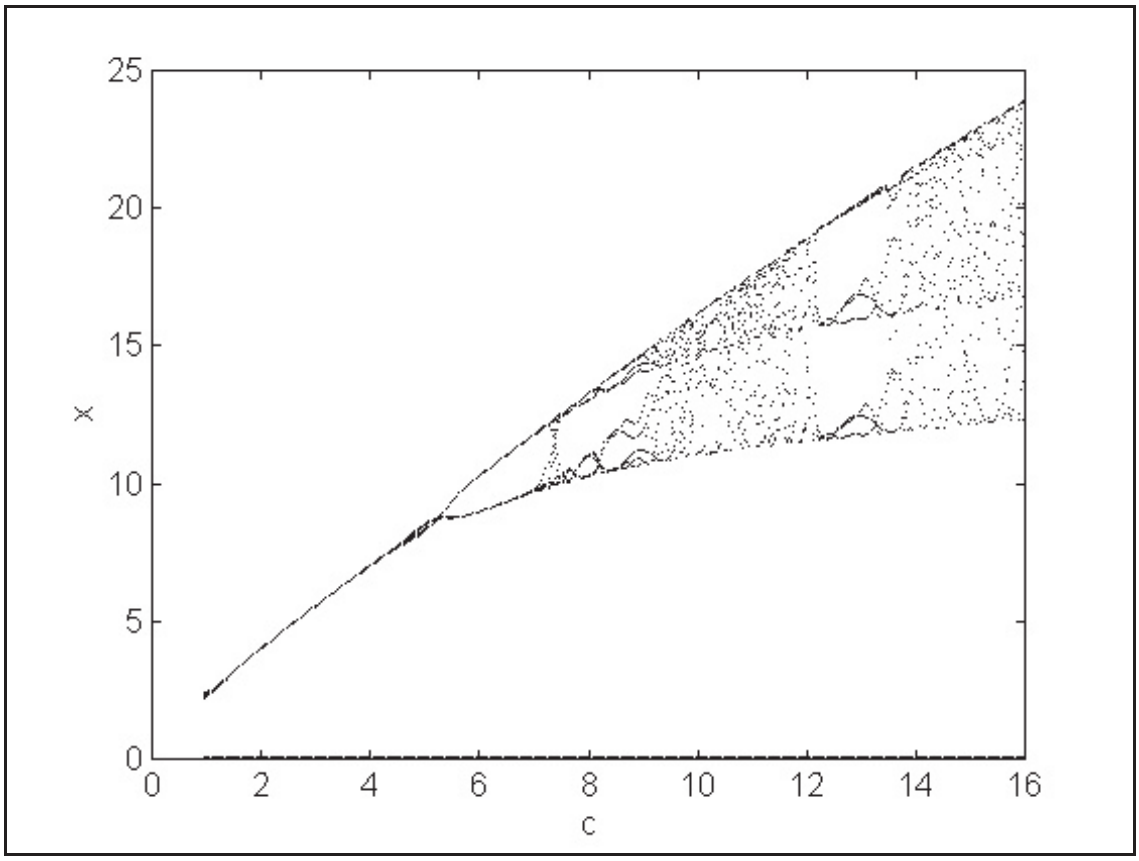


Figura 3.29. Gráfico de bifurcaciones del atractor de Rössler $0 \leq c \leq 16$.

atractor –bifurcaciones– que lleva al sistema, finalmente, a entrar en la región caótica. Dentro de esta región aparecen a su vez ventanas de regularidad. Así, para el valor *c=12* aparece un ciclo periodo tres –característico de los atractores caóticos–. Aumentando el valor de *c* se observa como, de nuevo, este ciclo impar se va duplicado hasta que se vuelve a alcanzar un comportamiento caótico.

Como complemento al gráfico de bifurcaciones, en las figuras 3.30 a 3.32 mostramos tanto el atractor alcanzado en el espacio de fases –gráficos superiores–, como sus correspondientes proyecciones en el plano cartesiano XY –gráficos inferiores– para distintos valores del parámetro *c* (*a=b=0.1*). Como se observa en estas figuras, el comportamiento cualitativo del sistema varía con el valor concreto que tome este parámetro, permitiendo, por tanto, obtener a partir del sistema (3.18), comportamientos tanto de dinámica simple como de dinámica compleja.

Finalmente, en la figura 3.33 ampliamos el gráfico de bifurcaciones permitiendo para un mayor rango de valores del parámetro *c.* De nuevo este gráfico muestra como los comportamientos caóticos se van alternando con nuevas ventanas de regularidad con periodicidad simple que se va duplicando a medida que aumenta el valor del parámetro.

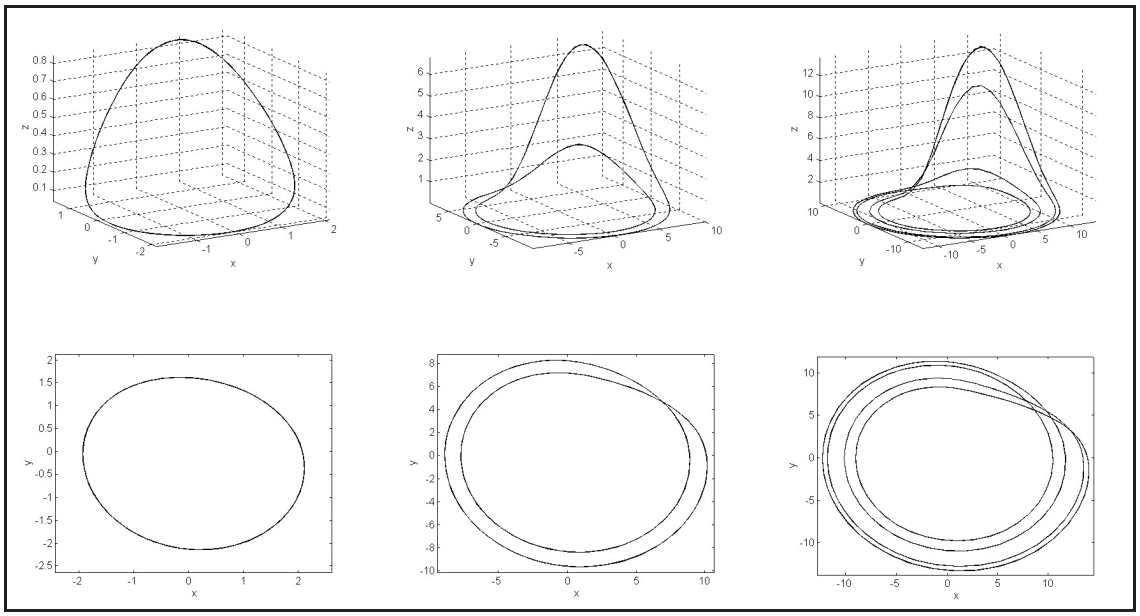


Figura 3.30. Sistema de Rössler: Ciclo Límite de periodo uno *(c=1);* Ciclo Límite de periodo dos *(c=6)*; y Ciclo Límite de periodo cuatro *(c=8.5)*.

El modelo de Rössler ha sido ampliamente utilizado en la aplicación del caos al estudio del ciclo y el crecimiento económico. Quizás la aportación más destacable, tanto por su originalidad como por el empuje que supuso para la utilización de las técnicas de la matemática del caos en economía sea la de R. M. Goodwin (véase, por ejemplo, Goodwin, 1990). Este tipo de aplicaciones será revisado en el capítulo 7.

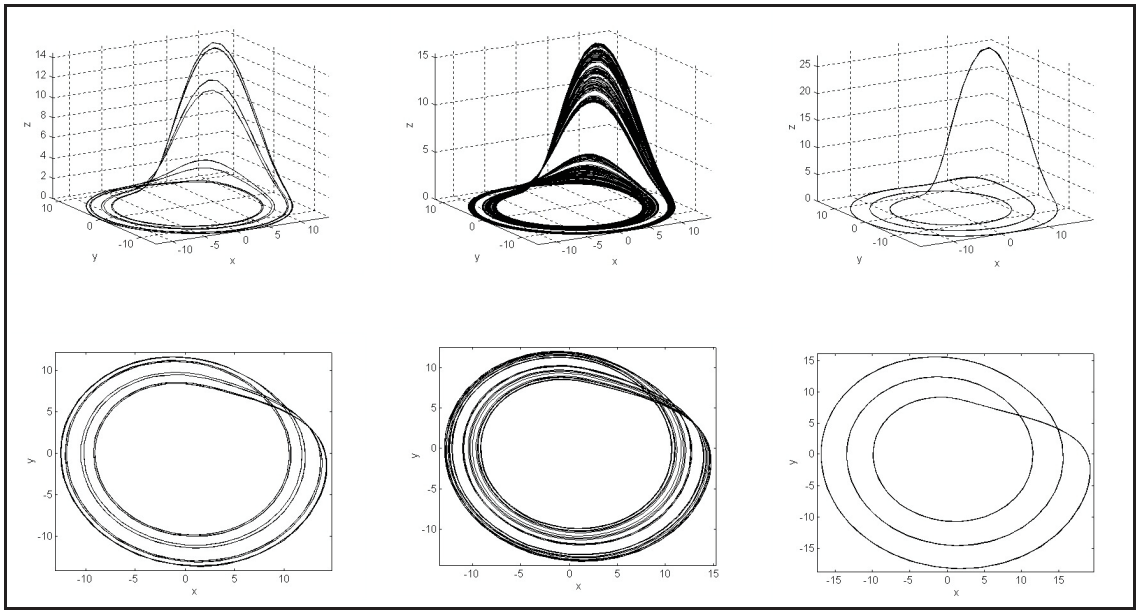


Figura 3.31. Sistema de Rössler: Ciclo Límite de periodo ocho *(c=8.7)*; Caos *(c=9);* y Ciclo Límite de periodo tres *(c=12)*.

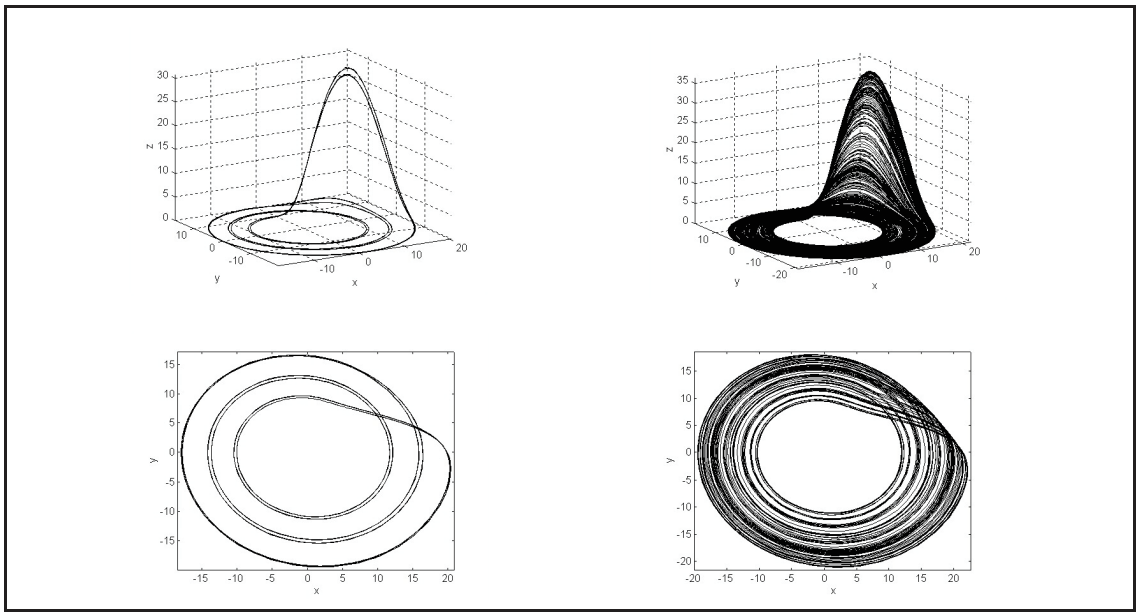


Figura 3.32. Sistema de Rössler: Ciclo límite periodo 6 *(c=12.8)*; Caos *(c=14)*.

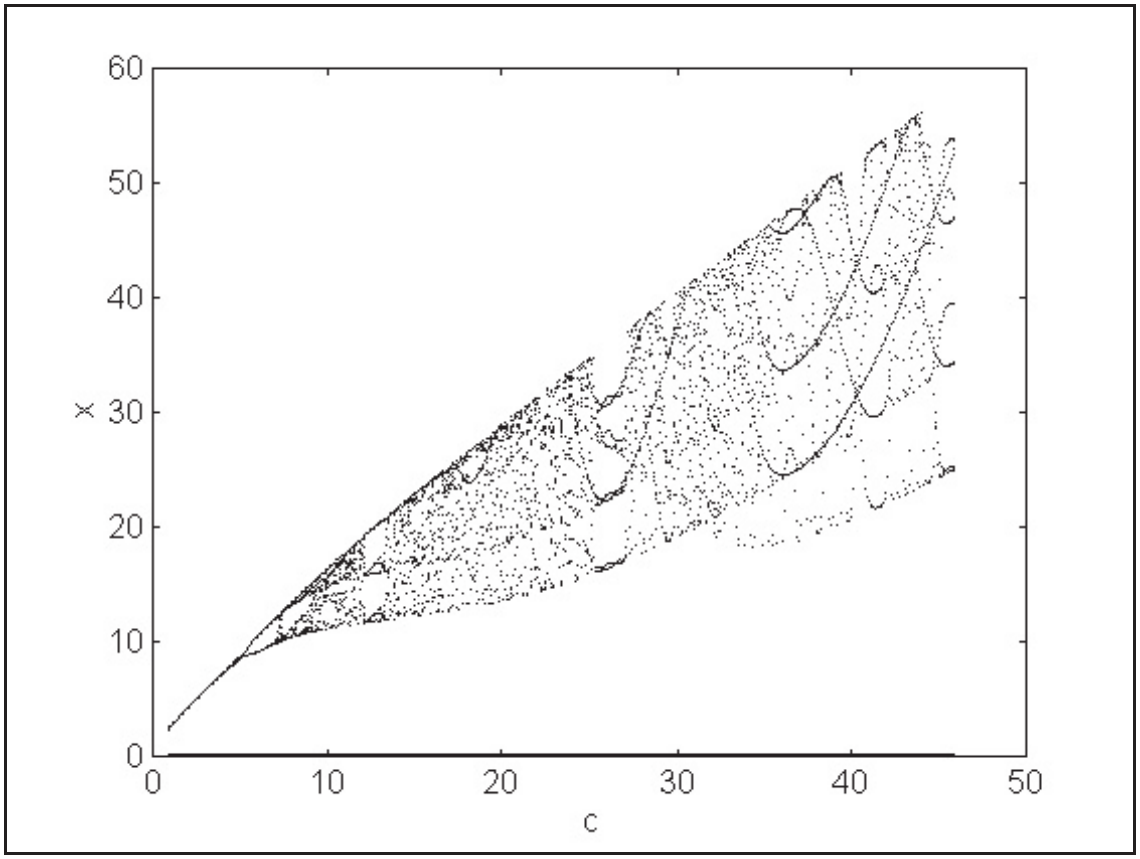


Figura 3.33. Gráfico de bifurcaciones del atractor de Rössler $0 \leq c \leq 48$.

El atractor de Hénon.

En el apartado anterior hemos mostrado un ejemplo de comportamiento caótico en aplicaciones discretas unidimensionales –la ecuación logística–. Estos comportamientos caóticos pueden aparecer también es sistemas dinámicos discretos *n*-dimensionales. Uno de los más estudiados es la aplicación bidimensional conocido como modelo de Hénon[19]:

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 + y_t - a x_t^2 \\ y_{t+1} &= b x_t \end{aligned} \tag{3.19}$$

Fijando los parámetros en $b=0.3$ y $a=1.4$, se obtiene el conocido como atractor de Hénon –figura 3.34–, en el que las soluciones siguen un comportamiento caótico –figura 3.35–.

Los exponentes de Lyapunov calculados para el sistema (3.19) son $\lambda_1 \simeq 0.6$ y $\lambda_2 \simeq -2.3$, mostrando el valor positivo del primer exponente el carácter caótico

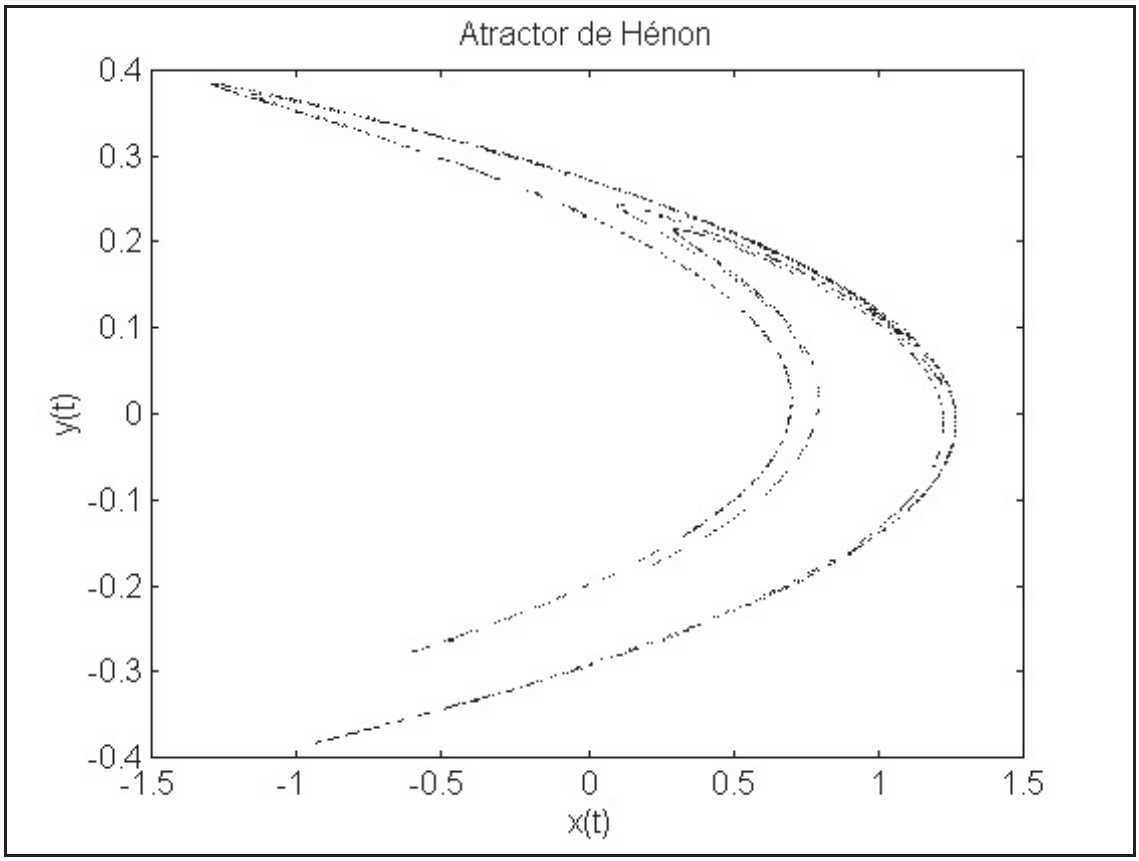


Figura 3.34. Atractor de Hénon

[19] Existen numerosos estudios sobre este modelo. Aquí seguimos básicamente a Solé y Manrubia (1996, pp. 165-167).

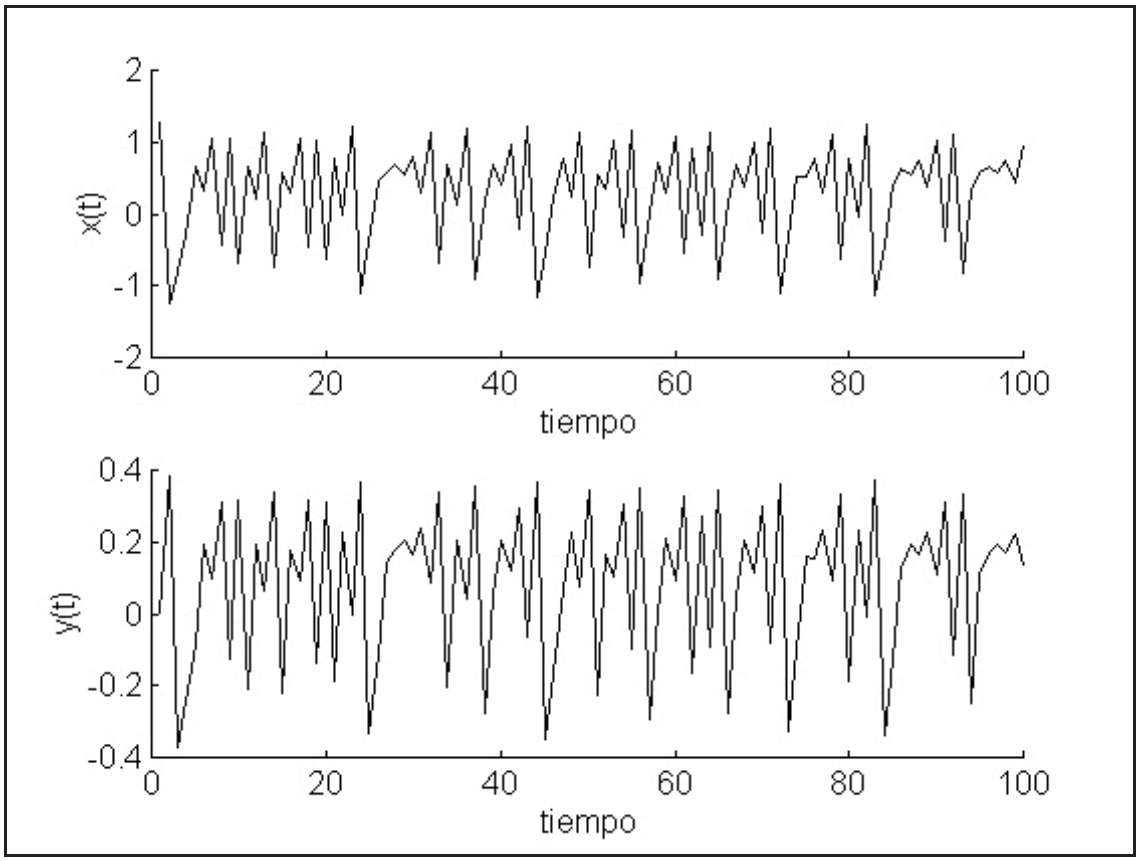


Figura 3.35 Trayectorias temporales modelo de Hénon –b=0.1, a =1.4–

del sistema. El atractor de Hénon posee una estructura algo más compleja que el atractor de la ecuación logística analizada anteriormente. Se trata de hecho de un atractor fractal autosemejante, con dimensión fractal $D_L \simeq 1.2$. Es decir, se trata de una figura que llena algo más que la recta pero menos que el plano, y que presenta la misma apariencia compleja cuando se observa a distintas escalas –figura 3.17–.

El comportamiento a largo plazo del modelo de Hénon depende del valor que tomen sus parámetros. En la figura 3.36 mostramos el gráfico de bifurcaciones junto al correspondiente mayor exponente de Lyapunov para distintos valores de a. De manera análoga a la ecuación logística se observa como a medida que va aumentando el valor del parámetro ($a> 0.7056$) se produce una cascada de bifurcaciones con duplicado de período hasta entrar en la región caótica con exponente de Lyapunov positivo ($a>1.06$). Dentro de esta región se observa como aparece claramente una ventana de regularidad con periodo impar –periodo 5– característica de los sistemas caóticos.

El atractor de Hénon pertenece a la familia de sistemas dinámicos discretos bidimensionales de la forma[20]:

[20] La ecuación logística puede verse como un caso especial de esta familia de sistemas cuando $\beta=0$.

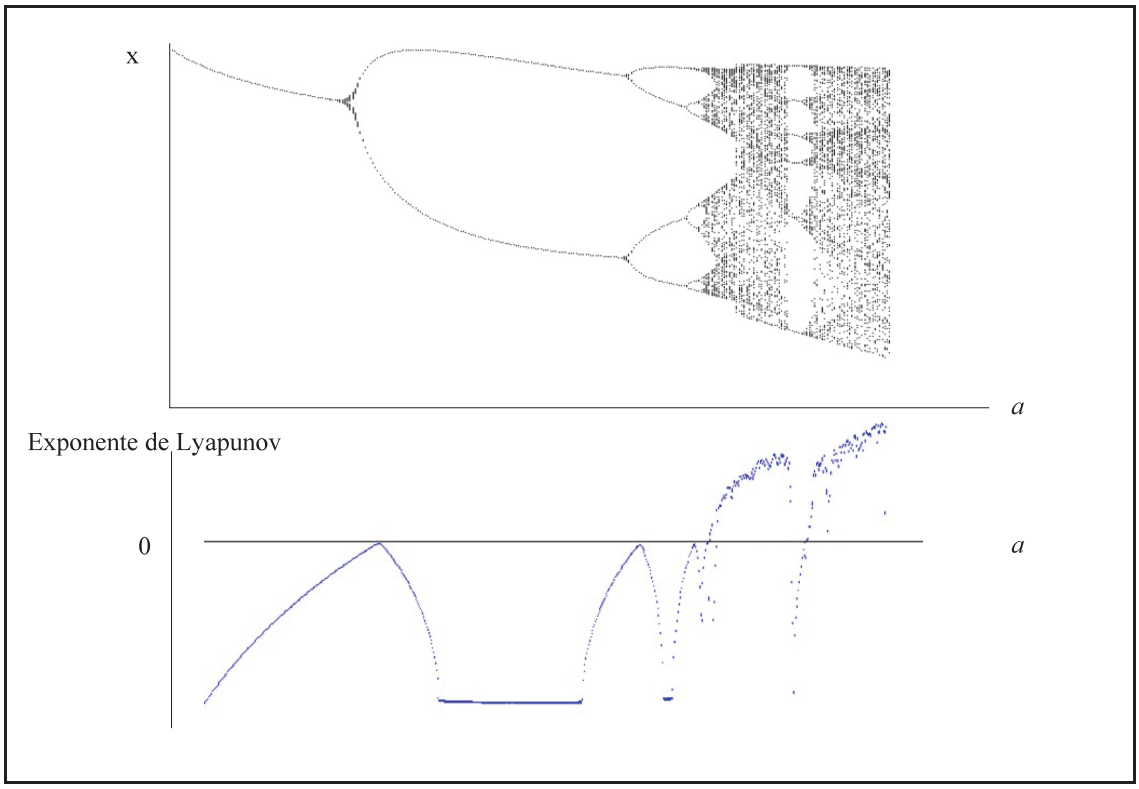


Figura 3.36. Gráfico de bifurcaciones y exponente de Lyapunov del modelo de Hénon.

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= f(x_t) + y_t \\ y_{t+1} &= \beta x_t \end{aligned} \tag{3.20}$$

Así, el modelo de Hénon –sistema (3.19)– se obtendría haciendo $f(x)=1-ax^2$. Otro miembro de esta familia que también permite la aparición de comportamientos caóticos es el modelo de Marotto (Lorenz, 1993, pp.150-152):

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (1 - ax_t - by_t)\cdot(ax_t + by_t) \\ y_{t+1} &= x_t \end{aligned} \tag{3.21}$$

Cuando $b=0$, el sistema (3.21) es equivalente a la ecuación logística. En las figuras 3.37-3.42 representamos los atractores extraños que alcanza este sistema para distintos valores de los parámetros, mostrando la complejidad dinámica que puede presentar este tipo de sistemas.

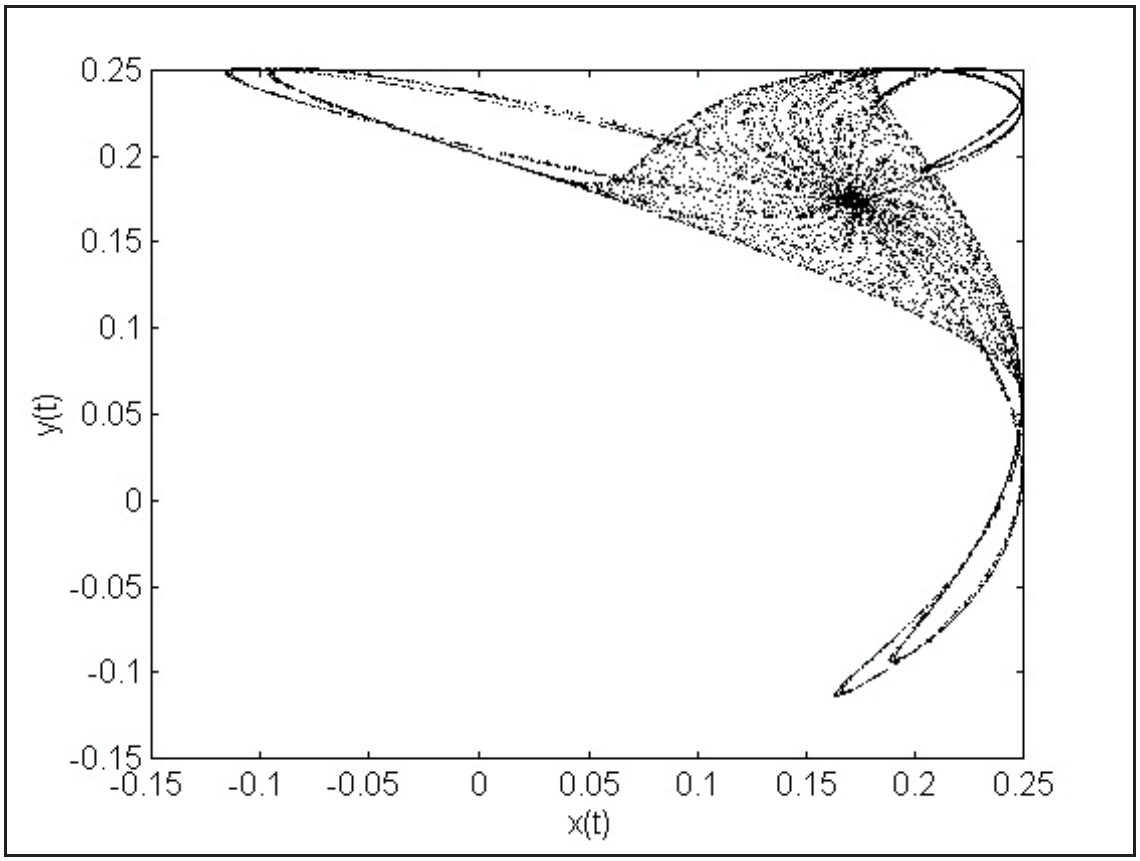


Figura. 3.37. Modelo de Marotto a=2.5, b=2

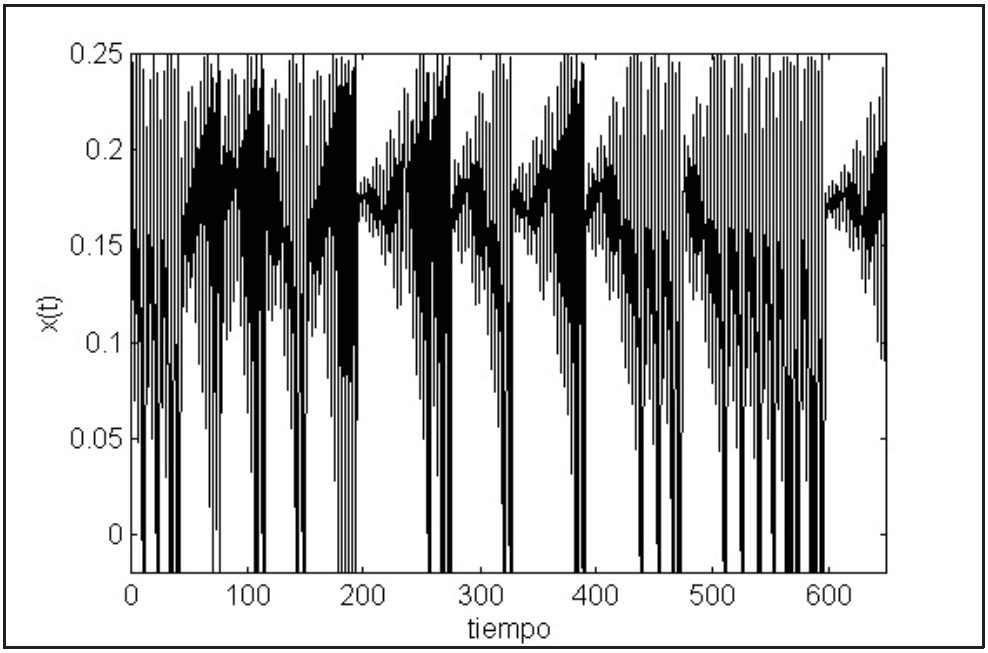


Figura. 3.38. Modelo de Marotto a=2.5, b=2

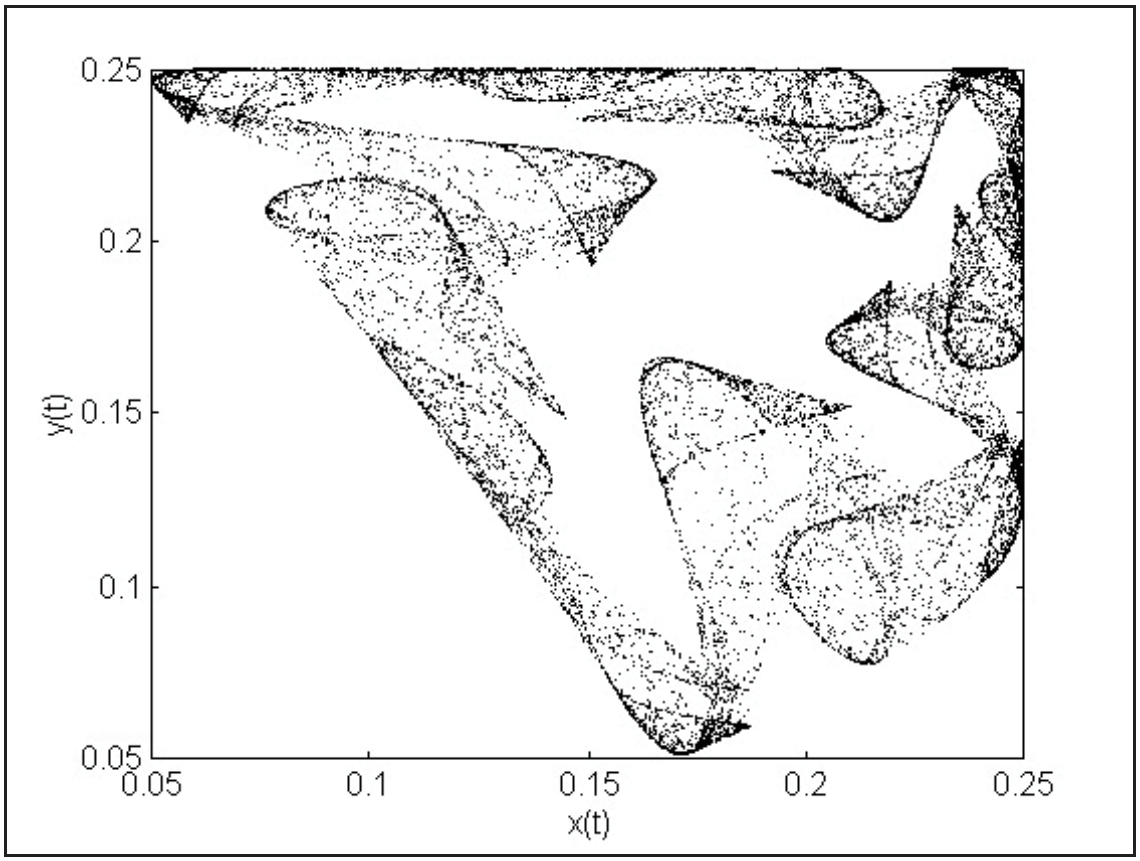


Figura 3.39. Modelo de Marotto a=0.8, b=3

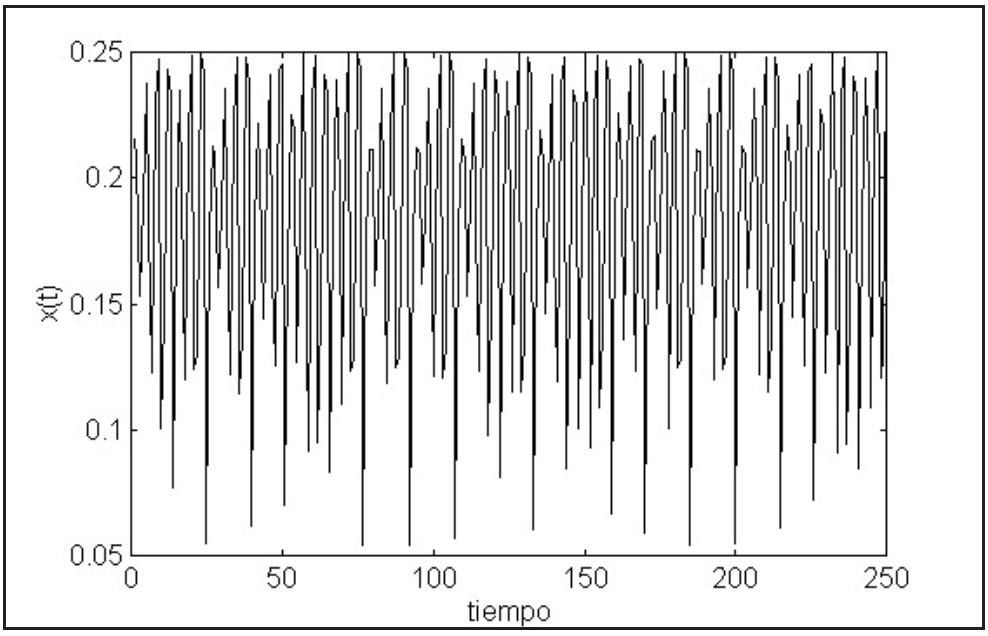


Figura 3.40. Modelo de Marotto a=0.8, b=3

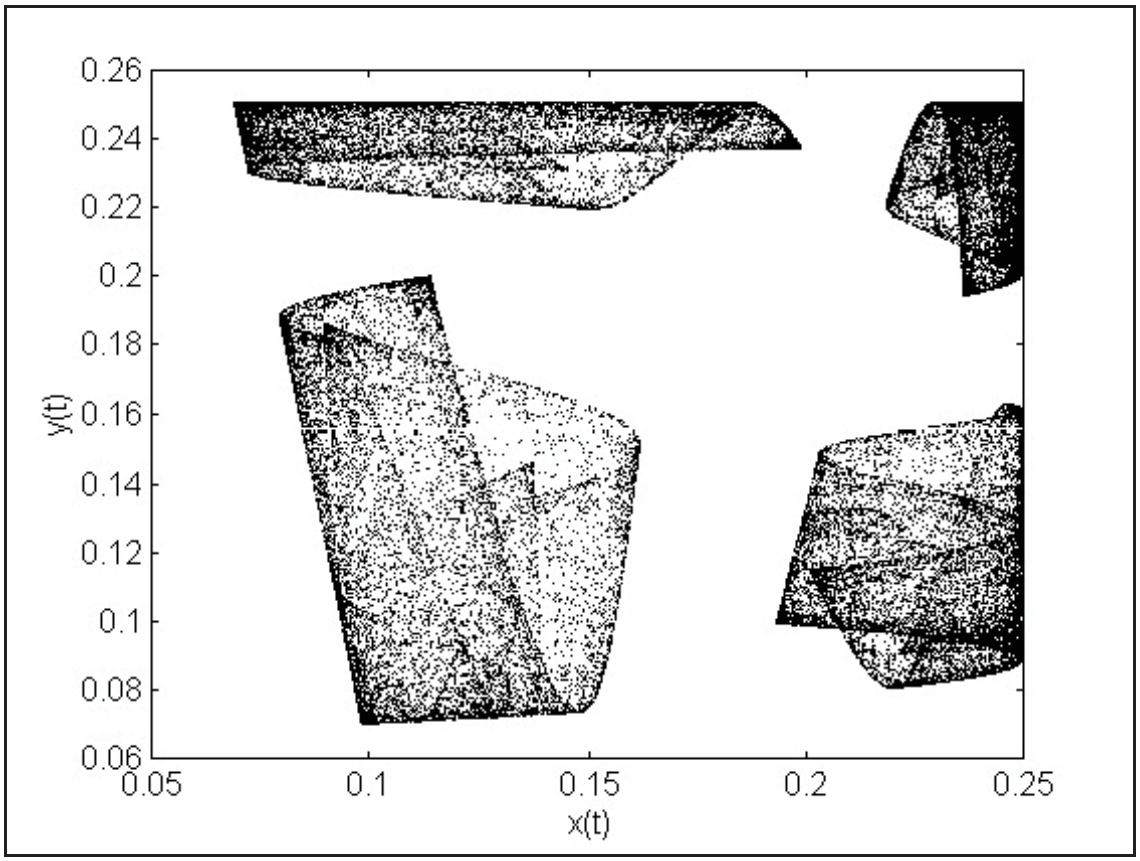


Figura 3.41. Modelo de Marotto a=0.2, b=3.5

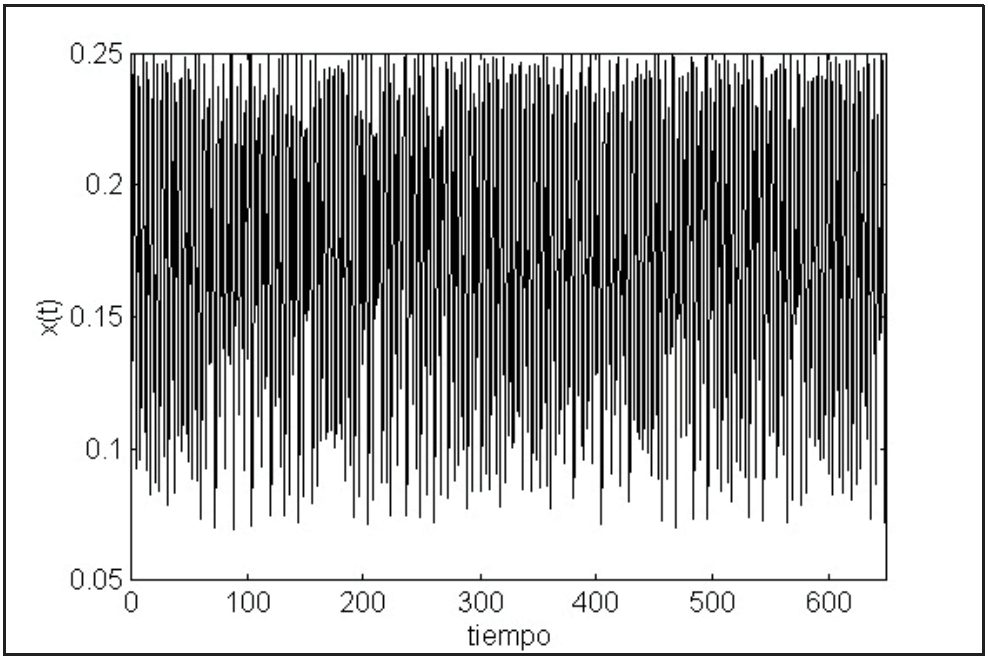


Figura 3.42. Modelo de Marotto a=0.2, b=3.5

CAPÍTULO 4

LA DETECCIÓN DEL CAOS DETERMINISTA A PARTIR DE SERIES TEMPORALES (I): EL CORRELOGRAMA, EL PERIODOGRAMA Y EL ANÁLISIS R/S.

En los capítulos anteriores hemos presentado algunos de los resultados teóricos que permiten establecer la existencia de trayectorias caóticas como soluciones a determinados sistemas dinámicos no lineales. Así, cuando los sistemas dinámicos son conocidos, podemos aplicar directamente la definición de Devaney o el teorema de Li-Yorke, o calcular su espectro de exponentes de Lyapunov y la dimensión fractal de su atractor para comprobar cuándo el sistema dinámico se encuentra en régimen de comportamiento caótico.

Por otro lado, estos resultados teóricos no son directamente aplicables cuando se pasa al terreno del análisis empírico o econométrico. El análisis empírico de los sistemas dinámicos caóticos se fundamenta en el estudio de las series temporales observadas de datos estadísticos. Estas series temporales habrán sido generadas por algún proceso estocástico o determinista que en la mayoría de los casos será desconocido. Con el análisis empírico se trata, precisamente, de obtener o inferir información sobre las propiedades de dicho proceso generador desconocido.

Así, tras analizar en el capítulo anterior las principales propiedades de los sistemas dinámicos caóticos, en el que comenzamos ahora nos planteamos como objetivo, cómo detectar comportamientos caóticos a partir de una serie temporal. Estaremos interesados en comprobar o detectar si el proceso generador de las series temporales –el sistema dinámico subyacente– se comporta de manera caótica o, si por el contrario, el sistema presenta dinámica simple o procede de un proceso puramente estocástico.

4.1. La detección del caos a partir de series temporales: introducción

En la literatura específica de la matemática del caos se han ido desarrollando distintas técnicas más o menos sofisticadas para el análisis de las series temporales que no requieren de la aplicación directa de los teoremas que desde el punto de vista teórico caracterizan a los sistemas dinámicos con comportamiento caótico. Estas nuevas técnicas de la matemática del caos complementan a las herramientas tradicionales del análisis estadístico que, en general, fueron formuladas en base a la dicotomía clásica entre el paradigma determinista –generador de movimientos regulares y ordenados–, y el paradigma puramente estocástico –único capaz de generar dinámica compleja–. Es por ello que, las técnicas tradicionales no serán en general capaces de discriminar entre los procesos puramente aleatorios de aquellos otros de dinámica caótica determinista, ya que, desde el punto de vista tradicional, todo aquello que presente irregularidad y aperiodicidad debe haber sido generado por un proceso puramente estocástico. Las técnicas tradicionales tratan de encontrar, precisamente, evidencia de dicho comportamiento estocástico analizando las series temporales en el dominio temporal y en el dominio de frecuencias, buscando posibles dependencias temporales y periodicidades ocultas en el proceso generador de la serie temporal. Con la matemática del caos determinista se rompe dicha dicotomía, ya que estos sistemas caóticos, aun siendo deterministas generan comportamientos erráticos, aperiódicos e irregulares, parecidos, desde el punto de vista cualitativo a los generados por procesos puramente aleatorios. Así, como la irregularidad o complejidad dinámica observada en una serie temporal puede tener, al menos potencialmente, una explicación estocástica y/o caótica, estaremos especialmente interesados en distinguir si dicha irregularidad tiene un origen puramente aleatorio o si, por lo menos en parte, tiene una explicación caótica determinista. Como ya se ha comentado, la matemática del caos constituye una alternativa al análisis estadístico o probabilístico de los fenómenos que se comportan de manera compleja o no regular. Precisamente, el estudio de los sistemas caóticos se justifica por la existencia de un gran número de fenómenos de la realidad que presentan una evolución temporal aparentemente aleatoria, irregular, aperiódica, escasamente predecible, y por tanto, potencialmente caóticas –fenómenos regidos por modelos perfectamente deterministas y estructuralmente simples–. La necesidad de disponer de algún método para la detección de comportamientos caóticos en la dinámica subyacente a una serie temporal resulta especialmente importante en las ciencias sociales en las que la imposibilidad de realizar experimentos controlados sobre el comportamiento humano, impide el perfecto conocimiento de las leyes que rigen el funcionamiento de la realidad social que nos rodea[1]. Así, la posibilidad de detectar comportamientos deterministas –caóticos o no–, o estocásticos

[1] Desde el paradigma indeterminista, cualquier intento de descubrir esas leyes deterministas se vería fracasado sencillamente por la inexistencia de dichas leyes.

–lineales o no– resulta de especial interés no sólo para justificar el uso de uno u otro tipo de modelos para la representación de las series temporales, sino adicionalmente como un incentivo adicional para seguir profundizando en el estudio de la estructura subyacente de los fenómenos estudiados. Cuando el sistema es aparentemente aleatorio pero como consecuencia de su comportamiento caótico determinista, entonces se debería intentar aprovechar la capacidad potencial de este tipo de sistemas dinámicos para explicar las regularidades de carácter cualitativo de la evolución temporal observada en la series históricas económicas. La certeza, o simplemente la presunción o evidencia débil, de la existencia de comportamientos caóticos en una serie temporal resulta también interesante para mejorar las predicciones sobre su evolución futura –por ejemplo utilizando los métodos de predicción por analogías (apartado 2.2)–. A su vez, la presencia de caos en las series temporales obligaría al abandono de la aproximación lineal como simplificación de la realidad, por su excesivo reduccionismo a la hora de la construcción de modelos para explicar el funcionamiento de los fenómenos observados en la realidad, forzando a la construcción, por el contrario, de modelos teóricos o teoréticos no-lineales que, aunque estructuralmente simples, sean capaces de generar comportamientos caóticos.

Las implicaciones de la detección del caos alcanzan también al terreno normativo, y en particular a la metodología de la política económica, ya que la existencia de comportamientos caóticos en los sistemas económicos requiere la reformulación de sus objetivos e instrumentos como veremos en el capítulo 8.

Con la dinámica del caos se rompe también con otra tradición en el terreno empírico, sobre todo en economía. Nos referimos a la estimación de modelos econométricos bajo la hipótesis de linealidad. Esta metodología lineal en el campo econométrico puede resumirse en la detección de aquel sistema dinámico estocástico lineal que mejor se adapte a la serie observada. Los exponentes máximos de este enfoque se encuentran, en primer lugar, en los modelos ARMA –AutoRegressive Moving Average– y de función de transferencia según la metodología Box-Jenkins (1970) y, posteriormente, en la Teoría de la Cointegración y los modelos de Mecanismo de Corrección de Error[2]. Con la proliferación de estos modelos comenzó ya ha hacerse patente la creciente desavenencia entre la teoría económica –esencialmente lineal– y la econometría –que no debe plantearse como una simple herramienta para contrastar la significatividad de los modelos teóricos planteados, debiéndose por el contrario construir los modelos econométricos directamente a partir de las series temporales –buscando los modelos que mejor ajusten el comportamiento observado– y no de la teoría económica –esta debe utilizarse sólo como apoyo de dicha construcción para la elección de aquellas variables

[2] En el caso de la Teoría de la Cointegración y los modelos de corrección de Error se trata de encontrar las relaciones lineales existentes entre las variables en el largo plazo, aceptando que en el corto plazo puedan existir desviaciones respecto a la misma.

que a priori deberían guardar cierta correlación–. Este divorcio entre teoría y econometría se suscitó, en parte, por el mal ajuste que proporcionan los modelos teóricos y que por tanto debían ser rechazados como posibles candidatos a procesos generadores de las serie temporales observadas. Sin embargo, la construcción de modelos econométricos ha seguido, en general, manteniendo la hipótesis de linealidad. La detección de comportamientos caóticos, o simplemente la detección de comportamientos no-lineales en las series temporales, implicaría que esta metodología econométrica, basada en la hipótesis de linealidad, debería ser rechazada. En este sentido, son numerosas las aportaciones econométricas que tratan de encontrar evidencia de no-linealidad y otras que apartándose de esta hipótesis de linealidad en el proceso generador de las series, formulan y estiman modelos o sistemas estructuralmente no lineales. Entre estas últimas, quizás las más relevantes sean la de los modelos GARCH y más recientemente, la de los modelos de redes neuronales (véase Potter 1999, Tong 1990 y Alonso 1999).

¿Cómo diagnosticar la presencia de caos a partir de una serie temporal?

En este y el próximo capítulo vamos a repasar cuales son los principales test que se han propuesto para diagnosticar o detectar la presencia de caos a partir de una serie temporal[3]. En realidad, no existe una única técnica o herramienta, sino toda una variedad de test que deberán ser utilizadas de forma complementaria y no excluyente para poder establecer la presencia de caos. El desconocimiento a priori del sistema o proceso generador de la serie temporal requiere, necesariamente, que la detección de comportamientos caóticos no se base en ningún supuesto sobre la estructura del proceso generador de la serie. Es decir, cualquier técnica para detección del caos debe partir de las propias observaciones muestrales y ser válidas incluso cuando se desconozca dicho modelo generador.

El análisis de si una serie de datos es aleatoria o por el contrario caótica determinista se traduce en investigar si sus elementos pueden considerarse muestreados en las trayectorias de un sistema determinista desconocido cuya dinámica converja a un atractor extraño (Fernández Rodríguez, 1995, p. 21). Es decir, se trata de analizar una serie temporal asumiendo que ésta es una muestra observable de la trayectoria que describe la solución de un sistema dinámico. A partir de este *observable* del sistema dinámico subyacente, se trata de encontrar evidencia de comportamientos caóticos frente a otras alternativas

[3] Algunos de estos test no serán utilizados en esta tesis. Entre ellos podemos destacar, los propuestos por Gilmore (1993) –basado en la utilización de los gráficos de recurrencia–; Hinich(1982), Ashley y Patterson(1989) y Chen(1996) –basado en el estudio de la serie en el dominio de frecuencias–; White (1989a,b) –que hace uso de los modelos de redes neuronales artificiales para captar culaquier tipo de estructura determinista existente en una serie temporal–; y Fernández Rodríguez (1995) y Fernández Rodríguez y Martín González (1995) –que se fundamenta en la predicción por analogías de los modelos caóticos–.

–movimientos puramente aleatorios posiblemente sobre algún sistema dinámico lineal o de dinámica simple–. En definitiva, con los test de detección de caos determinista se trata de discriminar entre las dos posibles fuentes de complejidad, la puramente estocástica y la caótica determinista de dinámica compleja. Dicho de otro modo, intentamos distinguir entre ruidos caóticos deterministas de baja dimensión –desorden ordenado o aleatoriedad determinista– y ruidos puramente estocásticos o de elevada dimensión. En este sentido, resulta poco verosímil pensar o creer a priori que las series económicas están exentas de cualquier tipo de componente aleatorio. Es por ello, que el comportamiento que habría que buscar a partir de una serie temporal, y con más sentido en el campo de la economía, sería el de un *caos ruidoso*. Esto es, teniendo en cuenta que independientemente de las propiedades cualitativas del sistema dinámico subyacente generador de la serie temporal –en caso de que exista–, las observaciones muestrales procedentes de dicho sistema siempre van a estar perturbadas por la presencia de algún tipo de ruido puramente aleatorio –errores de medida, etc.–. Este supuesto sobre la existencia de algún tipo de ruido puramente aleatorio superpuesto a la posible ley determinista, limita la capacidad de la mayoría de los test propuestos para la detección del caos determinista ya que éstos son sólo capaces, en general, de discriminar entre la hipótesis puramente aleatoria y la caótica determinista. En los próximos apartados veremos como podemos, al menos en parte, salvar este problema.

Los test para la detección del caos determinista tratan de encontrar caos basándose en las propiedades básicas de estos sistemas, y que como ya vimos se podían resumir en que son sistemas dinámicos no-lineales, su solución es irregular y aperiódica por que convergen a atractores extraños y su de pendencia sensitiva a las condiciones iniciales. Desgraciadamente no existe un único test que recoja todas esas propiedades, deben utilizarse por tanto de manera complementaria distintos test que tratan de contrastar de manera separada algunas de esas propiedades. Entre estas técnicas debemos distinguir entre dos grandes grupos. Por un lado, aquellas que se basan en un análisis gráfico y estadístico tradicional de series temporales. Por otro, las que tratan de cuantificar ciertas propiedades inherentes a las series con comportamiento caótico. En este capítulo nos centraremos en el primer grupo de técnicas, destinando el próximo capítulo 5 al análisis de las segundas.

Una primera característica que debemos observar en la serie temporal si ésta procede de un sistema caótico determinista será una evolución temporal errática y aperiódica, es decir, debe presentar una dinámica compleja. Esta complejidad dinámica podrá estar generada bien por un sistema puramente aleatorio, bien por un sistema dinámico determinista en régimen de comportamiento caótico, bien por un proceso en el que se combinen estas dos fuentes de complejidad. Es por ello, que la simple inspección gráfica no permite revelar directamente la posible presencia de comportamientos caóticos. Deberemos, por tanto, seguir profundizando en el análisis de la serie. El siguiente paso consiste en utilizar otra serie de herramientas que sean capaces de detectar cierta correlación o dependencia temporal en la evolución de las

series económicas, ya que precisamente si la serie ha sido generada por un sistema dinámico determinista, por definición, su evolución temporal deberá estar regida por dicho sistema. Así, una segunda herramienta para detectar comportamientos caóticos es precisamente el análisis de su *correlograma* en el dominio temporal. En tercer lugar, y como el series caóticas deben ser aperiódicas, el análisis espectral en el dominio de frecuencias, el *periodograma*, debe mostrar evidencia a favor de dicha aperiodicidad. Tanto el correlograma como el periodograma constituyen las herramientas básicas del análisis estadístico de las series temporales bajo la hipótesis de linealidad. Es por ello que, en algunas series caóticas estos test no sean capaces de recoger la verdadera estructura dinámica no-lineal subyacente. Así, deberá completarse el análisis del correlograma y el periodograma con otras herramientas para la detección de comportamientos aperiódicos y dependencia dinámica no-lineal. Una de esas herramientas es el conocido como análisis R/S, que será analizado en el apartado 4.5.

Cuando estos test –análisis gráfico de la evolución, correlograma, periodograma y análisis R/S– indiquen que existe cierta correlación subyacente en la serie temporal, y que no se aprecia un movimiento periódico regular, entonces se habrá encontrado evidencia de su procedencia *potencialmente* caótica. Sin embargo, también los procesos de dinámica simple en los que se añaden ruidos puramente estocásticos –lineales o no-lineales– pueden generar esa pauta de comportamiento. Así, como estos test no son capaces de distinguir entre estas dos alternativas, tendremos que continuar el análisis de la serie con otras herramientas para asegurar su procedencia caótica –que serán analizadas en el próximo capítulo 5–.

Este segundo grupo de herramientas complementarias a las anteriores tratan de encontrar evidencia a favor o en contra de que el sistema dinámico generador de la serie converge a atractores extraños, es decir, se centran en la estimación de la dimensión fractal y las propiedades de estabilidad local del atractor –dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales–. Para ello, un aspecto previo que tendremos que considerar será el de la *reconstrucción del atractor* a partir de la serie temporal de forma que se conserven las mismas propiedades cualitativas del sistema dinámico desconocido. Dicha reconstrucción del atractor se puede realizar utilizando el método de los retardos, en el que la órbita del sistema original se reconstruye a través de vectores cuyos componentes serán los propios valores retardados de la serie temporal. La reconstrucción de la órbita por este método requiere de la elección adecuada tanto del *retardo de reconstrucción* como la dimensión del vector de estados *–dimensión de inserción–* de forma que la órbita así reconstruida replique a la verdadera dinámica del sistema subyacente.

Una vez reconstruido el atractor, podrán definirse distintas medidas con las que caracterizar algunas de las propiedades cualitativas del mismo. Estas medidas se estimarán utilizando la serie temporal concreta observada. Para que las medidas estimadas con esa serie caractericen de manera inequívoca al

atractor original desconocido, será necesario que esas medidas se definan de manera que resulten independientes de la muestra concreta utilizada, esto es, que sean ergódicas o invariantes ante la acción del sistema –apartado 5.4–. De entre esas medidas invariantes, utilizaremos dos de ellas con las cuales será posible caracterizar perfectamente a los sistemas caóticos: la *dimensión fractal* y los *exponentes de Lyapunov*[4]. Con la utilización de estas medidas será posible, por tanto, averiguar cuando la serie temporal observada procede de un sistema dinámico caótico aunque sea desconocido.

En términos generales, para que el sistema subyacente generador de la serie temporal sea caótico, será necesario, en primer lugar, que la dimensión fractal estimada sea no-entera o, en cualquier caso, estrictamente superior a su dimensión topológica –los atractores extraños o caóticos son objetos fractales–. Además como estamos interesados en detectar caos *bajo dimensional*, sería deseable que la dimensión estimada no sea excesivamente elevada. En el apartado 5.6 se analizarán distintos métodos con los cuales es posible aproximar la dimensión fractal del atractor al que converge el sistema –*dimensión de correlación*, *dimensión de información* y *dimensión de lyapunov*–. Hay que tener en cuenta, sin embargo, que como ya se apuntó en el capítulo 3, la estimación de la dimensión fractal no puede considerarse como un test suficiente para detectar comportamientos caóticos, ya que los atractores extraños no son los únicos que presentan una estructura fractal –algunos toros cuasiperiódicos también presentan una dimensión fractal estrictamente superior a su dimensión topológica–.

En segundo lugar, cuando alguno de los exponentes de Lyapunov estimados sea estrictamente positivo el atractor será localmente inestable –apartado 3.2–, esto es, presentará dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales, condición necesaria y suficiente ésta para que el movimiento acotado descrito por el sistema corresponda al de uno caótico determinista. Es decir, la estimación del espectro de exponentes de Lyapunov constituye un test que directamente contrasta la hipótesis de caos determinista. En el apartado 5.5 analizaremos tres métodos para la estimación de los exponentes de Lyapunov a partir del atractor reconstruido con la serie temporal observada: el algoritmo de estimación directa de Wolf et al. (1985), y dos algoritmos de cálculo indirecto de los exponentes –Lenns y Netle– que se apoyan en la estimación no paramétrica del sistema dinámico subyacente desconocido a través de modelos de redes neuronales artificiales, para posteriormente estimar los exponentes de Lyapunov asociados según la definición 3.9.

Pasamos a continuación a analizar el contenido de estas herramientas para la detección de caos determinista. Posteriormente – capítulo 9–, estos test serán aplicados sobre algunas series reales de la economía española.

---

[4] Como veremos estas medidas pueden completarse con otras como la *entropía de Kolmogorov* apartado 5.7.

4.2. Análisis Gráfico de la evolución temporal

El primer paso para la detección de comportamientos caóticos consiste en realizar un análisis gráfico de la evolución temporal de la serie. Este análisis gráfico puede, en principio, proporcionar información sobre el carácter de la dinámica del proceso subyacente generador de la serie. Más concretamente es capaz de revelar cuando la serie procede de un sistema determinista de dinámica simple, en cuyo, su trayectoria o secuencia temporal presentará una evolución ordenada, regular y perfectamente periódica. Es decir, la inspección de la evolución temporal de una serie podría servir para discriminar entre los sistemas de dinámica simple y los de dinámica compleja. Para ello debe preguntarse si existe algún tipo de regularidad en la trayectoria temporal de la serie o si por el contrario, presenta comportamiento irregular y aperiódico posiblemente aleatorio. Esta herramienta podría incluso utilizarse para detectar empíricamente la existencia de un periodo tres, en cuyo caso, aplicando el teorema de Li-Yorke, ello implicaría que el sistema dinámico subyacente podría dar origen a comportamientos dinámicos cualitativamente más complejos –siempre teniendo en cuenta las limitaciones de este teorema–.

Una primera dificultad de este enfoque se encuentra en que si la serie procede de un sistema con un periodo finito pero muy elevado, y el tamaño de la serie temporal es inferior a dicho periodo, podría concluirse erróneamente que la serie no procede de un sistema de dinámica simple. Por ello, será necesario que las series temporales tengan un tamaño suficientemente elevado como para poder recoger el periodo del sistema subyacente. Ahora bien, a menos que se disponga de series de tamaño infinito, nunca podremos asegurar

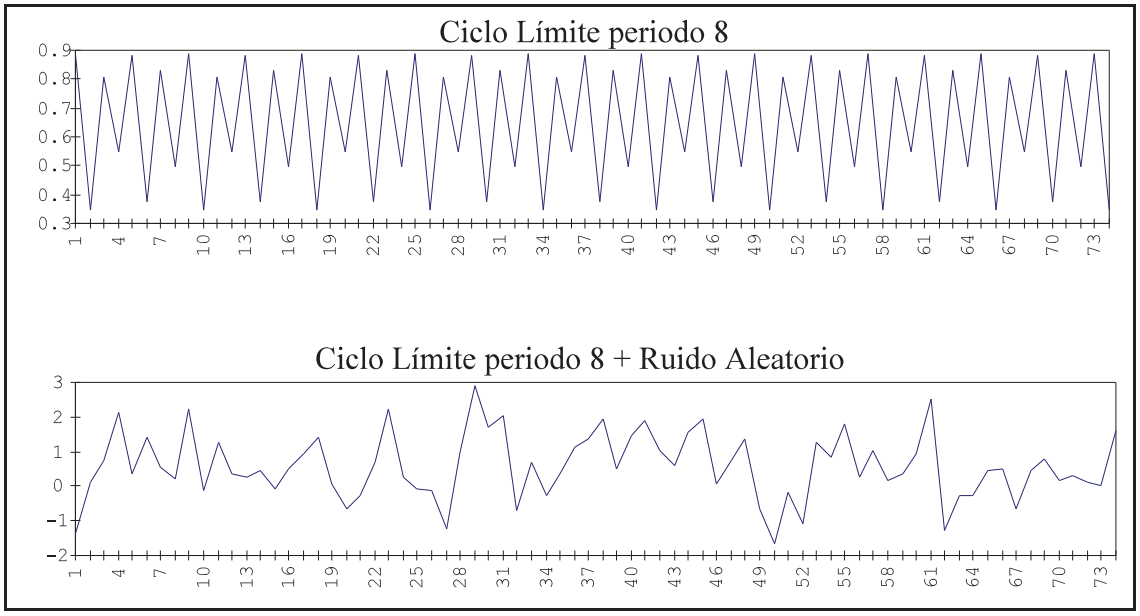


Figura 4. 1

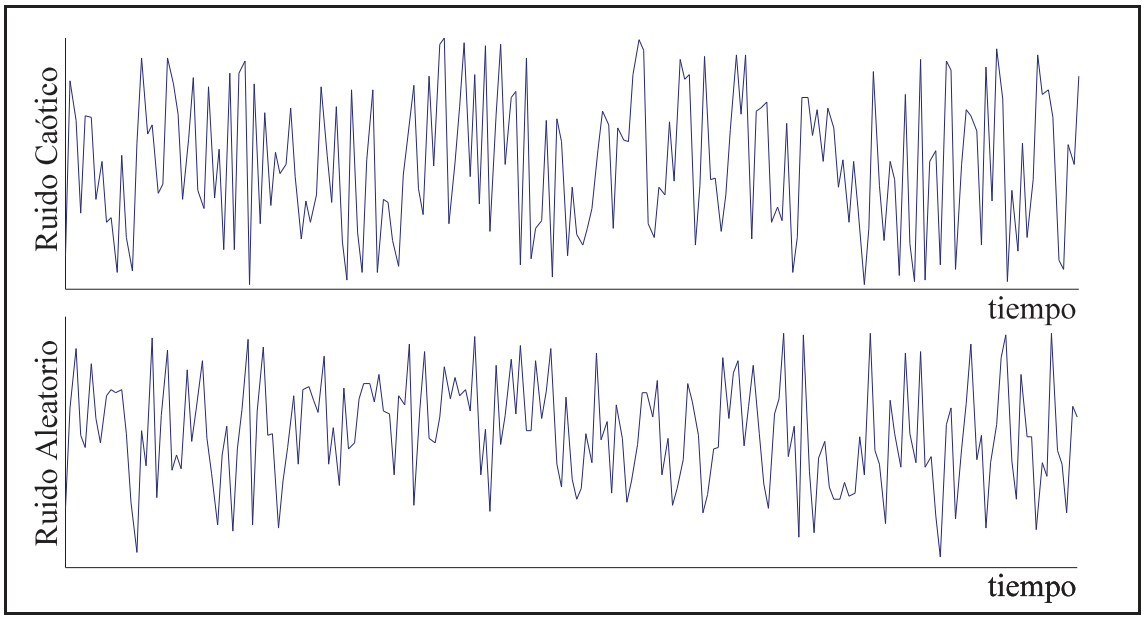


Figura 4. 2

que la serie es realmente aperiódica, ya que siempre cabría la duda de que el periodo finito del sistema sea superior al tamaño de la serie.

Otro tipo de problemas hace referencia a que, en términos generales, las series reales, sobre todo en economía, estarán perturbadas por algún tipo de componente puramente aleatorios –errores de medida, etc.–, que se reflejarán en una evolución temporal, en cierta medida irregular y aperiódica. Es decir, que incluso para ciclos regulares de bajo periodo, sólo en casos extremos, aquellos no sometidos a ninguna fuerza o perturbación exógena aleatoria, será posible encontrar comportamientos regulares de dinámica simple por la simple inspección visual de su evolución temporal. A modo ilustrativo representamos en la figura 4.1 la evolución temporal de la solución de la aplicación logística con μ=3.56 –ciclo límite periodo 4– junto a la misma serie perturbada con un ruido N(0,1).

Por otra parte, una característica que deberíamos observar en la serie temporal si ésta procede de un sistema caótico determinista será una evolución errática y aperiódica, es decir, debe presentar una dinámica compleja. Esta complejidad dinámica podrá estar también generada por un sistema puramente aleatorio, o por un proceso donde se combinen estas dos fuentes de complejidad –figura 4.2–. El análisis gráfico de la evolución temporal, si bien puede revelar en ciertos casos, y siempre con algún componente de arbitrariedad, el carácter determinista de dinámica simple de la serie, es incapaz de mostrar cuál es la verdadera naturaleza de la irregularidad y aperiodicidad observada en la serie temporal. Esto es, no es capaz de discriminar entre los procesos caóticos, aquéllos puramente estocásticos y los generados por alguna combinación de ambos.

Así, aunque el análisis gráfico de la serie temporal pueda considerarse el primer paso para la detección de comportamientos caóticos, será necesario profundizar en el análisis de la serie. Dos de las herramientas utilizadas tradicionalmente para completar el análisis gráfico es correlograma y el periodograma de la serie.

4.3. Análisis de las autocorrelaciones lineales en el dominio temporal: El correlograma.

El siguiente paso en el proceso de detección de comportamientos caóticos consiste en analizar si existe alguna dependencia temporal de retroalimentación en la evolución de la series, ya que precisamente, si la serie ha sido generada por un sistema dinámico determinista, por definición, su evolución temporal –el cambio en los valores que va tomando la serie– deberá estar regida por dicho sistema dinámico. La herramienta estadística que tradicionalmente se emplea para detectar la posible dependencia temporal en la estructura del proceso generador de la serie es el correlograma, compuesto por la estimación de la función de autocorrelación simple y la función de autocorrelación parcial.

La función de autocorrelación simple

El análisis del correlograma supone que la serie temporal constituye una realización de un proceso estocástico, esto es, de un proceso constituido por una sucesión de variables aleatorias $\{y_t\}$, $t = -\infty, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., \infty$.

La función de autocorrelación simple (*facs*) de un proceso estocástico $\{y_t\}$ es una función real de los números naturales $r:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{R}$, que a cada $k\in\mathbb{N}$, asigna un valor que denotaremos por $r_k(t)$ que será igual al coeficiente de correlación entre y_t e y_{t-k} (Novales 1988, pp229-234):

$$r_k(t)=\frac{Cov(y_t\ ,\ y_{t-k})}{\sqrt{Var(y_t)}\cdot\sqrt{Var(y_{t-k})}} \tag{4.1}$$

La estimación de la *facs* del proceso estocástico a partir de la serie temporal puede realizarse de la siguiente forma:

$$r_k=\frac{\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)\left(y_{t-k}-\bar{y}\right)}{\sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)^2}\sqrt{\frac{1}{T-k}\sum_{t=k+1}^{T}\left(y_t-\bar{y}\right)^2}} \tag{4.2}$$

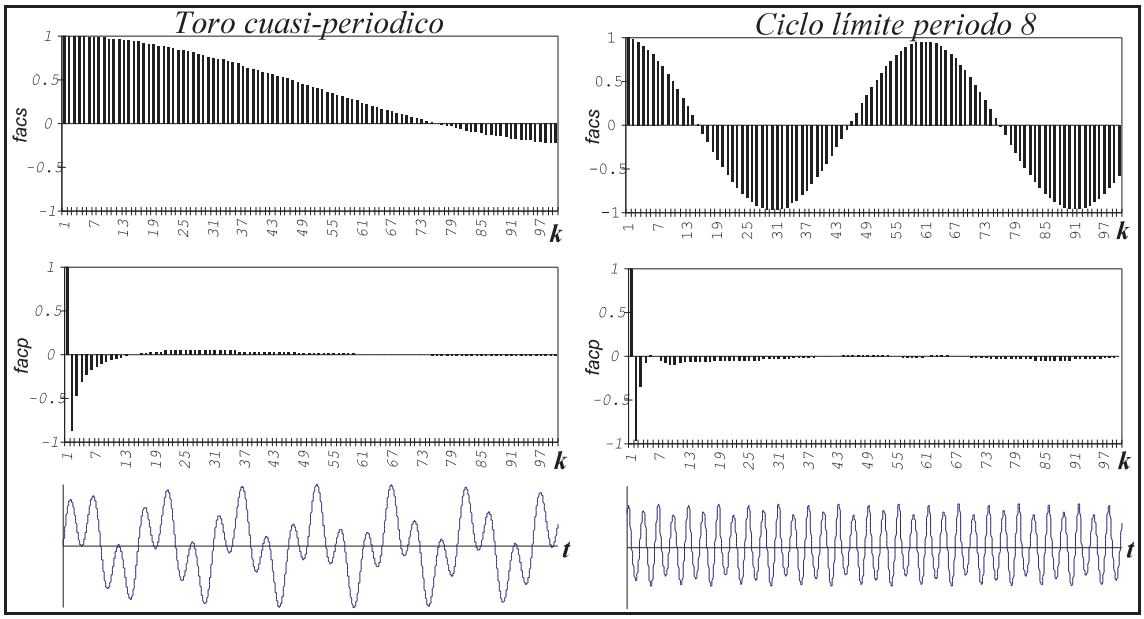


Figura 4. 3

Siendo T el tamaño de la serie temporal e $\bar{y}$ la media muestral:

$$\bar{y} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t \tag{4.3}$$

La función de autocorrelación simple estimada a partir de una serie temporal, mide por tanto la correlación lineal media existente entre dos valores cuales quiera de la serie separados en el tiempo por un periodo determinado por el retardo k, esto es como las variaciones de la serie temporal están relacionadas entre los instantes t y $t+k$.

La función de autocorrelación parcial

La función de autocorrelación parcial (*facp*) trata de recoger, al igual que la *facs*, la autocorrelación existente entre dos valores de la serie separados en el tiempo por cierto retardo k, pero eliminando o descontando el efecto de las autocorrelaciones existentes en periodos intermedios de tiempo.

La estimación de los coeficientes de autocorrelación parcial para el retardo $k\in\mathbb{N}$ que denominaremos por ϕ_{kk} podrá obtenerse mediante la estimación por mínimos cuadrados ordinarios de la siguiente regresión lineal:

$$\tilde{y}_t=\varphi_{k1}\tilde{y}_{t-1} + \varphi_{k2}\tilde{y}_{t-2} + \cdots + \varphi_{kk}\tilde{y}_{t-k} + e_t \tag{4.4}$$

donde $\tilde{y}_j$ representa el valor de la serie en j respecto a la media muestral ($\tilde{y}_j = y_j - \bar{y}$).

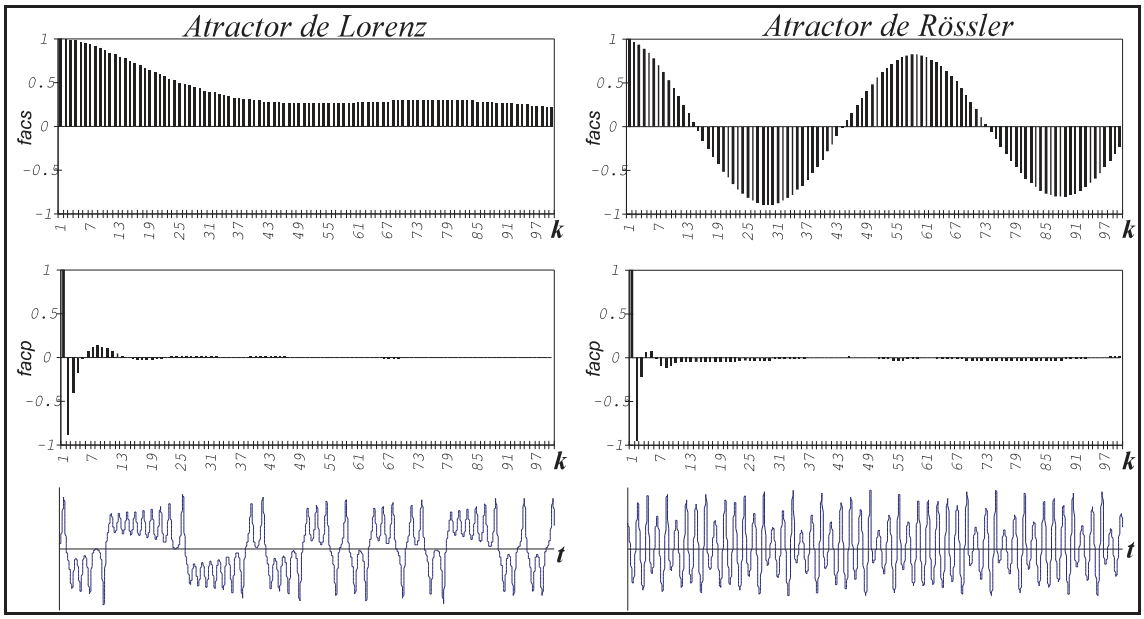


Figura 4. 4

El correlograma

Las estimaciones de las funciones de correlación simple y parcial a partir de una serie temporal constituyen su correlograma. Nótese que el coeficiente estimado para la *facs* y la *facp* para el retardo k=0 será uno. Para el resto de retardos los coeficientes estimados estarán comprendidos en el intervalo [-1,1], con la única restricción de que $r_1 = \phi_{11}$.

En caso de que exista cierta estructura dinámica en el proceso estocástico ésta quedará reflejada en los valores estimados en la *facs* y la *facp*, que serán

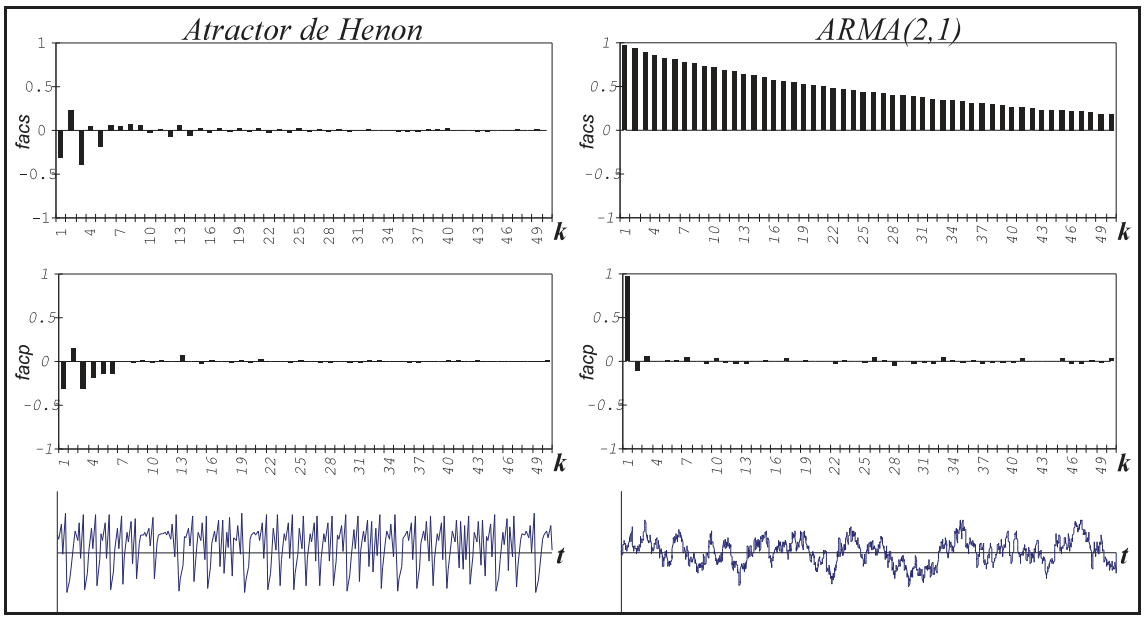


Figura 4. 5

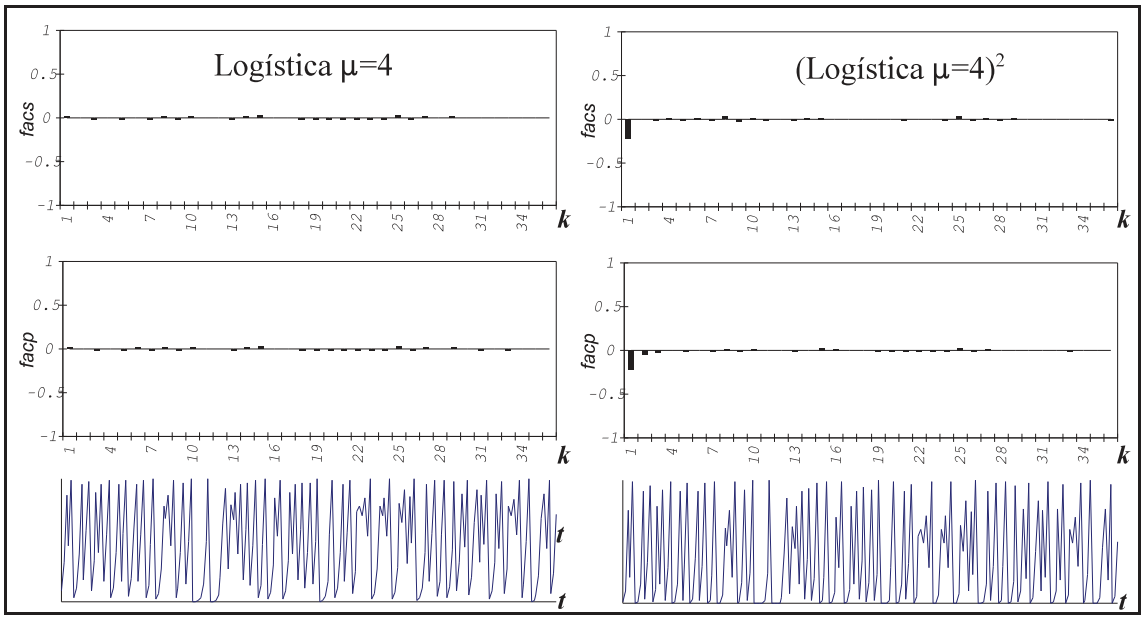


Figura 4. 6

significativamente distintos de cero[5]. Sólo en el caso en el que el proceso estocástico esté incorrelacionado en el tiempo, es decir, que los valores que va tomando la serie temporal no guardan ninguna relación dinámica de retroalimentación, los coeficientes estimados resultarán no-significativos.

De esta forma, es posible utilizar el correlograma de la serie temporal para detectar una posible estructura dinámica en el proceso generador de la serie temporal, que si tenemos en cuenta que las series caóticas proceden de sistemas

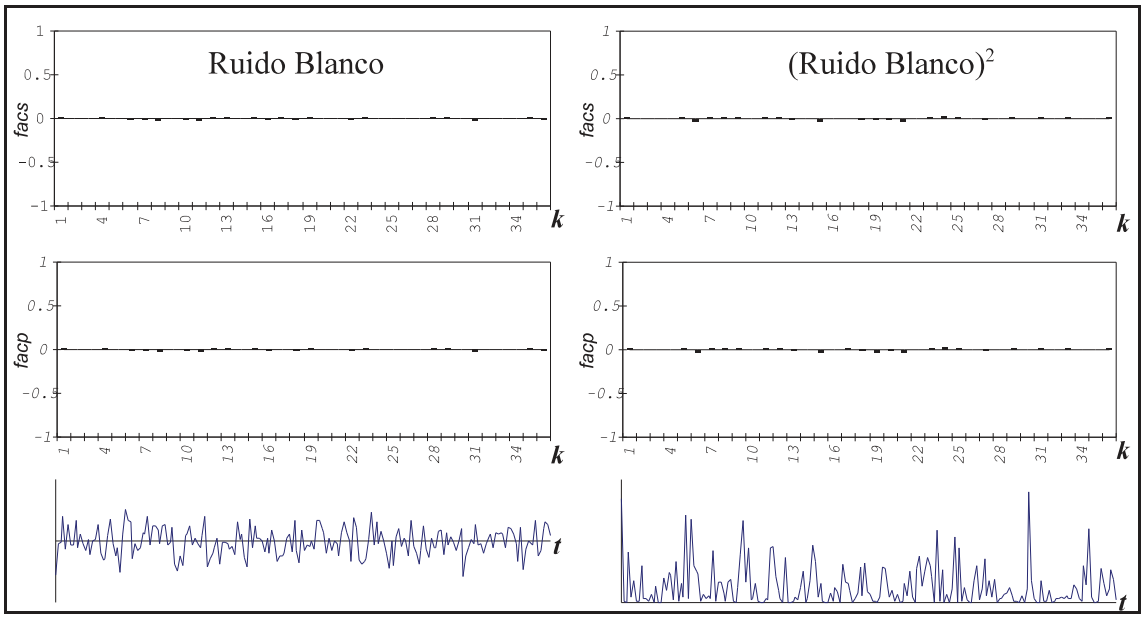


Figura 4. 7

[5] A efectos prácticos, los intervalos de significación se pueden establecer por las bandas de $\pm 2/\sqrt{T}$

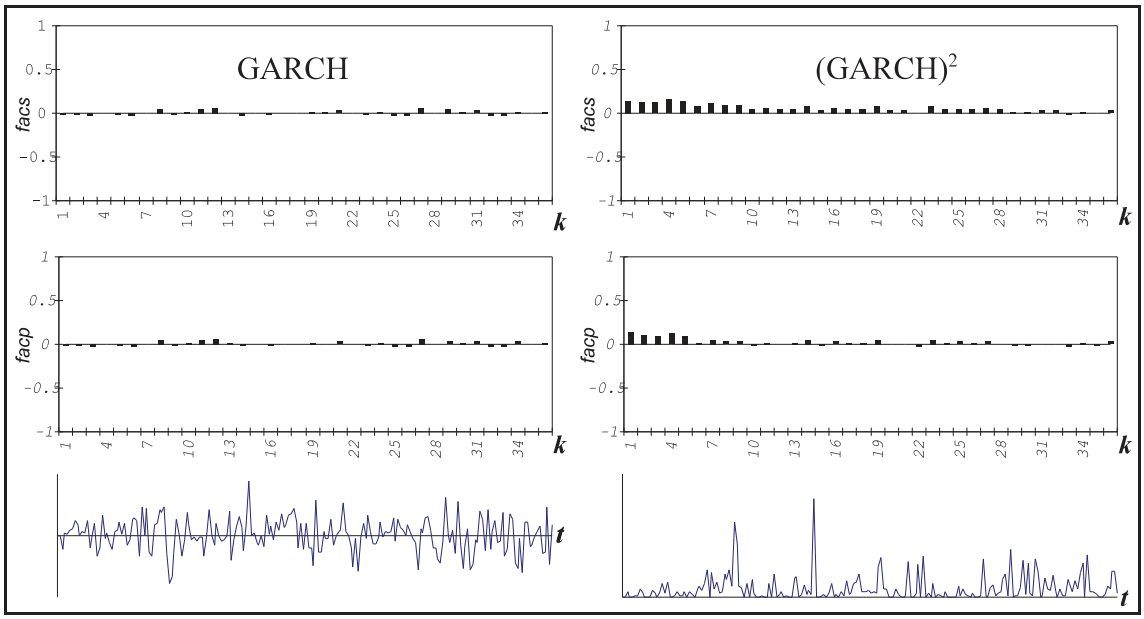


Figura 4. 8

dinámicos deterministas, para series caóticas se obtendrá un corrleograma con coeficientes significativamente distintos de cero. En caso contrario, es decir, cuando el correlograma sea plano, cabría esperar que el proceso generador es puramente estocástico y totalmente incorrelacionado. La existencia de estructura dinámica en el proceso generador de la serie, no revela sin embargo la naturaleza lineal, o no lineal del sistema dinámico subyacente, y por tanto si éste es caótico o no. En las figuras 4.4 a 4.8 mostramos los correlogramas para distintas series caóticas y no caóticas[6].

Por otra parte, la presencia de un correlograma plano tampoco resulta suficiente para asegurar que el proceso generador es uno puramente aleatorio e incorrelacionado. Como muestra de ello en la figura 4.6 representamos el correlograma de la solución de la ecuación logística con μ=4. La explicación a este hecho se encuentra en que el correlograma sólo es capaz de recoger las autocorrelaciones de carácterácter lineal presentes en la serie, y los modelos caóticos presentan una estructura dinámica no-lineal que puede no quedar reflejada en el correlograma. Es por ello, que con el propósito de recoger la posible dependencia no lineal presente en una serie, se haya propuesto en la literatura empírica analizar adicionalmente el correlograma del cuadrado de la serie temporal, ya que si no existe ningún tipo de autocorrelación en la serie original, tampoco la habrá en su cuadrado –figura 4.7–, mientras que esta transformación puede revelar la posible correlación no lineal presente en el proceso generador de la serie ya sea caótico determinista o puramente aleatorio

[6] La serie del modelo ARMA(2,1) y Garch están tomadas de Barnett et al. (1997)

pero no lineal–figura 4.8–[7]. Otra alternativa para afrontar este problema es usar otro tipo de herramientas estadísticas que posibiliten captar la posible estructura dinámica lineal o no lineal. En el próximo apartado 4.5 utilizaremos una de estas herramientas, el análisis R/S. De momento, pasamos a estudiar el periodograma de la serie.

4.4.- Análisis Espectral en el Dominio de Frecuencias: La trasformada de Fourier, el espectro de potencias y el periodograma.

Como ya se ha comentado en anteriores capítulos, una de las propiedades de los sistemas caóticos de dinámica compleja es que la evolución temporal de sus soluciones presenta una alta irregularidad y aperiodicidad, esto es, trayectorias o movimientos oscilatorios no repetidos en el tiempo cuyo periodo puede considerarse infinito. Uno de los test utilizados para comprobar si una serie temporal procede de un proceso caótico determinista consiste en estimar su periodicidad mediante el análisis espectral en el dominio de frecuencias [8].

El análisis espectral analiza el dominio de frecuencias de la serie temporal tratando de revelar cuál es el conjunto de frecuencias presentes en la serie, esto es, detectando cuales son las frecuencias dominantes en la serie temporal. El término frecuencia es utilizado aquí como indicador de la velocidad con que se repite un fenómeno, es decir, la inversa del período del movimiento cíclico[9]. Con el análisis espectral podrá, por tanto, construirse un *periodograma* de la serie, en el que se revelarán las periodicidades ocultas en la misma, y que en general no serán claramente visibles a partir la inspección del gráfico de su evolución temporal. El método del análisis espectral para revelar o detectar cuales son las frecuencias dominantes ocultas en una serie temporal, es el de aproximar la serie temporal, utilizando el principio lineal de la superposición –la suma es igual a la suma de las partes–, por la suma de infinitas funciones periódicas, cada una de ellas con distinta periodicidad, para posteriormente estimar cual de esas funciones periódicas contribuye significativamente a la explicación de la evolución original de la serie.

---

[7] El ruido blanco de la figura 4.7 está compuesta por una sucesión de variables aleatorias ~N(0,1), mientras que el proceso estocástico GARCH está tomado de Barnett et al. (1997): $y(t)=h(t)^{(½)}u(t)$, con $h(t)=1+0.1y(t-1)^2+0.8h(t-1)$; $h(0)=1$; $y(0)=0$; $u(t)\sim N(0,1)$.

[8] Para un análisis de las aplicaciones del análisis espectral para la detección de comportamientos caóticos véase Lorenz (1993, pp.202-204), Medio (1992, pp. 101-114) y Brown (1995, pp.26-39).

[9] Nótese que esta interpretación de frecuencia es diferente a la estadística, esto es, el número de veces que se repite un suceso. Así, según la interpretación de frecuencia que adoptemos podemos construir el periodograma o el Histograma. La construcción del histograma relacionada con la teoría ergódica también puede ayudar a detectar comportamientos caóticos (Day, 1994, pp. 134-163 y Ruelle, 1992, pp. 35-43).

El análisis espectral han sido utilizado ampliamente en la física y en otras disciplinas para la modelización y análisis de fenómenos oscilatorios. El análisis espectral puede utilizarse para distinguir entre funciones o series temporales periódicas y cuasi-periódicas de aquellas otras aperiódicas o sin periodo finito. Desde este punto de vista, la estimación del periodograma asociado a la serie temporal, puede ayudar a la detección de comportamientos caóticos cuando se detecte la presencia de comportamientos aperiódicos.

Ahora bien, la detección –con la ayuda del análisis espectral– de comportamientos aperiódicos en la dinámica subyacente a una serie temporal, no puede tomarse como evidencia suficiente para asegurar que dicha aperiodicidad ha sido generada por un sistema caótico determinista. Es decir, no son sólo los procesos de dinámica caótica los únicos que presentan comportamientos aperiódicos. Los procesos puramente estocásticos tampoco tienen un periodo finito claro y por lo tanto, también presentarán la misma propiedad de aperiodicidad. Es por ello, que si bien este tipo de técnicas pueden ayudar a la detección de comportamientos caóticos, –descartando que ésta haya sido generada por un sistema de dinámica simple periódico o cuasiperiódico–, deberán ser completadas con otras herramientas de análisis que permitan discriminar entre procesos puramente aleatorios y caóticos deterministas[10]. A algunas de esas técnicas complementarias dedicaremos los próximos apartados, centrándonos ahora en los fundamentos del análisis espectral y en su aplicación a las series temporales para la estimación de las periodicidades dominantes ocultas en la misma.

Fundamentos del análisis espectral: el análisis armónico.

El análisis espectral se fundamenta en el análisis armónico, que también estudia el dominio de frecuencias de las funciones y series temporales pero bajo la hipótesis determinista clásica, es decir, considerando exclusivamente funciones de periodicidad simple o finita, movimientos perfectamente periódicos y regulares de dinámica simple. El análisis espectral trata de extender o generalizar ese análisis armónico al estudio de series y fenómenos oscilatorios aperiódicos o no periódicos, ya sean puramente estocásticos o caóticos. Originariamente se decía que el análisis espectral generalizaba al armónico extendiéndolo a la hipótesis probabilística o puramente aleatoria para el estudio de fenómenos aperiódicos. Como los sistemas caóticos deterministas son también aperiódicos, de nuevo se observa como estos sistemas rompen con la distinción tradicional entre los sistemas deterministas regulares y periódicos –el análisis armónico– y los puramente aleatorios, irregulares y aperiódicos –análisis espectral–.

[10] Debemos apuntar sin embargo, que al igual que sucedía con el correlograma, la perturbación de las series periódicas por ruidos puramente aleatorios y aperiódicos, o un tamaño muestral de la serie excesivamente reducido –menor que el periodo del verdadero ciclo del sistema generador de la serie– puede entorpecer la identificación de las periodicidades ocultas en las trayectorias de dinámica simple.

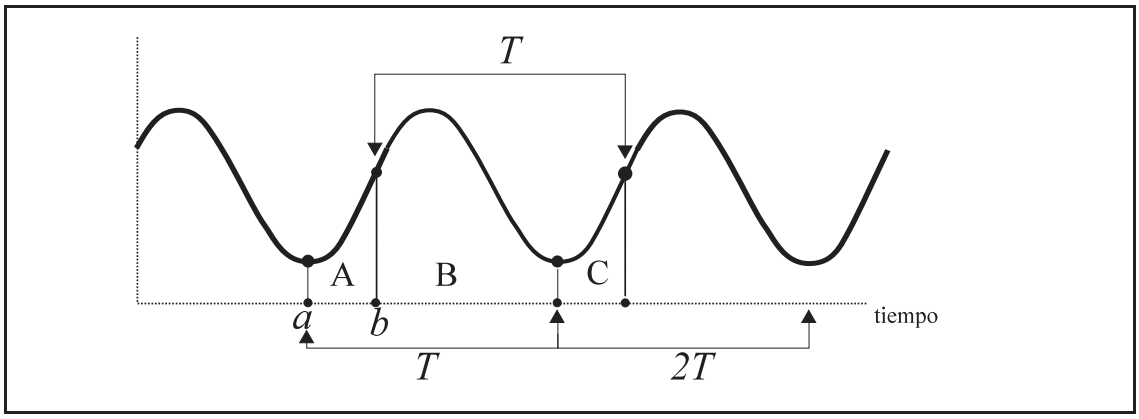


Figura 4. 9

El análisis armónico comenzó en el siglo XVIII con el propósito de estudiar fenómenos de naturaleza periódica, es decir, que se repiten con regularidad –movimiento del péndulo, ondas sonoras, conducción del calor, oscilaciones mecánicas, eléctricas, electromagnéticas, etc.– . El instrumento analítico en que se basa del análisis armónico fue inicialmente propuesto por el matemático francés Jean B. Joseph Fourier (1768-1830), que desarrolló el concepto de periodicidad simple (Alcaide y Álvarez, 1992, p 471-2). La proposición básica del análisis armónico sostiene que toda función periódica puede expresarse, haciendo uso del principio lineal de la superposición, como la suma de componentes sinusoidales o armónicos. Así, se piensa que toda función temporal periódica –de periodicidad simple– se puede aproximar mediante la suma de un número reducido de armónicos, esto es componentes sinusoidales cuya frecuencia será un múltiplo entero de la frecuencia fundamental, entendiendo por ésta como la frecuencia más alta de todos los armónicos de una onda periódica. Se trata en definitiva, de desglosar la señal en distintas oscilaciones de diferente frecuencia. Dicha aproximación de las funciones periódicas se realiza mediante las conocidas como series trigonométricas de Fourier o series de armónicos. A continuación repasamos brevemente los fundamentos del análisis armónico.

El análisis armónico estudia el dominio de frecuencias de funciones temporales periódicas, es decir, funciones cuyos valores se repiten a intervalos regulares de tiempo. Analíticamente tendríamos que la función *f(t)* es periódica si existe una constante $T>0$ tal que :

$$f(t)=f(t+T) \tag{4.5}$$

en cualquier dominio de definición de *f(t)*. El periodo fundamental de *f(t)* será la mínima constante *T* de todas las posible, esto es, el menor *T* para el cual se verifica (4.5)[11]. Ya que el movimiento oscilatorio se repite indefinidamente,

[11] En el caso de funciones cuasi-periódicas no existirá un único periodo fundamental, sino un conjunto finito periodos fundamentales que generan movimientos oscilatorios independientes que superpuestos forman el movimiento cuasi-periódico.

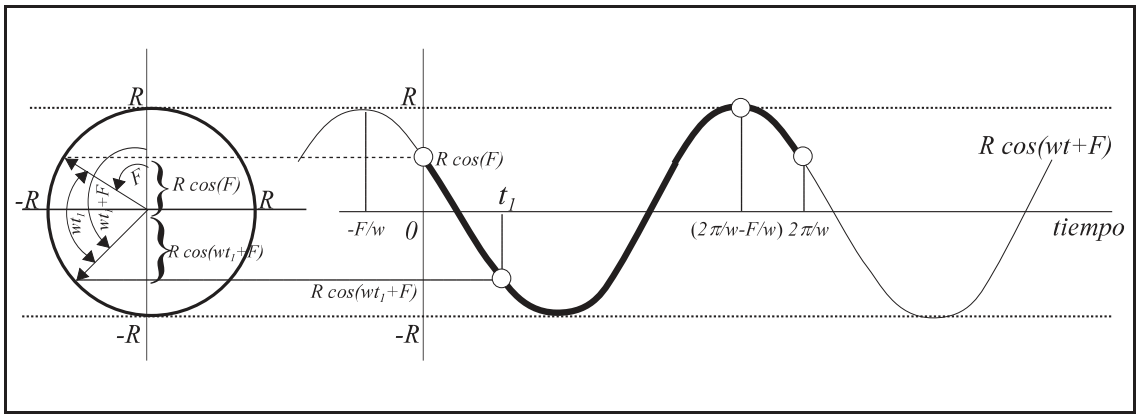


Figura 4. 10

tendremos que ha de cumplirse igualmente:

$$f(t)=f(t+kT) \tag{4.6}$$

con *k* entero y positivo, lo que pone de manifiesto que el periodo de la función no es único, sino que existirán infinitos periodos, todos ellos múltiplos del periodo fundamental *T*. Además, siempre que la función *f(t)* sea integrable en un intervalo de longitud *T*, también lo será en cualquier intervalo de la misma longitud, y su valor será el mismo, ya que la función es perfectmente periódica –figura 4.9–:

$$\int_a^{a+T} f(t)dt=\int_b^{b+T} f(t)dt \tag{4.7}$$

La proposición básica del análisis armónico establece que toda función periódica puede aproximarse por la suma de infinitas funciones periódicas, esto es, por una serie funcional convergente cuyos términos son funciones periódicas del tiempo:

$$f(t)=S(t)=\phi_1(t)+\phi_2(t)+\cdots+\phi_n(t)+\cdots \tag{4.8}$$

La función periódica utilizada por Fourier para construir la familia de funciones periódicas (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, ...) es conocida como armónico –por eso a este análisis se le denomina armónico–. Un armónico es una función trigonométrica periódica del tipo:

$$\varphi(t)=R\cos(wt+F) \tag{4.9}$$

siendo *R* la amplitud del ciclo, *F* la fase –que determina la posición inicial– ,y *w* la velocidad o frecuencia angular –ángulo en radianes recorrido por unidad de tiempo–. La frecuencia verdadera vendrá dada por[12] $w/2\pi$, por lo que el período del armónico –la inversa de la frecuencia verdadera– será $T=2\pi/w$ –figura 4.10–. El armónico (4.9) puede interpretarse como la parte real de un número complejo con módulo *R* y con argumento $wt+F$ –figuras 4.10-11–. Así, la forma trigonométrica del número complejo *z* asociado al armónico (4.9) sería:

$$z=R[\cos(wt+F)+i\,sen(wt+F)] \tag{4.10}$$

[12] Para pasar de radianes a vueltas habrá que tener en cuenta que 2π rad =1 vuelta=360º

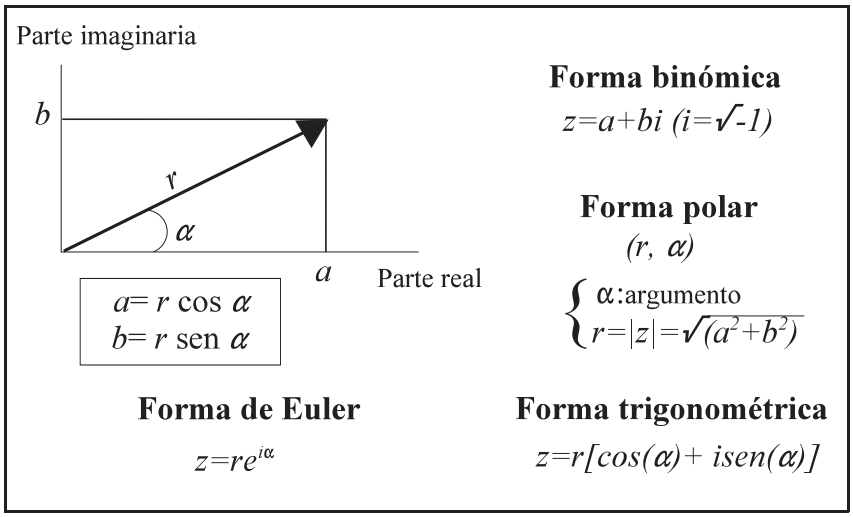


Figura 4. 11

con $i=\sqrt{-1}$, y su forma de Euler:

$$z=Re^{i(wt+F)} \tag{4.11}$$

Utilizando esta forma de Euler (4.11) y por igualación, el armónico (4.9) puede escribirse como[13]:

$$\begin{aligned}\varphi(t)&=R\cos(wt+F)=R\cos(wt)\cdot\cos(F)-R\operatorname{sen}(wt)\cdot\operatorname{sen}(F)=\\&=A\cos(wt)+B\operatorname{sen}(wt)\end{aligned} \tag{4.12}$$

con $A=R\cdot\cos(F)$; $B=-R\cdot\operatorname{sen}(F)$.

Como decíamos, Fourier utilizó estos armónicos para construir una familia de funciones trigonométricas ortogonales periódicas que posteriormente servirían para aproximar cualquier función de periodicidad simple *f(t)*. Esta aproximación es conocida como desarrollo en series de Fourier y puede expresarse como:

$$f(t)=\sum_{p=0}^{\infty}\varphi_p(t)=\sum_{p=0}^{\infty}R_p\cos(pwt+F) \tag{4.13}$$

donde cada armónico $\varphi_p(t)$ muestra una amplitud R_p y un periodo $T_p=2\pi/pw$, siendo $p=0,1,2,3,...$ el orden del armónico. Teniendo en cuenta que $\varphi_0(t)=R_0$ cos F, y que cada armónico p puede por (4.12) expresarse:

$$\varphi_p(t)=A_p\cos(pwt)+B_p\operatorname{sen}(pwt) \tag{4.14}$$

---

[13] $R\cos(wt+F)+Ri\operatorname{sen}(wt+F)=Re^{i(wt+F)}=Re^{iwt}e^{iF}=R[\cos(wt)+i\operatorname{sen}(wt)]\cdot[\cos(F)+i\operatorname{sen}(F)]=$
$=R[\cos(wt)\cdot\cos(F)-\operatorname{sen}(wt)\cdot\operatorname{sen}(F)]+Ri[\cos(wt)\cdot\operatorname{sen}(F)+\operatorname{sen}(wt)\cos(F)]$

por lo que por igualación de términos:

$$R\cos(wt+F)=R[\cos(wt)\cdot\cos(F)-\operatorname{sen}(wt)\cdot\operatorname{sen}(F)]$$
$$Ri\operatorname{sen}(wt+F)=Ri[\cos(wt)\cdot\operatorname{sen}(F)+\operatorname{sen}(wt)\cos(F)]$$

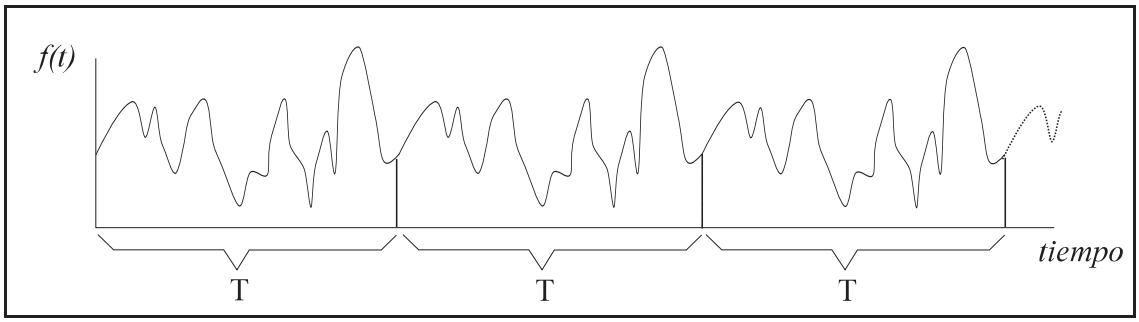


Figura 4. 12

con $A_p=R_p\ cos(F)$; $B_p=-R_p\ sen(F)$, la aproximación (4.13) de la función periódica $f(t)$ por series trigonométricas de Fourier quedará:

$$f(t)=A_0+\sum_{p=1}^{\infty} A_p\cdot\cos(pwt)+B_p\cdot sen(pwt) \qquad (4.15)$$

La utilización de estas series trigonométricas tiene la ventaja, frente a otras aproximaciones que utilizan funciones como la polinómica, de estar compuesta por funciones sinusoidales, permitiendo así la representación de cualquier fenómeno con oscilaciones acotadas. Además las series trigonométricas de Fourier permite representar una función periódica aunque tenga discontinuidades en número finito (Alcaide y Álvarez, 1992 p. 472).

El análisis armónico consiste en, a partir de valores observados en el tiempo de la función periódica $f(t)$, descubrir o estimar los componentes armónicos no directamente observables que contribuyen a la explicación de ésta. Es decir, encontrar los periodos ocultos T_p que resultan significativos, y para ello se necesita estimar las distintas amplitudes R_p, o de forma alternativa los coeficientes A_p y B_p que resulten significativos en la aproximación (4.15) de la función periódica $f(t)$ –$R_p=(A_p^2+B_p^2)^{0.5}$–.

Como hemos apuntado ya, el análisis armónico se aplica a funciones periódicas, es decir, funciones en el tiempo cuyo valor se repite, como mínimo, al cabo de un número T de periodos, por muy complicada que sea su evolución temporal –figura 4.12–. Así una función periódica con periodicidad simple T, frecuencia verdadera $1/T$ y frecuencia angular $w=2\pi/T$, podrá aproximarse por:

$$f_T(t)=A_0+\sum_{p=1}^{\infty} A_p\cdot\cos(2\pi pt/T)+B_p\cdot sen(2\pi pt/T) \qquad (4.16)$$

o utilizando la forma compleja:

$$f_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\ e^{i(2\pi kt/T)} \qquad (4.17)$$

siendo a_p los coeficientes –números complejos conjugados– que indican la contribución de cada armónico p: 0, 1, 2, 3, ... a la explicación de la función periódica[14]:

$$a_k=\begin{cases} A_0 & k=0;k=p \\ \dfrac{A_p-B_p i}{2} & k>0;k=p \\ \dfrac{A_p+B_p i}{2} & k<0;k=-p \end{cases} \tag{4.18}$$

El análisis armónico pretende estimar los coeficientes ocultos a_k. Esta estimación de los coeficientes del armónico requiere el uso de las siguientes relaciones de ortogonalidad. Se dice que una sucesión infinita de funciones φ_k (k=0,1,2,3,....) integrables en un intervalo (a,b) constituye una familia de funciones ortogonales en este intervalo, si se tiene

$$\int_a^b \varphi_p(x)\cdot\varphi_q(x)\ d(x)=0 \tag{4.19}$$

para p y q enteros cualesquiera, excepto $p=q$. De esta manera, la familia constituida por el conjunto de funciones $cos(px)$ (p=0,1,2,...) y $sen(qx)$ (q=1,2,...) es ortogonal en todo intervalo ($-\pi,\pi$) de amplitud 2π:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(pt)sen(qt)\ d(t)=0 \quad ; \quad p\in(-\infty,\infty),\ q\in(-\infty,\infty),\ p\neq q \tag{4.20}$$

Una familia de funciones ortogonales estará normalizada en el intervalo

---

[14] Para llegar a las expresiones (4.17) y (4.18) debemos hacer uso de hecho de que: $e^{iwp}=cos(wp)+isen(wp)$; $e^{-iwp}=cos(-wp)+isen(-wp)=cos(wp)-isen(wp)$; $e^{iwp}+e^{-iwp}=coswp+isenwp+coswp-isenwp=2coswp$; $e^{iwp}-e^{-iwp}=coswp+isenwp-coswp+isenwp=2isenwp$. Haciendo uso de estas expresiones tendremos que

$$f_T(t)=A_0+\sum_{p=1}^{\infty}\left[A_p\cdot\cos\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)+B_p\cdot sen\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)\right]=\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{A_p}{2}2\cdot\cos\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)+\frac{B_p}{2i}2i\cdot sen\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)\right]=$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\left[\frac{A_p}{2}\left(e^{i\frac{2\pi pt}{T}}+e^{-i\frac{2\pi pt}{T}}\right)+\frac{B_p}{2i}\left(e^{i\frac{2\pi pt}{T}}-e^{-i\frac{2\pi pt}{T}}\right)\right]=$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(\frac{A_P}{2}+\frac{B_p}{2i}\right)e^{i\frac{2\pi pt}{T}}\right]+\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(\frac{A_P}{2}-\frac{B_p}{2i}\right)e^{-i\frac{2\pi pt}{T}}\right]=$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(\frac{iA_P+B_p}{2i}\right)\left[\cos\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)+isen\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)\right]\right]+\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(\frac{iA_P-B_p}{2i}\right)\left[\cos\left(\frac{-2\pi pt}{T}\right)+isen\left(\frac{-2\pi pt}{T}\right)\right]\right]=$$
$$=\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(\frac{iA_P+B_p}{2i}\right)\left[\cos\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)+isen\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)\right]\right]+\sum_{p=-\infty}^{0}\left[\left(\frac{iA_P-B_p}{2i}\right)\left[\cos\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)+isen\left(\frac{2\pi pt}{T}\right)\right]\right]=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\left[\cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)+isen\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)\right]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{i\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)}$$

(a,b) si se verifica (4.19) y además se tiene que

$$\int_a^b \left[\varphi_k(x)\right]^2 d(x)=1 \tag{4.21}$$

para cualquier k entero.

Así, la familia de funciones ortogonales $1/\sqrt{2\pi}\ cos(px), 1/\sqrt{2\pi}\ sen(qx)$ (p, q= 1,2,3,...) está normalizada en todo intervalo de amplitud 2π. Cuando estamos ante la familia $cos\ (2\pi pt/T)$, $sen\ (2\pi qt/T)$, estas serán ortogonales en el intervalo ($-T/2$, $T/2$) de amplitud $T=2\pi/w$. Para normalizar dicha familia de funciones ortogonales tendremos que considerar funciones del tipo $(1/\sqrt{T})cos\ (2\pi pt/T)$, $(1/\sqrt{T})sen\ (2\pi qt/T)$. Esta familia de funciones constituye una familia de funciones ortogonales normalizadas, esto es:

$$\int_{-T/2}^{T/2} \frac{1}{T}\cos\left(\frac{2\pi pt}{T}\right) sen\left(\frac{2\pi qt}{T}\right)\ dt=0 \quad ; \quad \forall p\neq q \tag{4.22}$$

Teniendo en cuenta estas relaciones de ortogonalidad, para estimar los valores de a_k, partimos de la aproximación (4.17) y multiplicamos ambos lados de la igualdad por $1/T\ e^{-i\,2\pi q\,t/T}$:

$$\frac{1}{T} f_T(t)\cdot e^{-i2\pi qt/T}=\frac{1}{T}\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p\ e^{i(2\pi pt/T)} e^{-i2\pi qt/T} \tag{4.23}$$

integrando ambas partes de la igualdad (4.23) en el intervalo ($-T/2$,$T/2$) obtendremos:

$$\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{T} f_T(t)\cdot e^{-i2\pi qt/T}dt=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{T}\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p\ e^{i(2\pi pt/T)} e^{-i2\pi qt/T}dt=$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{1}{T}\ e^{i(2\pi pt/T)} e^{-i2\pi qt/T}\right)dt=$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p\int_{-T/2}^{T/2}\left(\frac{1}{T}\left[\cos(2\pi pt/T)+isen(2\pi pt/T)\right]\left[\cos(2\pi qt/T)-isen(2\pi qt/T)\right]\right)dt=$$

$$=a_q\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{T}\left[(\cos(2\pi qt/T))^2+(sen(2\pi qt/T))^2\right]dt=a_q$$

donde hemos hecho uso de la relación de ortogonalidad (4.20) para todo $p\neq q$. De esta forma, los coeficientes para cada armónico p =1,2,3,... puede obtenerse:

$$a_p=\int_{-T/2}^{T/2}\frac{1}{T} f_T(t)\cdot e^{-i2\pi pt/T}dt \tag{4.25}$$

Aplicación del análisis armónico a series temporales.

Antes de extender el análisis armónico para el caso de funciones aperiódicas, veamos como puede aplicarse el análisis armónico para el estudio

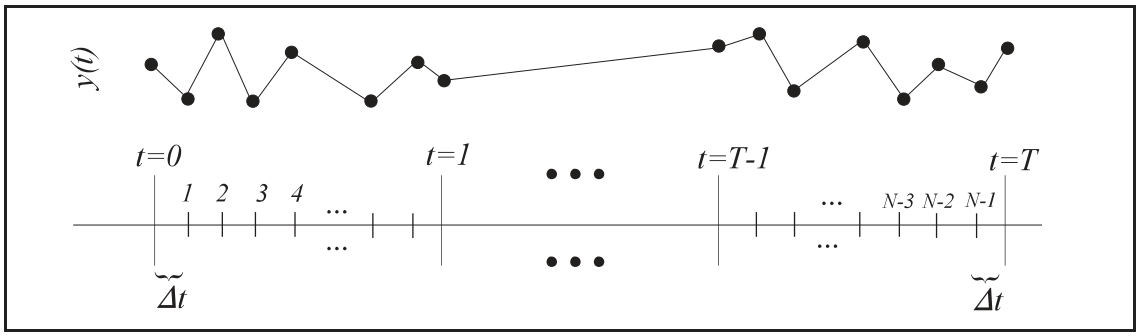


Figura 4. 13

de las frecuencias presentes en una serie temporal. Nótese que el análisis armónico, y también el espectral, se centra en funciones temporales sin tendencias. Así supondremos que la series analizadas no presentan tendencia, esto es, son estacionarios en media[15].

Para el análisis de una serie temporal en el domino de frecuencias supondremos que dicha serie, de naturaleza repetitiva o cíclica se puede representar mediante una función periódica, o si se quiere, que la serie constituye una señal proveniente de una función del tiempo. En este sentido, si se recuerda que la solución a un sistema dinámico es una función del tiempo, puede considerar se que la serie temporal es una señal observada procedente de la solución a un sistema dinámico aunque se desconozca su forma estructural concreta. Lo que trata de hacer el análisis armónico es aproximar la función del tiempo desconocida de la que procede la serie temporal mediante la suma de armónicos utilizando la aproximación por series trigonométricas de Fourier.

Supongamos que se tiene una serie temporal y_t de tamaño N en un rango temporal T, y estacionaria en media. Dicha serie puede considerarse como la muestra de un proceso donde las observaciones se obtienen a intervalos fijos de tiempo Δt: $\left\{ y_j \right\}_{j=1}^{N} = \left\{ y(t) \right\}_{t=0}^{T}$, esto es, $y_j = y(t) = y(j\Delta t)$, con $j=1, 2,..N$; $t=0, \Delta t, 2\cdot\Delta t, ..., T$ –figura 4.13–.

Dada esta serie temporal, podemos ajustarla utilizando la familia de series trigonométricas de Fourier suponiendo que la serie temporal proviene de una función periódica de periodo T o con frecuencia angular $w=2\pi/T$. De esta forma, dicha función periódica –en principio desconocida– se podrá aproximar por la suma de *infinitos* armónicos como:

$$f_T(t) = y(t) = A_0 + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cdot \cos(2\pi pt/T) + B_p \cdot sen(2\pi pt/T) \qquad (4.26)$$

[15] El supuesto sobre la estacionariedad en media implica que la serie temporal está libre de tendencia, por lo que a la hora de aplicarlo a las serie económicas deberemos asegurarnos previamente que las series son estacionarias en media (véase el próximo capítulo 8).

Ahora sólo restaría estimar los coeficientes A_p y B_p significativamente distintos de ceros utilizando las observaciones muestrales $\{y(t)\}_{t=0}^{T}$. Cuando el tamaño muestral N es infinito se podrían estimar todas las frecuencias pero con N finito esto no es posible, es decir, no podremos ajustar la serie con infinitos armónicos. El número máximo de parámetros A_p, B_p que podremos estimar vendrá dado por el tamaño finito muestral N. En particular, el número máximo de coeficientes que se pueden estimar será N –los grados de libertad de la estimación será cero–, por lo que el número de armónicos susceptibles de estimación será $N/2$. Es decir, la aproximación que podremos estimar para ajustar la serie temporal será:

$$f_T(t)=y(t)=A_0+\sum_{p=1}^{N/2} A_p\cdot\cos(2\pi pt/T)+B_p\cdot sen(2\pi pt/T) \tag{4.27}$$

siendo T el rango de la serie, el periodo de cada armónico $T_p = T/p$ y las frecuencias verdaderas de cada armónico p/T –con p=1,2,..., $N/2$–. Llamemos Δf al incremento de la frecuencia de uno a otro armónico, $\Delta f=1/T$, las frecuencias de cada uno de ellos será, por tanto, $f_1=1\cdot\Delta f$; $f_2=2\cdot\Delta f$; ... ;$f_{N/2}=f_{max}= N/2\cdot\Delta f=N/2\cdot 1/T$. Obsérvese que, como los datos están tomados a intervalos fijos de tiempo Δt en el intervalo T –rango de la serie– tendremos que $T=N\cdot\Delta t$, por lo que la frecuencia máxima detectable en la serie podrá escribirse como

$$f_{\max}=\frac{N}{2T}=\frac{N}{2N\Delta t}=\frac{1}{2\Delta t} \tag{4.28}$$

que es denominada frecuencia *Nyquist*. Esta frecuencia máxima proporciona el periodo más pequeño detectable en la serie temporal[16]:

$$T_{\min}=1/f_{\max}=2\Delta t \tag{4.29}$$

Para revelar cuál de los armónicos contribuye significativamente a explicar la evolución de la serie temporal, o alternativamente, qué frecuencias significativas se encuentran ocultas en la serie puede utilizarse la expresión (4.29) para estimar los coeficientes a_p correspondientes a cada armónico[17]:

$$a_p=\frac{1}{T}\sum_{j=1}^{N} y_j\, e^{\frac{-i2\pi pj}{N}} \quad ; \quad p=0,1,2,.....N \tag{4.30}$$

con:

$$a_0=\sum_{j=1}^{N} y_j \tag{4.31}$$

[16] Por otra parte, dado el rango de la serie temporal, el periodo máximo detectable en la serie será de $T/2$

[17] En la estimación de los coeficientes a_p con series temporales muestreadas en intervalos de tiempo finito se produce un *sesgo* derivado del denominado efecto *aliasing* que será considerado posteriormente en este mismo apartado. Además, para estar seguros de poder detectar el periodo fundamental presente en un proceso, T, a partir de una serie temporal el rango de la serie debe ser suficientemente amplio (>2T).

Análisis espectral: La transformada de Fourier y el espectro de potencias.

El análisis espectral trata de extender el análisis armónico a funciones del tiempo sin periodicidad simple, esto es, a funciones aperiódicas. Dicha extensión puede hacerse siguiendo los mismos pasos que en el análisis armónico suponiendo que la periodicidad de la función que queremos aproximar por la serie de infinitos armónicos tiende a infinito, $f_T(t)$ con $T \to \infty$. De esta forma, se llegaría a la misma ecuación (4.25) que proporciona la aportación de cada armónico a la explicación de cualquier función temporal con periodo T:

$$a_p = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cdot e^{-i2\pi pt/T}dt \tag{4.32}$$

Ahora bien teniendo en cuenta la anterior expresión (4.32), es fácil observar que en el caso de movimientos aperiódicos, la aportación de cada armónico sería no significativa:

$$\lim_{T\to\infty} a_p = 0 \tag{4.33}$$

Para evitar este resultado el análisis espectral se centra en la estimación del producto $T\cdot a_p$, que no se anula a medida que el periodo tiende a infinito:

$$\lim_{T\to\infty} a_p\cdot T = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cdot e^{-i2\pi pt/T}dt \neq 0 \tag{4.34}$$

Además teniendo en cuenta que la función temporal es aperiódica y que debe cumplirse que la frecuencia angular se incrementa de un armónico a otro en la cantidad $\Delta w = 1/T$, la aportación de cada frecuencia o armónico se podrá escribir como:

$$a_p\cdot T = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t)\cdot e^{-i2\pi(p\Delta w)t}dt \;=\; F(p\Delta w) \tag{4.35}$$

Si tenemos en cuenta que por (4.17), cualquier función periódica puede aproximarse por el desarrollo en serie de armónicos:

$$f_T(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p\; e^{i(2\pi pt/T)} = \frac{1}{T}\sum_{p=-\infty}^{\infty} T\cdot a_p\; e^{i2\pi t(p\Delta w)} \tag{4.36}$$

entonces, sustituyendo (4.35) en (4.36), tenemos que cualquier función temporal de periodo T podrá escribirse como:

$$f_T(t) = \Delta w \sum_{p=-\infty}^{\infty} F(p\Delta w)\; e^{i2\pi t(p\Delta w)} \tag{4.37}$$

por lo que cualquier función aperiódica $f(t)$, podrá aproximarse como[18]:

[18] Aquí utilizamos el hecho de que $\lim_{\Delta w\to 0}(p\Delta w) = w$ y $\lim_{\Delta w\to 0}\sum_p F(p\Delta w)\Delta w = \int F(w)dw$

$$f(t)=\lim_{T\to\infty} f_T(t)=\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\ e^{i2\pi tw}dw \tag{4.38}$$

A su vez los componentes de sus infinitos armónicos podrán escribirse a partir de (4.35):

$$F(w)=\lim_{\Delta w\to 0} F(p\Delta w)=\int_{-T/2=-\infty}^{T/2=\infty} f(t)\cdot e^{-i2\pi wt}dt \tag{4.39}$$

expresión ésta que es conocida como la *transformada de Fourier*. Las ecuaciones (4.38) y (4.39) –el denominado par de Fourier– pueden entenderse entonces como dos representaciones distintas de un mismo proceso. La expresión (4.38) describe el proceso en el dominio temporal, proporcionando el valor del proceso como una función del tiempo. Por otra parte, la expresión (4.39) –la transformada de Fourier de la función *f(t)*– especifica el mismo proceso en el dominio de frecuencias, proporcionando la amplitud y la fase del proceso como una función de las frecuencias angulares *w*.

A partir de la transformada de Fourier de una función periódica o aperiódica *f(t)* puede calcularse *el espectro de potencias –power spectrum–* $P(w)$ definido como el cuadrado del módulo de su coeficiente de Fourier, esto es:

$$P(w)=|F(w)|^2 \tag{4.40}$$

siendo *F(w)* la transformada de Fourier del proceso, es decir, la aportación de la frecuencia *w* a la explicación de la función temporal *f(t)*. El nombre de potencia está asociado a que esta cantidad proporciona una medida de la cantidad de energía por unidad de tiempo (Grau, 1996, p.78). Más concretamente, por su definición, el espectro de potencias proporciona para cada frecuencia w_p una cantidad que es proporcional al cuadrado del rango R_p asociado al armónico con frecuencia w_p utilizado para la aproximación de la función *f(t)*. Por tanto, el espectro de frecuencias proporciona, esencialmente, información sobre la significatividad de cada uno de los armónicos con los que se aproxima la función temporal *f(t)* utilizando el desarrollo en series de Fourier.

Estimación del espectro de potencias con muestras finitas: el periodograma.

De manera análoga al análisis armónico, el análisis espectral aplicado a las series temporales se utiliza para detectar frecuencias o periodicidades ocultas en la serie. Sin embargo, al tratar ahora con series aperiódicas, en lugar de estimar los coeficientes a_p asociados a cada uno de los armónicos del desarrollo en series de Fourier con el que se aproxima la serie que –como ya se ha dicho anteriormente (4.33)– tienden a anularse, el análisis en el dominio de frecuencias de una serie temporal aperiódica se centra en la estimación del

espectro de potencias *P(w)*. La interpretación de este espectro de potencias es, sin embargo, esencialmente la misma que la de los coeficientes a_p del análisis armónico. Concretamente, el espectro de frecuencias es utilizado en el análisis espectral de series aperiódicas para estimar la proporción de la varianza total de la serie temporal que se debe asignar a cada frecuencia o a cada armónico del desarrollo en series de Fourier.

La estimación del espectro de frecuencias a partir de una serie temporal puede realizarse utilizando las expresiones (4.39) y (4.40). Así, dada una serie temporal de tamaño *N* procedente de un proceso periódico o aperiódico muestreado a intervalos fijos de tiempo Δt: $\{y_j\}_{j=1}^{N}=\{y(t)\}_{t=0}^{T}$, esto es, $y_j=y(t)=y(j\Delta t)$, con $j=1, 2,..N$; $t=0, \Delta t, 2\cdot\Delta t , ..., T$, podemos definir la *frecuencia Nyquist* (4.28) como:

$$f_{\max}=\frac{N}{2T}=\frac{N}{2N\Delta t}=\frac{1}{2\Delta t} \tag{4.41}$$

que es la máxima frecuencia verdadera detectable a partir de una serie temporal. Así, si nos limitamos a las frecuencias en el intervalo $(-f_{max}, f_{max})$, $f_p=p/N\Delta t$, con $p= -N/2, ..., N/2$ podremos estimar el espectro de potencias de la serie aproximando la transformada de Fourier (4.39) para dicho intervalo de la siguiente forma:

$$F_p=F(w_p)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot e^{-i2\pi t w_p}dt \simeq \sum_{j=1}^{N} y_j\cdot e^{-i2\pi j\Delta t w_p}=\sum_{j=1}^{N} y_j\cdot e^{-i2\pi jp/N} \tag{4.42}$$

expresión esta última análoga a (4.30) y (4.31) y denominada *transformada discreta de Fourier*. A partir de (4.42) podemos estimar el espectro de potencias de la serie temporal, esto es, su periodograma, de la siguiente forma (Medio, 1992, pp.111-112):

$$P(w_0)=P(0)=1/N^2\ |F_0|^2$$

$$P(w_p)=\frac{1}{N^2}\left(\ |F_p|^2+|F_{N-p}|^2\ \right)\ ;\ p=1,2,...,(N/2)-1 \tag{4.43}$$

$$P(w_{max})=P(w_{N/2})=1/N^2\ \ |F_{N/2}|^2$$

donde w_p está definida sólo para frecuencias cero o positivas, esto es, $w_p= p/(N\Delta t)= w_{max}\ 2p/N$ ($p=0, 1, ..., N/2$) y donde $P(w_p)$ en (4.43) proporciona el espectro de potencias para las $N/2 +1$ frecuencias. El gráfico del espectro de potencias $P(w_p)$ en función de sus frecuencias asociadas $w_p=p/(N\Delta t)$ se denomina espectro de frecuencias y la gráfica del espectro en función de los periodos $T_p=2\pi/w_p$ será el periodograma de la serie temporal.

La estimación del espectro de potencias a partir de una serie temporal se enfrenta a distintos problemas que pueden generar sesgos y la inconsistencia del periodograma estimado (véase Medio, 1992, pp. 112-114). Un primer problema es el conocido como *aliasing*, y se debe a que no se pueden estimar frecuencias mayores a la frecuencias Nyquist, por lo que si dichas frecuencias

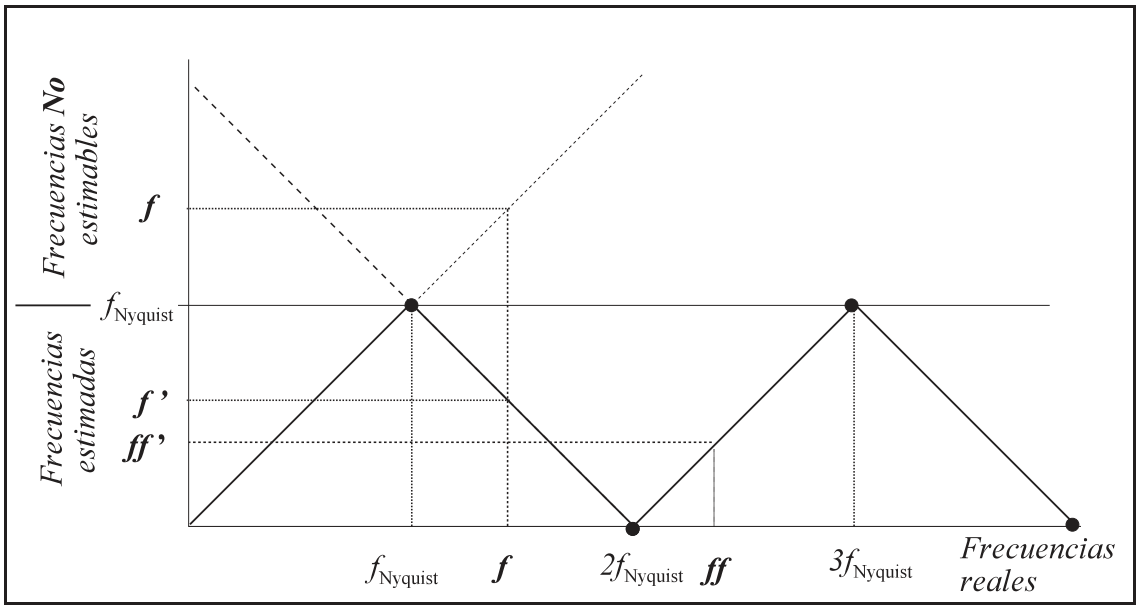


Figura 4. 14

están presentes en el proceso generador de la serie aunque no sean observables, rebotarán hacia atrás incrementando el valor estimado del periodograma de las frecuencias menores. Así, dada una frecuencia f mayor que la frecuencia Nyquist f_{max} –la máxima frecuencia detectable– con $h \cdot f_{max} < f < (h+1) \cdot f_{max}$, para h=1,2,3,4,..., el periodograma correspondiente a dicha frecuencia se mostrará en la frecuencia $f' < f_{Nyquist}$, que vendrá dada por –figura 4.14–:

$$f' = \begin{cases} (h+1) \cdot f_{Nyquist} - f & si\ h\ impar \\ -h \cdot f_{Nyquist} + f & si\ h\ es\ par \end{cases} \qquad (4.44)$$

El efecto *aliasing* introduce, por tanto, un sesgo al alza en la estimación del periodograma a partir de la serie temporal. Para intentar corregir esta sobre estimación habría que intentar que la frecuencia Nyquist fuese la mayor posible, y para ello habría que intentar que el intervalo temporal de muestreo de la serie Δt sea el menor posible –este efecto *aliasing*, sólo se elimina por completo cuando $\Delta t = 0$–.

Un segundo problema al que nos enfrentamos en la estimación del periodograma a partir de series muestreadas en rangos temporales de tiempo finito T –figura 4.13– es el conocido como efecto *leakage* que también introduce un sesgo en la estimación del periodograma. En este caso el problema procede del hecho de que sólo se puede estimar el potencial para frecuencias separadas por una cantidad fija $\Delta f = 1/T$, por lo que el potencial de las frecuencias intermedias no podrá ser estimado directamente, revertiéndose hacia el de las frecuencias vecinas estimadas. De nuevo se produce, por tanto, un sesgo en la estimación del periodograma ya que el valor del potencial de las frecuencias estimadas es una media del de todas aquellas frecuencias intermedias que no han podido ser estimadas. Para evitar en la medida de lo

posible estos sesgos en la estimación del periodograma se utilizan ventanas –*windows*– o ponderaciones que variarán dependiendo del método utilizado. Entre estas ventanas la más utilizada es la ventana de Hanning, que usa las siguientes ponderaciones (Medio, 1992, p.113):

$$\lambda_j = \frac{1}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{2\pi j}{N-1}\right)\right] \tag{4.45}$$

Cuando se utilizan ventanas para evitar el efecto *leakage*, el periodograma se construye ponderando cada observación de la serie por (4.45), esto es, calculando la transformada discreta de Fourier como:

$$F'_p = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \cdot y_j \cdot e^{-i2\pi jp/N} \tag{4.46}$$

y el correlograma como (Grau, 1996, p.100):

$$\begin{gathered} P'(w_0) = P'(0) = 1/W_{ss}\,|F'_0|^2 \\ P'(w_p) = \frac{1}{W_{ss}}\left(\,|F'_p|^2 + |F'_{N-p}|^2\,\right);\ p = 1,2,\ldots,(N/2)-1 \\ P'(w_{max}) = P'(w_{N/2}) = 1/W_{ss}\,|F'_{N/2}|^2 \end{gathered} \tag{4.47}$$

con

$$W_{ss} = N\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2$$

Un último problema que comentaremos aquí cuando se estima el espectro de frecuencias a partir de una serie temporal es que dicha estimación es inconsistente (Medio, 1992, pp. 113 y 114). El periodograma es un estimador, que se dirá consistente cuando su sesgo y su varianza tiendan a cero cuando el tamaño muestral de la serie (N) tienda a infinito. Ahora bien, en primer lugar, si el intervalo del muestreo de la serie (Δt) no varía, aunque aumentemos el rango temporal de la serie (T), y por tanto su tamaño (N), tendremos que la frecuencia Nyquist o mínimo periodo detectable ($1/2\Delta t$) seguirá siendo el mismo, por lo que el efecto *aliasing* seguirá sesgando al igual que antes las estimaciones. Por otra parte, si se mantiene el rango temporal de la serie (T) a la vez que se reduce el intervalo de muestreo (Δt), el tamaño de la serie también aumentará (N) aunque en este caso permanacerá el sesgo introducido en la estimación del periodograma por el efecto *leakage*. En ninguno de los dos casos, por tanto, el aumento del tamaño muestral reducirá la varianza del poriodograma estimado, por lo que éste no puede considerarse consistente. Para reducir la varianza de la estimación suelen utilizarse métodos de segmentación con solapamiento –*overlapping*– de la muestra. Estos métodos de segmentación consisten en, una vez que se ha elegido una ventana, agrupar los datos de la serie en K segmentos solapados de tamaño M, para posteriormente aplicar la transformada de Fourier a cada grupo promediando los K periodogramas resultantes para los M valores de la frecuencia entre 0 y *fmax*.

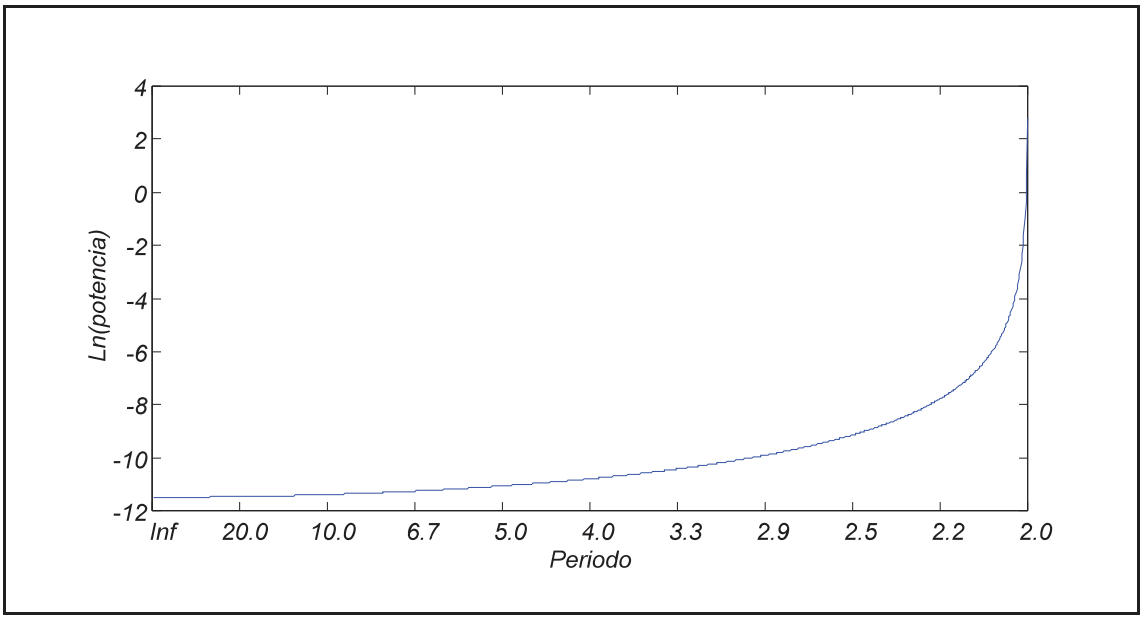


Figura 4. 15 Periodograma aplicación logística μ=3.2. Ciclo límite periodo 2

El periodograma y la detección del caos.

Una vez que hemos estimado el periodograma de una serie temporal, éste puede ser utilizado para extraer información sobre la periodicidad o aperiodicidad del proceso generador de la serie. En el periodograma se refleja la contribución de cada frecuencia o periodo en la explicación de la varianza del movimiento total de la serie temporal. Así, si no existe ningún componente periódico en el proceso generador de la serie temporal analizada, el periodograma será una curva monótona suave. Por el contrario la existencia, para alguna frecuencia, de un pico en el periodograma, esto es, de algún valor del potencial significativamente más alto que el resto, es señal de que existe alguna frecuencia o periodo fundamental en la serie el proceso.

Cuando la serie temporal procede de la solución de un sistema dinámico, la interpretación de los picos del periodograma se puede resumir de la siguiente forma (véase Lorenz, 1993, pp. 203-204)[19]:

- Cuando el sistema dinámico está formulado en tiempo discreto, un periodograma plano –una recta–, estaría reflejando ausencia de oscilaciones, es decir, un punto fijo. Cuando en el periodograma aparece un único pico estaremos ante órbitas cíclicas regulares de periodo dos o tres –figuras 4.15 y 4.16–. La existencia de un periodo 4 –doblado del periodo– se reflejaría en el periodograma por la aparición de dos nuevos picos –figura 4.17– uno a la izquierda y otro a la derecha –no detectable– del pico

[19] Los periodogramas que mostramos en esta sección han estimados utilizando un algoritmo que permite agilizar el cálculo de la transformada de Fourier –Fast Fourier Transform– (véase Grau, 1996 pp. 86-90) programado en Matlab. En todos se ha utilizado la ventana de Hanning. La segmentación, en los casos en los que ha sido necesaria su utilización ha sido aplicada utilizando grupos formados por 256 elementos.

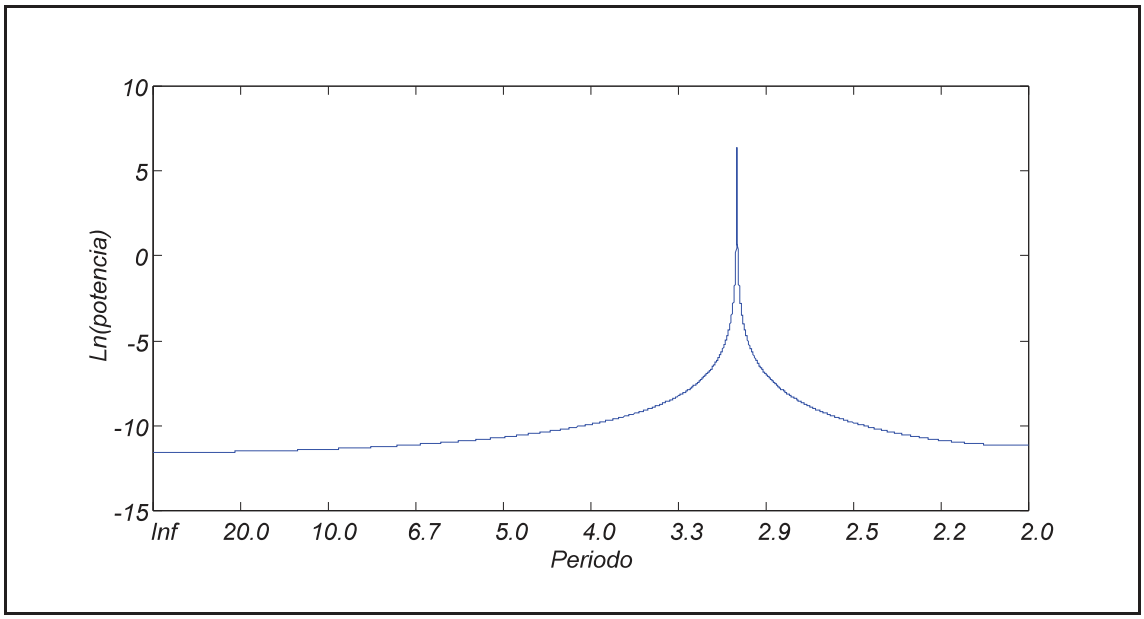


Figura 4. 16. Periodograma aplicación logística μ=3.85. Ciclo límite periodo 3

de periodo dos. A su vez la bifurcación del periodo 4 daría origen a 7 picos en el periodograma –sólo detectables 3 de ellos– que se corresponderían con un ciclo periodo ocho –figura 4.18–. Este proceso de doblado de picos en el periodograma continuaría repitiéndose sucesivamente a medida que se fueran detectando ciclos de periodo doble al anterior.

- Cuando el sistema dinámico está formulado en tiempo continuo, un único pico en el periodograma es equivalente a la existencia de una órbita cerrada, esto es, un ciclo límite cuyo periodo será el asociado al pico del espectro de potencias –figuras 4.19 y 4.20–. Cuando son varios los picos significativos, el periodograma estará indicando la presencia de movimientos cuasi-periódicos toroidales con periodos independientes superpuestos, correspondiendo el mayor pico a la frecuencia dominante–figura 4.21–.

- En el caso de que aparezcan un continuo de picos, el periodograma se dice que refleja un *ruido de banda ancha –broad band noise–*, siendo entonces el proceso generador de la serie un proceso aperiódico, esto es o puramente aleatorio o caótico determinista –tanto en tiempo continuo o discreto–.

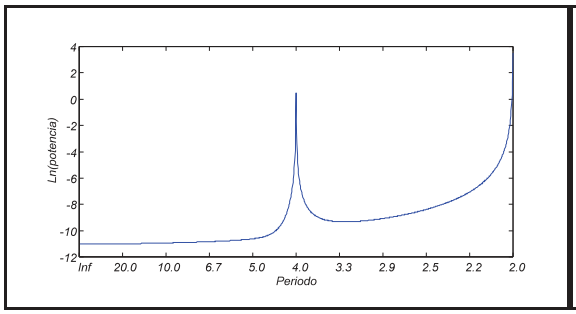


Figura 4. 17

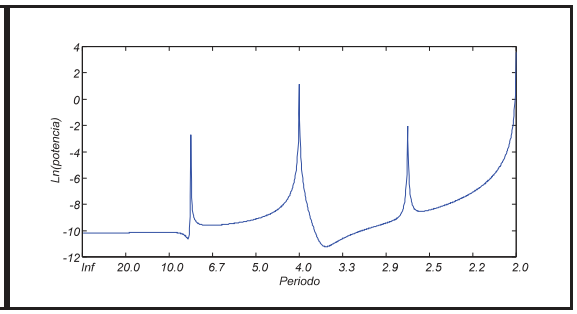


Figura 4. 18

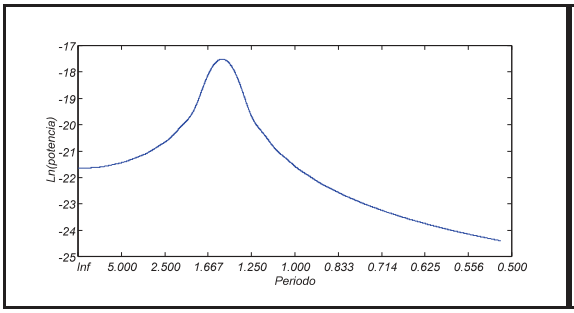


Figura 4. 19. Ciclo límite periodo 1.5

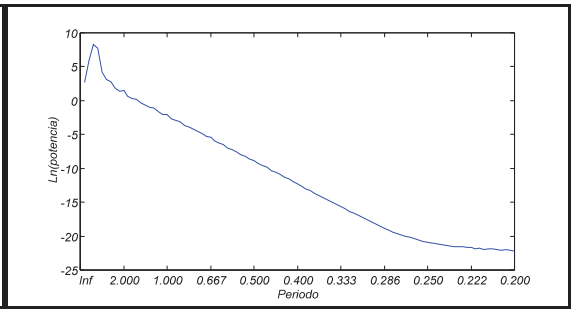


Figura 4. 20. Ciclo límite periodo 8 procedente del modelo de Rossler

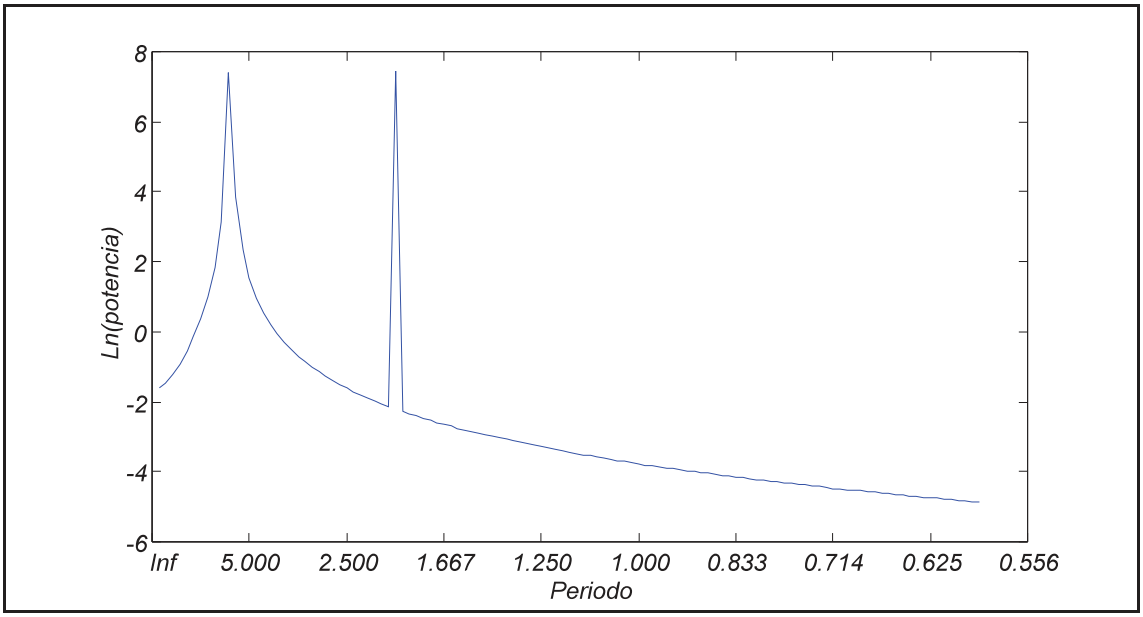


Figura 4. 21. Movimiento cuasi-periódico (2.24)

En tiempo continuo, el espectro de potencias de un atractor extraño podrá tener picos agudos pero coexistiendo con bandas anchas –figuras 4.22 y 4.23–, ya que precisamente la característica del periodograma de un atractor es que a medida que éste va adquiriendo mayor complejidad, su espectro de potencias contiene picos cada vez menos pronunciados y bandas cada vez más anchas (Fernández Rodríguez, 1995, p. 24).

Esta interpretación del periodograma permite utilizar el análisis espectral para discriminar ante señales o series procedentes de procesos de dinámica simple –ciclos límite o toros cuasi-periódicos cuyos periodogramas presentarán pocos picos–, de los procesos de dinámica compleja –en los que el periodograma será una curva o ruido de banda ancha–. En este último caso, el proceso generador de los movimientos aperiodicos e irregulares podrá tener carácter puramente aleatorio o ser del tipo caótico determinista. Así, cuando el proceso subyacente que rige la dinámica de la serie temporal observada es desconocido, el análisis espectral podrá ser utilizado para rechazar la hipótesis de que dicho proceso es de dinámica simple, pero no proporciona ninguna señal concluyente que permita asegurar que la dinámica compleja revelada por el

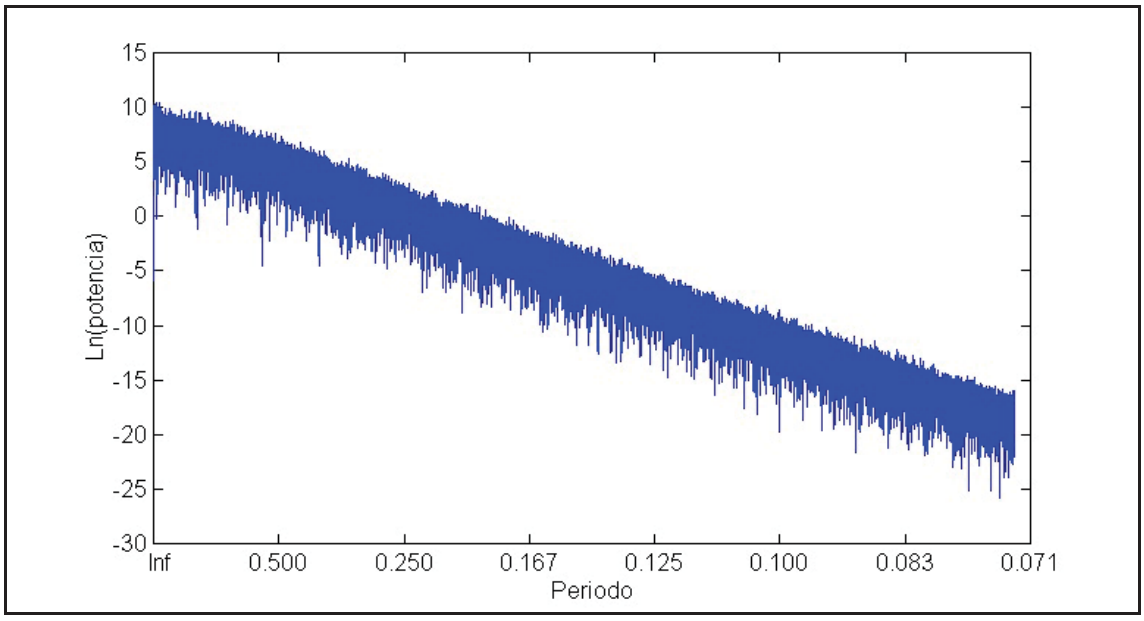


Figura 4. 22. Periodograma del Atractor de Lorenz

análisis espectral procede de procesos puramente aleatorias o si por el contrario existe, al menos en parte, cierto componente caótico determinista.

Para mostrar la dificultad que presenta la detección del caos a partir del análisis espectral mostramos en las figuras 4.24 a 4.26 el periodograma de los sistemas en tiempo discreto de la aplicación logística, Hénon y Mackey-Glass en régimen caótico. En los tres periodogramas se observa la figura característica del ruido de banda ancha junto a un pico en el origen del gráfico, mostrando el carácter aperiódico de estos modelos.

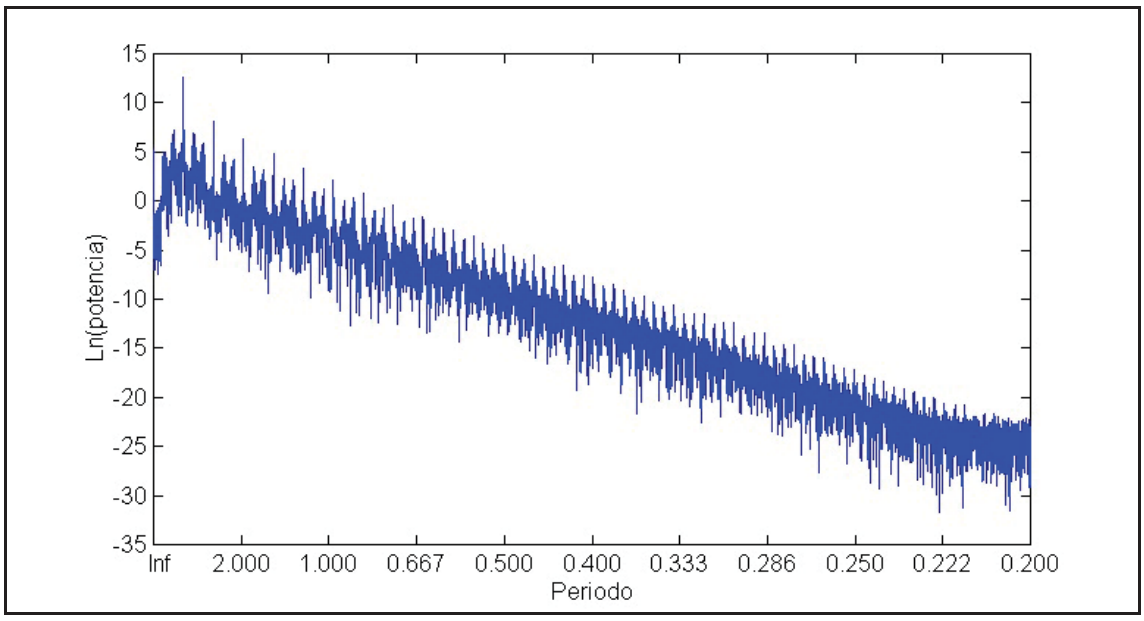


Figura 4. 23.Periodograma del atractor extraño de Rossler.

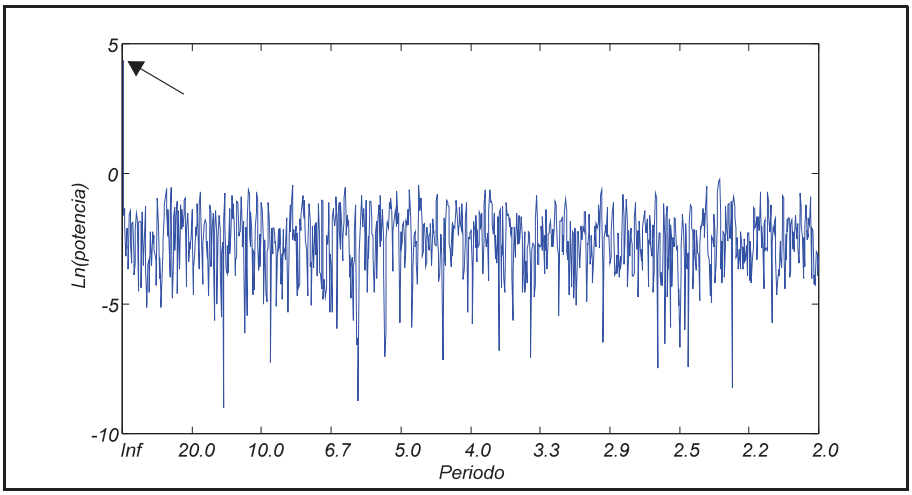


Figura 4. 24. Periodograma aplicación logística. Caos

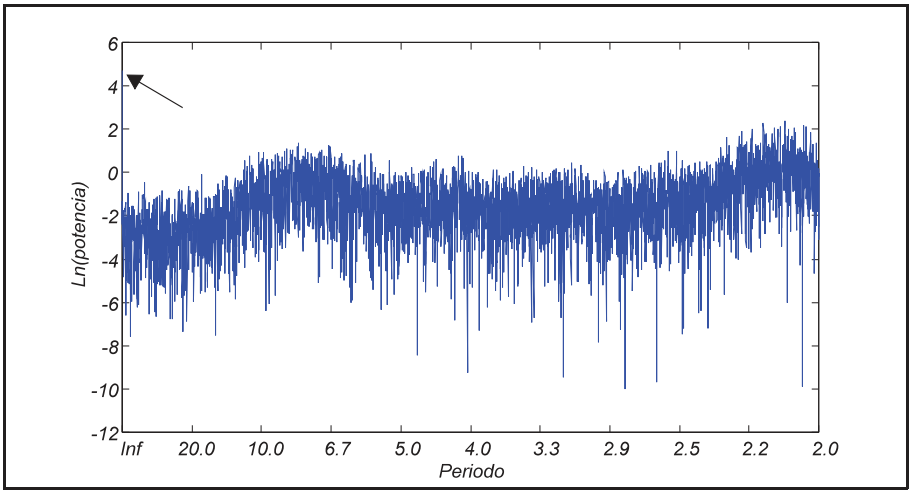


Figura 4. 25. Periodograma atractor de Henon. Caos

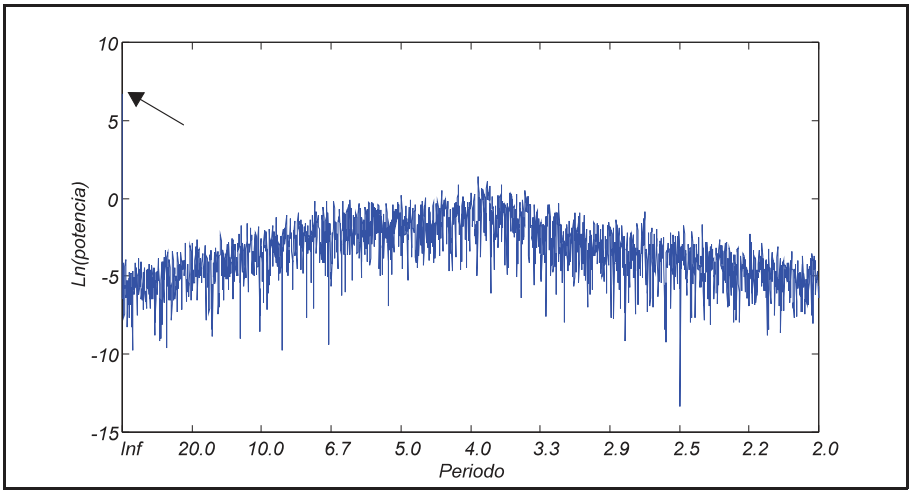


Figura 4. 26. Modelo Mackey-Glass. Caos

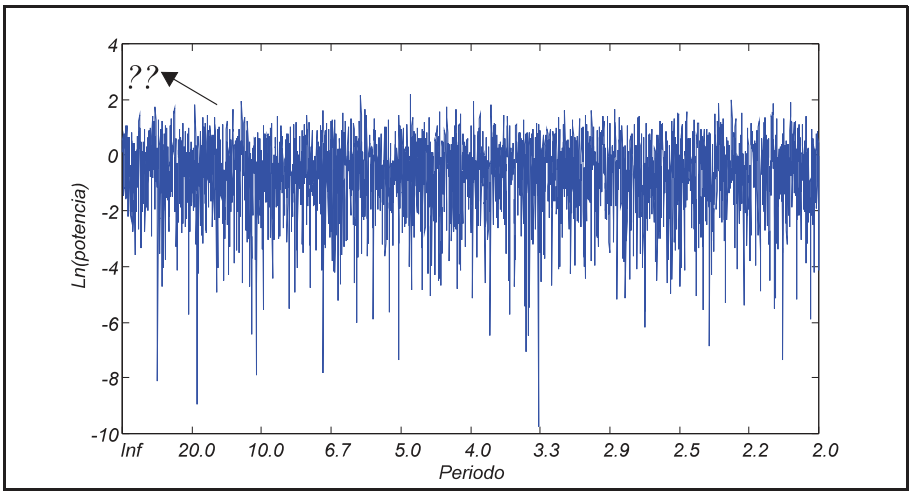


Figura 4. 27. Periodograma ruido aleatorio. IID N(0,1)

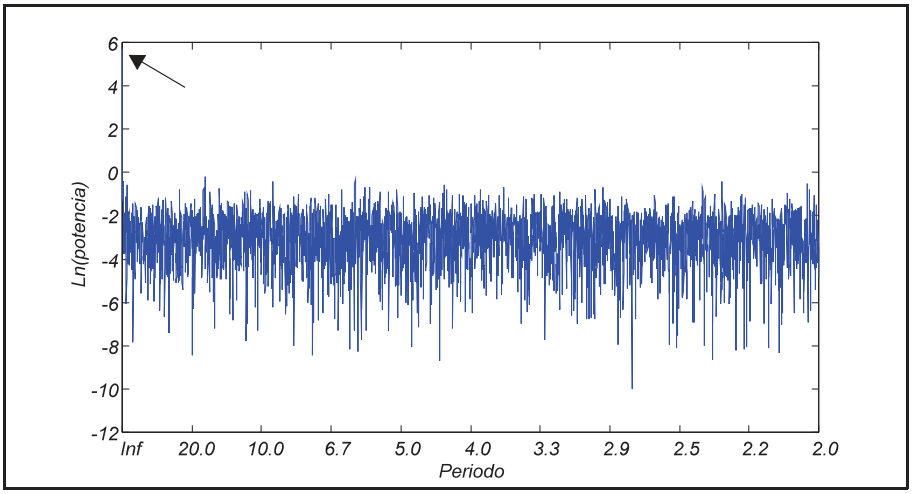


Figura 4. 28. Periodograma ruido aleatorio. IID U[0,1]

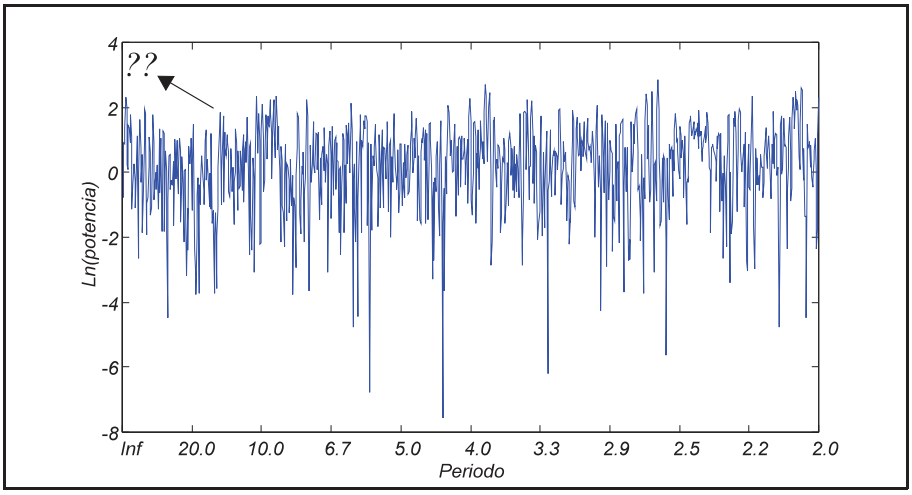


Figura 4. 29. Periodograma ruido aleatorio. Proceso Garch.

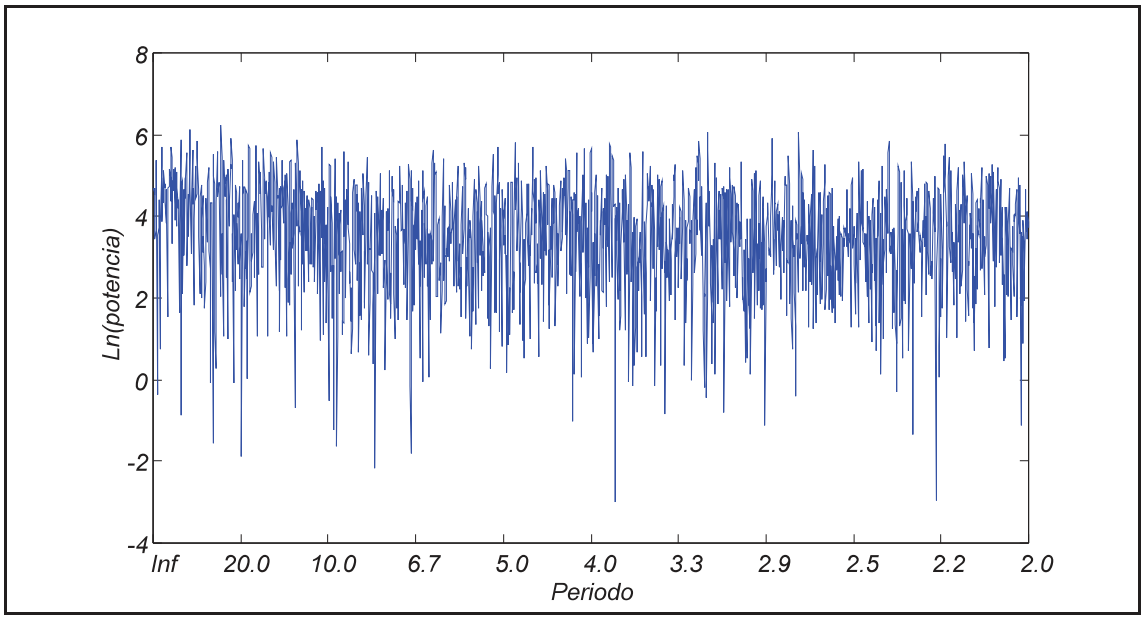


Figura 4. 30. Ruido Caótico. Atractor de Lorenz discretizado Δt=1

Por otra parte en las figuras 4.27 a 4.29 se muestra el periodograma de tres señales puramente aleatorias –IID N(0,1), IID Uniforme[0,1] y un proceso GARCH–. La apariencia visual del periodograma de estas tres señales es parecida a la mostrada por los ruidos caóticos deterministas –salvo el primer pico en el origen que no aparece ni en la normal ni el el proceso GARCH–.

Esta similitud entre el periodograma de ruidos puramente aleatorios y los caóticos en tiempo discreto también aparece cuando se discretizan los sistemas dinámicos en tiempo continuo, es decir, cuando estos son observados a intervalos fijos Δ*t*=1 –figuras 4.30 y 4.31–.

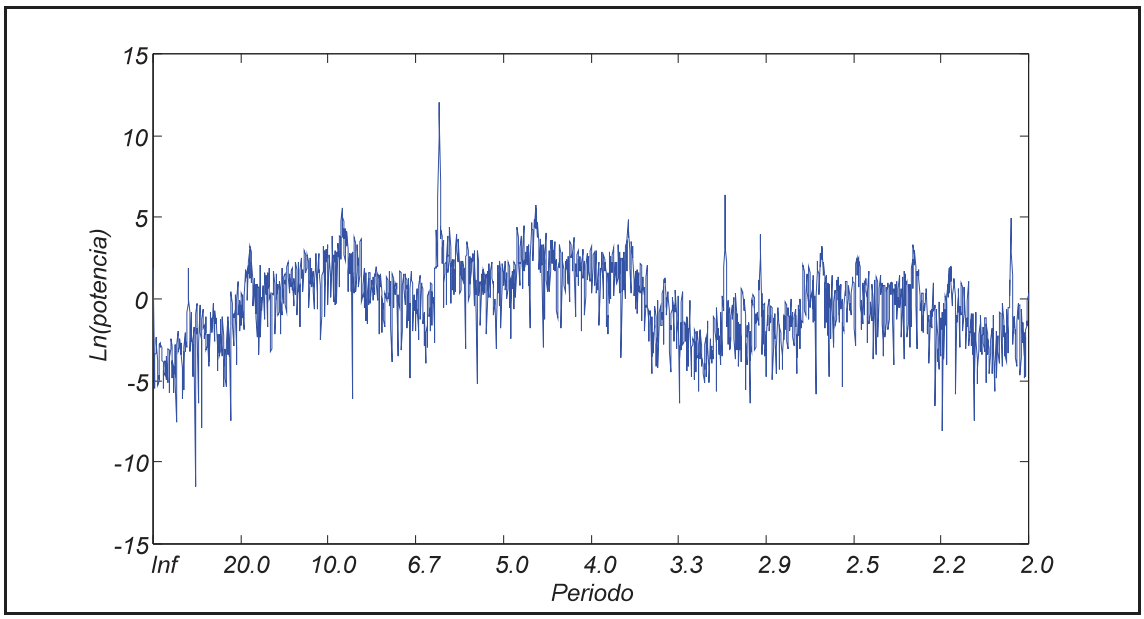


Figura 4. 31. Ruido Caótico. Atractor de Rössler discretizado Δt=1

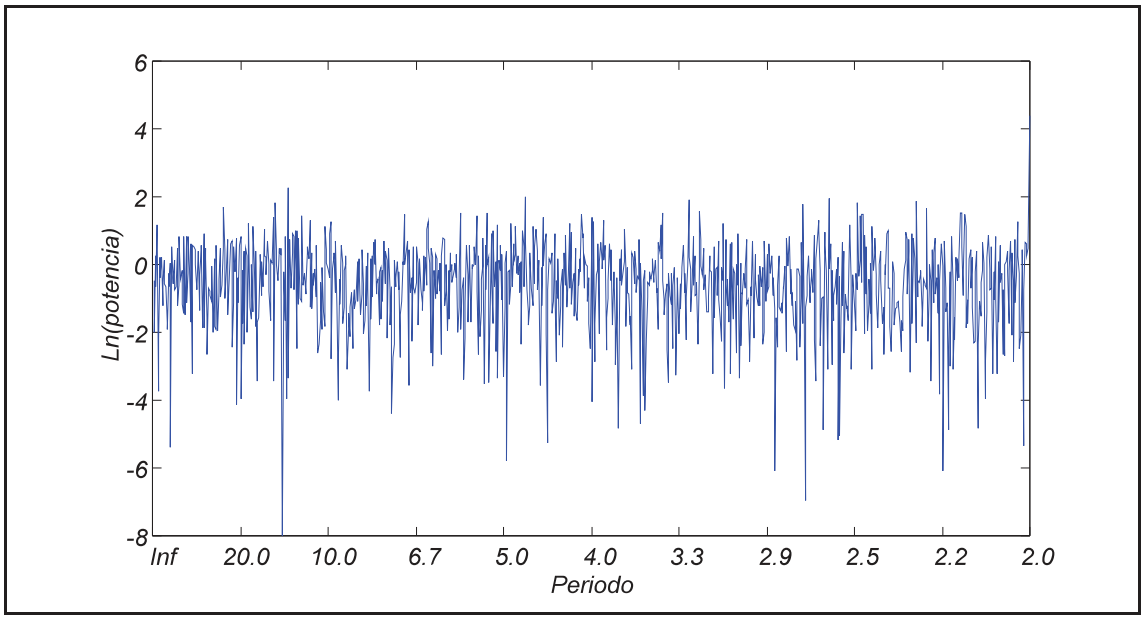


Figura 4. 32. Periodograma serie y(t)*=y(t)+u(t); y(t): logística μ=3.56 –periodo 8–; u(t)~IID N(0,1).

Podemos concluir, por tanto, que el análisis espectral resulta útil para encontrar comportamientos de dinámica o periodicidad simple, aunque resulta poco concluyente para discriminar entre comportamientos caóticos frente a otros puramente aleatorios –o ciertos comportamientos cuasiperiódicos de elevada dimensión–. Podríamos añadir aquí que incluso en algunos casos donde series de dinámica simple perturbadas con algún tipo de ruido puramente aleatorio, el análisis espectral tampoco es capaz de detectar la dinámica determinista subyacente en la serie –figuras 4.32 y 4.33–. Todo ello, nos apunta a la necesidad de completar el análisis espectral con otro tipo de técnicas para la detección de comportamientos caóticos.

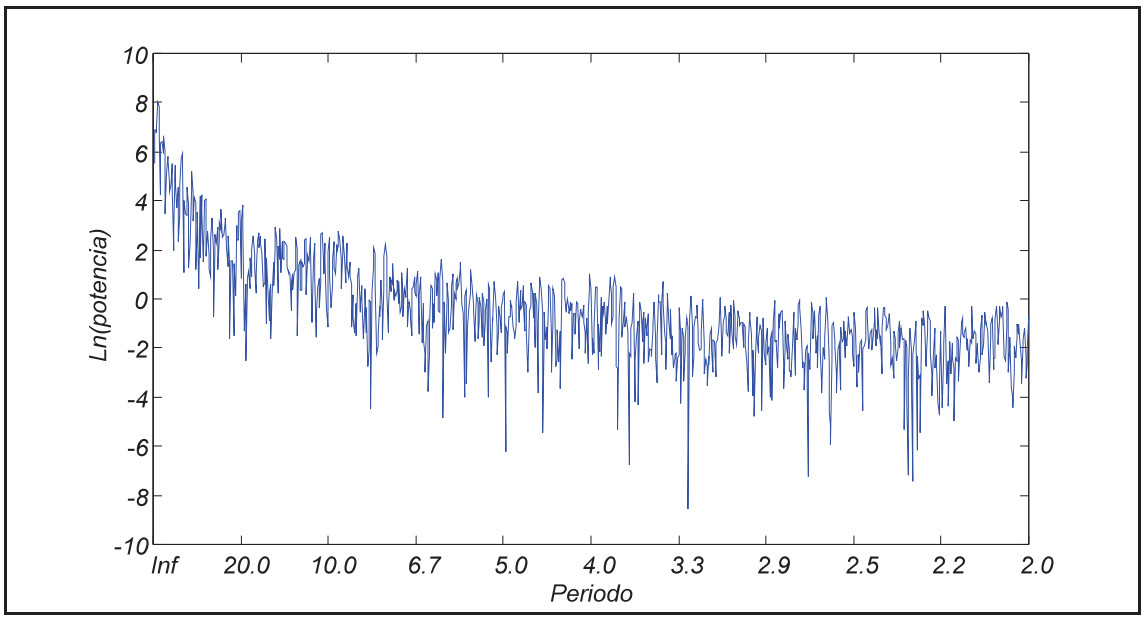


Figura 4. 33. Periodograma proceso ARMA.

Esta es precisamente la conclusión que alcanzábamos en el apartado anterior cuando comentamos la capacidad del correlograma para detectar la presencia de comportamientos caóticos. De hecho, estas técnicas, el correlograma y el periodograma aplicadas sobre el dominio temporal y el dominio de frecuencias respectivamente, no son en absoluto independientes, sino que están relacionadas por el teorema de Wiener-Khintchine según las siguientes expresiones[20]:

$$P(w) \propto \int C(\tau)\cos 2\pi\tau \; dt \qquad C(\tau) \propto \int P(w)\cos 2\pi w \; dw \tag{4.49}$$

O en términos discretos:

$$P(w) \propto \sum_{p=1}^{N} C(\tau) e^{-i2\pi\tau p/N} \qquad C(\tau) \propto \sum_{p=1}^{N} P(w) e^{-i2\pi p w/N} \tag{4.50}$$

donde $P(w)$ y $C(\tau)$ son el espectro de potencias y la función de autocorrelación temporal respectivamente. Es decir, tanto el periodograma como el correlograma estimado a partir de una serie temporal proporcionan esencialmente la misma información –cuando una serie presenta algún tipo de periodo simple T tras el cual se repiten sus valores, el periodograma mostrará un pico en dicho periodo y el correlograma presentará un coeficiente de autocorrelación temporal significativo para precisamente en el retardo T–.

Para complementar tanto al correlograma como al periodograma vamos a introducir en el siguiente apartado el conocido como análisis R/S, con el que también es posible detectar autocorrelación o dependencias temporales y periodicidades ocultas en una serie temporal –tengan un origen lineal o no lineal–.

4.5.- El Exponente de Hurst, Movimientos Brownianos y el Análisis R/S.

Los test presentados hasta ahora para detectar comportamientos caóticos a partir de una serie temporal -el análisis de su evolución y función de autocorrelación en el dominio temporal y el análisis de su espectro en el espacio o dominio de frecuencias-, no resultan siempre suficientes para poder discriminar entre ruidos caóticos de baja dimensión y ruidos puramente

[20] Este teorema hace uso de las expresiones (4.38) y (4.39) y de la definición de Convolución – $f*g=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t-\tau)d\tau$ –y correlación – $corr(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t+\tau)g(\tau)d\tau$ – de dos funciones temporales (Alcaide y Álvarez,1992 pp486-487 y Solé y Manrubia, 1996, p235). Para cómo utilizar del correlograma para estimar el periodograma véase Hamilton (1994, pp. 152-173).

estocásticos o de elevada dimensión (Brock 1986, p.169). Para detectar comportamientos caóticos es necesario, por tanto, utilizar otros test o análisis complementarios a los anteriores. La estimación del exponente de Hurst a partir del análisis R/S, constituye uno de esos test complementarios.

El exponente de Hurst es una medida de la *predicibilidad* o *memoria* presente en una serie temporal que permite discriminar entre procesos generadores puramente estocásticos del tipo ruido blanco, frente a otros procesos, deterministas o estocásticos, que generan ruidos *coloreados* distintos al blanco -ruido negro y rosa-.

H.E. Hurst fue un hidrólogo inglés que dedicó gran parte de su vida a estudiar el río Nilo. Entre otras cuestiones, trató de determinar cuál debería ser la capacidad de depósito o de almacenamiento de agua apropiada para enfrentarse a las subidas y bajadas en el caudal del río. Su preocupación máxima era la de construir una presa que permitiese el abastecimiento de agua en todo momento, es decir, no sólo ante el caso de que sobreviniera un año seco sino también ante la posibilidad de que se sucedieran toda una serie de años secos seguidos. Es por ello que estaba interesado en saber si los incrementos del caudal de un año para otro eran independientes -más concretamente un ruido blanco-, o si por el contrario existía cierta persistencia o memoria temporal en las variaciones del caudal. En este último caso, para asegurarse el abastecimiento de agua, la capacidad de la presa tendría que ser mayor que en el caso en que las variaciones de un año a otro fuesen independientes.

Así, Hurst (1951 y 1955) estudio las subidas y bajadas del Nilo con un método de análisis de su propia invención para tratar de estimar la posible recurrencia en las variaciones de su caudal, que en palabras de Mandelbrot (1997, p. 554) , podría haberse calificado de estrecho de miras y *ad-hoc*, pero que en realidad ha resultado eminentemente intrínseco, ya que está relacionado con las propiedades escalantes de los *movimientos Brownianos*.

Movimientos Brownianos y Curvas Fractales Aleatorias

Antes de exponer el método de estimación del exponente de Hurst y cómo éste puede ayudar a la detección de comportamientos caóticos, y debido precisamente a la relación entre dicho exponente y los molimientos brownianos vamos a reseñar cuales son las propiedades básicas de estos procesos. Comenzaremos con los movimientos brownianos ordinarios para analizar posteriormente como éstos pueden generalizarse dando lugar a los denominados movimientos brownianos fraccionales.

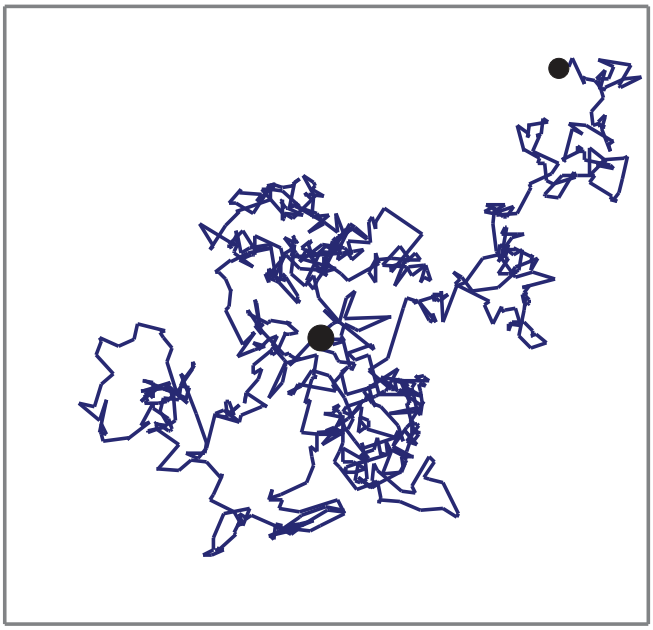


Figura 4. 34 Simulación del movimiento browniano ordinario bidimensional.

Movimientos Brownianos ordinarios: El Ruido Blanco

El *movimiento browniano ordinario* tiene sus orígenes en el estudio del movimiento errático y desordenado de pequeñas partículas sólidas suspendidas en un líquido[21]. Su nombre lo recibe del botánico británico Robert Brown, quién en 1828 dio una explicación física al movimiento de una partícula de polen en suspensión acuosa, esto es, antes de hundirse[22]. Dicha explicación se fundamenta en la influencia que ejercen las colisiones, muy suaves, de la partícula de polen con las moléculas del entorno. Estas colisiones son las que rigen el desplazamiento o movimiento de la partícula en cada momento, y determinan en última instancia que el movimiento agregado de la misma se manifieste desordenado y errático –figura 4.34[23]–.

El movimiento browniano ordinario quedó perfectamente sistematizado cuando, en 1923, Norbert Weiner formuló un modelo geométrico no diferenciable y aleatorio para describir y analizar con rigor el movimiento de

[21] Sobre el Movimiento Browniano véase Mandelbrot (1997, p.329-363) y Peitgen, Jürgens y Saupe (1993, pp. 475-496). Como ya se ha comentado, aquí nos limitamos a repasar algunas de sus características fundamentales a modo de introducción y con el propósito de destacar la importancia de esta clase de procesos estocásticos para el análisis de series caóticas.

[22] Hasta entonces se pensaba que dicho movimiento errático y desordenado debía tener una explicación puramente biológica –relacionada con las propiedades intrínsecas del polen–.

[23] Esta simulación se ha realizado suponiendo que la *longitud* del desplazamiento de la partícula en cada instante sigue una distribución $N(0,1)$, mientras que el *ángulo* de desplazamiento sigue una uniforme$[0,\pi]$, ambas independientes de los valores pasados.

una partícula sujeta a un gran número de shocks moleculares en espacios n-dimensionales[24]. Este modelo fue aplicado posteriormente, con bastante éxito, a la descripción de toda una serie fenómenos y movimientos erráticos que han pasado a denominarse *procesos de Weiner o movimientos brownianos ordinarios*[25].

El movimiento browniano ordinario más sencillo es el que se produce en espacios 1-dimensionales en los que una partícula puede desplazarse al azar a derecha o izquierda con igual probabilidad. Este movimiento browniano puede representarse a través de un *paseo o camino aleatorio gausiano sin deriva –random walk–*[26]:

$$x(t)=x(t-1)+u(t) \;\; ; \;\; u(t)\sim IID\ N(0,\sigma) \tag{4.51}$$

Es decir, un proceso estocástico tal que el desplazamiento o movimiento de la variable aleatoria *x(t)* constituye un *ruido blanco*, esto es, una secesión de variables aleatorias *u(t)* con distribución Normal, esperanza cero, varianza finita y constante para todo *t* y que además están incorrelacionadas entre sí[27]. De esta manera, el comportamiento agregado de la variable *x(t)* lo largo del tiempo es el resultado de la adición de perturbaciones aleatorias incorrelacionadas con esperanza cero y varianza finita a partir de un valor inicial x_0 :

$$x(t)=x_0+\sum_{i=1}^{t} u(i) \tag{4.52}$$

Es fácil comprobar que *el desplazamiento total acumulado después de un número n de iteraciones,* tiene esperanza cero[28]:

$$E[x(t+n)-x(t)]=0 \quad \forall t,n \tag{4.53}$$

---

[24] Cabe destacar también los trabajos previos de Albert Einstein quien publicó en 1905 un estudio sobre el movimiento browniano basado en la teoría cinética de los gases. Estas aportaciones permitieron posteriormente a Perrin calcular *el número de Avogadro*, y con ello obtener, a su vez, el premio Nobel (Guzmán *et al*.1993, pp.57-58).

[25] Entre otras disciplinas ha sido ampliamente utilizado en economía, relacionando los procesos de Weiner con la Teoría de la Cointegración.y los test de raíces unitarias. Véase Maddala y Kim (1998) y Hamilton (1994, pp. 483-533).

[26] Recordemos que la *deriva* es el término constante de un paseo aleatorio, es decir, una variación constante experimentada por el proceso independiente del ruido blanco

[27] En el caso de la partícula en suspensión, el paseo aleatorio estaría indicando que el desplazamiento de la partícula, es decir, el cambio experimentado en su posición *x(t) - x(t-1)* puede ser positivo o negativo -derecha o izquierda- en una cierta distancia con media cero e independientemente del desplazamiento anterior.

[28] No entraremos en la descripción de la función de distribución de probabilidad de los procesos de Weiner o movimientos Brownianos ordinarios. Simplemente apuntaremos que seguirá una normal con media y varianza (4.53) y (4.54) respectivamente. Para un análisis de la misma véase Maddala y Kim (1998, pp.47-60) y Hamilton (1994, pp.478-483)

Por otro lado, la varianza de este proceso no será constante, sino que será una función creciente del tiempo transcurrido entre las dos observaciones:

$$Var[x(t+n)-x(t)] = |n| \cdot \sigma^2 \qquad (4.54)$$

Es decir, a medida que pasa el tiempo, y a partir de la situación inicial, la esperanza del desplazamiento total acumulado será cero pero su varianza irá creciendo con el tiempo. Nos encontramos pues, ante un proceso estocástico no estacionario en varianza o con tendencia estocástica –la varianza es proporcional al tiempo transcurrido–, donde además, la variable *x(t)* presenta una *memoria ilimitada* respecto a cualquiera de sus estados pasados. Esta tendencia estocástica hace que el proceso de paseo aleatorio (4.51) no tienda a su media –cero– a medida que pasa el tiempo. Podríamos decir, más bien, que la serie *deambula* en torno a su media. A pesar de ello, el incremento o movimiento instantáneo del proceso es un ruido blanco y por tanto, tendrá media cero, varianza finita –no dependiente del tiempo– y además *memoria* nula respecto al pasado, ya que el ruido blanco es un proceso independiente en el tiempo. En la figura 4.35 hemos representado la simulación de un movimiento Browniano ordinario suponiendo $x_0=0$ y $u(t) \sim IID\ N(0,1)$.

Una propiedad interesante de los movimientos Brownianos ordinarios, es que presentan una estructura geométrica de *fractal aleatorio*. En el apartado 3.2 fue introducido el concepto de objeto *fractal*. Recordemos que una de las características diferenciadoras de algunos de estos objetos es su *autosemejanza*. Es decir, la apariencia de estas figuras fractales, más o menos abrupta, irregular y compleja, es la misma aunque se varíe la escala a la que son observadas. El movimiento browniano ordinario presenta un tipo de autosemejanza parecida a la anterior. Se trata de una autosemejanza o autosimilaridad de tipo estadístico que le convierte en un fractal *aleatorio.*

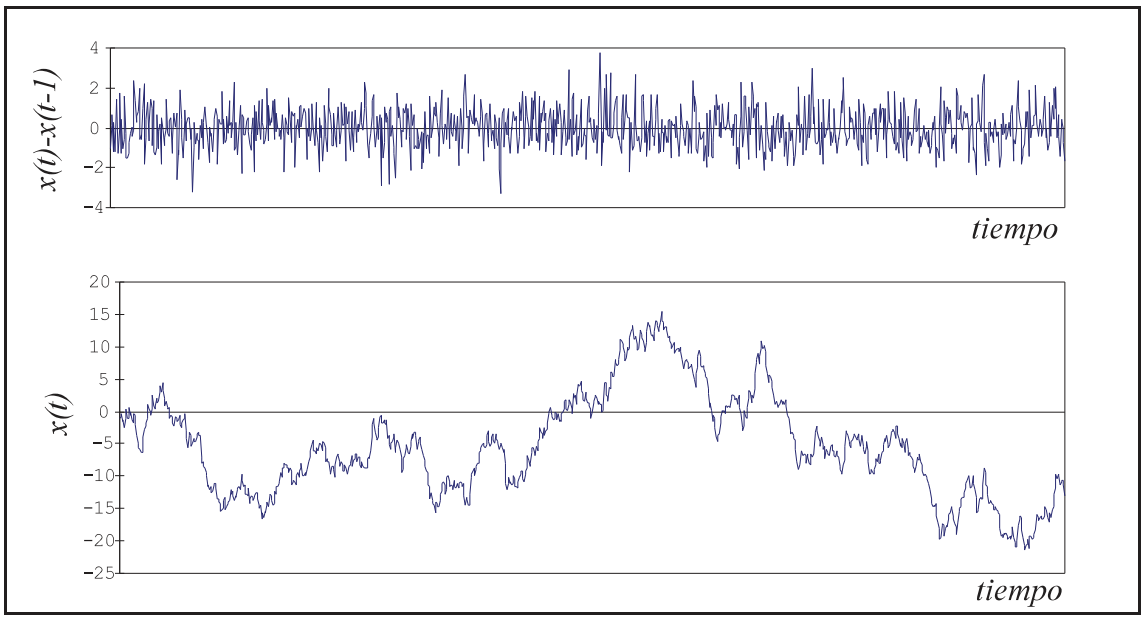


Figura 4. 35. Movimiento browniano ordinario unidimensional

Antes de definir qué entendemos por autosemejanza estadística, observemos que le sucede a un movimiento browniano aleatorio cuando lo observamos a distinta escala, es decir, cuando es reescalado.

Supongamos que alargamos el paseo aleatorio (4.51) en la dirección del tiempo en un factor *a* y su amplitud en un factor *r.* En general, este cambio en la variable aleatoria *x(t)*, hará que tanto su apariencia gráfica, como sus propiedades estadísticas se vean modificadas. Con el objetivo de clarificar esta idea tomemos una variable aleatoria *x(t)* que sigue un paseo aleatorio y definamos un cambio de escala del mismo tanto en amplitud como en dirección del tiempo como un nuevo proceso *y(t)*, tal que:

$$y(t)=r\cdot x(ta)\ ;\ a>0 \tag{4.55}$$

La esperanza del desplazamiento total acumulado del nuevo proceso será:

$$E[y(t+n)-y(t)]=rE[x(ta+na)-x(ta)]=r\cdot naE[u(t)]=0 \tag{4.56}$$

y su varianza:

$$Var[y(t+n)-y(t)]=r^2Var[x(ta+na)-x(ta)]=r^2|na|\sigma^2 \tag{4.57}$$

Si comparamos estos momentos (4.56) y (4.57), con los correspondientes al paseo aleatorio original (4.53) y (4.54), observamos cómo efectivamente, el reescalado de un movimiento browniano genera otro proceso con distintas propiedades estadísticas. La apariencia del grafo y las propiedades estadísticas del reescalado de un paseo aleatorio, sólo se mantendrían inalteradas si el cambio de escala verificase que:

$$r^2a=1 \tag{4.58}$$

Es decir, para los movimientos brownianos ordinarios hay una única transformación o cambio de escala que mantiene la apariencia gráfica del movimiento y las propiedades estadísticas del mismo[29], es decir, que hace que los dos procesos –el original y el reescalado– sean *estadísticamente indistinguibles* o *autosemejantes*[30] -misma media ,varianza y función de distribución de probabilidad del movimiento total acumulado[31]-. Esta propiedad

---

[29] Así, tendríamos por ejemplo que un paseo aleatorio *x(t)* y la transformación $y(t)=1/\sqrt{2}x(2t)$ –$a=2$; $r=1/\sqrt{2}$–, serían estadísticamente indistinguibles, esto es, $1/\sqrt{2}x(2t)\sim x(t)$ ó $x(2t)\sim\sqrt{2}x(t)$

[30] Obsérvese la similitud entre esta relación de escala y la dimensión de Hausdorff o dimensión Fractal definida en el apartado 3.2. Recordemos que la dimensión de Haousdorff es la única que hace que la medida de Hausdorff no sea ni cero ni infinito. De manera análoga, la relación de escalado $a=1/r^2$ es la única que mantiene las propiedades estadísticas de los movimientos brownianos ordinarios. Como veremos más adelante, esta relación de escala jugará un papel importante a la hora de caracterizar al movimiento browniano ordinario frente a otros procesos estocásticos.

[31] Dado el supuesto de Normalidad del ruido, tanto el desplazamiento de *x(t)* como el de *y(t)* seguirán distribuciones normales, véase Grau (1996, p. 47). Es por ello que sólo hemos hecho referencia a la media y la varianza del desplazamiento acumulado de cada una de ellas a la hora de hablar de la autosemejanza estadística.

o relación de escala (4.58) es la que caracteriza al movimiento browniano ordinario frente a otros procesos estocásticos y lo convierten en fractal aleatorio.

Movimientos brownianos fracionarios

El *movimiento browniano fraccionario,* introducido por Mandelbrot y Van Ness (1968)[32], supone una generalización del movimiento browniano ordinario en la que se permite que la tendencia estocástica del desplazamiento total acumulado del proceso, sea una función no-lineal del tiempo. Más concretamente, un movimiento browniano fraccional, puede definirse (Peitgen, Jürgen y Saupe, 1993, p. 494) como un proceso aleatorio *x(t)* con incrementos idénticamente distribuídos *N(0,σ)*:

$$x(t)=x(t-1)+u(t)\ ;\quad u(t)\sim ID\ N(0,\sigma) \tag{4.59}$$

y tal que:

$$E[x(t+n)-x(t)]=0 \tag{4.60}$$

$$Var[x(t+n)-x(t)]\propto|n|^{2H}=2\sigma^2|n|^{2H}\ ;\quad \forall t,n,0\le H\le 1 \tag{4.61}$$

es decir, con un desplazamiento acumulado con media cero y varianza o tendencia estocástica función del tiempo transcurrido entre dos observaciones. Es fácil comprobar que cuando *H=0.5* estaríamos ante un proceso browniano ordinario con un desplazamiento acumulado cuya tendencia estocástica sería una función *lineal* del tiempo. Cuando *H≠0.5*, estaríamos ante un movimiento browniano fraccional –que por tanto es más general que el anterior– con un desplazamiento acumulado cuya tendencia estocástica sería ahora una función *no-lineal* del tiempo transcurrido –de aquí su denominación de fraccionarios–. La presencia de esta tendencia estocástica hace, que al igual que en el movimiento browniano ordinario, la variable *x(t)* posea una memoria infinita respecto a sus valores pasados. Sobre la memoria del término de error *u(t)* –desplazamiento de *x(t)*– hablaremos más adelante en este mismo apartado, aunque podemos anticipar que en general será distinta de cero, es decir, no se tratará de un ruido blanco incorrelacionado.

Al igual que los movimientos brownianos ordinarios, los fraccionarios también son *curvas fractales aleatorias*. Es decir, que bajo un adecuado cambio de escala, estos procesos también son *autosemejantes* desde el punto de vista estadístico. El cambio de escala que mantiene las propiedades estadísticas del proceso está estrechamente relacionado con el valor del parámetro *H*. Así, se dice, en general, que los incrementos de *x(t)* son estadísticamente *autosimilares con parámetro H.* Esto es, que los desplazamientos

[32] Véase Mandelbrot (1997, pp351-383).

$$x(t+n)-x(t) \tag{4.62}$$

y

$$\frac{x(at+an)-x(at)}{a^{H}} \tag{4.63}$$

son estadísticamente indistinguibles para cualquier *t, n* y *a>0*, siendo *H* el factor de escala que preserva las propiedades estadísticas del movimiento browniano fraccional bajo reescalado del mismo. De hecho, los dos movimientos se corresponden a un reescalado de la variable original *x(t)* por un factor *a* en dirección del tiempo y por un factor *r* en amplitud -*y(t)=rx(at)*-. Para que las dos variables –la original y la reescalada– sean estadísticamente indistinguibles puede demostrarse, siguiendo los mismos pasos que efectuamos para el caso del ruido blanco, que debe guardarse la siguiente relación de escala [33]:

$$r^{2}a^{2H}=1 \tag{4.64}$$

Quizás la propiedad más interesante de los movimientos brownianos fraccionales a la hora de detectar comportamientos caóticos reside en *la correlación temporal* del ruido que genera el movimiento errático del proceso. Recordemos que el movimiento browniano ordinario parte de un proceso generador del movimiento errático del tipo ruido blanco, es decir, el movimiento errático de estos procesos surge de la adición de un ruido o perturbación *incorrelacionada* en el tiempo (4.51). En el caso del movimiento browniano fraccionario (4.59), el movimiento errático se produce por la suma de otros ruidos distintos al blanco –ruidos coloreados–, en particular, por perturbaciones o ruidos idénticamente distribuidos *N(0,σ)* pero que, a diferencia del ruido blanco, sí estarán correlacionados en el tiempo.

La correlación temporal del ruido de un movimiento browniano, es decir, el grado de dependencia temporal presente en el desplazamiento del proceso, o si se prefiere, el impacto que tendrá el cambio actual sobre el que acontecerá en el futuro, se puede expresar por el coeficiente de correlación temporal[34]:

$$\rho=\frac{Cov[x(t)-x(t-1),(x(t+1)-x(t)]}{Var[x(t)-x(t-1)]}=\frac{Cov[u(t),u(t+1)]}{Var[u(t)]}=2\left(2^{2H-1}-1\right) \tag{4.65}$$

A partir de esta expresión obtenemos que, como por definición $-1\le\rho\le 1$, entonces el rango posible para valores de *H* será $0\le H\le 1$, como ya se había

[33] En el caso de un proceso browniano ordinario (H=0.5), se obtiene $r^2a=1$, tal y como vimos en (4.58)

[34] Resulta inmediato llegar a esta expresión si tenemos en cuenta, además de (4.59-4.61), que por definición *Cov(x,y)=1/2[Var(x+y)-Var(x)-Var(y)]*.

apuntado en (4.61)[35]. Utilizando (4.65) resulta fácil verificar como efectivamente, en el caso de movimientos brownianos ordinarios, $H=0.5$, el ruido generador del movimiento estará incorrelacionado ($\rho=0$), esto es, será un ruido blanco. Por el contrario, cuando $H\neq 0.5$, el ruido generador del proceso browniano estará correlacionado temporalmente, esto es, será un ruido distinto del blanco, un ruido coloreado que presentará una memoria temporal respecto a su pasado determinada precisamente por el valor de la autocorrelación temporal. Así, en general, podemos encontrarnos ante tres tipos de ruidos generadores de movimientos brownianos según su correlación temporal:

- ***RUIDO NEGRO***: $\rho > 0 \rightarrow 0.5<H<1$ (Ruido con correlación temporal positiva o ruido con persistencia temporal)
- ***RUIDO BLANCO***: $\rho=0 \rightarrow H=0.5$ (Ruido sin correlación temporal o ruidos independientes en el tiempo)
- ***RUIDO ROSA*** : $\rho<0 \rightarrow 0<H<0.5$ (Ruido con correlación temporal negativa o ruido con antipersistencia temporal).

La existencia de ruidos distintos al blanco implica que los cambios o desplazamientos de un proceso estocástico $x(t)$ que sigue un movimiento browniano fraccionario pueden presentar cierta *memoria* respecto al pasado[36]. Los valores del factor de escala H, muestran cual es el carácter de dicha memoria o tendencia respecto al pasado:

0<H<0.5 Comportamiento dinámico antipersistente –ruido rosa–, en el cual se espera que la dirección de cambio corriente o actual no siga en el futuro –implica una mayor volatilidad que un paseo aleatorio–. En el límite, si $H=0$, la serie temporal debe cambiar su dirección en cada iteración.

H= 0.5 Movimiento incorrelacionado en el tiempo –ruido blanco–.

0.5<H<1 Comportamiento persistente o reforzador de tendencia –ruido negro–, en el cual se puede esperar, con certidumbre creciente a medida que el valor se aproxima a 1, que sea cual sea la dirección del cambio en la variable –tendencia puntual–, ésta continuará en el futuro –implica menor volatilidad que un paseo aleatorio–. Por ejemplo, una linea recta tendrá un exponente $H= 1$.

---

[35] Nótese que estos límites se obtienen en procesos sin tendencia, de hecho cuando el exponente de Hurst estimado a partir de una serie temporal sea $H<0$ ó $H>1$, se estaría reflejando que la serie no es estacionaria o se encuentra sobrediferenciada respectivamente. El exponente de Hurst podría, por tanto, utilizarse de forma complementaria a los test de raíces unitarias (véase apartado 8.2) para comprobar si una serie es estacionaria.

[36] Recuérdese que un movimiento browniano tiene siempre una tendencia estocástica –lineal ($H=0.5$) o no lineal ($H\neq 0.5$)– y por tanto sus valores siempre tendrán memoria ilimitada. Lo que aquí discutimos es la memoria del ruido que genera el movimiento o cambio en el valor de la variable aleatoria.

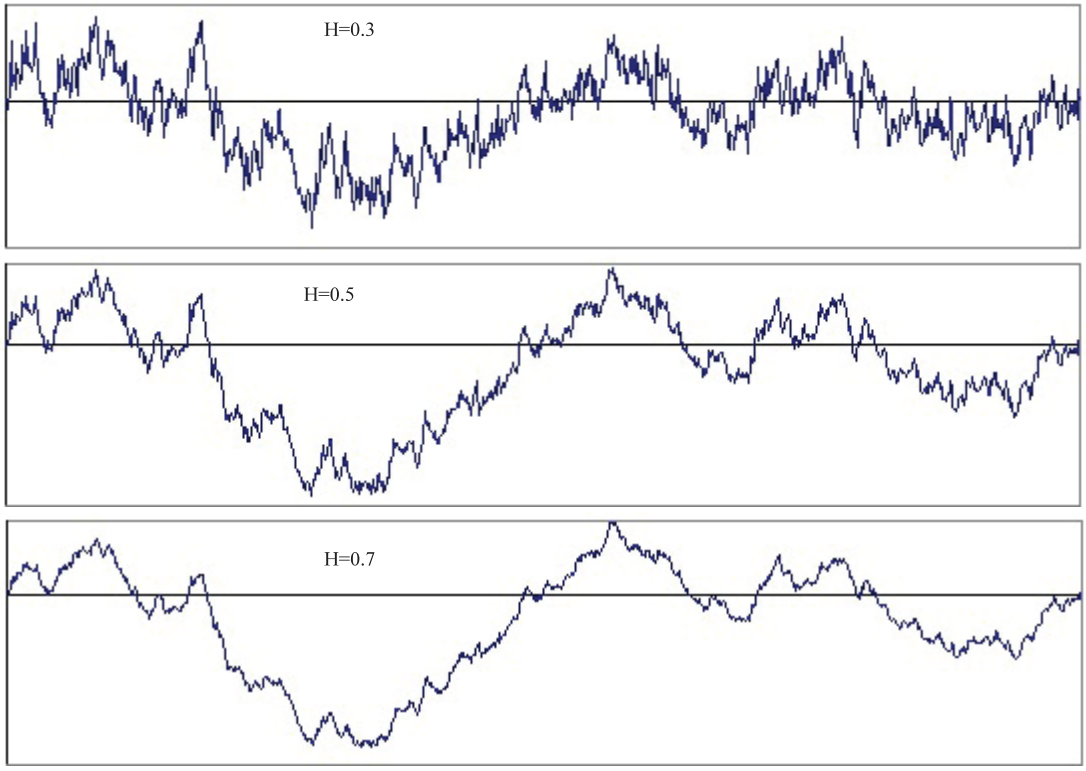


Figura 4. 36. Movimeintos brownianos: ordinario, fraccionario antipersistente y persistente (H: .5, .3 y .7).

En la figura 4.36. hemos representado tres movimientos brownianos con distinto factor de escala. Esta figura muestra cómo disminuye la irregularidad del mismo a medida que aumenta *H*, esto es, a medida que la serie se vuelve más persistente[37].

Para terminar este apartado dedicado al movimiento browniano fraccionario, recordemos que *H* es el factor de escala que garantiza la autosemejanza estadística del mismo ante cambios de escala, convirtiéndolo así en un fractal aleatorio. Pues bien, el factor de escala *H*, además de caracterizar el color del ruido de un movimiento browniano, permite deducir cuál es la dimensión fractal del grafo del ruido asociado al proceso, es decir, de la representación gráfica de su evolución temporal. Aquí conviene hacer una aclaración para no confundir esta dimensión del grafo del ruido de un movimiento browniano en el tiempo, con la dimensión fractal de un atractor en el espacio de fases. La dimensión del grafo nos indica cómo llena el espacio donde se representa el desplazamiento del movimiento browniano en su evolución temporal –trayectoria en el tiempo del ruido–. La dimensión fractal del atractor en el espacio de fases también hace referencia a las propiedades de llenado o recubrimiento del espacio en el que se representa el atractor –apartado 3.2–, pero hay que tener en cuenta que dicho espacio, el espacio de fases, no incluye a la variable tiempo de forma explícita.

[37] Estas series se han simulado utilizando el *método del desplazamiento aleatorio al punto medio* «The Random Midpoint Displacement Method». Véase Peitgen, Jürgen y Saupe (1993, pp. 487-490)

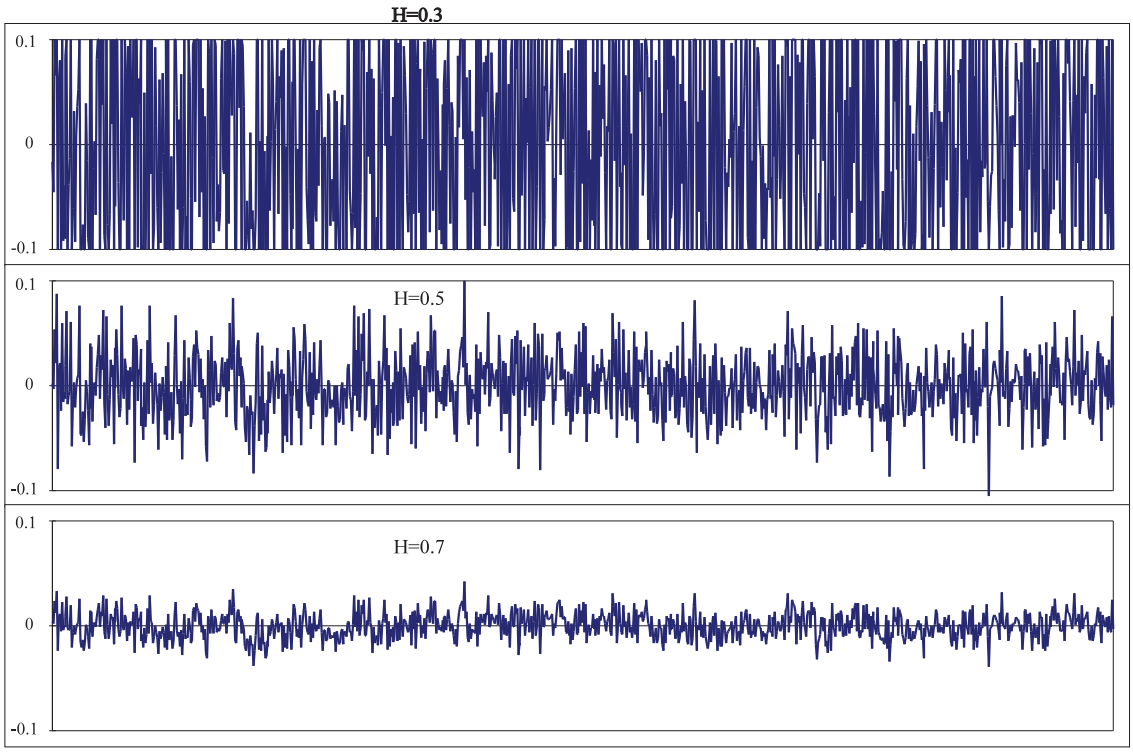


Figura 4. 37.Grafos del ruido asociado a tres movimientos brownianos: ruido antipersistente H=0.7(D=1.7); ruido blanco H=0.5 (D=1.5); y ruido antipersistente H=0.7 (D=1.3).

A modo de ilustración y siguiendo a Peitgen, Jürgen y Saupe (1993, pp. 495-496) consideremos el grafo del ruido de un movimiento browniano 1-dimensional, figura 4.37. Dicho grafo es una linea dibujada en un espacio bidimensional ($u(t)$, t), por lo que su dimensión D estará acotada entre 1 y 2: $1 \leq D \leq 2$. Veamos cuál es la relación entre H y la dimensión fractal del grafo del ruido. Emplearemos para ello la definición de dimensión de recuento por cajas introducida en el apartado 3.2. Supongamos que hemos cubierto el grafo de *u(t)* para t entre 0 y 1 por N cajas de lado r. Si consideramos ahora cajas de tamaño $r/2$, por las propiedades de invarianza ante el reescalado del movimiento browniano, observaremos que el rango de *u(t)* en la primera mitad del intervalo temporal (0,1/2) será $1/2^H$ veces el rango de *u(t)* sobre todo el intervalo. Lo mismo ocurrirá para la segunda mitad del intervalo temporal (1/2,1). Así, para cada mitad de intervalo, se esperará necesitar $2N/2^H$ cajas de tamaño $r/2$, y para todo el intervalo se necesitarán $2^{2-H} \cdot N$ cajas. Si pasamos a la siguiente iteración, en la que tendremos 4 intervalos, obtendremos que el número total de cajas necesarias para recubrir todo el intervalo será de $(2^{2-H})^2 \cdot N$ cajas de tamaño r/4. Si seguimos iterando, obtendremos, que en la etapa k-ésima, se necesitarán $(2^{2-H})^k \cdot N$ cajas de tamaño $r/2^k$. A partir de aquí, se demuestra, usando el paso al límite de la dimensión de recuento por cajas, que:

$$D = \lim_{k \to \infty} \frac{\log\left[(2^{2-H})^k N\right]}{\log 2^k / r} = 2 - H \qquad (4.66)$$

Como apuntamos anteriormente, la dimensión del grafo asociado al desplazamiento o al ruido de un movimiento browniano es una medida del grado de *recubrimiento* que la evolución temporal del ruido hace del espacio bidimensional, es decir, a la forma de llenar el plano por parte de la recta descrita por el ruido en su evolución temporal. Así, una serie perfectamente antipersistente -*H=0*-, es una linea que recubre todo el plano y por tanto su dimensión será dos. El ruido blanco es una curva fractal con dimensión 1.5, mientras que una linea perfectamente persistente, tendrá dimensión 1. Para cualquier otro valor intermedio de *H*, la dimensión del grafo se encontrará entre 1 y 2 siendo la curva fractal descrita por el ruido tanto más suave cuanto más se acerque el valor *H* a 1 (o alternativamente *D* a 1) –figura 4.37-.

La dimensión fractal del grafo del ruido asociado a un movimiento browniano *1*-dimensional, puede generalizarse fácilmente para el caso de procesos *n*-dimensionales por *D=n+1-H.* Es decir, la dimensión fractal del grafo del desplazamiento vendrá definida, en general, por la dimensión del espacio necesaria para representar el ruido del movimiento browniano y por el factor de escala asociado al mismo (Peitgen, Jürgen y Saupe 1993, pp. 497-502).

El Exponente de Hurst y El Análisis R/S.

Como ya apuntamos en la introducción a este apartado, H.E. Hurst derivó un método de su propia invención cuya principal relevancia es que permite estimar el factor de escala *H* asociado al ruido de un movimiento browniano fraccional a partir de una muestra temporal del mismo. Es por ello, que el factor de escala *H*, ha pasado a denominarse exponente de Hurst.

La estimación del exponente de Hurst se deriva del análisis R/S que pasamos a comentar a continuación. Antes de ello, queremos volver a señalar la importancia de la estimación del exponente para la detección de comportamientos caóticos a partir de una serie temporal, ya que este análisis supone una alternativa a la estimación de la función de correlación lineal (apartado 4.3) para medir la dependencia o memoria temporal existente en un ruido. De igual modo, mediante el análisis R/S y la posterior estimación del exponente de Hurst se puede contrastar si una serie se comporta efectivamente como un ruido blanco o si por el contrario éste se encuentra correlacionado, lo que permite la posibilidad de que dicho ruido coloreado haya sido generado por un sistema caótico determinista –ruido caótico– de baja dimensión.

El análisis R/S trata de estimar cuál es el rango estandarizado de variación para distintos intervalos de tiempo de una serie temporal, y como decíamos anteriormente, permite estimar el exponente de Hurst asociado a la serie

temporal considerando que ésta es el ruido asociado a un movimiento browniano fraccional. Este análisis se compone de las siguientes etapas[38]:

(i) Dada una serie temporal $\{x_t\}$ estacionaria en media de tamaño N, dividimos el periodo temporal N, en A subperiodos contiguos de tamaño p de forma que:

$$A \cdot p = N \tag{4.67}$$

identificando a cada submuestra de tamaño p, como I_a, con $a=1...A$ y a sus elementos como $N_{k,a} \in I_a$, con $a=1...A$, $k= 1,..,p$.

(ii) Calculamos el valor medio para cada bloque I_a:

$$e_a = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} N_{k,a} \tag{4.68}$$

(iii) Construimos una nueva serie temporal a partir de la distancia acumulada a la media para cada bloque I_a, es decir :

$$X_{k,a} = \sum_{i=1}^{k} \left(N_{i,a} - e_a \right) \quad ; \; k = 1,...,p \tag{4.69}$$

(iv) Se define el *Rango* como la diferencia entre el valor máximo y el mínimo de la serie $X_{k,a}$ para cada bloque I_a:

$$R_{I_a} = \max \left(X_{k,a} \right) - \min \left(X_{k,a} \right) ; \quad 1 \le k \le p \tag{4.70}$$

(v) Se reescala –estandariza– el rango por la desviación típica muestral, calculada para cada bloque I_a :

$$\frac{R_{I_a}}{S_{I_a}} \; ; \quad con \quad S_{I_a} = \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \left(N_{k,a} - e_a \right)^2 \right)^{1/2} \tag{4.71}$$

(vi) De esta forma obtenemos A rangos normalizados (R/S), cuyo valor medio para un tamaño p será:

$$(R/S)_p = \frac{1}{A} \sum_{a=1}^{A} \left(\frac{R_{I_a}}{S_{I_a}} \right) \tag{4.72}$$

---

[38] Seguimos aquí a Peters (1991 cap. 7 y 1994 cap. 4). Véase también Mandelbrot (1997, pp.353-355) y Grau (1996, pp. 50-57)

Como apuntamos anteriormente, a partir de este rango estandarizado puede estimarse el exponente de Hurst asociado a la serie temporal. Para ello se hace uso de la relación entre el R/S y el exponente de Hurst que vendrá dada por la siguiente ley de potencia o de escala (Mandelbrot 1997, pp. 355):

$$(R/S)_p \propto p^H \tag{4.73}$$

Con el propósito de obtener una estimación robusta del exponente de Hurst se repiten las etapas *i)* a *vi)* para distintos valores del entero p –por conveniencia $10 \leq p \leq N/2$–. De esta forma se tendrá un $(R/S)_p$ para cada p, y la estimación del exponente de Hurst puede obtenerse a partir de la regresión logarítmica por mínimos cuadrados ordinarios de la ley de escala (4.73):

$$\log(R/S) = \log(c_o) + H\log(p) + u_t \tag{4.74}$$

donde c_o es una constante a estimar y u_t es el término de error de la regresión.

La estimación del exponente de Hurst asociado a la serie temporal, nos indicará si ésta se comporta como un ruido blanco, rosa o negro según los valores que tome, es decir, nos indicará la existencia o no de cierta memoria o correlación en la serie. Cabe, sin embargo, cuestionarse la significatividad de los valores estimados del exponente de Hurst a partir del análisis R/S. En particular, cabría preguntarse si la serie original x_t es efectivamente un ruido blanco ($\hat{H}=0.5$), cuestión ésta que resultará especialmente relevante para el análisis de comportamientos caóticos en la dinámica subyacente a la serie temporal.

En definitiva, estamos interesados en realizar el siguiente contraste de hipótesis a partir del análisis R/S efectuado sobre una serie temporal:

H_0: El proceso es aleatorio e independiente *IID* Normal$(0, \sigma^2)$ (Ruido Blanco Gausiano)

H_1: El proceso no está incorrelacionado (Ruido Gausiano persistente o antipersistente)

Para realizar este contraste se construye la serie de valores *R/S* esperados bajo la hipótesis nula de ruido blanco gausiano (Anis y Lloyd, 1976):

$$E(R/S_p) = \frac{p-1/2}{p} \left(\frac{p\pi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{r=1}^{p-1} \left(\frac{p-r}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.75}$$

Con esta nueva serie, siguiendo los pasos *(i)* a (*vi)* y para los mismos valores del entero p que fueron utilizados con la serie temporal original, se estimará $E[\hat{H}]$–valor esperado para el exponente de Hurst bajo la hipótesis

nula de ruido blanco gausiano–, cuya varianza vendrá dada por[39]:

$$Var(E(\hat{H})) = 1/N \tag{4.76}$$

Así, podemos utilizar estos dos momentos estimados para el exponente de Hurst, para contrastar la hipótesis nula de ruido blanco gausiano utilizando el siguiente estadístico para el contraste de significación[40]:

$$\frac{\hat{H} - E(\hat{H})}{1/\sqrt{N}} \sim N(0,1) \tag{4.77}$$

El análisis R/S y el ciclo medio del ruido.

Hasta ahora hemos visto cómo el análisis R/S puede ser utilizado para estimar la memoria o correlación presente en una serie temporal. Este método permite también estimar cuál es el ciclo medio de la serie y cuál es su duración media, definida ésta como el periodo a partir del cual la serie pierde la memoria, aunque permanezca el impacto o dependencia de la serie respecto a todo el pasado. El razonamiento en que se sustenta la determinación del ciclo a partir del análisis R/S es que cuando la serie haya cubierto un ciclo entero su rango debe dejar de crecer, ya que entonces este rango ha debido alcanzar su máxima amplitud -rango máximo- y por eso a partir del tamaño medio del ciclo la magnitud $\log(R/S)_p$ debe perder toda memoria respecto al pasado y crecer a una tasa $\simeq 0.5$ (R.B.). Es decir, debe observarse una ruptura en su representación gráfica en aquel *p* para el cual se alcanza el periodo medio del ciclo –figura 4.38–.

Esta determinación del ciclo medio a partir del análisis R/S es consistente incluso cuando la serie presentan ciclos inmersos en otros ciclos de periodo mayor. En este caso la gráfica $\log (R/S)_p$ presentará una ruptura en cada periodo del ciclo para seguir creciendo hasta que alcance el periodo del ciclo de periodo mayor.

Para contrastar la existencia de ciclos en una serie temporal y para estimar su periodo medio puede ayudar la construcción del denominado *estadístico-V*:

$$V_p = \frac{(R/S)_p}{\sqrt{p}} \tag{4.78}$$

---

[39] Sobre las propiedades de escalado del rango en procesos de Weiner bajo la hipótesis nula véase Hamilton (1994, 479-482).

[40] En general cuando intentemos utilizar este estadístico para la detección de memoria a largo plazo usando series temporales económicas habrá que tener en cuenta que cuando las series son muy cortas se tenderá a aceptar la Ho. En general la muestra necesaria será del orden de $4/(H-E(H))^2$

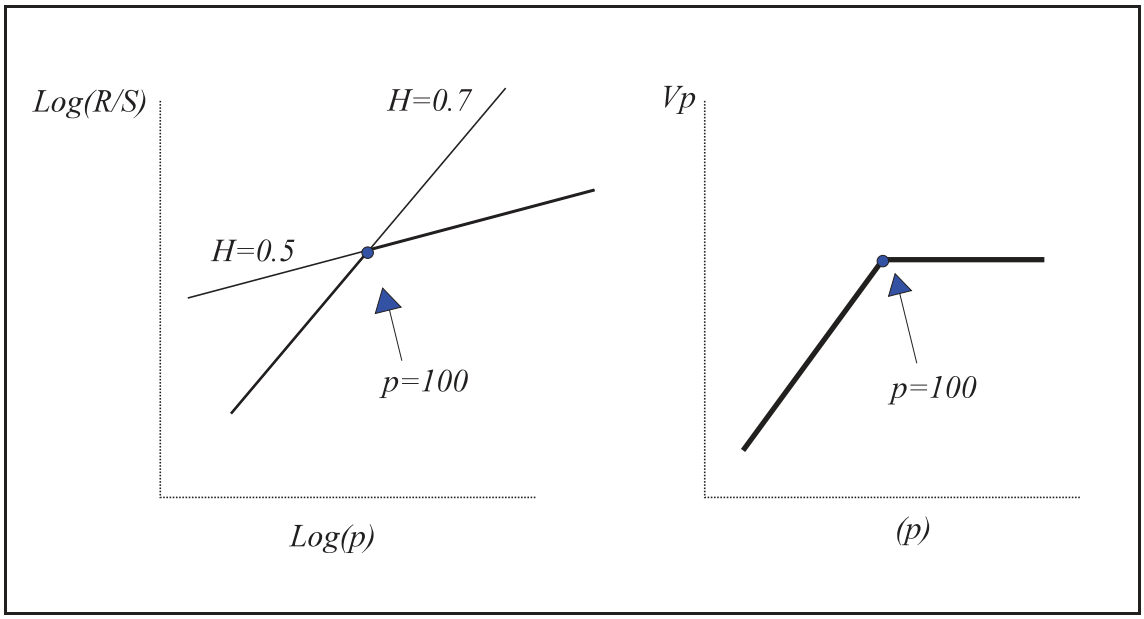


Figura 4. 38. Análisis *R/S* y el ciclo medio: el estadístico V_p

Los valores que tome este estadístico a medida que aumenta *p*, estarán vinculados, de nuevo, al valor estimado del exponente de Hurst, ya que:

- Si H=0.5, $(R/S)_p$ aumentará con $\sqrt{p}$, y entonces V_p permanecerá más o menos constante.

- Si H>0.5, $(R/S)_p$ crecerá a una tasa mayor que $\sqrt{p}$ y, por tanto, V_p aumentará con *p*.

- Si H<0.5, $(R/S)_p$ crecerá a una tasa menor que $\sqrt{p}$ por lo que V_p será decreciente.

El análisis R/S y la detección de comportamientos caóticos.

El análisis R/S ha sido utilizado tradicionalmente para contrastar la existencia de persistencia o memoria a largo plazo en las series temporales [41] La estimación del exponente de Hurst asociado a una serie temporal puede ayudar también a la detección del caos (véase Abraham-Frois et al., 1998, pp-197-198).

[41] Lo(1991) y Cheung(1993), proponen estimar el exponente de Hurst utilizando un estadístico de Rango Reescalado Modificado para estimar la memoria a largo plazo de una serie temporal teniendo en cuneta los efectos que la dependencia a corto plazo o la presencia de heteroscedasticidad pueden tener sobre el análisis R/S. Véase Olmeda(1995, pp.103-105) y Fernández Díaz(2000, pp.130) y Grau (2000).

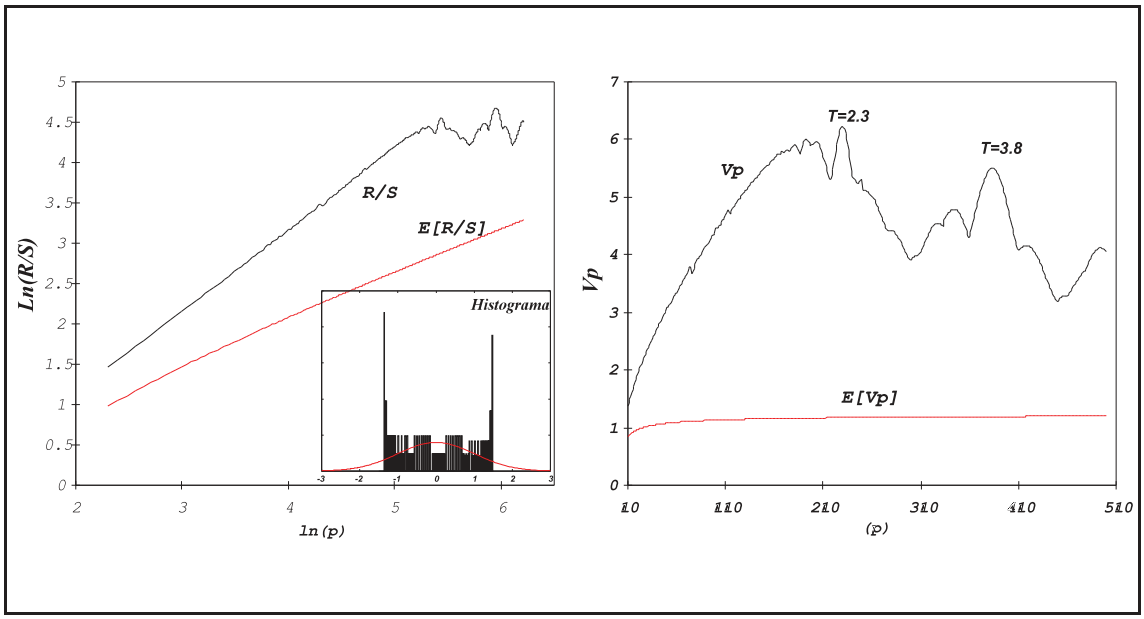


Figura 4. 39. Análisis R/S: Armónico.

Cuando el análisis R/S y el exponente de Hurst confirman la presencia de ruidos distintos al blanco –ruido rosa persistente o ruido negro antipersistente–, se abre la posibilidad de que la serie temporal haya sido generada por procesos caóticos donde la persistencia o antipersistencia de la serie vendrá generada por la dinámica determinista subyacente. Recordemos, sin embargo, que los sistemas en régimen caótico no son los únicos capaces de generar ruidos coloreados.

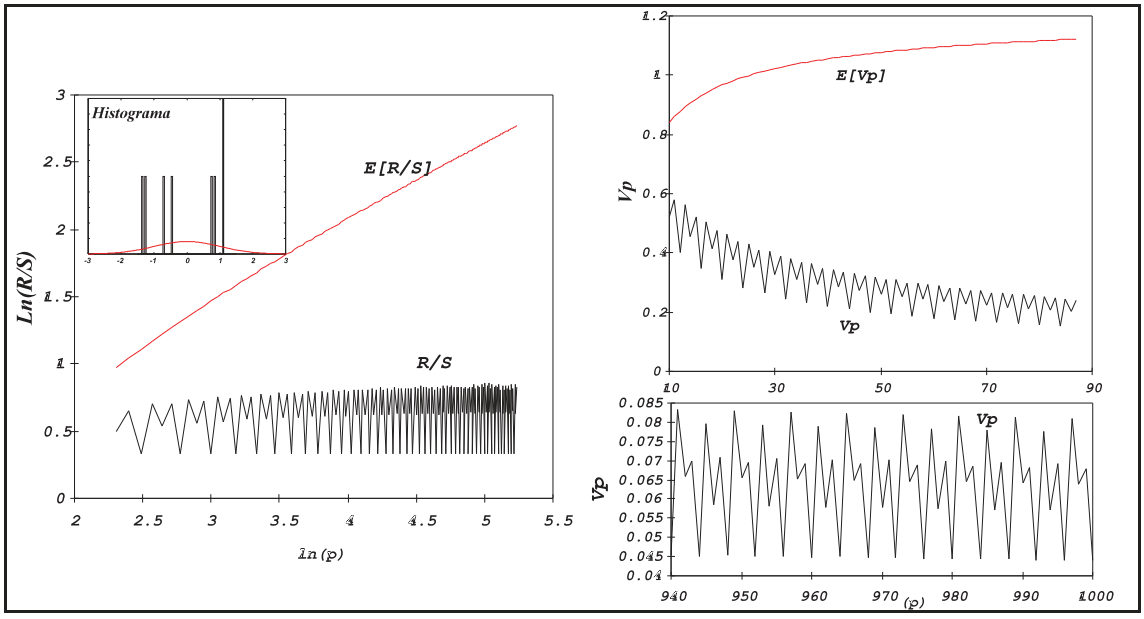


Figura 4. 40. Análisis R/S: aplicación logística μ=3.56

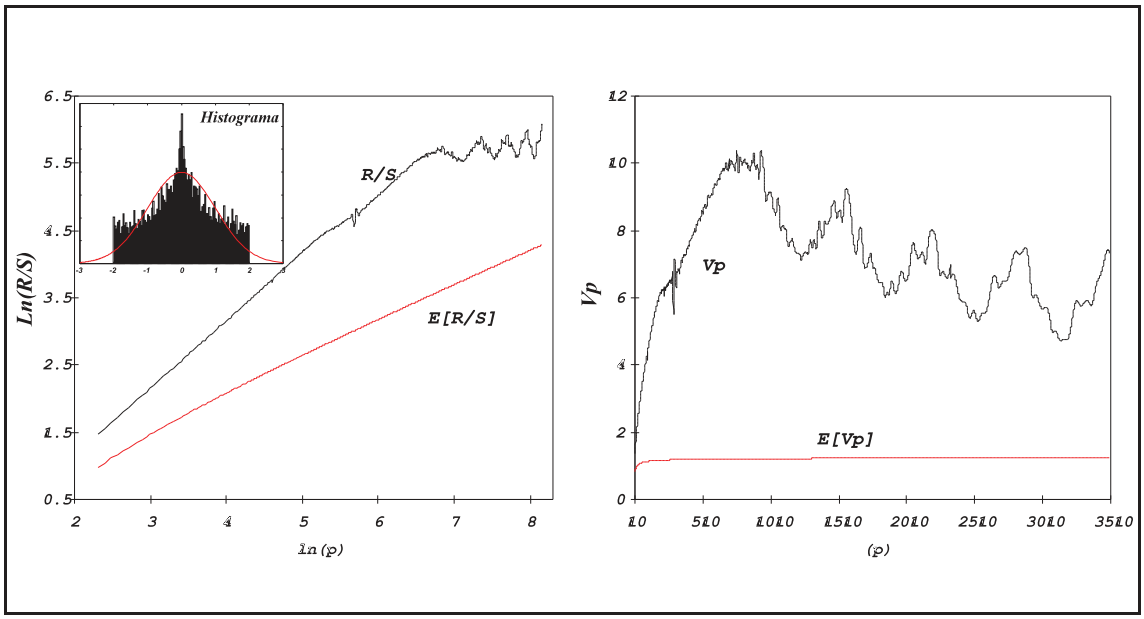


Figura 4. 42. Análisis R/S: Toro

En la tabla 4.1 y las figuras 4.39-4.48 se muestra el exponente de Hurst estimado para una selección de series generadas por procesos distintos al ruido blanco. En todos ellos, el estadístico de Anis-Lloyd revela la presencia de comportamientos persistentes o antipersistentes. Estos resultados evidencian que el análisis *R/S* y el estadístico V_p son capaces de revelar correlaciones y periodicidades significativas ocultas en las series temporales –generadas por procesos lineales o no lineales, deterministas o estocásticos–.

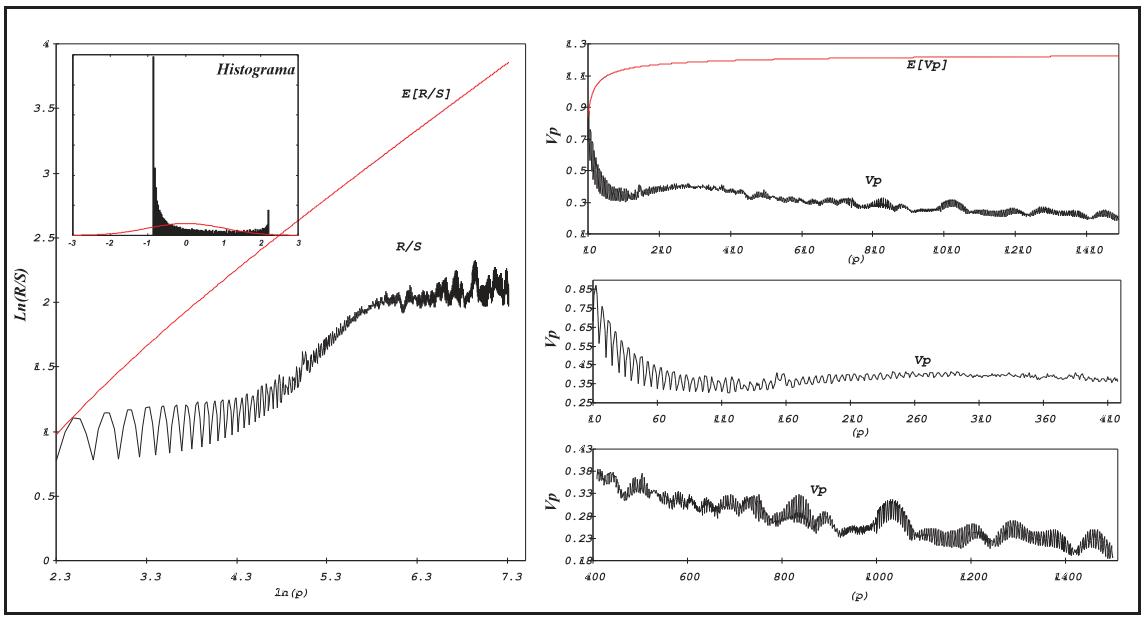


Figura 4. 41. Análisis R/S: Modelo Lotka-Volterra.

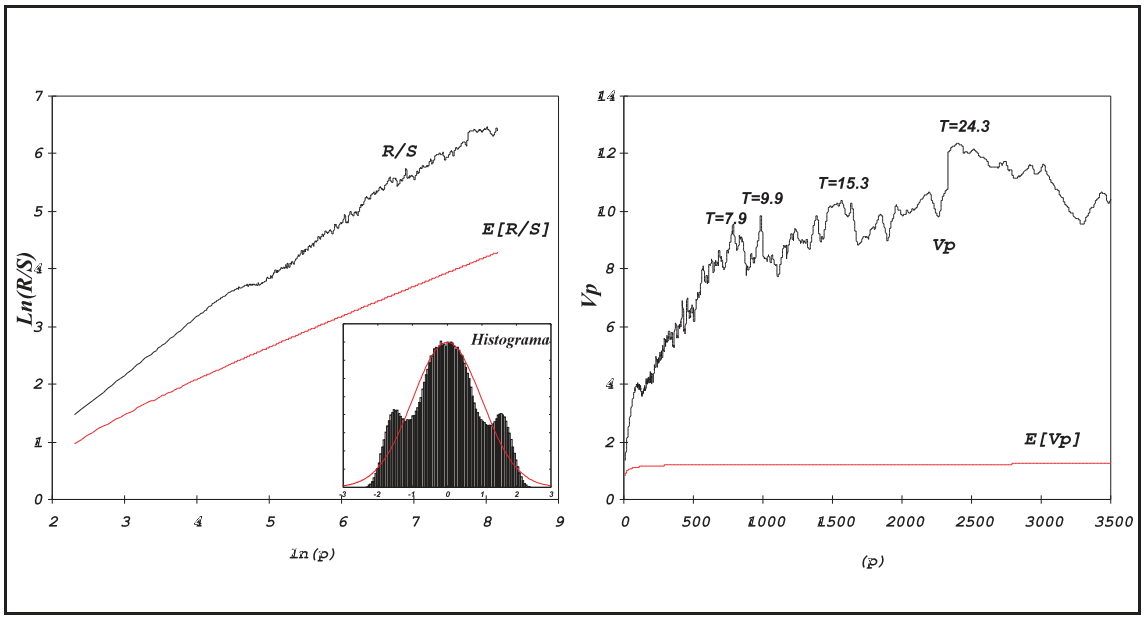


Figura 4. 43. Análisis R/S: atractor de Lorenz.

De este modo, el análisis R/S constituye una herramienta complementaria al correlograma y periodograma analizados en anteriores apartados, ayudando a contrastar si el proceso generador de la serie es del tipo ruido blanco gausiano o, si por el contrario, existe alguna otra estructura temporal en la serie. Esta propiedad del análisis R/S es especialmente importante en la detección de posibles comportamientos caóticos, ya que en algunos casos, como ya vimos, el análisis lineal del correlograma y el periodograma no es capaz de distinguir entre procesos puramente aleatorios del tipo ruido blanco y procesos caóticos o estocásticos no lineales –procesos GARCH, MA no lineal, ...–.

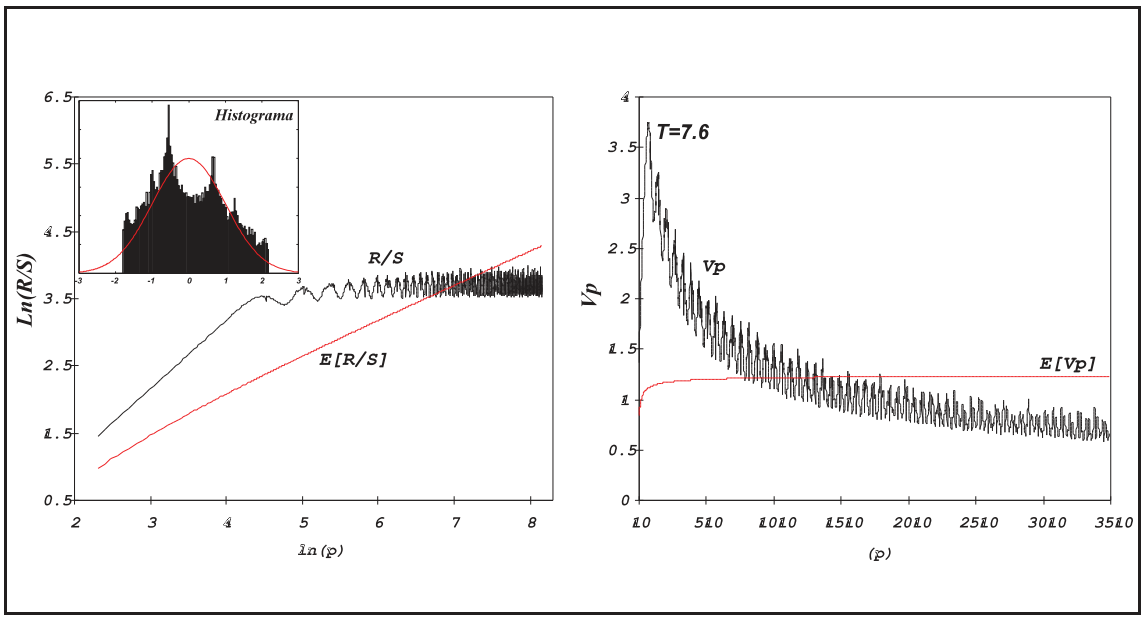


Figura 4. 44. Análisi R/S: atractor de Rössler

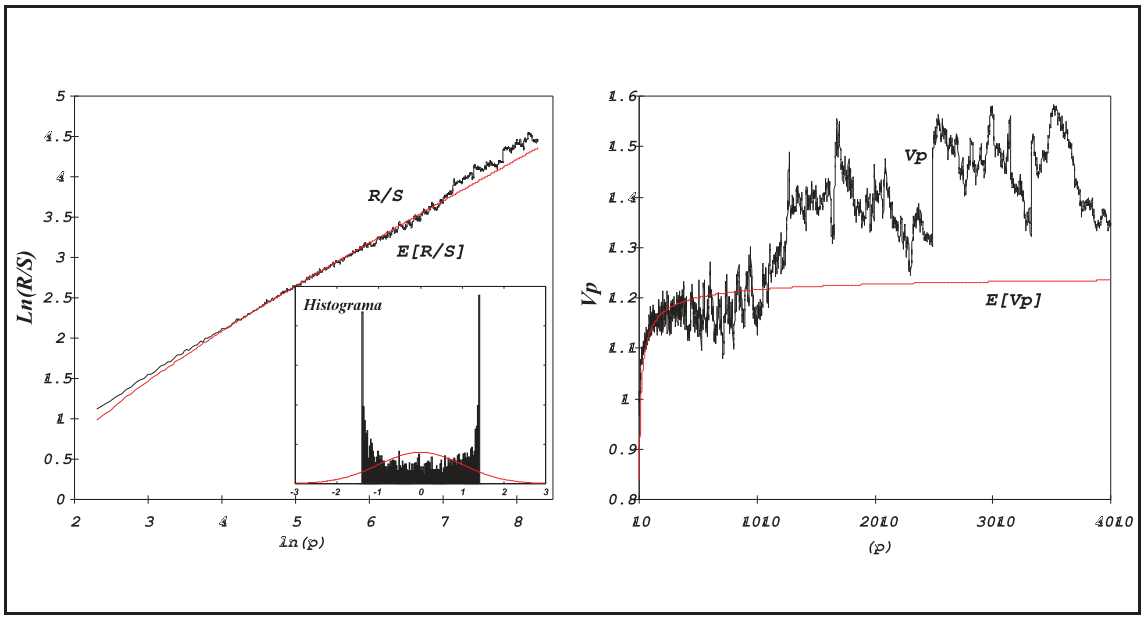


Figura 4. 45. Análisis R/S. ecuación logísitca μ=4

Es por ello, que el análisis R/S puede utilizarse para rechazar la hipótesis de ruido blanco y a partir de ahí, continuar con el análisis de la serie con el fin de comprobar si la estructura temporal es caótica o si por el contrario debe considerarse como puramente aleatoria no-lineal. Precisamente a esta tarea dedicaremos el siguiente capítulo.

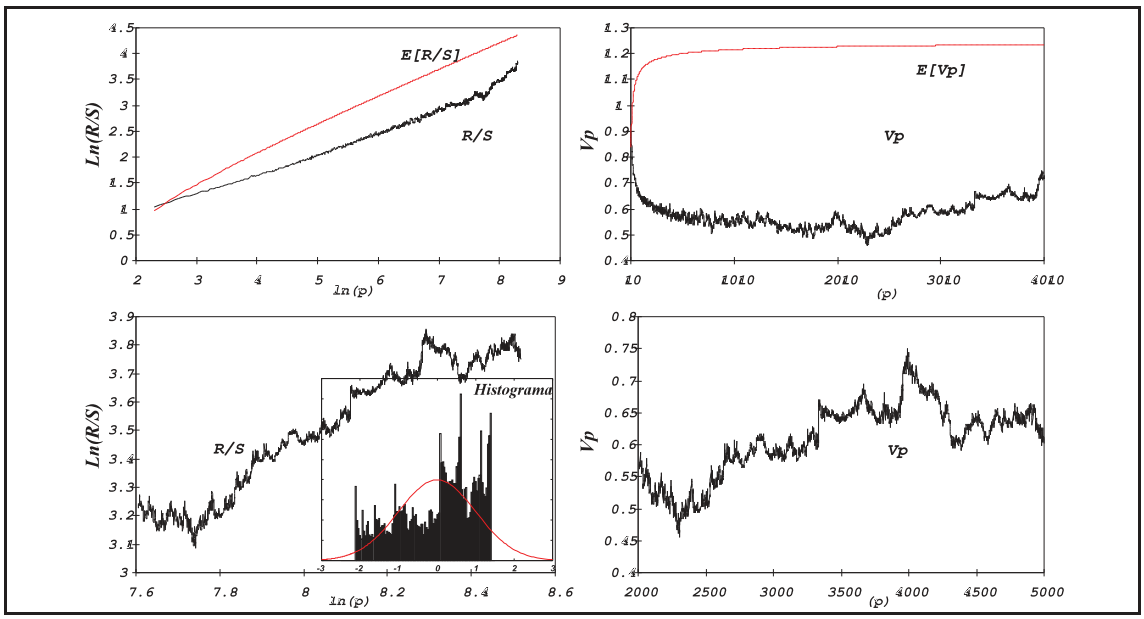


Figura 4. 46. Análisis R/S: atractor de Henon.

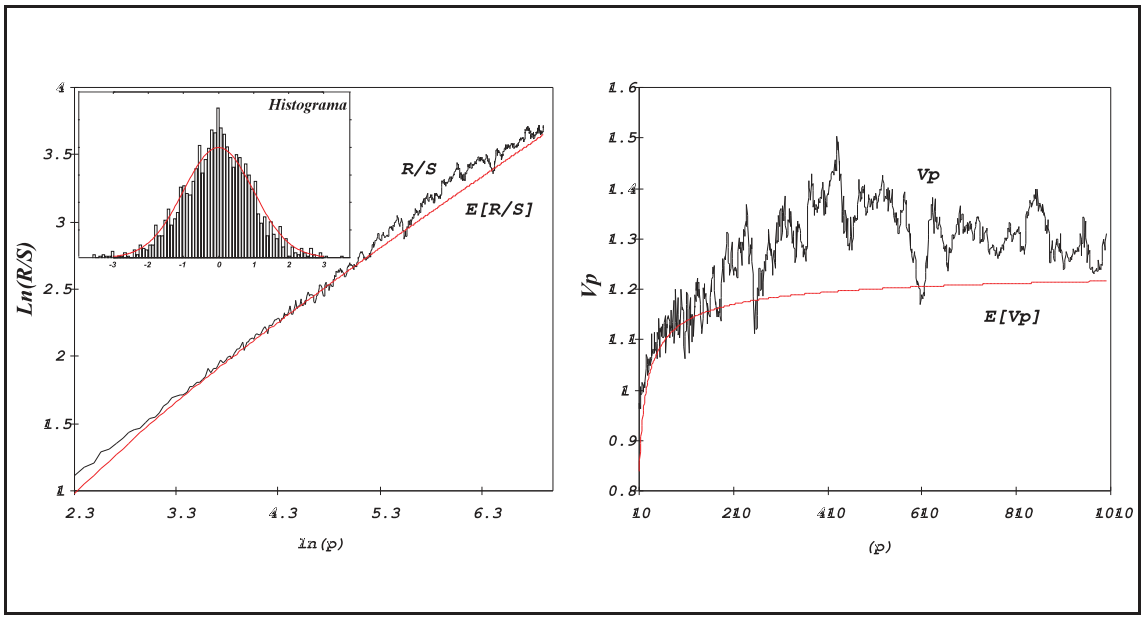


Figura 4. 47. Análisis R/S: Proceso GARCH.

TABLA 4.1

Análisis R/S y exponente de Hurst					
Serie	Exponente de Hurst Estimado	Estadístico Anis-Lloyd N(0,1)	Serie	Exponente de Hurst Estimado	Estadístico Anis-Lloyd N(0,1)
Armónico (Tp=1.5) N=1000, Δt=0.01	0.6681	108.57	Henon (caos) N=10000, Δt=1	0.4224	-1311.84
Logística μ=3.56 N=2000, Δt=1	0.0102	-1070.16	Mackey-Glass N=4901, Δt=1	0.2933	-1312.94
Toro N=7000,Δt=.01	0.8481	2040.98	RUIDO Lorenz N=4000, Δt=1	0.5650	6.00
Lotka Volterra (ciclo límite) N=3000, Δt=0.001	0.2807	-772.11	RUIDO Rössler N=4000, Δt=1	0.0481	-1942.65
Lorenz (Caos) N=7000, Δt=0.01	0.8126	2002.15	GARCH N=2000, Δt=1	0.5617	33.31
Rösler (Caos) N=7000, Δt=0.1	0.1045	-2954.4	Media Móvil No lineal, N=2000 Δt=1	0.6510	211.094
Logística μ=4 N=10000, Δt=1	0.5738	510.71	ARMA N=2000, Δt=1	0.8486	607.14

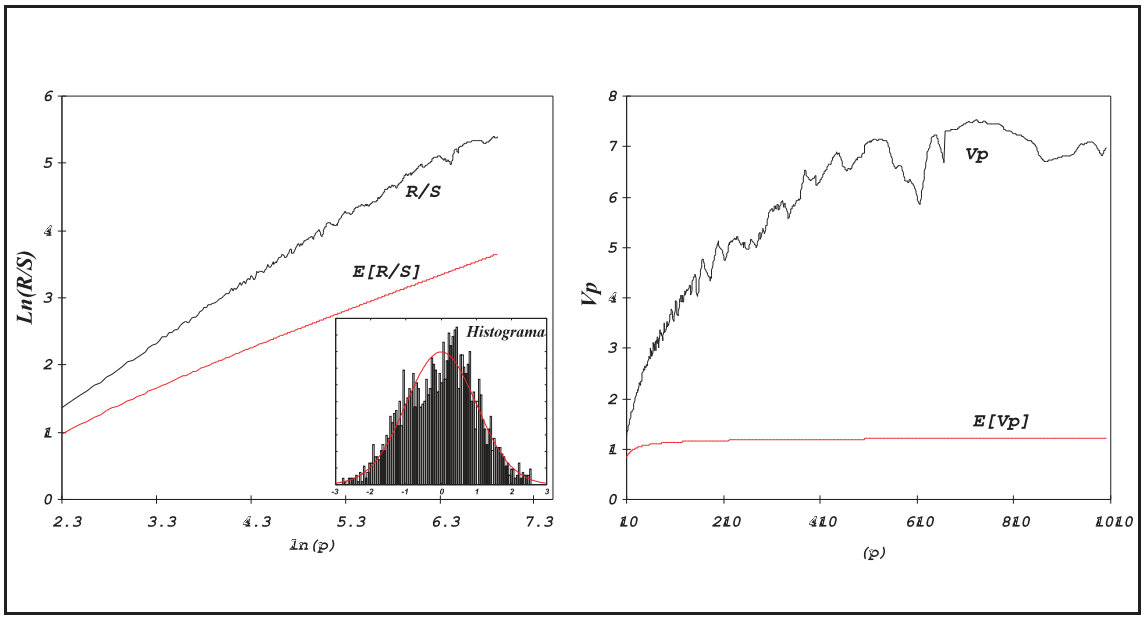


Figura 4. 48. Análisis R/S: proceso ARMA(2,1)

CAPÍTULO 5

LA DETECCIÓN DEL CAOS DETERMINISTA A PARTIR DE SERIES TEMPORALES (II): LA RECONSTRUCCIÓN DEL ATRACTOR Y LAS MEDIDAS INVARIANTES DEL CAOS.

En este capítulo continuamos con el análisis de las técnicas y herramientas para detectar la existencia de comportamientos caóticos a partir de una serie temporal. En este sentido, en el capítulo anterior se mostró que con el análisis de la evolución temporal, el correlograma, el periodograma y el análisis R/S de una serie temporal, es posible detectar la presencia de dinámica compleja –irregular y aperiódica– en el proceso generador de la serie aunque éste sea desconocido. Estos test, sin embargo, son incapaces de indicar cuándo esa dinámica compleja tiene una explicación estocástica y cuándo, por el contrario, tiene, al menos en parte, una explicación caótica determinista. Es por ello, que aunque estos test pueden utilizarse para detectar correlaciones y periodicidades –o incorrelaciones y aperiodicidades– ocultas en una serie temporal –contribuyendo así a la detección de posibles comportamientos caóticos–, será necesario continuar el análisis con otra serie de herramientas que las complementen.

Como ya tuvimos ocasión de comprobar en el capítulo 2, los sistemas caóticos están caracterizados porque su evolución temporal en el espacio de fases queda atrapada en un atractor extraño –caos en sentido de Ruelle–. Por tanto, si la serie temporal observada procede de un sistema dinámico caótico, éste debe converger a un atractor con estructura fractal y además la evolución de la serie dentro de dicho atractor debe presentar una dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales. Los test que presentamos a continuación tratan, precisamente, de estimar la dimensión fractal del atractor del sistema subyacente y su espectro de exponentes de Lyapunov, que constituyen dos de las denominadas medidas invariantes del caos –invariantes en el tiempo bajo la acción del sistema–.

Como decimos, estos test para detectar comportamientos caóticos se basan en la propiedades cualitativas de los atractores a los que converge el sistema o proceso dinámico, en principio desconocido, generador de la serie temporal observada. Más concretamente, estos test tratan, de estimar ciertas medidas estadísticas con las que se pueden revelar las propiedades cualitativas del atractor –su dimensión fractal y su espectro de exponentes de Lyapunov–, con las que se podrá detectar si dicho atractor es del tipo extraño, de dinámica simple –punto fijo, ciclo límite y toros cuasi-periódicos– , o si por el contrario, no existe tal conjunto atractor –en cuyo caso el sistema dinámico será explosivo o se tratará de un proceso puramente aleatorio–.

Un paso previo en el proceso de detección del caos, anterior a la estimación de estas medidas invariantes, será el de la recuperación de las propiedades cualitativas del sistema dinámico subyacente, esto es, la reconstrucción del atractor, de existir éste, a partir de una serie temporal. A partir de ahí, y haciendo uso de la hipótesis de ergodicidad, será posible detectar si el atractor del sistema es un objeto fractal y si alguno de sus exponentes de Lyapunov es estrictamente positivo, en cuyo caso podremos asegurar que el sistema dinámico generador de la serie temporal presenta comportamiento caótico determinista.

5.1. La reconstrucción del atractor a partir de una serie temporal: el método de los retardos.

En este apartado estudiaremos el método de los retardos para reconstruir el atractor en el espacio de fases a partir de una serie temporal. Este método se fundamenta en el *teorema de inserción* de Takens (1981 y 1985), que establece que, bajo ciertas condiciones, aunque no sea posible reconstruir la órbita del sistema dinámico en el espacio de fases original, sí será posible obtener una aproximación que resulte topológicamente equivalente[1], y que por tanto, permitirá extraer toda la información relevante acerca del sistema dinámico subyacente y desconocido que genera la serie temporal.

Un concepto fundamental relacionado con la reconstrucción del atractor es el de la *dimensión de inserción –embedding dimension–,* que estará definida como la dimensión del espacio de fases donde se reconstruye el atractor –*seudo-espacio de fases o espacio de inserción*–, y que como veremos posteriormente, además de darnos información válida para la reconstrucción del atractor, también nos da una idea aproximada de cual es la verdadera dimensión del sistema dinámico –grados de libertad– que genera la serie temporal observada.

Para mostrar en qué consiste la técnica de reconstrucción del espacio de fases

[1]A efectos prácticos, la equivalencia topológica puede considerarse como la equivalencia en las propiedades dinámicas y geométricas de ambas órbitas. Véase Lorenz 1993, p.83.

por el método de retardos, supongamos un proceso generado por un sistema dinámico *n*-dimensional definido en tiempo continuo,

$$\dot{\boldsymbol{x}}_t = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t) \quad ; \; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^n \; ; \; t \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

o en tiempo discreto:

$$\boldsymbol{x}_{t+1} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t) \quad ; \; \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D} \subset \mathbb{R}^n \; ; \; t \in \mathbb{N} \tag{5.2}$$

Supongamos que dicho proceso es observable (véase Luenberger, 1979, pp 303-314), pero que el observador no conoce ni la forma estructural del sistema dinámico (5.1-5.2), ni su dimensión *n*, ni tampoco el valor exacto de ninguna de las variables de estado. Lo único que se conoce es un *observable*, es decir, un escalar que el observador puede medir, y que denotamos por y_t. Dicho observable podrá ser una función de alguna de las *n* variables de estado del sistema o, de manera genérica, una función *h* –también desconocida para el observador– del conjunto de variables de estado del sistema:

$$y_t = h(\boldsymbol{x}_t) \tag{5.3}$$

De esta forma, la observación en el tiempo de la variable y_t proporciona una muestra o serie temporal de tamaño *N* de la cual se intentará extraer información sobre las propiedades cualitativas del comportamiento del sistema dinámico original en su evolución dentro del espacio de fases n-dimensional. Es decir, lo que se pretende con la técnica de la reconstrucción del atractor es reconstruir o extraer información sobre la dinámica oculta de $\boldsymbol{f}$ a partir de la serie temporal de la variable observada y_t. De hecho, como tanto el campo vectorial $\boldsymbol{f}$ como la función *h* son desconocidas, no se puede reconstruir el espacio de fases original. Sin embargo sí se puede formar un pseudo-espacio de fases capaz de representar la dinámica original

La reconstrucción del espacio de fases se basa en la proyección del escalar observado en otras variables $\boldsymbol{y}_t$ –*inserciones* o *embeddings*– *m*-dimensionales construidas a partir de la serie temporal retardada:

$$\boldsymbol{y}_t = \left(y_t \; , \; y_{t+\tau} \; , \; y_{t+2\tau} \; , \; y_{t+3\tau} \; , \; \cdots \; , \; y_{t+(m-1)\tau} \right) \tag{5.4}$$

siendo τ el *retardo de reconstrucción* –un periodo fijo de muestreo entre dos observaciones consecutivas– y *m* la *dimensión de inserción*. De esta forma, es posible obtener una trayectoria *m*-dimensional de inserciones de tamaño $N-(m-1)\tau$ –siendo *N* el tamaño muestral de la serie temporal, y_t: t=1,2, ... , *N*– construidas a partir de los valores de la serie temporal retardados en el tiempo:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y}_1 &= \left(y_1 \; , \; y_{1+\tau} \; , \; y_{1+2\tau} \; , \; y_{1+3\tau} \; , \; \cdots \; , \; y_{1+(m-1)\tau} \right) \\
\boldsymbol{y}_2 &= \left(y_2 \; , \; y_{2+\tau} \; , \; y_{2+2\tau} \; , \; y_{2+3\tau} \; , \; \cdots \; , \; y_{2+(m-1)\tau} \right) \\
\boldsymbol{y}_3 &= \left(y_3 \; , \; y_{3+\tau} \; , \; y_{3+2\tau} \; , \; y_{3+3\tau} \; , \; \cdots \; , \; y_{3+(m-1)\tau} \right) \\
&\cdots \\
\boldsymbol{y}_{N-(m-1)\tau} &= \left(y_{N-(m-1)\tau} \; , \; y_{N-(m-1)\tau+\tau} \; , \; \cdots \; , \; y_N \right)
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Si se eligen adecuadamente τ y m, la órbita descrita por (5.5) puede ser utilizada para aproximar la órbita descrita por el vector de estados del sistema original. La idea intuitiva que sustenta este método para reconstruir el atractor a partir de la serie temporal es que como la serie y_t procede de la observación de las variables del sistema (5.1-5.2), su evolución en el tiempo estará regida, de alguna forma, por las leyes de movimiento especificadas en el propio sistema, y por tanto, la información contenida en la serie debe ría retener las propiedades del sistema n-dimensional original (Solé y Manrubia, 1996, p.40.). De esta manera, como el valor de la variable y_t debe esta relacionado, a través del sistema dinámico, con el estado del sistema en el instante $t+\tau$, es posible aproximar el verdadero vector de estados del sistema en el instante t, por el vector m-dimensional (5.4) construido a partir de los valores retardados de la serie temporal observada.

El teorema de *inserción* de Takens (1981 y 1985), establece que, si (Lorenz, 1993, pág. 205):

- Las variables x^i del verdadero sistema dinámico se encuentran en el atractor.

- Las funciones $f_i(x)$ i=1,2..,n del verdadero sistema dinámico y la función de observación $h(\boldsymbol{x})$ son funciones *suaves* $-C^2-$

- $m > 2D_F$, siendo m un entero que representa la dimensión euclidea del espacio de inserción donde reconstruiremos el atractor; y D_F la dimensión fractal o de Hausdorff del verdadero atractor que puede ser entera o no pudiendo tomar valores en el intervalo $D_F \in [0,n]$, con n siendo la dimensión euclidea donde se representa el atractor del sistema dinámico desconocido, es decir, un entero que estará determinado por el número de variables de estado del sistema, y que podemos denominar como *dimensión dinámica* $D_d=n$ o número de grados de libertad activos en la dinámica subyacente a la serie temporal que verificará $m \geq D_d$ (Abarbanel, 1996, p51-53).

entonces podemos usar la serie temporal para aproximar la órbita del sistema desconocido en el espacio de fases n-dimensional utilizando los retardos de la serie para construir la órbita (5.5) que generará un conjunto en el espacio de inserción m-dimensional que será topológicamente equivalente al atractor original –y por tanto con sus mismas características cualitativas–.

Más concretamente, el teorema de inserción de Takens establece que (Soler y Manrubia, 1995 p. 241) dado un conjunto compacto n-dimensional M y $\Phi: M \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, tal que $\Phi \in C^2$, entonces Φ, genéricamente, es una *inserción*. Por inserción se entiende un difeomorfismo Φ que aplica M sobre otro conjunto $M^* \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. De esta forma, si el conjunto M es un atractor generado por un sistema dinámico n-dimensional, diremos que dos campos vectoriales C^r $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{g}$ son C^k equivalentes (con $k \leq r$) si existe un difeomorfismo Φ que transforma las órbitas $\phi(\boldsymbol{x},t)$ de $\boldsymbol{f}$ en órbitas $\phi^*(\Phi(\boldsymbol{x}),t)$ de $\boldsymbol{g}$ de forma que preservan la orientación.

De forma intuitiva, podemos identificar Φ como un cambio de coordenadas invertible y posiblemente no-lineal que aunque distorsiona el flujo, lo hace de forma suave. Es decir, la principal implicación del teorema de inserción es que el atractor original es aplicado inyectivamente en el pseudo-espacio de fases m-dimensional (Feeny y Liang, 1997) preservando el orden en que las trayectorias visitan distintos puntos del atractor (Solé y Manrubia, 1996, p.241), lo que permite utilizar el atractor reconstruido en el espacio de inserción para estimar las propiedades cualitativas del sistema en el espacio de fases original. Dicho de otra forma, las *inserciones* construidas a partir de los valores retardados de la serie observada y_t (5.4), serán topológicamente equivalentes al espacio de estados del sistema dinámico original y si éste es caótico y posee un atractor extraño de baja dimensión, sus propiedades se conservarán en el atractor reconstruido con la secuencia de las inserciones m-dimensionales (5.5).

De esta forma, el teorema de inserción de Takens garantiza que las características dinámicas y topológicas de un atractor –dimensión fractal y exponentes de Lyapunov– se mantienen en ese espacio reconstruido a partir de la serie temporal por el método de los retardos. Esto nos permitirá diferenciar entre un movimiento puramente estocástico frente a la alternativa de caos, ya que las propiedades de las trayectorias caóticas en el espacio de fases original se podrán estudiar a partir del espacio de fases reconstruido por el método de los retardos.

La simple inspección del espacio de inserción reconstruido a partir de la serie temporal proporciona una vía alternativa para detectar la dinámica económica caótica. Para ello habrá que compar los patrones geométricos resultantes de la reconstrucción con los producidos por otros sistema conocidos –figuras 5.1-5.6– . Así, los ciclos límite de dinámica simple presentarán órbitas cerradas; el ruido blanco, produce en el espacio de fases una nube de puntos uniformemente distribuida ; mientras que los sistemas caóticos generarán situaciones intermedias, no serán ni órbitas cerradas ni nubes de puntos uniformemente distribuidas.

En cualquier caso, será la estimación de las medidas invariantes para el atractor reconstruido –dimensión fractal y exponentes de Lyapunov– las que indicarán si estamos efectivamente ante series generadas por modelos de dinámica caótica.

5.2. La determinación del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor

Como decíamos, tanto el retardo τ como la dimensión de inserción m, deberán elegirse de manera adecuada para que la reconstrucción del atractor por el método de los retardos revele la verdadera información sobre la dinámica subyacente en una serie temporal. El teorema de Takens proporciona un límite inferior a la dimensión m que debe utilizarse en la reconstrucción del atractor, $m>2D_F$, aunque no dice nada sobre el retardo τ. En realidad, el teorema de Takens es válido para cualquier retardo temporal siempre que se tenga una cantidad infinita de datos infinitamente precisos. Ahora bien, como en la práctica, las muestras temporales disponibles son finitas y presentan como mínimo cierto componente de ruido o error de medida, deberemos utilizar algún método que nos ayude a determinar cual es el retardo τ apropiado u óptimo para la reconstrucción. Sobre la elección de la dimensión de inserción m volveremos en el próximo apartado, centrándonos de momento en la elección del τ óptimo.

Comenzamos apuntando que el retardo τ deberá ser siempre un múltiplo del intervalo de muestreo Δt, ya que sólo se disponen de datos para la serie temporal para esos intervalos de tiempo. En adelante supondremos que τ está definido sobre la secuencia de valores de la serie muestrados a intervalos Δt, esto es, $\tau=\Delta t$, $2\tau=2\,\Delta t$, $3\tau=3\Delta t$; $4\tau=4\Delta t$,... . Por otra parte, podemos añadir que el retardo τ no podrá ser ni muy pequeño ni muy grande, de forma que se permita un desacoplamiento significativo entre los valores consecutivos de la serie sin llegar a su independencia completa (Manrubia y Solé, 1996, 243)–figuras 5.1-5.6–.

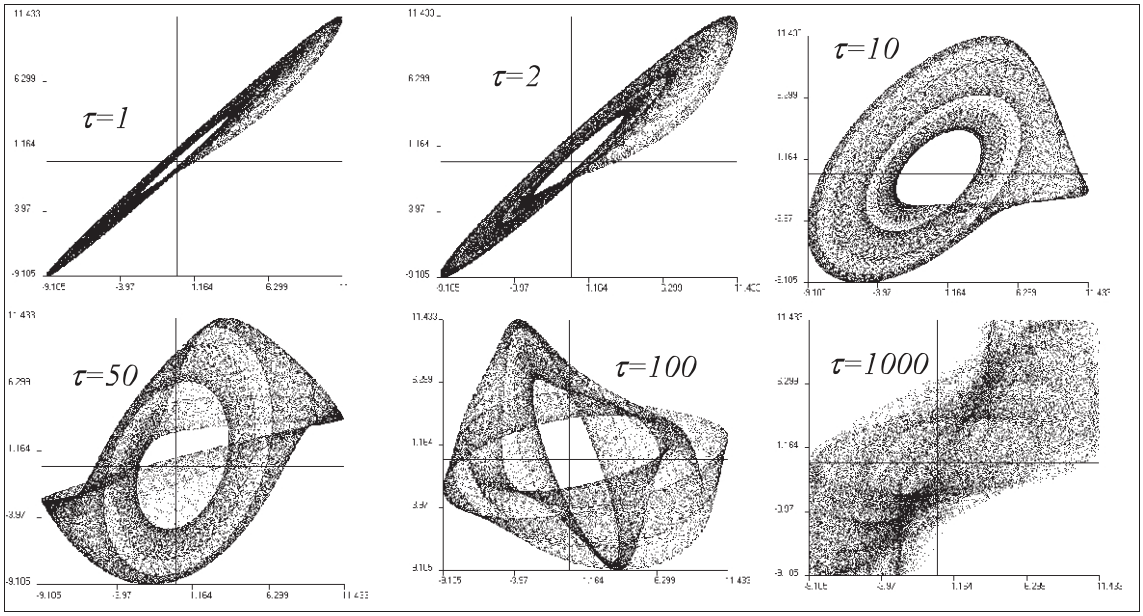


Figura 5.1. Reconstrucción del atractor caótico de Rössler, proyecciones sobre el plano para varios retardos de x_t (Δt=0.1).

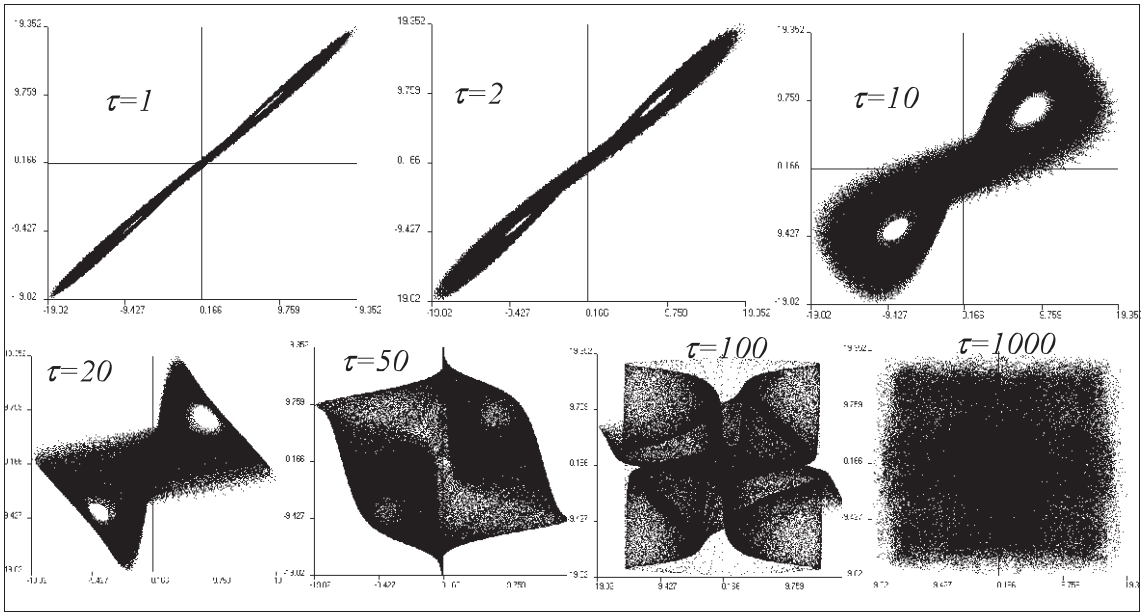


Figura 5.2 Reconstrucción del atractor caótico de Lorenz, proyecciones sobre el plano para varios retardos de x_t (Δt=0.01).

Si τ es demasiado bajo, no habrá pasado suficiente tiempo entre las dos observaciones como para que la evolución de la serie proporcione *nueva* información sobre el estado de fases original, esto es, los valores de y_t e $y_{t+\tau}$ serán esencialmente idénticos a efectos prácticos, linelamente dependientes o no suficientemente independientes como para que se puedan distinguir el uno del otro en cuanto a la información que son capaces de revelar sobre la dinámica del sistema subyacente. En general, el atractor resultante cuando τ es muy pequeño representará una figura muy concentrada en la diagonal central del espacio de inserción m-dimensional, no pudiéndose recoger información sobre el verdadero

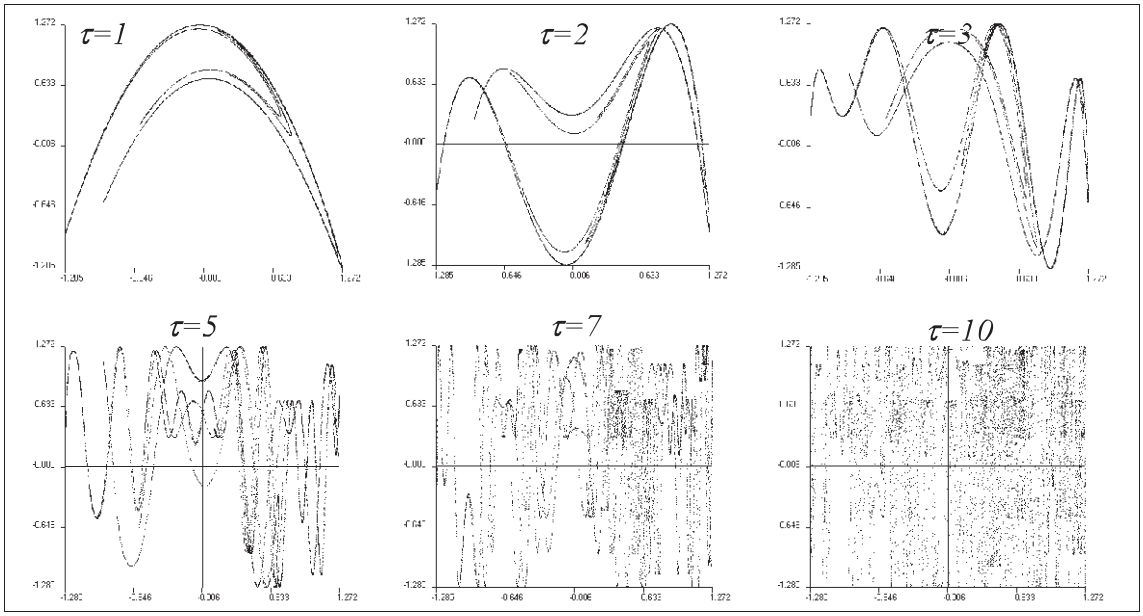


Figura 5.3 Reconstrucción del atractor caótico de Henon, proyecciones sobre el plano para varios retardos de x_t (Δt=1)

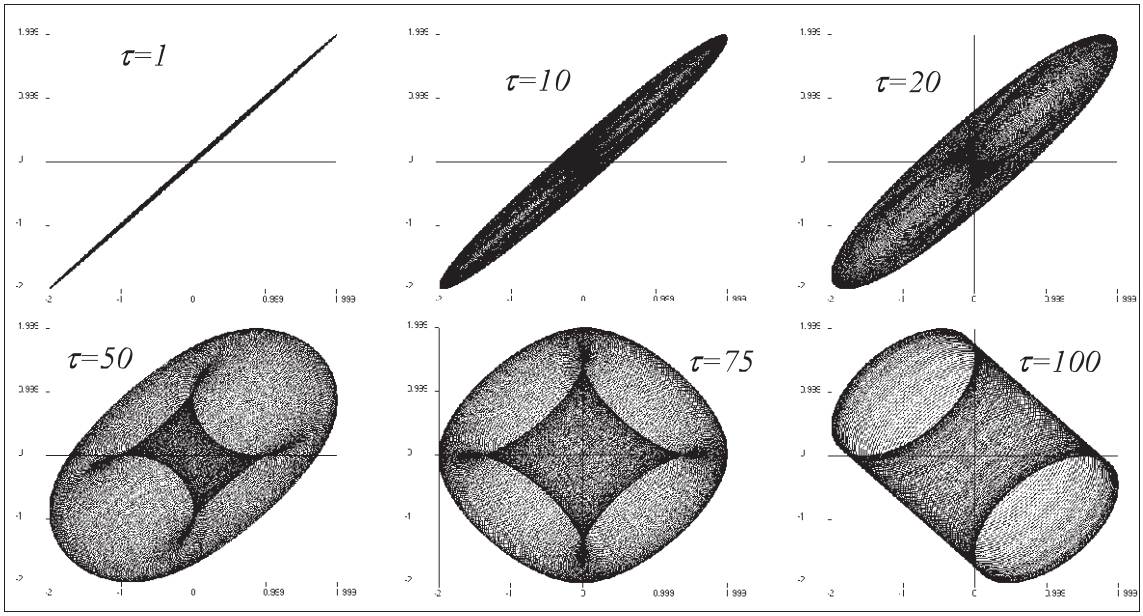


Figura 5.4 Reconstrucción del atractor toroidal (2-25), proyecciones sobre el plano para varios retardos de x_t (Δt=0.01)

espacio de estados del sistema original –no se revela nada sobre la dependencia temporal entre y_t e $y_{t+\tau}$–. Este problema es especialmente importante para el caso de los sistemas definidos en tiempo continuo ya que, por regla general, los sistemas en tiempo discreto el retardo τ=1 –el mínimo posible– será suficiente para reconstruir el atractor. Si adicionalmente la serie está perturbada por ruido, los problemas derivados de elegir un retardo excesivamente pequeño se ven agravados, ya que en este caso no se podrá extraer nada de información sobre la dinámica subyacente, que aparecerá como puramente aleatoria (Kugiumtzis,Lillekjendlie y Christophersen, 1994, p.6).

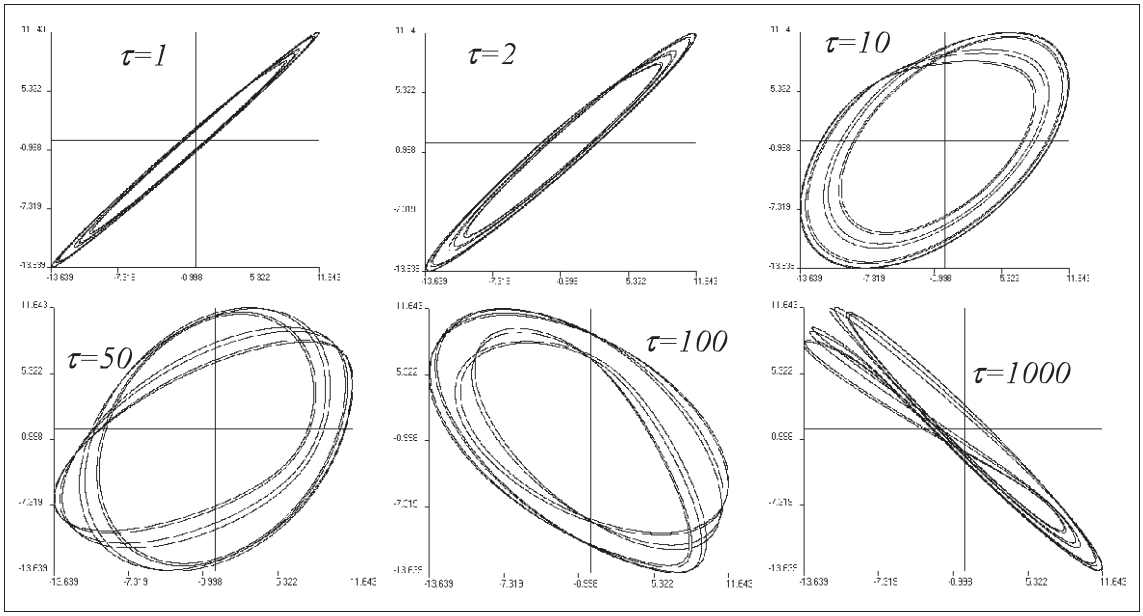


Figura 5.5 Reconstrucción de un ciclo límite (modelo de Rössler periodo 8), proyecciones sobre el plano para varios retardos (Δt=0.1)

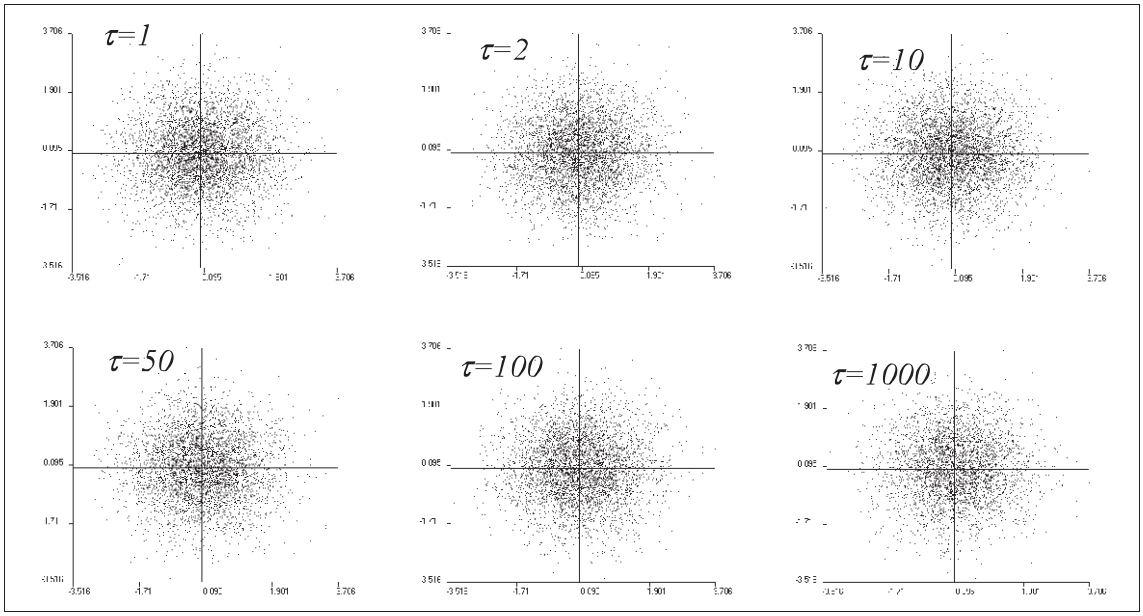


Figura 5.6 Reconstrucción de un paseo aleatorioIID N(0,1), proyecciones sobre el plano para varios retardos (Δt=1)

Por otra parte, el retardo τ tampoco deberá ser muy grande, ya que entonces y_t e $y_{t+\tau}$ estarán muy alejados en el tiempo y si el sistema dinámico es caótico y presenta dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales, no podrá detectarse la correlación o dependencia dinámica entre ambos valores. Es decir, no se podrá asegurar que ambos valores estén conectados en el tiempo por el sistema dinámico (5.1-5.2). En este caso, si el sistema es caótico, la figura geométrica dibujada por la reconstrucción del atractor tendrá a confundirse con la correspondiente a un proceso puramente estocástico incorrelacionado en el tiempo –la dependencia respecto a las condiciones iniciales hará que los posibles errores de medida tiendan a crecer en el tiempo hasta que las observaciones y_t e $y_{t+\tau}$ estén totalmente incorrelacionadas en sentido estadístico–.

Dos son, fundamentalmente, los métodos que se han propuesto para la elección del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor. Ninguno de ellos con una demostración formal que justifique su uso. El primero propone utilizar aquel retardo para el que la función de autocorrelación alcanza su primer cero. Este método se fundamenta en que precisamente para ese retardo los valores de la serie estarán linealmente incorrelacionados, pudiendose sin embargo, captar la estructura no lineal del proceso dinámico subyacente si dicho retardo no es excesivamente elevado (Kugiumtzis, Lillekjendlie y Christophersen,1994,p.6). Este método aunque proporciona retardos adecuados en algunos casos, en otros, como en el atractor de Lorenz –figura 5.7– supone la elección de un retardo demasiado elevado para la reconstrucción del atractor –obsérvese, que para el atractor de Lorenz no se alcanza un primer cero hasta el retardo 441–.

El segundo método para la elección del retardo óptimo en la reconstrucción del atractor, de mayor aceptación y más sofisticado que el anterior, fue propuesto por Fraser y Swinney (1986) quienes utilizan un criterio más general de

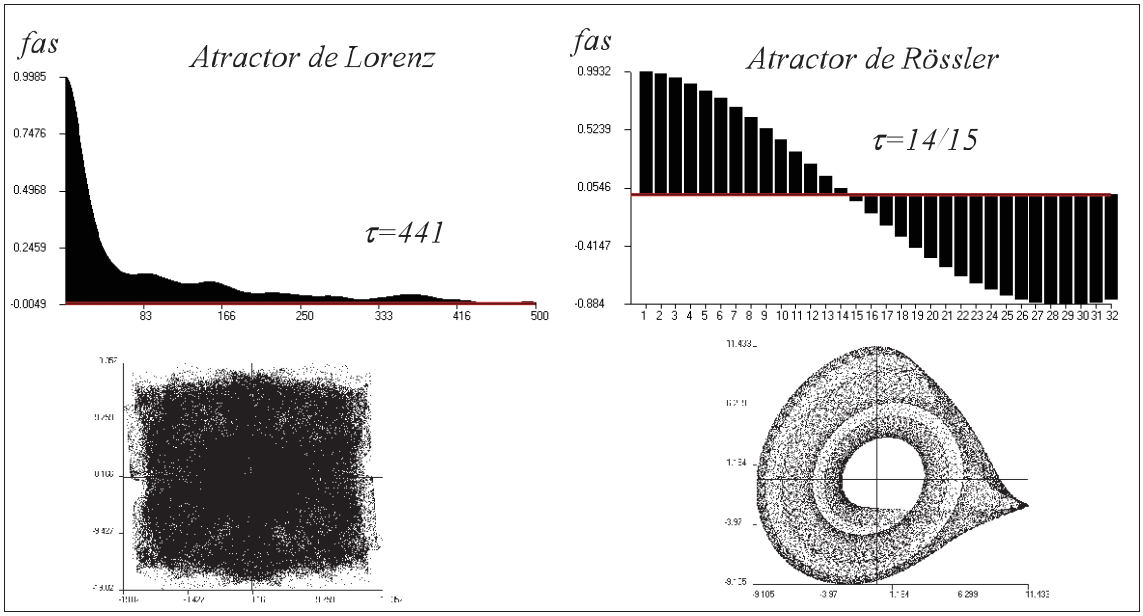


Figura 5.7. Elección del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor caótico de Rössler y el de Lorenz por el primer cero de la función de autocorrelación simple.

independencia basado en la *función de información mutua media*. Esta función supone una generalización de la función de correlación lineal y es capaz de captar cualquier tipo de correlación o dependencia lineal o no lineal entre dos observaciones separadas por un retardo τ. La *función de información mutua* mide la información que se puede obtener sobre $y_{t+\tau}$ a partir del conocimiento de y_t. Así, este método propone utilizar como retardo para la reconstrucción aquél para el cual se alcance el primer mínimo de la función de información mutua, ya que entonces, el retardo será suficientemente alto como para que los dos valores no estén proporcionando la misma información, pero sin perder del todo la dependencia proporcionada por el sistema dinámico subyacente, ya que a partir de dicho retardo –el primer mínimo–, la información mutua comienza a aumentar.

El método de la información mutua se basa en la teoría de la información y el concepto de entropía. Con la teoría de la información se trata de medir el grado de incertidumbre que se tiene sobre un sistema a partir del conocimiento que se genera con la información muestral del mismo. A modo de ejemplo ilustrativo que permita introducir una medida de dicha incertidumbre, consideremos dos fenómenos o sistemas que puedan concretarse en dos sucesos o estados el primero –el lanzamiento de una moneda– y en seis el otro –el lanzamiento de un dado– (seguimos aquí a Lopez Cahero 1988, pp.575-586). Es claro que existe, a priori, una mayor incertidumbre sobre el segundo de los sistemas ya que el número de estados en que puede concretarse es mayor. De aquí se desprende que en principio, el grado de incertidumbre atribuible a un sistema depende del número de posible estados de éste, pero no exclusivamente de este factor. Supongamos adicionalmente que en el primer sistema todos sus estados sean equiprobables –con probabilidad 1/2–, pero que en el segundo uno de ellos tenga más probabilidad de ocurrir que el resto –pongamos que el dado está trucado de forma que la probabilidad de que salga un uno es de 5/6– . Bajo estos supuestos

adicionales, es también claro, que ahora se tiene mayor incertidumbre sobre el primer sistema que sobre el segundo, así que cualquier medida de incertidumbre debe tener en cuenta no sólo el número de estados del sistema sino también sus correspondientes probabilidades a priori de ocurrir.

Imaginemos ahora que queremos construir o definir una medida de la información que sobre el conocimiento del sistema proporciona el acaecimiento de un suceso dado. Así dado un sistema X que puede encontrarse en un momento cualquiera, en un estado cualquiera de n posibles (x_i:$i=1, \ldots, n$) tendremos que cada uno de ellos posee una probabilidad a priori p_i –probabilidad a priori de que el sistema se encuentre en el estado x_i–:

$$H_i{:}x\sim x_i \quad ; \; P(H_i)=P(x\sim x_i)=p_i \; ; \quad con \sum_{i=1}^{n} p_i=1 \tag{5.6}$$

Supongamos que hemos recogido información sobre el estado del sistema que denotaremos por z. Entonces podemos definir una medida de información que sobre el acaecimiento de H_i proporciona el suceso z, teniendo en cuenta que un suceso más improbable proporciona más información[2], como el logaritmo del cociente entre la probabilidad a posteriori de que dada esta información muestral el sistema se encuentre en el estado x_i –P(H_i/z)– y la probabilidad a priori de H_i[3]:

$$I_i=\log_k\left[\frac{P(H_i/z)}{P(H_i)}\right]=\log_k[P(H_i/z)]-\log_k[P(H_i)] \tag{5.7}$$

Si suponemos adicionalmente que sólo podemos recabar información sobre H_i mediante el acaecimiento de H_i tendremos que P(H_i/z)=1, por lo que la información a posteriori sobre el suceso H_i quedará:

$$I_i=-\log_k[P(H_i)]=-\log_k p_i \tag{5.8}$$

Obsérvese que el logaritmo puede definirse en cualquier base k. Cuando se define el logaritmo en base dos se dice que la información se está midiendo en bits. La expresión (5.8) proporciona la información concerniente al estado x_i. Sí definimos al variable aleatoria *información* correspondiente al sistema X, su distribución de probabilidad estará en función de sus posibles valores, I_i (i=1, .. ,n) y sus respectivas probabilidades $P(I_i)=P(X\sim x)=p_i$. Así, se puede definir la *entropía* del sistema $H(x)$ como el valor probable de la información del sistema:

$$H(x)=E(I)=\sum_{i=1}^{n} I_i{\cdot}p_i=-\sum_{i=1}^{n} p_i{\cdot}\log_k p_i \tag{5.9}$$

El rango de la entropía estará delimitado en el extremo inferior por el valor cero –$0\le H(x)$–. El caso límite en el que $H(x)=0$ se presenta en sistemas

---

[2] Por ejemplo, al resolver un crucigrama en castellano, la letra *z* o la *w* restrigen más las posibilidades y en ese sentido proporcionan más información (Solé y Manrubia, 1996, p.17)

[3] El hecho de utilizar logaritmos se justifica por que como parece razonable la información que proporciona realizaciones suscesivas e independientes del sistema –con probabilidad conjunta multiplicativa– añaden Información de manera aditiva.

deterministas, en los que x_i se presenta con probabilidad $p_i = 1$ y $p_j = 0\ \forall j \neq i$ –el carácter determinista del sistema implica que el acaecimiento del suceso x_i no facilita ninguna información adicional, ya que este es el valor que se presenta permanentemente con probabilidad unitaria–. En el extremo superior, la entropía del sistema estará acotada por $H(x) \leq \log n$. El caso límite $H(x)=\log n$ se presentará en aquellos sistemas en los que los distintos estados en que pueda concretarse el sistema sean equiprobables[4]. Tendremos, por tanto, que:

$$0 \leq H(x) \leq \log n \tag{5.10}$$

En el caso de que el sistema pueda tomar un conjunto infinito de posibles estados con la misma probabilidad, la entropía máxima será infinita[5].

Retomemos ahora el problema de la elección del retardo óptimo τ para la reconstrucción del atractor. Como dijimos, este retardo debe ser lo suficientemente grande como para que las observaciones muestrales y_t e $y_{t+\tau}$ proporcionen distinta información sobre la dinámica subyacente en el sistema, pero tampoco demasiado alto para evitar que ambos valores estén totalmente

---

[4] Al ser equiprobables $p_i=1/n\ \forall i=1, \ldots, n$, y por tanto, $H(x) = -\sum \frac{1}{n}\log\left(\frac{1}{n}\right) = \log n$.

Nótese que en el caso límite en el que el sistema pueda tomar un conjunto infinito de posibles estados con la misma probabilidad, la entropía máxima será infinita

[5] Cuando estamos ante sistemas compuestos o bidimensionales,en los que el estado del sistema queda definido por el valor que tomen dos variables aleatorias (x,y) : x_i (i=1,...,n); y_j (j=1, ..., m), la entropía o información media del sistema compuesto se define como :

$$H(x,y) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\log p_{ij}$$

siedo p_{ij} la probabilidad conjunta de que el sistema se halle en el estado (x_i,y_j):

$$= P(x \sim x_i\ ;\ y \sim y_j) = p_{ij}\ ;\quad con \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$$

Puede definirse también la entropía condicional de y cuando x se encuentra en x_i:

$$H(y/x_i) = -\sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\cdot\log p(y_j/x_i)$$

siendo $p(y_j/x_i)$ la probabilidad condicional a priori de que el sistema compuesto. La entropía total de y para cualquiera que sea el estado en que se encuentre x será:

$$H(y/x) = \sum_{i=1}^{n} p_i H(y/x_i) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \sum_{j=1}^{m} p(y_j/x_i)\log p(y_j/x_i)$$

ahora bien, como $p_{ij}=p_i \cdot p(y_j/x_i)$, entonces la entropía condicionada $H(y/x)$ quedará:

$$H(y/x) = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} p_{ij}\log p(y_j/x_i)$$

La interpretación de la entropía $H(y/x)$, es el de la información media facilitada sobre y a través de x –información debida a un canal– .En general se tendrán las siguientes propiedades: $H(y/x) \leq H(y)$; $H(x,y) = H(x) + H(y/x) = H(y)+H(x/y)$; $H(x,y) \leq H(x)+H(y)$. Sólo en el caso de que x e y sean independientes tendremos $H(x,y)=H(x) + H(y)$.

incorrelacionados y no pueda extraerse información sobre la dinámica de la serie en el paso de t a $t+\tau$. Empecemos definiendo, de manera análoga a (7), la información que sobre un posible valor y^i de la serie temporal proporciona el conocimiento del valor concreto que haya tomado la serie τ instantes antes en el tiempo:

$$I_i(\tau)=\log\left[\frac{P\left(y^i_{t+\tau}/y_t\right)}{P(y^i_{t+\tau})}\right] \tag{5.11}$$

Esta expresión se denomina *información mutua*, y proporciona una medida de la cantidad de información aprendida sobre $y^i_{t+\tau}$ por la observación de y_t. Si tenemos en cuenta que por definición, para dos variables aleatorias cualesquiera x e y la probabilidad conjunta $p_{xy}=p_x \cdot p(y/x)$, y si calculamos la media sobre todos los posibles pares $(y_t,y_{t+\tau})$,podemos definir la *función de información mutua media* entre dos valores de una serie temporal separados por un retardo τ como (Abarbanel, 1996, pp.28-29):

$$I(\tau)=\sum_{t=1}^{N-t} p(y_t,y_{t+\tau})\ \log\left(\frac{p(y_t,y_{t+\tau})}{p(y_t)p(y_{t+\tau})}\right) \tag{5.12}$$

Esta *función de información mutua I(τ)* entre y_t e $y_{t+\tau}$ proporciona una idea de la dependencia mutua entre ambas variables basada en la noción de información entre los dos valores, es decir, proporciona una medida de la cantidad de información que se puede obtener sobre $y_{t+\tau}$ a partir del conocimiento de y_t. Desde este punto de vista se puede considerar que trata de una función de autocorrelación general, capaz de captar correlaciones o dependencias en el tiempo de todo tipo, lineales y no lineales, y por tanto supone un instrumento más general que la función de autocorrelación simple analizada en el capítulo anterior –que sólo capta correlaciones lineales en la serie–. De forma genérica, tendremos que $I(\tau)\geq 0$, siendo nula cuando las observaciones sean totalmente independientes

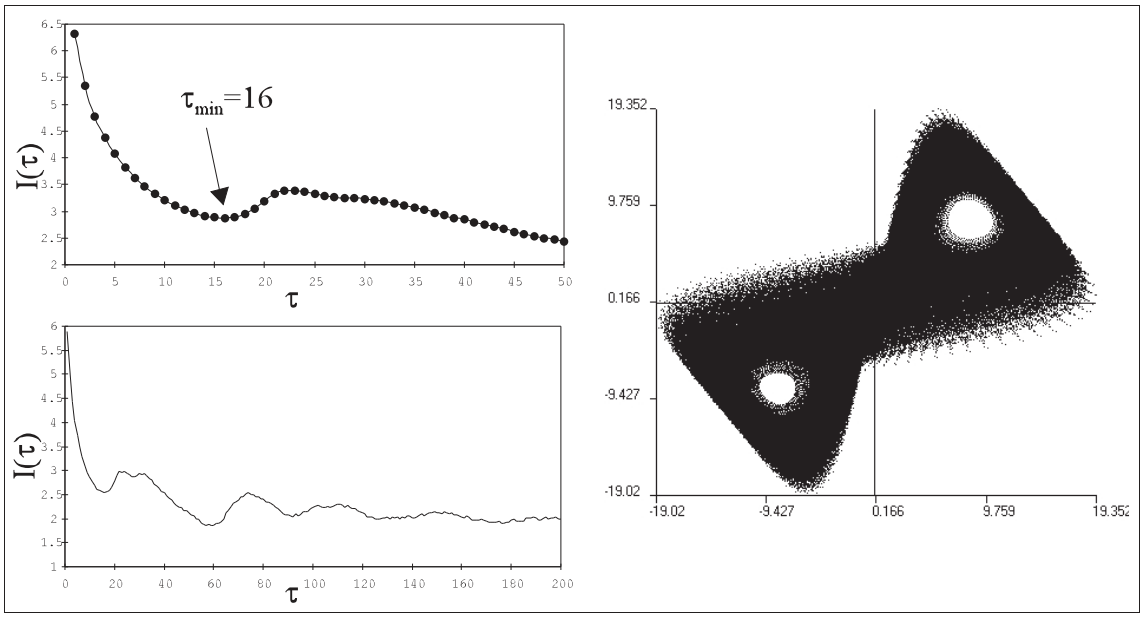


Figura 5.8. Información mutua atractor caótico de lorenz

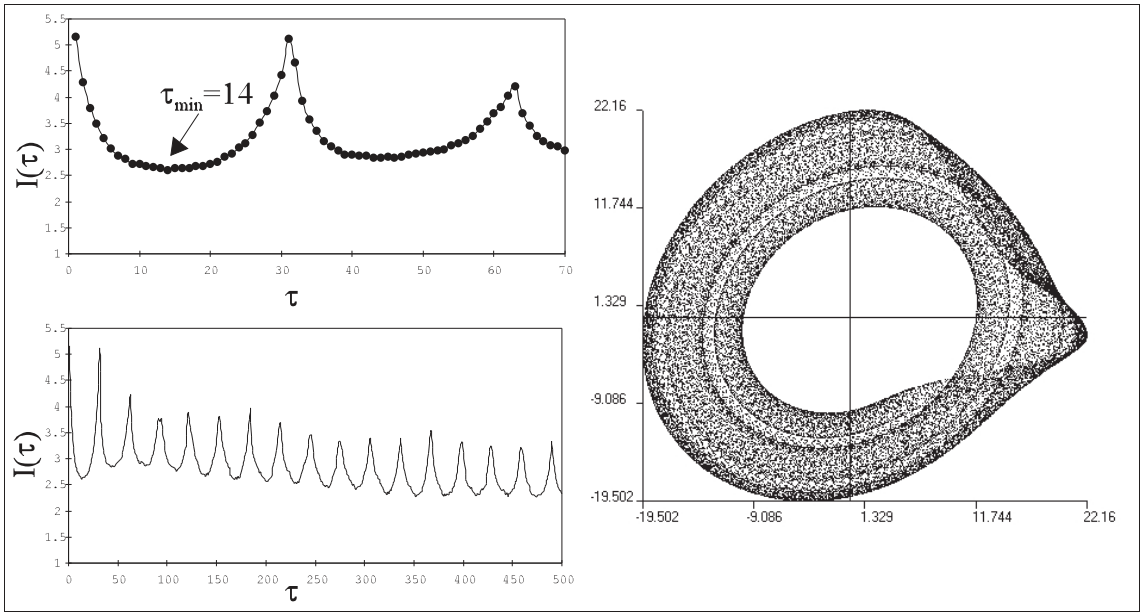


Figura 5.9. Información mutua media atractor caótico de Rösler.

–a su vez *I(0)* estará directamente relacionada con la entropía de la serie y_t definida en (5.9)–.

La función de información muta puede calcularse fácilmente para una serie temporal aplicando la expresión (5.12), estimando, mediante la construcción de una tabla de frecuencias, las probabilidades $p(y_t)$, $p(y_{t+\tau})$ y $p(y_t, y_{t+\tau})$. A partir de esta estimación de $I(\tau)$, Fraser y Swinney (1986) proponen utilizar como retardo para la reconstrucción aquél para el cual se alcance el primer mínimo de la función de información mutua, ya que entonces, el retardo será suficientemente alto como para que los dos valores no estén proporcionando la misma información, pero sin perder del todo la dependencia proporcionada por el sistema

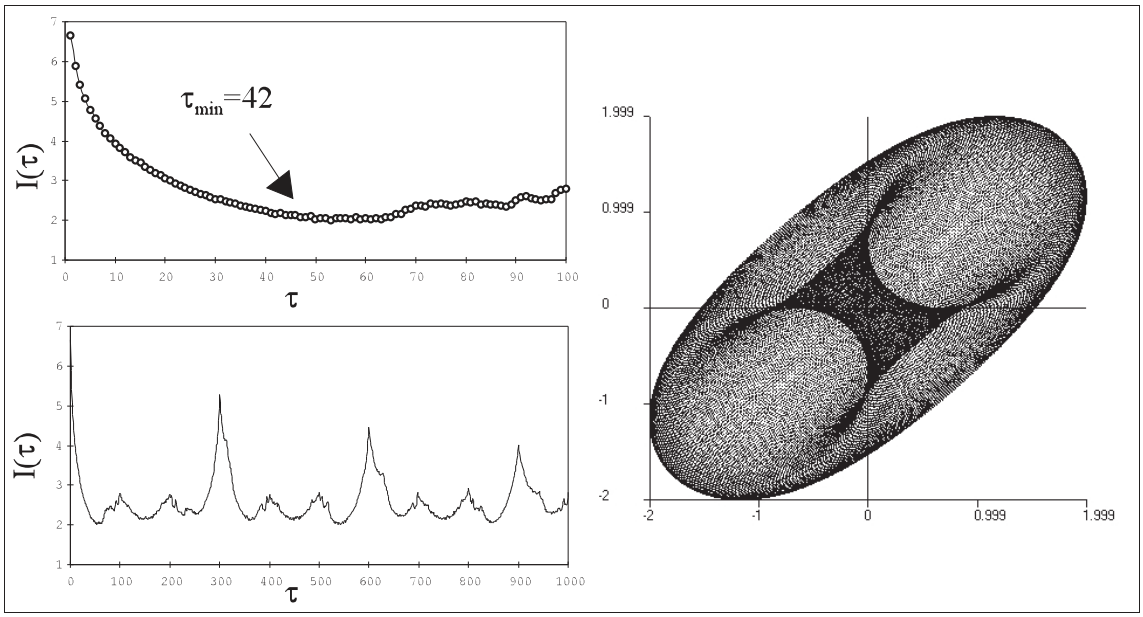


Figura 5.10. Información mutua sistema cuasi-periódico toroidal.

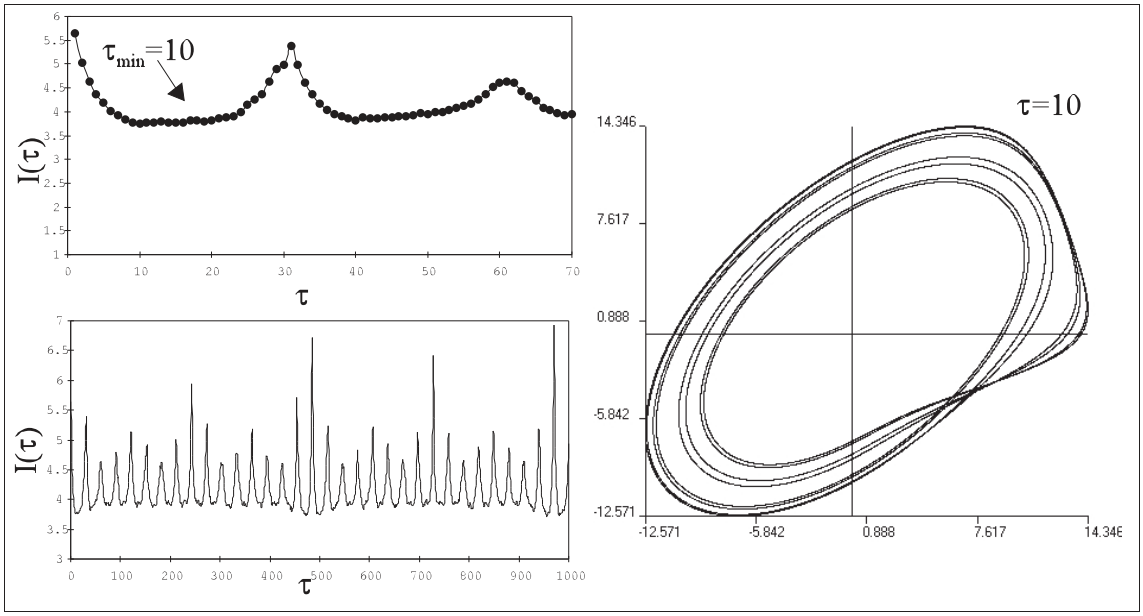


Figura 5.11. Información mutua media. Ciclo límite (modelo de Rössler)

dinámico subyacente, ya que a partir de dicho retardo –el primer mínimo–, la información mutua comienza a aumentar.

Este método proporciona, en general, mejores resultados que el método del primer cero de la función de autocorrelación simple, aunque no existe ninguna demostración formal que justifique su uso más alla del razonamiento en términos de información y dependencia apuntado anteriormente.En cualquier caso, la reconstrucción del atractor utilizando retardos entre el primer mínimo, y el primer máximo de la $I(\tau)$ no debe variar significativamente –y por tanto tampoco deben variar las estimaciones de la dimensión fractal y el espectro de exponentes de Lyapunov a partir del atractor reconstruido por el método de los retardos

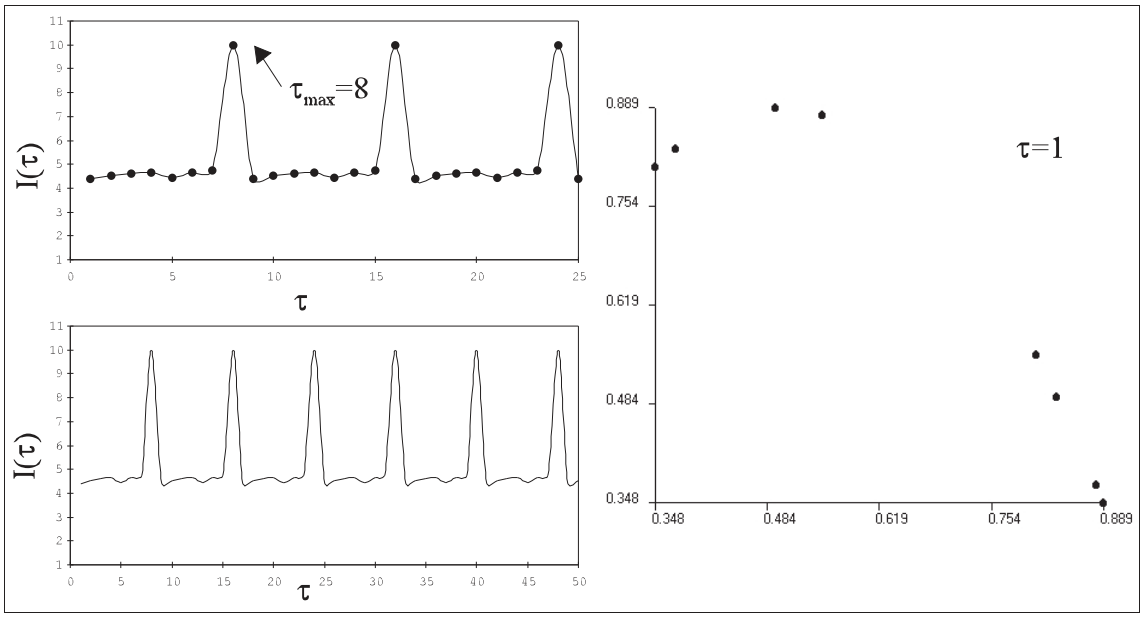


Figura 5.12. Información mutua media aplicación logística μ=3.56 –ciclo límite periodo 8–

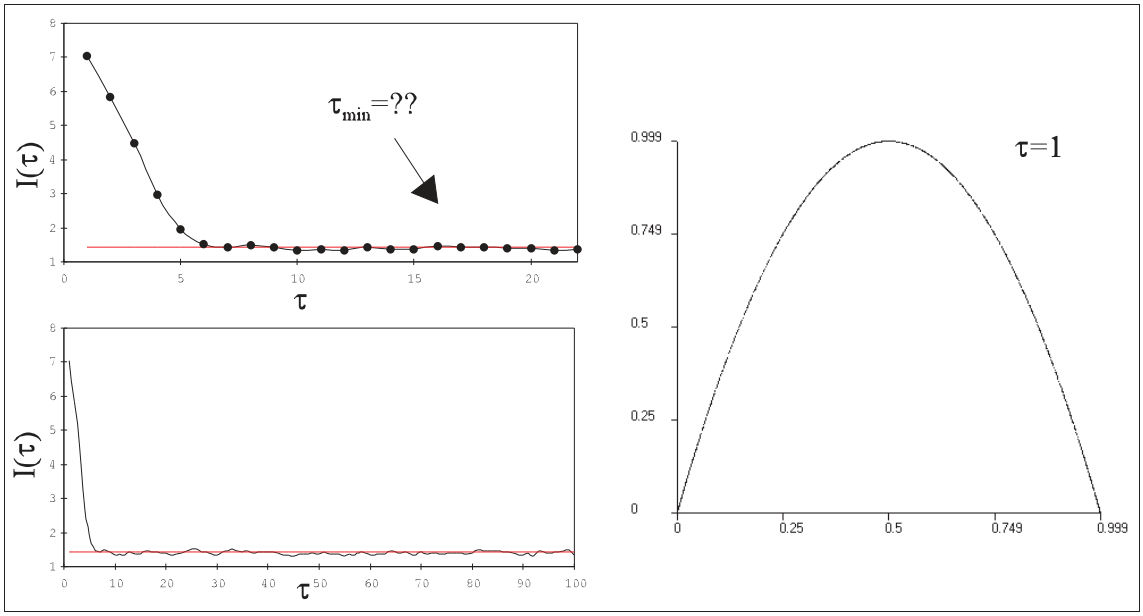


Figura 5.13. Información mutua media aplicación logística μ=4

(Abarbanel, 1996, p.37)–. En las figuras 5.8 a 5.14 mostramos la función de información mutua media para una selección de series temporales junto a la correspondiente representación del atractor reconstruido utilizando el criterio del primer mínimo. En general, la $I(\tau)$ irá decreciendo rápidamente hasta anularse cuando estemos ante series generadas por aplicaciones discretas de primer orden en régimen caótico, no alcánzándose ningún primer mínimo, lo que indicará que el primer retardo será suficiente para una adecuada reconstrucción del atractor. En las aplicaciones discretas periódicas de orden k aparecerán picos en la $I(\tau)$ estimada en los retardos $\tau=k$ y sus múltiplos antes de anularse, aunque al tratarse de sistemas discretos siempre aparecerá un primer mínimo en el retardo $\tau=1$ –en el método utilizado para la estimación de la función de información mutua media

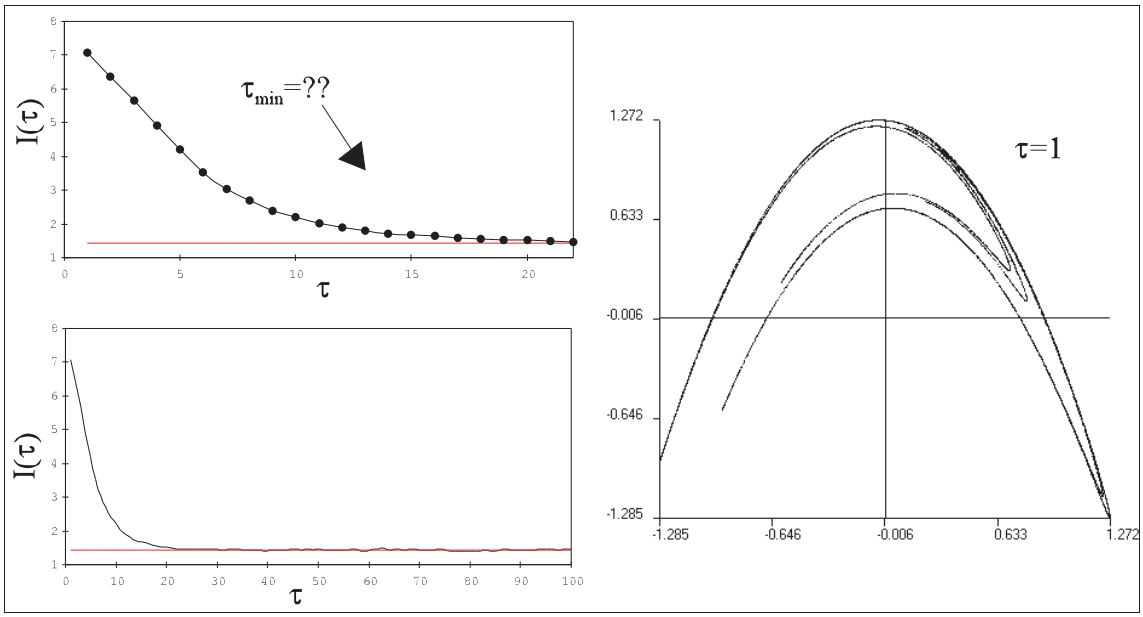


Figura 5.14. Información muta media Atractor de Henon.

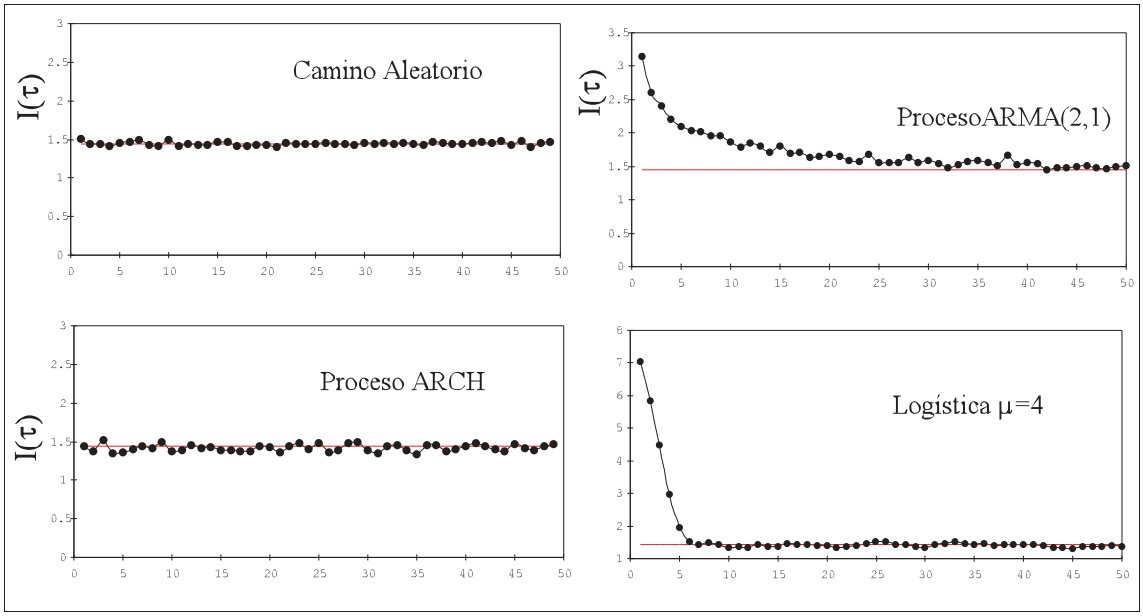


Figura 5.15. Información mutua media de procesos estocásticos: camino aleatorio , GARCH, ARMA(2,1), y caótico determinista.

se ha hecho un cambio de escala de manera que aunque la apariencia del gráfico no cambia, el valor para el cual se anula la función de información se corresponde con el valor $1/\ln(2) \approx 1.443$ (véase Reiss, 1999),–. En el resto de casos, el máximo de la $I(\tau)$ estará indicando el retardo para el que se alcanza la máxima correlación o dependencia entre los valores de una serie temporal –que a su vez se corresponderá con el periodo fundamental presente en la serie temporal–.

Finalmente en la figura 5.15 mostramos la función de información mutua media para un camino aleatorio, un proceso GARCH, un modelo ARMA (2,1) y para la ecuación logística con $\mu=4$. Como cabría esperar, el análisis de la información mutua no recoge ninguna dependencia significativa en el camino aleatorio, mientras que, a diferencia de la función de correlación simple analizada en el apartado 4.3, si es capaz de recoger la dependencia de carácter no lineal presente en la ecuación logística. Es por ello, que la función de información mutua, además de proporcionar un método para la elección del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor, puede utilizarse para complementar el análisis del correlograma para detectar posibles correlaciones y periodicidades no-lineales ocultas en la serie.

Este método, sin embargo, no proporciona información sobre el carácter caótico de las series, ya que, a modo de contra ejemplo, podemos apuntar que la figura que muestra la información mutua para el proceso lineal ARMA es muy parecida a la de la ecuación logística –decaimiento, aunque más lento, hasta anularse–. Habrá que seguir, por tanto, estudiando la serie con otras técnicas para la detección del caos, las medidas invariantes proporcionadas por la dimensión fractal y los exponentes de Lyapunov, para lo cual, será necesario elegir la dimensión del espacio de inserción en el que intentaremos reproducir o reconstruir el atractor del proceso o sistema dinámico generador de la serie temporal.

5.3. La determinación de la dimensión de inserción: el porcentaje de falsos vecinos

Tras la elección del retardo óptimo, el siguiente paso en la reconstrucción del atractor a partir de la serie temporal observada consiste en la elección de la dimensión de inserción apropiada.

Recordemos que el teorema de Takens garantiza que si somos capaces de observar un escalar $y_t = h(\boldsymbol{x}_t)$, donde $\boldsymbol{x}_t$ es el vector de estados n-dimensional de un sistema dinámico definido por un campo vectorial $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t)$, entonces la estructura geométrica de la dinámica multivariante desconocida generada por la solución del sistema dinámico –la órbita descrita por la secuencia de puntos $\boldsymbol{x}_t$ en el espacio euclideo de dimensión n– puede ser *recuperada* desde ese conjunto de medidas escalares construyendo nuevos vectores m dimensionales, $\boldsymbol{y}_t$, cuyos componentes será los retardos de la señal escalar[6]:

$$\boldsymbol{y}_t = \left(y_t \, , \, y_{t+\tau} \, , \, y_{t+2\tau} \, , \, y_{t+3\tau} \, , \, \cdots \, , \, y_{t+(m-1)\tau} \right) \tag{5.13}$$

Para que la reconstrucción de un atractor por el método de los retardos conserve las propiedades del sistema dinámico generador de la serie temporal, el teorema de inserción Takens exige que, además de que la serie se obtenga una vez que el proceso dinámico subyacente se encuentre ya en el atractor, que tanto las funciones estructurales que definen el sistema dinámico como la función que transforma el espacio de estados en la serie temporal escalar sean suaves. Este último es el principal ingrediente del teorema de Takens, ya que aunque en él se exige adicionalmente que la dimensión euclidea de inserción m –en la que se reconstruirá el espacio de fases– sea superior al doble de la dimensión fractal del atractor original $m > 2D_F$–, esta condición es en realidad una condición suficiente pero no constituye una condición necesaria. Dicho de otra forma, alcanzar la dimensión de inserción que establece el teorema de Takens garantiza que se preservan las propiedades de la dinámica original, posibilitándose así la detección comportamientos caóticos a partir de una serie temporal observada. Sin embargo hay que decir que desde el punto de vista práctico, la reconstrucción de la dinámica de un sistema de dimensión n no requiere, en general, dimensiones de inserción tan altas como $2D_F$. El único requisito que debe exigirse a dicha dimensión m es que sea lo suficientemente grande como para capturar todos los grados de libertad presentes en el sistema dinámico, es decir, el número de variables de estado activos o dimensión dinámica del sistema ($D_d = n$). Así, la condición necesaria –pero no suficiente– para poder reconstruir un atractor será que la dimensión de inserción no pueda ser nunca inferior a la dimensión dinámica del sistema subyacente, esto es, $m \geq D_d$.

[6] Obsérvese que el vector $\boldsymbol{y}_t$ no tiene que tener la misma dimensión que el vector de estados original $\boldsymbol{x}_t$.

Existen distintas aportaciones que tratan de detectar cual es la dimensión mínima necesaria para recoger la verdadera dinámica subyacente en una serie temporal, de forma que se optimice la información disponible –lo que resulta especialmente conveniente cuando estamos ante series cortas como en el caso de la economía–.

Un primer método entre los más utilizados es el de la *descomposición en componentes principales* o *descomposición de Karhunen-Loeve* (véase Fernández Rodríguez, 1995,140-144). Este método parte de una reconstrucción inicial del espacio de fases con una dimensión de inserción arbitrariamente grande, incluso mayor que la propuesta en el teorema de Takens. A partir de esa secuencia de m-historias $\boldsymbol{y}_t$ construidas por el método de los retardos se forma la matriz $\mathbf{V}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_{\,m \times m}$ donde las filas de la matriz $\mathbf{X}_{\,(N-m) \times m}$ son los vectores de estado $\boldsymbol{y}_t$ (t=1, ..., N-(m-1)τ). El valor de los autovalores de la matriz **V** revelará el número de grados de libertad del sistema y, por tanto, la dimensión de inserción m. Para ello, hay que tener en cuenta que cada autovector asociado al correspondiente autovalor de **V** indicará la intensidad del movimiento en cada dirección del espacio de fases reconstruido. El mayor autovalor indicará la dirección en la que el espacio de inserción muestra una mayor variación en los datos. Suponiendo que la variación dominante en los datos se debe a la dinámica subyacente, se trata de ir ordenando los autovalores de mayor a menor, y elegir como dimensión aquel número para el cual los autovalores sobrepasan cierto umbral inferior o mínimo, indicador de que las variaciones o fluctuaciones en esas direcciones pueden considerarse puramente aleatorias y no procedentes de la propia dinámica del sistema. Es decir, se utilizará como dimensión de inserción el número de autovalores *grandes* de **V** –por encima de lo considerado como ruido–.[7]

Un segundo método para la elección de la dimensión de inserción adecuada para la reconstrucción del espacio de fases es el denominado de los *falsos vecinos* o *puntos falsamente próximos en el espacio de inserción* (Kennnel, Brown y Abarbanel, 1992). El principio en el que se fundamenta el método de los falsos vecinos se puede explicar haciendo uso de la siguiente analogía (Bucher, 1997, p.5). Cuando por las noches dirigimos la mirada hacia el cielo, encontramos una gran cantidad de estrellas que parecen muy próximas a nuestra vista, vecinas unas de las otras. Sin embargo, sabemos que la mayoría de esas estrellas se encuentran muy alejadas. De hecho, si fuésemos capaces de captar la profundidad del espacio celeste, observaríamos como efectivamente se encuentran separadas por muchos años luz. Es el efecto de la proyección que realizamos del espacio tridimensional hacia el plano bidimensional, lo que nos hace ver a las estrellas como cercanas o

[7] Este método tiene una serie de ventajas frente al que analizamos a continuación en el texto, como la de reducir el efecto de ruido, especialmente de ruido blanco, superpuesto a una serie caótica. Sin embargo, presenta como principal inconveniente el hecho de que hay que decidir de manera subjetiva el tamaño de los autovalores que se considere adecuado, y es precisamente aquí donde este método suele fallar cuando se trata de distinguir entre series caóticas y ruido puramente aleatorio. Véase Kugiumtzis; Lillekjendlie y Christophersen (1994, p.5).

próximas aunque en realidad sean falsas vecinas. El método de los falsos vecinos generaliza este hecho partiendo de dos ideas fundamentales.

En primer lugar, que en la órbita descrita por un sistema dinámico en el espacio de fases D_d-dimensional, existirán puntos próximos como consecuencia de la propia dinámica del sistema. Es decir, que dos puntos en el espacio de fases pueden encontrarse próximos –vecinos–, porque la órbita que describa el sistema haga que uno llegue cerca del otro al cabo de cierto tiempo. A pesar de ello, si la secuencia de estados que forma la órbita es realmente una solución del sistema dinámico, sabemos que nunca se cortará o solapará en ningún punto del espacio de fases, ya que, dicha intersección de la órbita supondría que a partir de un mismo punto el sistema dinámico puede determinar dos direcciones distintas de cambio, lo cual no es posible si las funciones estructurales del sistema están bien definidas –el teorema de la existencia y unicidad garantiza que sólo aparecerán solapamientos de la órbita cando nos encontremos ante puntos fijos o ciclos límite–. Nos referiremos a estos puntos próximos por la dinámica del sistema como *verdaderos vecinos*.

En segundo lugar, que cuando tratamos de reconstruir el atractor a partir de una serie temporal, tenemos que tener presente que dicha serie se ha obtenido proyectando la órbita original del sistema en el espacio de fases D_d-dimensional en una señal observable unidimensional que tomará valores sobre la recta real. Ello supondrá que en la señal escalar existirán puntos falsamente próximos que se habrán acercado no por la propia dinámica del sistema sino por su proyección hacia el correspondiente escalar.

Es decir, en general, cuando proyectamos una órbita n-dimensional –solución del sistema– sobre el espacio unidimensional aparecerán solapamientos o puntos de corte en la órbita descrita por el escalar en el atractor reconstruido, pero como consecuencia de la proyección y no de la dinámica del sistema original. Estos puntos serán calificados como *falsos vecinos* porque la proximidad entre ellos tiene su origen en la proyección del espacio de fases en otro de menor dimensionalidad, y no en una proximidad generada por la evolución de la órbita del sistema dinámico. Además estos puntos dejarán de ser vecinos cuando se proyecten hacia espacios de mayor dimensión, es decir, cuando se *desplieguen* hacia un espacio euclideo de mayor dimensión.

Así, la reconstrucción del atractor por el método de los retardos, según el enfoque de los falsos vecinos, debe consistir, precisamente, en deshacer el camino andado y desplegar la órbita descrita por la señal escalar hacia espacios m dimensionales –para lo cual se utilizan los retardos– de forma que se deshagan todos aquellos solapamientos originados por la proyección original del vector de estados n-dimensional hacia la señal escalar. De esta forma, las m-historias, $\boldsymbol{y}_t$, deben construirse utilizando una dimensión de inserción, m, con la que se asegure que se deshacen todos los errores cometidos en el orden secuencial de la órbita que se hayan originado como consecuencia de la proyección de la evolución original del vector $\boldsymbol{x}_t$ hacia el escalar $h(\boldsymbol{x}_t)$ –falsos vecinos–. La dimensión de inserción óptima o adecuada será aquella mínima dimensión entera en la que la

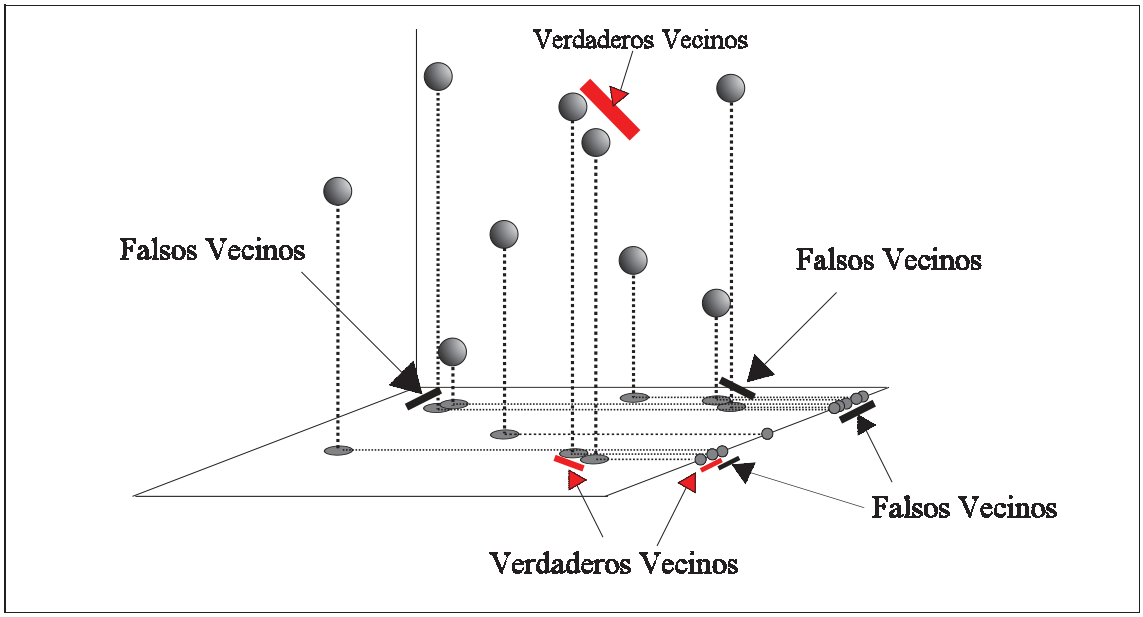


Figura 5.16.Proyecciones sobre la recta y falsa vecindad.

órbita reconstruida no se solapa, es decir, para la cual se han eliminado todos los falsos vecinos.

El *método de los falsos vecinos* trata, por tanto, de revelar, en primer lugar, la existencia de falsos vecinos, y en segundo, encontrar la dimensión de inserción mínima para la cual se han eliminado todos los falsos vecinos, es decir, para la cual se obtiene el número necesario de coordenadas con el que desdoblar o desplegar la órbita observada completamente, de forma inequívoca y sin solapamientos[8]. Para revelar y eliminar la falsa vecindad de las observaciones $h(\boldsymbol{x}_t)$ se deberá ir aumentando de manera progresiva la dimensión de inserción a la vez que se irá comprobando si los puntos cercanos en una determinada dimensión siguen siendo vecinos en dimensiones mayores. Si la proximidad ha sido generada por la dinámica del sistema subyacente, entonces los puntos seguirán estando próximos en la nueva dimensión. Si por el contrario los puntos dejan de ser vecinos cuando se aumenta la dimensión, podremos asegurar que se trataba de puntos falsamente vecinos –figura 5.16–.[9]

Más concretamente, supongamos que tenemos reconstruido el atractor en cierta dimensión d. Entonces dado un vector:

[8] Nótese que a diferencia de la dimensión fractal y la dimensión dinámica del atractor original, la dimensión de inserción óptima dependerá de la serie temporal observada concreta que se disponga.

[9] Como decíamos, el teorema de Takens establece que si $m>2D_F$, dicho despliege o desdoblamiento queda garantizado, es decir, es suficiente para garantizar que no existe ningún solapamiento, ningún falso vecino.

$$\boldsymbol{y}_t = \left(y_t \, , \, y_{t+\tau} \, , \, y_{t+2\tau} \, , \, y_{t+3\tau} \, , \, \cdots \, , \, y_{t+(d-1)\tau} \right) \tag{5.14}$$

denominaremos al vector *d*-dimensional más cercano a éste como $\boldsymbol{y}_t^{NN}$, donde la proximidad no se medirá en relación al tiempo sino por la distancia espacial entre ambos puntos:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_t^{NN} &= \left(y_{t^*} \, , \, y_{t^*+\tau} \, , \, y_{t^*+2\tau} \, , \, y_{t^*+3\tau} \, , \, \cdots \, , \, y_{t^*+(d-1)\tau} \right) = \\ &= \left(y_t^{NN} \, , \, y_{t+\tau}^{NN} \, , \, y_{t+2\tau}^{NN} \, , \, \cdots \, , \, y_{t+(d-1)\tau}^{NN} \right) \end{aligned} \tag{5.15}$$

Cuando $\boldsymbol{y}_t^{NN}$ sea un verdadero vecino de $\boldsymbol{y}_t$, entonces lo será por cuestiones dinámicas, porque la órbita que describe el sistema en el espacio de fases ha llevado a estos dos puntos a posiciones o localizaciones cercanas en el espacio de fases (aunque no necesariamente deben ser puntos consecutivos en el tiempo). Por el contrario, $\boldsymbol{y}_t^{NN}$ será un falso vecino si lo es por la proyección de la órbita del sistema original desde la dimensión dinámica del sistema hacia una dimensión menor. Así, si $\boldsymbol{y}_t^{NN}$ fuese un falso vecino, entonces podríamos deducir que la dimensión *d* no está desplegando totalmente al atractor –no se están eliminando todos los solapamientos–, y que si se aumenta la dimensión de inserción dejará de ser vecino –por eso es falso vecino–.

Para establecer si los dos puntos próximos $\boldsymbol{y}_t$ e $\boldsymbol{y}_t^{NN}$ son verdaderos vecinos o no, deberemos comparar la distancia entre ellos en la dimensión *d* con la distancia entre los mismos vectores en dimensión *d+1*. Es decir, necesitamos saber cuando el vecino más cercano $\boldsymbol{y}_t^{NN}$ en una dimensión *d*, está cerca o lejos cuando pasamos a la dimensión *d+1*.

La determinación práctica de la dimensión óptima, requiere de la utilización de algún criterio que permita aseverar si dos puntos próximos son vecinos verdaderos o falsos, es decir, si siguen siendo vecinos en una mayor dimensión de inserción –verdaderos vecinos–, o si por el contrario dejan de serlo –falsos vecinos–.

Teniendo en cuenta que el componente adicional en $\boldsymbol{y}_t$ e $\boldsymbol{y}_t^{NN}$ cuando pasamos de la dimensión *d* a la dimensión *d+1* es $y_{t+d\tau}$ e $y^{NN}{}_{t+d\tau}$ respectivamente, Abarbanel (1996, pp. 40-43) propone reducir el problema de la detección de falsos vecinos a la comprobación de la distancia adicional relativa entre estos dos puntos, esto es, usando la distancia entre los dos escalares $y_{t+d\tau}$ e $y^{NN}{}_{t+d\tau}$. De esta forma, si la distancia adicional $|y_{t+d\tau} - y^{NN}{}_{t+d\tau}|$ es grande, comparada con la distancia en dimensión *d* entre los vecinos cercanos próximos $\boldsymbol{y}_t$ e $\boldsymbol{y}_t^{NN}$, tendremos dos falsos vecinos. Si, por el contrario, dicha distancia adicional no es muy grande tendremos un auténtico vecino

En particular, si la distancia euclidea al cuadrado entre $\boldsymbol{y}_t$ e $\boldsymbol{y}_t^{NN}$ en dimensión *d* es:

$$R_d(t)^2 = \sum_{m=1}^{d} \left[y_{t+(m-1)\tau} - y_{t+(m-1)\tau}^{NN} \right]^2 \tag{5.16}$$

y la distancia euclidea al cuadrado entre esos dos puntos en la dimensión $d+1$ es:

$$R_{d+1}(t)^2=\sum_{m=1}^{d+1}[y_{t+(m-1)\tau} - y^{NN}_{t+(m-1)\tau}]^2= \\ =R_d(t)^2+|y_{t+d\tau}-y^{NN}_{t+d\tau}|^2 \tag{5.17}$$

entonces, dadas (5.16) y (5.17), la *distancia relativa* entre un punto y su vecino cuando se pasa de la dimensión d a la dimensión inmediatamente mayor $d+1$ se podrá definir como:

$$\sqrt{\frac{R_{d+1}(t)^2-R_d(t)^2}{R_d(t)^2}}=\sqrt{\frac{|y_{t+d\tau}-y^{NN}_{t+d\tau}|^2}{R_d(t)^2}}=\frac{|y_{t+d\tau}-y^{NN}_{t+d\tau}|}{R_d(t)} \tag{5.18}$$

Así, cuando esta cantidad (5.18) sea muy grande podremos concluir que los puntos que eran próximos en dimensión d habrán dejado de ser próximos o vecinos en la dimensión $d+1$, y que por tanto, pueden considerarse como falsos vecinos o falsos próximos en la dimensión d. Abarbanel (1996, p.41) propone utilizar como referencia el valor de 15, es decir, si la expresión (5.18) toma un valor superior a 15, entonces los puntos considerados serán falsos vecinos en la dimensión d.

Adicionalmente, Abarbanel (1996, p.42) propone añadir un segundo criterio de valoración de la vecindad entre puntos cercanos en el que se tenga en cuenta el valor de la distancia añadida cuando se aumenta la dimensión de inserción en relación al *diámetro nominal de atractor*. Con ello se pretende detectar a los falsos vecinos incluso cuando el atractor se expande en su conjunto cuando pasamos a dimensiónes de mayor orden. Este segundo criterio para identificar a los falsos vecinos se puede concretar en que si la cantidad:

$$\frac{|y_{k+d\tau}-y^{NN}_{k+d\tau}|}{R_A} \tag{5.19}$$

toma un valor por encima algún número de orden 2, entonces diremos que los puntos próximos en d son falsos vecinos. R_A es el radio nominal del atractor definido como la raíz media cuadrática de todos los datos respecto a la media:

$$R_A=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}|y_t-\bar{y}| \\ \bar{y}=\frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}y_t \tag{5.20}$$

Si consideramos ahora la órbita completa y teniendo en cuenta ambos criterios, podemos ir observando como varía el número total de falsos vecinos –o su porcentaje– a medida que se van considerando dimensiones de inserción mayores. En principio, habrá que esperar que, a medida que se va aumentando la dimensión del espacio reconstruido, el número de falsos vecinos vaya disminuyendo –por el cada vez mayor despliegue de la señal–. Cuando se alcanza una dimensión de inserción en la que ya no se observan más despliegues de la

órbita, es decir, en la que ya no es posible revelar la existencia de más puntos falsamente vecinos, podremos asegurar que se ha eliminado cualquier solapamiento producido por la proyección del vector de variables de estado en la señal escalar de la que parte el análisis, y que hemos reconstruido la verdadera órbita del sistema subyacente. Habremos encontrado la m para la cual todos los puntos próximos en el atractor están próximos por la propia dinámica del sistema. Se ha alcanzado la dimensión óptima, y no será necesario aumentar más la dimensión de inserción, porque con ello no conseguiríamos añadir o mejorar la información sobre la dinámica del sistema original.

Esta técnica de los falsos vecinos, podría permitir distinguir cuando estamos ante una señal de origen puramente aleatorio –o cuando la dinámica del sistema es explosiva–, ya que en estos casos nunca se anulará por completo el porcentaje de falsos vecinos. Recordemos que en los procesos estocásticos la dimensión dinámica o grados de libertad activos tiende a infinito –siempre llenan todo el espacio de fases a medida que va aumentando la dimensión de inserción– por lo que nunca se podrá reconstruir ninguna m-historia en la que se refleje la verdadera dinámica del sistema (Lorenz 1993, p.206). En términos de falsos vecinos la aleatoriedad se traduce en que nunca alcanzaremos una dimensión de inserción que despliegue totalmente el atractor original

Por el contrario, si la dinámica del sistema subyacente converge a un atractor –de dinámica simple o compleja–, se observará como el porcentaje de falsos vecinos irá disminuyendo desde valores cercanos al 100% en la dimensión cero –toda la órbita proyectada en un único punto– hasta anularse completamente cuando la órbita reconstruida con la serie temporal se haya conseguido desplegar completamente.

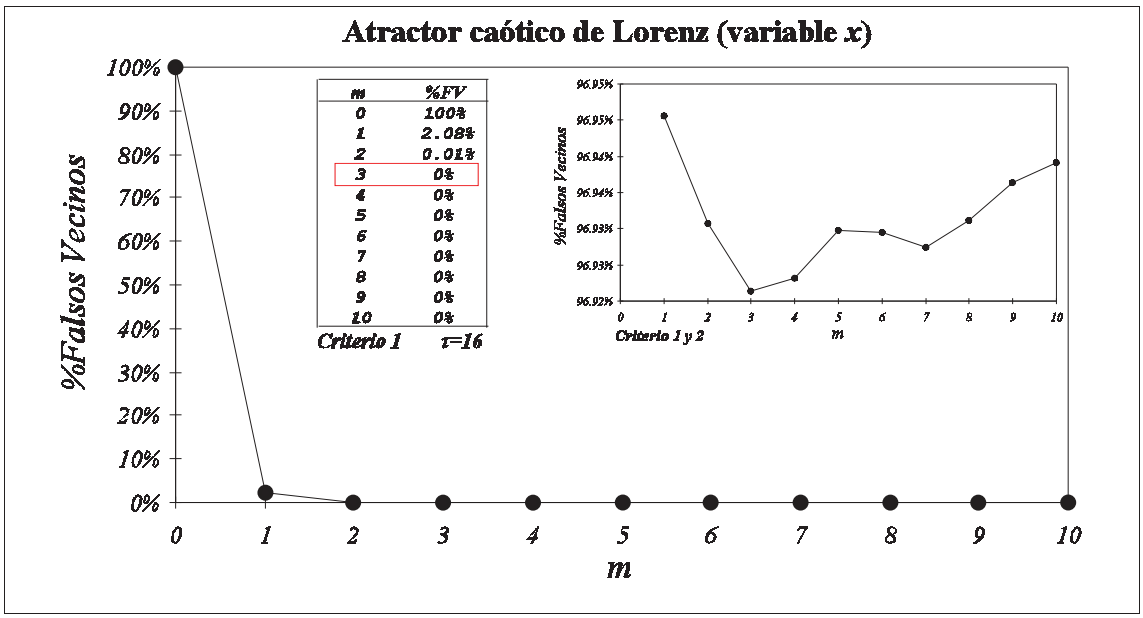


Figura 5.17

En las figuras 5.17-5.19 mostramos el porcentaje de falsos vecinos que aparecen en la reconstrucción del atractor por el método de los retardos a partir de una selección de series temporales [10]. El método de los falsos vecinos tiene como principal inconveniente su elevada arbitrariedad, ya que los valores sugeridos por Abarbanel para especificar el umbral para los verdaderos vecinos está basado en la experimentación sin ninguna demostración formal. Es más, la

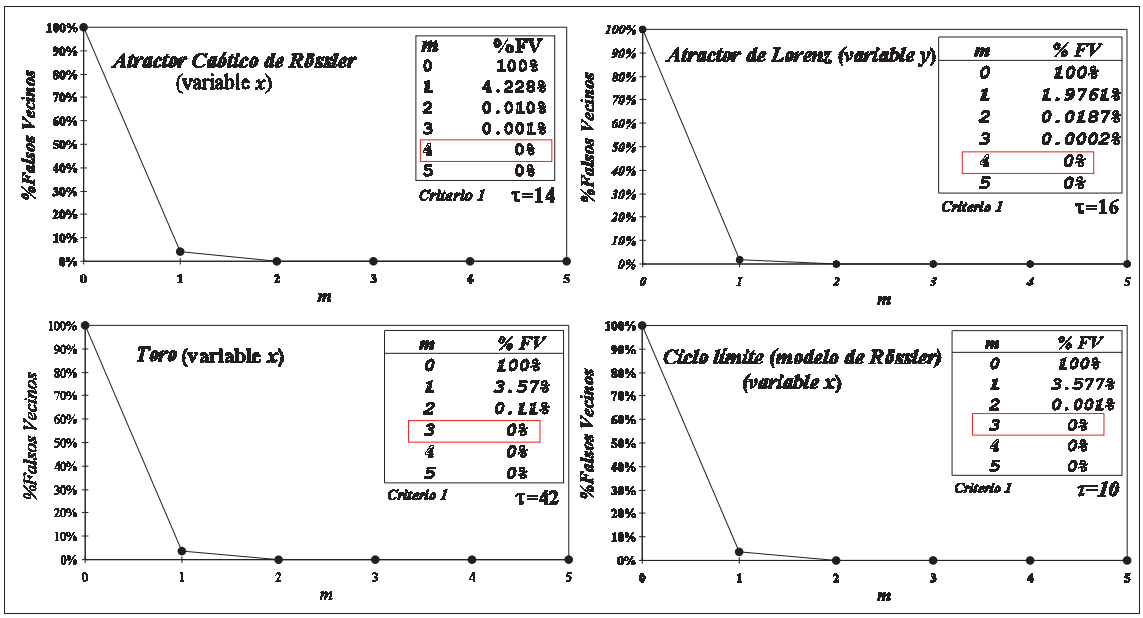


Figura 5.18

[10] El algoritmo utilizado difiere del anterior en que el porcentaje de falsos vecinos se ha calculado sobre el total de posibles vecinos y no sólo sobre los vecinos más próximos. Con ello, aunque el porcentaje puede variar respecto a otros métodos, la evolución que sigue el total de falsos vecinos y su porcentaje es la misma.

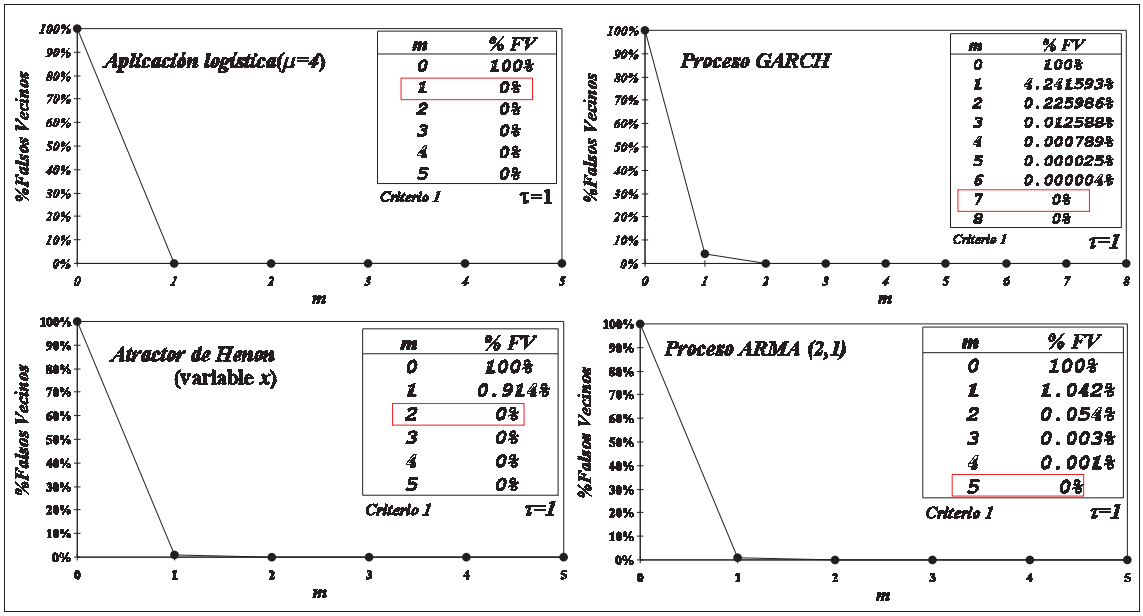


Figura 5.19

introducción del segundo criterio puede hacer que en la construcción de atractores a partir de series perfectamente deterministas no se anule por completo el porcentaje de falsos vecinos. Es por ello, que este segundo criterio ha sido ampliamente criticado proponiéndose otros alternativos en los que, por ejemplo, se tenga en cuenta en el propio umbral la dimensión de inserción que se esté utilizando (Reiss, 1999). A pesar de ello, nuestras propias simulaciones parecen indicar que en cualquier caso el indicador de que se ha alcanzado la dimensión de inserción mínima óptima se refleja en la estabilización del porcentaje de falsos vecinos –cuando se utiliza el segundo criterio aunque no se anule el porcentaje de falsos vecinos sí se estabiliza precisamente en la dimensión en la que se anula cunado este criterio no se tiene en consideración figura 5.17–. Además, el propio Abarbanel(1996, pp.44-46) realiza distintas simulaciones para comprobar la robustez de este método cuando al serie está contaminada con ruido, concluyendo que es precisamente la estabilización en la caída del porcentaje de falsos vecinos lo que debe servir de referencia para la elección de la dimensión de inserción óptima. Es por ello que en nuestras aplicaciones prácticas, utilizaremos prioritariamente el primer criterio –completándolo en su caso con el segundo y probando con distintos umbrales– para detectar cuando se frena la caída en el porcentaje de falsos vecinos.

Terminamos este apartado indicando que existe un tercer método para la determinación de la dimensión óptima que utiliza la dimensión de correlación estimada para el atractor reconstruido por el método de los retardos. La dimensión de correlación es una medida que aproxima la dimensión fractal del atractor (véase el próximo apartado 5.6). Así, como la dimensión fractal del atractor permanece constante cuando éste ya ha sido totalmente desplegado aunque se sigua aumentando la dimensión del espacio de inserción m, si estimamos la dimensión de correlación para distintos valores de m, deberemos observar que a medida que el atractor reconstruido se va desplegando en espacios de inserción de mayor dimensión, su dimensión fractal también irá aumentando, y que a partir

de un determinado *m* en el que el atractor ya se encuentra totalmente desplegado, la dimensión de correlación estimada permanecerá más o menos constante aunque se siga aumentando m. Esa dimensión de inserción para la cual el valor de la dimensión de correlación se estabiliza corresponderá a la dimensión de inserción óptima para la reconstrucción del atractor. Sobre este método volveremos cuando hablemos de cómo estimar la dimensión fractal del atractor, una de las conocidas como medidas invariantes del caos.

5.4. Teoría ergódica y medidas invariantes del caos.

El atractor proporciona una visión del comportamiento a largo plazo al que converge un sistema dinámico. Sobre los conjuntos atractores pueden definirse diversas medidas de probabilidad con las que construir momentos estadísticos que sirvan para caracterizar a las distintas clases de atractores que puede alcanzar un sistema dinámico–puntos fijos, ciclos límite, toros cuasi-periódicos y atractores extraños–. De esta forma, evaluando estas cantidades o medidas estadísticas sobre los atractores reconstruidos a partir de una serie temporal, se podrán inferir las propiedades del sistema dinámico de la que ésta procede y, en particular, si se encuentra en régimen de comportamiento caótico o no.

Estas medidas estadísticas constituyen una de las herramientas fundamentales para la detección del caos a partir de una serie temporal. Para que ello sea posible, sin embargo, será necesario que se cumplan, como mínimo, dos supuestos o hipótesis básicas de partida. En primer lugar, que las propiedades del atractor correspondiente al sistema dinámico original del que procede la serie temporal se mantengan o reproduzcan en el pseudo-atractor reconstruido con los retardos de la serie. En los anteriores apartados se mostró cómo el teorema de Takens garantiza que el atractor reconstruido por este método conserva las propiedades esenciales de la dinámica subyacente –este método supone sólo que se ha transformado el sistema de escalas o coordenadas del espacio de fases original–, con lo que el cumplimiento de este primer punto queda garantizado siempre que se elija de manera adecuada la dimensión de inserción y se verifiquen otras condiciones, por otra parte, no demasiado restrictivas –que el sistema dinámico subyacente se encuentre dentro del atractor a la hora de la extracción de la señal y que las funciones estructurales del sistema así como la función observador sean suaves–.

Un segundo punto a considerar a la hora de realizar inferencia sobre las propiedades del atractor, es que las medidas estadísticas que se utilicen no dependan de una manera crucial de la serie temporal concreta sobre las que se aplique, es decir, que los resultados del análisis no difieran en función de la señal utilizada, señal que se puede considerar como una realización concreta –solución particular– del sistema subyacente sobre el que se desea cuantificar estadísticamente alguna de sus características o propiedades. Este segundo punto

queda garantizado cuando se utiliza la hipótesis de ergodicidad, tema sobre el que nos detendremos, aunque sea brevemente, en el presente apartado.

La teoría ergódica estudia las transformaciones que preservan la medida del espacio, en nuestro caso medidas invariantes del atractor descrito por un sistema dinámico en el espacio de fases bajo la acción del tiempo[11].

Comencemos representando por $f^t:X\rightarrow X$ la acción de un sistema dinámico definido en tiempo continuo ($t\in\mathbb{R}$) o en tiempo discreto ($t\in\mathbb{N}$) con $t\geq 0$ y tal que f^0=identidad y $f^{t1+t2}=f^{t1}\circ f^{t2}$ (Ruelle 1992, p. 35). Podemos interpretar f^t como el operador de evolución que transforma el vector de estados del sistema $\boldsymbol{x}$ en otro vector del espacio de fases X con el que, al ser aplicado de forma recursiva, a partir de una condición inicial $\boldsymbol{x}_0$, se obtendrá una órbita o solución del sistema –en el caso discreto ésta estaría formada por $\{x_0, fx_0, f^2x_0, ...\}$–.

Esta transformación $f^t:X\rightarrow X$ –el sistema dinámico– se dice que es *medible* si $\forall A\in M, f^{-1}A=\{x:fx\in A\}\in X$. Con el objeto de caracterizar el comportamiento del sistema dinámico en su evolución sobre el espacio de fases pueden definirse distintas medidas de probabilidad μ con soporte en X con las que cuantificar estadísticamente las distintas propiedades del sistema[12].

Una primera medida de probabilidad μ de este tipo sería aquella que describa la frecuencia con la que las distintas partes del espacio de fases X son visitadas por la órbita descrita por el sistema dinámico. Esta medida de probabilidad puede definirse formalmente como una media temporal de las deltas de Dirac en los puntos $\boldsymbol{x}_t=f^t x_0$ de la órbita (Eckmann y Ruelle 1985, p. 626)[13]:

$$\mu=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T dt\,\delta_{f^t x_0} \tag{5.21}$$

De forma alternativa, si quisiéramos medir alguna otra característica de la órbita descrita por el sistema podríamos definir una función real continua $\phi:X\rightarrow\mathbb{R}$ que representase una medida de dicha característica en cada punto del espacio de

---

[11] Sobre la teoría ergódica y su aplicación a la caracterización y detección del caos véase Eckmann y Ruelle (1985, pp. 625-627); Ruelle (1992, p. 35-35); Barnett, Medio y Serletis (1997, pp.25-28); y Day (1994, 133-163).

[12] Recordemos que dado X un conjunto de puntos x, un sistema M de subconjuntos de X será una clase de Borel o completamente aditiva si: $\varnothing, X\in M$; $A\in M$ implica $A^c\in M$; y, $\bigcup_i^\infty A_i\in M$, $A_i\in M, A_i\cap A_j=\varnothing, \forall i,j, i\neq j$. Entonces una *medida de probabilidad* $\mu(A)$, $A\in M$, sobre un espacio (X,M) con estructura de clase de Borel, será una función real completamente aditiva, no negativa y normalizada, esto es: $\mu\left(\bigcup_i^\infty A_i\right)=\sum_i^\infty \mu(A_i))$, $A_i\in M$, $A_i\cap A_j=\varnothing$, $\forall i,j$, $i\neq j$; $\mu(A)\geq 0, \forall A\in M$, $\mu(\varnothing)=0$; y, $\mu(M)=1$ (Barnett, Medio y Serletis 1997, pp.25-28).

[13] La delta de Dirac, normalmente denotada por δ_x es la medida de probabilidad que asigna un 1 a todo subconjunto A de X que contenga a un un punto dado $\boldsymbol{x}$, y un valor cero a todo subconjunto que no lo contenga, esto es $\delta_x(A)=1$ si $\boldsymbol{x}\in A$ y $\delta_x(A)=0$ si $\boldsymbol{x}\notin A$.

fases, y de manera análoga a (5.21) se podría definir la media temporal de dicha medida sobre la órbita, que constituiría una nueva medida de probabilidad de la órbita:

$$\mu(\varphi)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\varphi\left(f^t x_0\right)dt \tag{5.22}$$

Es decir, se pueden estudiar las propiedades estadísticas de las órbitas generadas por un sistema dinámico a través de las medias en el tiempo del tipo (5.21) o (5.22). Estas medidas μ son invariantes ante la acción del sistema, esto es[14]:

$$\mu(\varphi\circ f^t)=\mu(\varphi) \tag{5.23}$$

Sin embargo, en general, estas medias temporales dependerán de la órbita particular sobre la que se evalúe, es decir, de la condición inicial x_0 de la que parta el sistema dinámico. Ello ocurrirá siempre que el espacio X que se dese medir sea separable bajo la acción del sistema f^t –existirán al menos dos subespacios X_1 y X_2 de X que serán invariantes respecto a la acción del sistema, esto es, que f^t aplica los puntos de X_1 sólo a X_1 y los puntos de X_2 sólo a otros de X_2–. Para poder inferir cuales son las propiedades de un sistema dinámico en su evolución por el espacio de fases independientemente de la órbita que se evalúe –independientemente de la condición inicial de la que parta la órbita– será necesario utilizar medidas invariantes que satisfagan ciertos requerimientos de no-separabilidad o ergodicidad. Así, una medida invariante de probabilidad se dice ergódica o no-separable si no acepta una descomposición convexa no-trivial:

$$\mu=\alpha\mu_1+(1-\alpha)\mu_2\ ,\quad con\ \ \alpha\neq 0,1 \tag{5.24}$$

donde μ_1 y μ_2 son a su vez sendas medidas invariantes de probabilidad y $\mu_1 \neq \mu_2$. (Ruelle, 1992, p.38)[15].

La utilización de medidas ergódicas en el análisis estadístico de la dinámica de un sistema asegurará que las propiedades inferidas no dependerán de la órbita o señal concreta utilizada. Además el teorema de Birkhoff-Kihnchin establece que, para casi cualquier $x\in X$[16], existirán y se podrán definir medidas ergódicas como las formuladas en (5.22) con $\phi: X\to\mathbb{R}$ integrable (Barnett, Medio y Serletis 1997, pp.27). Este teorema establece que dada una medida ergódica, siempre se podrán extraer propiedades geométricas del atractor utilizando medias temporales. Los atractores extraños aceptan más de una de esas medidas ergódicas según se defina de una o otra forma la función $\phi: X\to\mathbb{R}$. Nosotros nos centraremos sólo en algunas de ellas. Antes de pasar a su estudio y aplicación en la detección del caos,

---

[14] Alternativamente se dice que una transformación $f^t: X\to X$ preserva la medida μ si $\forall A\in X$, $\mu(f^{-1}A)=\mu(A)$, y entonces se dice que μ es invariante ante la transformación f^t.

[15] Alternativamente se dice que un sistema dinámico $f^t: X\to X$ que preserva la medida μ es ergódico o no separable si $f^{-1}A=A$ para algún $A\in X$. Entonces se dice que la medida invariante μ es ergódica. Nótese que para el conjunto invariante A, se tendrá que $\mu(A)=1$ o $\mu(A)=0$ (Barnett, Medio y Serletis 1997, pp.27-28).

[16] Excepto para los puntos para los cuales la medida μ asigna un valor cero.

debemos apuntar que estas medidas de probabilidad, además de estar definidas como *medias temporales* sobre la órbita del sistema también pueden construirse como *medias espaciales*, es decir, si se define una función continua $\phi:X\rightarrow\mathbb{R}$ que represente alguna medida sobre alguna característica del sistema, entonces puede construirse una media espacial de dicha medida $\phi(x)$ evaluada en el espacio de fases multiplicando el valor de la medida $\phi(x)$ por la probabilidad de que el sistema visite alguna de sus partes $A\subset X$:

$$\int_X \varphi(x)d\mu(x) \tag{5.25}$$

El *teorema ergódico* establece que si el sistema $f^t:X\rightarrow X$ es ergódico –preserva la medida y es no-separable, $f^{-1}(A)=A$ para algún $A\in X$– o alternativamente, si la medida de probabilidad μ es ergódica, entonces las medias (5.22) y (5.25) existen para casi todo x_0, son constantes y coinciden (Eckmann y Ruelle, 1985, p.626):

$$\mu(\varphi)\equiv\int_X \varphi(x)d\mu(x)=\lim_{T\rightarrow\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \varphi\left(f^t x_0\right)dt \tag{5.26}$$

Conectando todo lo dicho hasta ahora, tendremos que si un conjunto compacto A es invariante bajo la acción del sistema $f^t:X\rightarrow X$ –$f^{-1}(A)=A$– entonces existe una medida μ invariante bajo f^t con soporte contenido en A, que se podrá elegir de forma que sea además ergódica. Los atractores extraños constituyen conjuntos invariantes bajo la acción del sistema y por tanto aceptarán alguna medida ergódica –invariante– con la que caracterizarlos. Estas cantidades estadísticas o medidas invariantes características de los sistemas dinámicos determinista podrán ser utilizadas, por tanto, en la detección del caos cuando se estiman o evalúan sobre el atractor reconstruido a partir de una serie temporal.

Como decíamos al principio, nosotros estamos interesados en algunas de esas medidas ergódicas con las que se puede revelar la naturaleza del sistema dinámico desconocido generador de la serie temporal observada. Concretamente nos interesaremos por dos medidas invariantes con las que se puede caracterizar perfectamente a los atractores extraños. La primera de ellas es la dimensión fractal, que como ya se vio en el capítulo 3, hace referencia a la forma en la que el atractor llena u ocupa el espacio de fases. La segunda es el espectro de exponentes de Lyapunov que nos indican como dos órbitas arbitrariamente próximas se alejan o acercan en cada dirección del espacio de fases bajo la acción del sistema dinámico, esto es, nos indican la estabilidad local de las soluciones dentro del atractor.

El hecho de que estas dos medidas sean ergódicas implica que son independientes de la condición inicial de la órbita y del sistema de coordenadas desde el que se observe el atractor (en realidad son invariantes ante otros cambios pero estos son los que nos interesan), de forma que podremos evaluar esta dos medidas en el espacio de fases reconstruido a partir de una serie temporal concreta, permitiéndonos así detectar, posibles comportamientos de dinámica compleja en el sistema desconocido generador de la serie. Como se recordará, los

atractores extraños o caóticos son objetos fractales –figuras geométricas cuya dimensión fractal o de Hausdorff es estrictamente superior a su dimensión topológica–, por lo tanto, si en la estimación de la dimensión fractal del atractor se obtiene un valor no entero, podremos asegurar que el sistema dinámico es caótico. Por otra parte, siempre que el sistema sea disipativo –y por tanto esté garantizada su convergencia a un atractor–, la presencia de algún exponente de Lyapunov positivo será indicativo de que se encuentra en régimen de comportamiento caótico. Cuando la definición de los comportamientos caóticos se apoya en estas y otras medidas invariantes del caos –la dimensión fractal, entropía de Kolmogorov , los exponentes de Lyapunov, ... – y por tanto, en la teoría ergódica, suele hablarse de *caos ergódico*, en analogía al *caos topológico* definido en el capítulo 2.

5.5. La estimación del espectro de exponentes de Lyapunov

Una primera medida invariante del caos es la constituida por el espectro de exponentes de Lyapunov[17]. Estos exponentes miden la estabilidad o inestabilidad del comportamiento de los sistemas dinámicos cuando éstos se encuentran en su atractor, esto es, miden la tasa media de convergencia o divergencia en el tiempo de dos órbitas con estados iniciales arbitrariamente próximos en el espacio de fases. Los exponentes de Lyapunov pueden utilizarse, por tanto, para cuantificar el grado de dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales de las órbitas descritas por el sistema en su equilibrio dinámico, que como se recordará, constituye la principal propiedad que distingue a los sistemas dinámicos con comportamiento caótico acotado.

Formalmente, los exponentes de Lyapunov de un sistema dinámico con n variables de estado se definen como (apartardo 3.1):

$$\lambda_i(x_0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\left[\left|Df^{T}(x_0)\right|\right]= \\ =\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left[\ln|\Lambda_i(x_0)|+\ln|\Lambda_i(x_1)|+\ldots+\ln|\Lambda_i(x_T)|\right];\quad \forall\Lambda_i(\cdot)\neq 0,\ i=1,\ldots,n \tag{5.27}$$

siendo $\Lambda_i(x_j)$, $i=1, \ldots, n$; $j=1, \ldots, T$ los autovalores de la matriz jacobiana del sistema dinámico n-dimensional evaluada a lo largo de la trayectoria $\{x_1, x_2, \ldots, x_T\}$. A la vista de la expresión (5.27) resulta fácil comprobar que los exponentes de Lyapunov constituyen una medida definida como una media temporal del tipo (5.22) en la que la función $\phi(x)\equiv|\Lambda_i(x_j)|$ que por el teorema ergódico multiplicativo de Oseledec existirá y será constante para casi todo x_0 (Eckmann

[17] Estos exponentes de Lyapunov fueros introducidos ya en el apartado 3.1, por lo que nos remitimos a lo allí expuesto centrándonos ahora en los métodos de estimación de los exponentes a partir de una serie temporal observada.

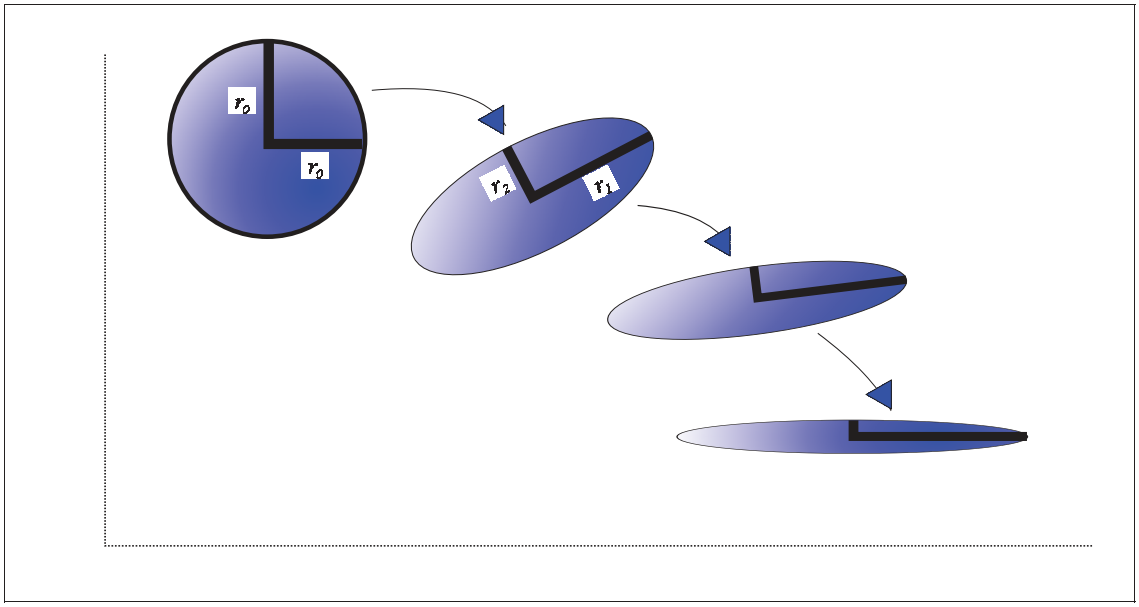


Figura 5.20

y Ruelle, 1985, pp. 629-630)[18].

Con esta medida invariante se pretende medir la tasa de expansión o contracción del espacio de fases bajo la acción del sistema dinámico en cada una de las *n* direcciones. De una forma intuitiva el significado de los exponentes es el siguiente (Lorenz, 1993, pp.213-214).Considerese un sistema dinámico bidimensional, es decir con dos variables de estado cuya evolución temporal, gobernada por el sistema, se representará en un espacio de fases de dimensión euclidea dos. Tomemos un conjunto de puntos iniciales localizados dentro de un círculo de radio r_0. Si el sistema es disipativo proyectará, en una primera iteración, los puntos iniciales del círculo sobre otro objeto cuyo área sea menor y, posiblemnte, con una figura diferente a la de una circunferencia. Supongamos que la nueva figura es de tipo elipsoide, esto es, que el sistema aplica el círculo sobre otra área contraída en una dirección y expandida en otra –figura 5.20–. Podemos denominar al radio mayor y menor del elipse por r_1 y r_2. Estos nuevos radios serán proporcionales al radio inicial r_0 de forma que podemos definir el tamaño relativo de cada uno de ellos por $\mu_i=r_i/r_0$, $i=1,2$. Después de T iteraciones, el elipsoide resultante de la acción del sistema tendrá por radios los valores r_i =

---

[18] De hecho aplicando el teorema ergódico es posible calcular el exponente de Lyapunov haciendo uso de su expresión para la media espacial alternativa. Así por ejemplo para la aplicación logística $x_{t+1}=rx_t(1-x_t)$ se tendría que:

$$\lambda=\int_0^1 \ln|f'(x)|d\mu(x)$$

siendo $d\mu(x)=\mu(x)dx$ la función de densidad asociada a la medida invariante $\mu(x)=1/(\pi\ (x\ (1-x))^{1/2})$ (Brock, 1986, p.172). Sustituyendo ahora para $r=4$ se tendría que

$$\lambda=\int_0^1 \ln|f'(x)|d\mu(x)=\int_0^1 \frac{\ln|4-8x|}{\pi(x(1-x))^{1/2}}dx=\ln 2$$

$\mu_i^T r_0$, $i=1,2$(crecimietno o decrecimiento exponencial), que en forma logarítmica se puede escribir como:

$$\ln\mu_i = \frac{1}{T} \ln \frac{r_i}{r_0} \quad ; \; i=1,2 \tag{5.28}$$

y en el límite:

$$\lambda_i=\ln\mu_i = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \frac{r_i}{r_0} \quad ; \; i=1,2 \tag{5.29}$$

que serán los exponentes de Lyapunov, esto es, una *media temporal* de la tasa de crecimiento o decrecimiento del área en cada una de las dos direcciones del espacio de fases. En general, existirán tantos exponentes como grados de libertad o dimensión euclidea tenga el espacio de fases, denominándose al conjunto de exponentes como el espectro de Lyapunov del sistema dinámico.

El signo del exponente determina la contracción (negativo), o expansión (positivo) del sistema en el espacio de fases. Cada exponente muestra las propiedades de divergencia en una dirección y la suma de todos los exponentes puede interpretarse de la siguiente forma (Wolf et al.1985, p. 286). Suponiendo que estamos ante un sistema con n grados de libertad, y estando los n exponentes ordenados de mayor a menor, el primero mide el grado de extensión del elipsoide en la primera dirección, es decir, la extensión lineal del elipse crecerá exponencialmente a la tasa dada por λ_1 –$r_t=r_0 e^{(\lambda 1)t}$–; la suma de los dos primeros exponentes ($\lambda_1+\lambda_2$) mide la extensión en el area definida por los dos primeros ejes principales–el área a crece exponencialmente, $a_t=a_0 e^{(\lambda 1+\lambda 2)t}$–; la suma de los tres primeros ($\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$) el grado de extensión del volumen definido por los tres primeros ejes principales; y así sucesivamente. Ahora bien, si estamos ante sistemas disipativos, por definición, el hiper-volumen de su espacio de fases debe contraerse bajo la acción del sistema, y la suma de todos sus exponentes debe ser por tanto negativa. Visto de otro modo, la expansión del espacio de fases, en caso de que ello ocurra, no puede darse en todas las direcciones, ya que ello impediría que la órbita descrita por el sistema permaneciese en la región acotada del espacio de fases que define al atractor. Se sigue, por tanto, que además de un estiramiento y una contracción, el sistema debe *retorcer* o *plegar* el espacio de fases para que la órbita permanezca en el atractor. Esto es lo que se conoce como la *transformación del panadero* que constituye un escenario prototipo para la aparición del caos: estirar y doblar. Por una parte, el espacio de fases es sometido a un estiramiento, que provoca que puntos inicialmente próximos se vean aplicados a otros más separados, y por otra, el doblado del espacio estirado inicialmente, que determina la mezcla de los mismos. Ambas operaciones, que la transformación del correspondiente sistema dinámico realiza de forma conjunta, determinan la sensibilidad a las condiciones iniciales, el que los puntos periódicos sean densos y la propiedad de mezcla, esto es, que el sistema sea caótico (Martín, Morán y Reyes, 1995, pp.226-228). Así, en sistemas disipativos –que siempre contraen el área y, por tanto, siempre quedan atrapados en algún atractor–, la presencia de un exponente de Lyapunov positivo –estiramiento del espacio de fases– garantiza que el sistema se encuentra en régimen de comportamiento caótico.

La estimación del espectro de exponentes de Lyapunov puede utilizarse, por tanto, como un método suficiente para detectar la posible existencia de comportamiento caótico en un sistema dinámico –cuando alguno de ellos resulte positivo–. Cuando el sistema es conocido, entonces aplicando directamente la definición (5.27) –o alguna aproximación– se podrá estimar el espectro completo de Lyapunov. Por el contrario, cuando sólo se dispone de una señal escalar y se desconoce cual es la estructura del sistema del que procede, será necesario utilizar algún método o algoritmo con el que poder estimarlo. Existen en principio dos tipos de métodos para calcular los exponentes de Lyapunov a partir de una serie temporal, los métodos directos y los métodos indirectos o de estimación.

Estimación directa del máximo exponente de Lyapunov: El método de Wolf et al. (1985)

Los denominados *método*s *directos* para la estimación de los exponentes de Lyapunov tratan de calcular directamente, a partir de la reconstrucción del atractor por el método de los retardos, la divergencia que se produce entre dos puntos inicialmente próximos en el espacio de fases a medida que transcurre el tiempo.

Uno de los métodos directos más ampliamente utilizados es el propuesto por Wolf, Swift, Swinney y Vastano(1985), con el cual es posible estimar el máximo exponente del espectro de Lyapunov –o exponente dominante– de un sistema *n*-dimensional del que sólo se conoce una señal o serie temporal. El método de Wolf se basa en la interpretación dada anteriormente sobre los exponentes, según la cual, éstos pueden calcularse a partir de la evolución en el espacio de fases de una hiper-esfera inicial de estados. Cada exponente medirá la tasa media geométrica de crecimiento a largo plazo de cada uno de los ejes principales de la esfera (5.29), siendo el exponente dominante el que mide la tasa máxima de expansión del espacio de fases en una dirección. Cuando este exponente sea positivo, el sistema presentará dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales y recordemos que para sistemas disipativos ésta será una señal suficiente que garantiza que el sistema se encuentra en régimen de comportamiento caótico –caos en sentido de Ruelle–.[19]

Como se desconoce el modelo estructural que gobierna la evolución de la esfera en el espacio de fases, habrá que trabajar sobre el atractor reconstruido –que tendrá el mismo espectro de exponentes que el atractor original–, lo que implicará que, en general, no será posible analizar como evoluciona toda la esfera. Así el método se limita al análisis de la evolución de los ejes principales, utilizando además el supuesto inicial de que existe al menos un exponente de

[19] Adicionalmente, como la dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales está relacionada con la falta de predicción más allá del corto plazo, el exponente de lyapunov dominante también sirve para determinar el horizonte de previsión para el cual nuestras previsiones pueden considerarse válidas o ajustadas.

Lyapunov positivo, y que si dicha esfera tiene un radio infinitesimalmente pequeño, entonces la divergencia inicial en la esfera debe recoger básicamente la dirección que crece más rápidamente, que será, precisamente, la del exponente dominante que se pretende estimar. La determinación del exponente máximo se calculará entonces como la tasa media de crecimiento de algún vector de pequeña longitud que represente el eje principal de la esfera. Esta media se calcula según (5.29) a partir de expansión de la longitud del vector medida cada cierto intervalo de tiempo dt –denominado periodo de evolución– a lo largo de toda la órbita reconstruida en el espacio de fase que se utiliza como órbita de referencia. En cada paso y tras medir la expansión experimentada en la longitud del vector, éste deberá renormalizarse de forma que manteniendose su dirección respecto a la órbita de referencia, su la longitud sea lo suficientemente pequeña como para que en la siguiente iteración su expansión vuelva a recoger exclusivamente el efecto del exponente dominante. En la práctica, esta renormalización supondrá reemplazar dicho vector en cada iteración por otro de menor longitud –vector de reemplazamiento– pero que mantenga la misma dirección, o en su defecto, cuya separación angular respecto al anterior vector iterado sea mínima.

Podemos resumir el método de Wolf de la siguiente manera. El primer paso consiste en reconstruir el atractor por el método de los retardos a partir de la serie temporal de tamaño T. De esta forma se obtendrá una secuencia de estados $\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{y}_1,..\boldsymbol{y}_{T-m}$ en el espacio de fases m-dimensional. Seguidamente hay que determinar un vector inicial, lo más pequeño posible, cuya evolución deberemos ir analizando. Para ello será necesario elegir dos puntos del espacio de fases reconstruido –uno de ellos el estado inicial $\boldsymbol{y}_0$ y otro que denominaremos $\boldsymbol{x}_0$– que estén espacialmente próximos pero lo suficientemente alejados temporalmente como para que puedan considerarse los estados iniciales de dos órbitas distintas –los autores recomiendan que esos dos puntos se encuentren separados en el tiempo por una distancia temporal superior al periodo medio orbital. La distancia entre estos dos puntos $L(t_0)$, deberá ser lo suficientemente pequeña como para que su expansión refleje el efecto del exponente de Lyapunov dominante. A partir de aquí, se trata de ir recorriendo la órbita $\boldsymbol{y}_0$, $\boldsymbol{y}_1,..\boldsymbol{y}_{T-(m-1)\tau}$ analizando como se expande el vector definido entre cada uno de esos puntos y los correspondientes $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1,..\boldsymbol{x}_{T-(m-1)\tau}$. Así, en una primera iteración la longitud inicial del vector $L(t_0)$ habrá evolucionado, tras un periodo de tiempo –periodo de evolución– hasta una nueva longitud $L'(t_1)$. La elección del periodo de evolución $dt=t_1-t_0$ debe hacerse considerando que éste sea lo suficientemente pequeño como para que en la expansión de la longitud del vector sólo se refleje la estructura del atractor a pequeña escala, es decir, para que sólo se revele el efecto del exponente de Lyapunov dominante. Si el periodo de evolución es demasiado grande o demasiado pequeño podremos estar sesgando la estimación del exponente de Lyapunov[20]. La elección del periodo de evolución es, por su arbitrariedad y por

[20] Si es demasiado grande, y considerando que la evolución de la órbita se encuentra acotada, las trayectorias que definen el vector de referencia puede que hayan pasado por un pliegue de la región del atractor, con lo que se estará subestimando el exponente. Si es demasiado pequeño, puede que no haya pasado el tiempo necesario para que la expansión de la órbita se refleje de manera significativa en la nueva longitud del vector, con lo que de nuevo

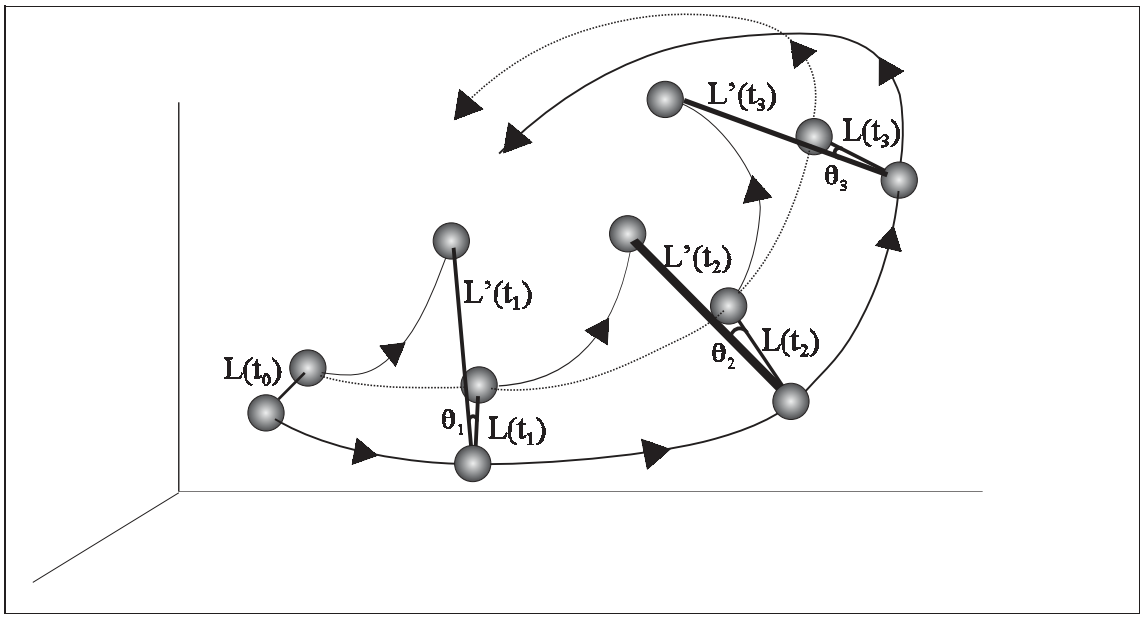


Figura 5.21

sus efectos significativos sobre los resultados finales de la estimación, uno de los elementos más criticados de este algoritmo –una recomendación generalizada, aunque sin fundamentación teórica, para la elección del periodo de evolución es que éste sea dos o tres veces inferior al periodo medio de la órbita reconstruida (Peters, 1991)–.

Antes de continuar con el análisis será necesario considerar si la longitud

estaremos sesgando a la baja la estimación del exponente.

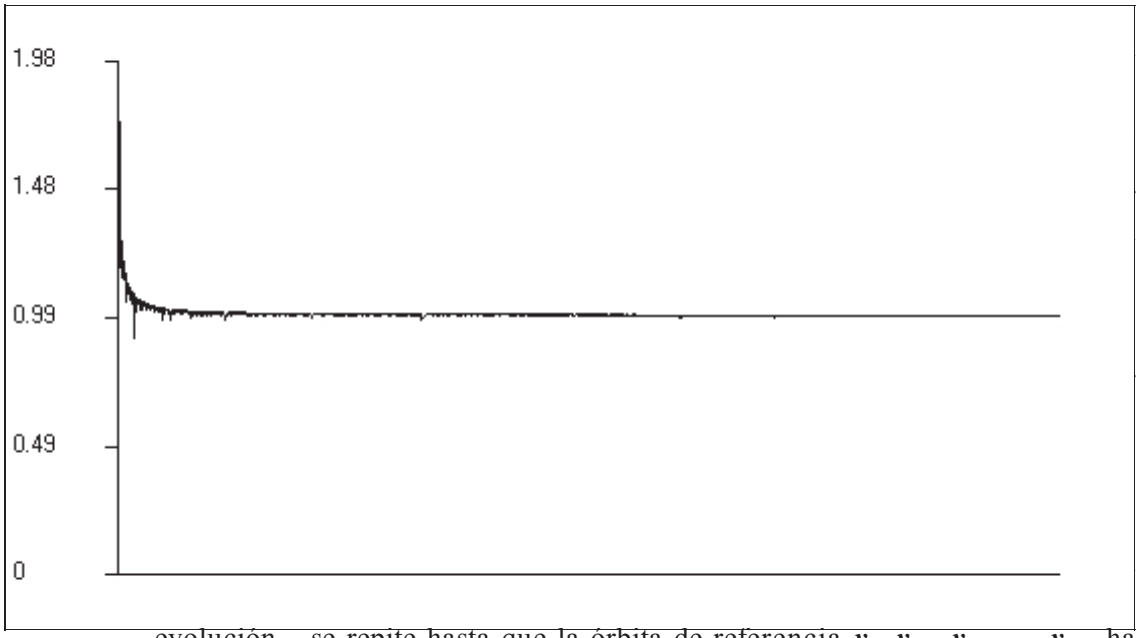


Figura 5.22. Estimación del exponente de Lyapunov de la aplicación logística $x_{t+1}=4x_t(1-x_t)$ por el método de Wolf (base $\log_2$, periodo de evolución=1, scalmin=0.01, scalmax=0.1, m=1, t=1, N=2000). El exponente converge al verdadero valor $\lambda=\ln 2$ (λ=1 en base $\log_2$)

evolución–, se repite hasta que la órbita de referencia $\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_{dt}, \mathbf{y}_{2dt}, \ldots \mathbf{y}_{T-dt}$ ha atravesado toda la muestra de datos. Entonces puede calcularse la tasa media de expansión de la longitud del vector, que será la estimación del exponente de Lyapunov dominante:

$$\lambda_1=\frac{1}{t_M-t_0}\sum_{k=1}^{M}\ln\frac{L'(t_k)}{L(t_{k-1})} \tag{5.30}$$

donde M es el número total de pasos, con posible renormalización, que coincide con T/dt si el periodo de evolución $dt=t_{k-1}-t_k$ es fijo.

En condiciones ideales, con muestras inifinitas y libres de cualquier tipo de perturbación aleatoria, el algoritmo de Wolf converge asintóticamente al verdadero exponente dominante del sistema dinámico desconocido generador de la serie (Brock, 1986, p.179). Nótese que entonces, como la presencia de algún

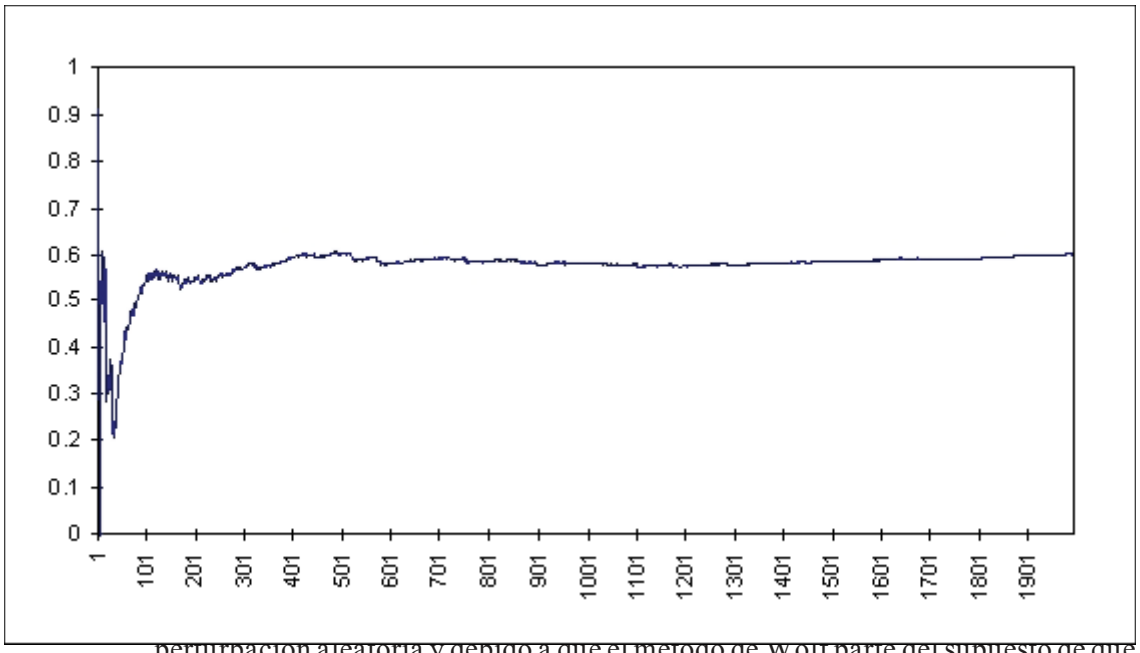


Figura 5.23 Estimación del exponente de Lyapunov del atractor de Henon (modelo 3.19, b=0.3, a=1.4) por el método de Wolf (período de evolución= 1, scamin=0.0035, scamax=0.3, m=2, τ=1, N=2000). El exponente converge al verdadero valor $\lambda = 0.6$ en base $\log_2$)

perturbación aleatoria y debido a que el método de Wolf parte del supuesto de que existe un exponente positivo, entonces los efectos de la perturbación se atribuirán al exponente dominante. Como resultado se obtendrán exponentes positivos incluso en sistemas de dinámica simple siempre que las series se encuentren perturbadas por ruidos puramente aleatorios. A modo ilustrativo mostramos en la figura 5.26 el exponente estimado para un proceso puramente estocástico que de forma errónea resulta ser positivo.

Como conclusión insistimos en que el método directo de Wolf para la estimación del exponente dominante cuando se utilizan series cortas y contaminadas por ruido presenta fuertes limitaciones en su capacidad para estimar el verdadero exponente de Lyapunov. Precisamente con el propósito de superar estas limitaciones, se han propuesto otros métodos alternativos, indirectos o de estimación, para el cálculo de los exponentes de Lyapunov a partir de una serie

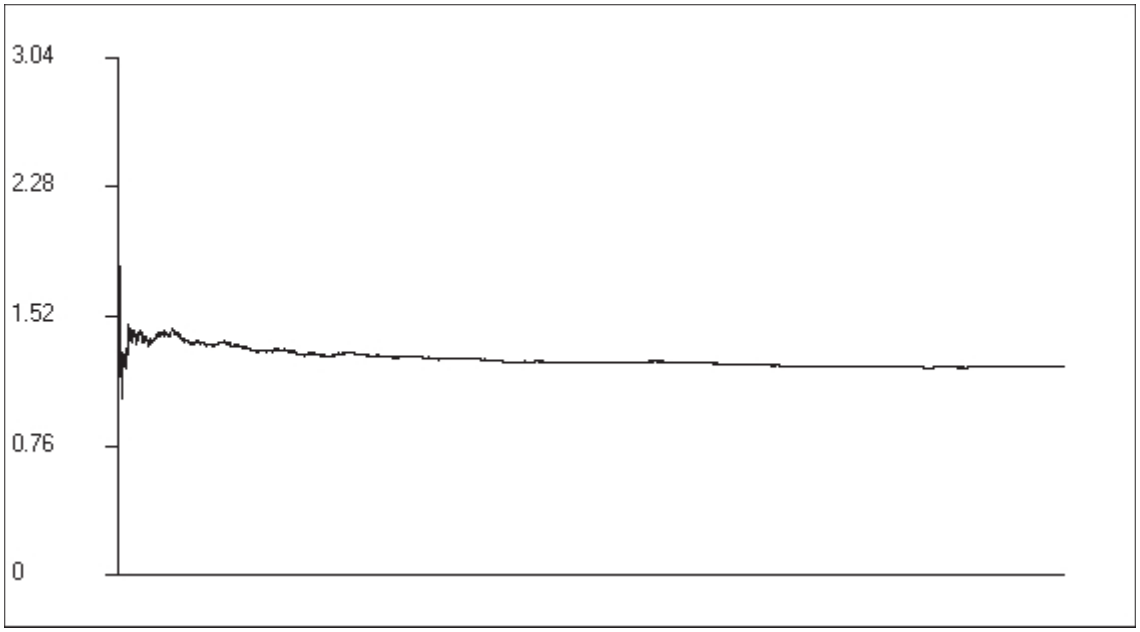


Figura 5.24. Estimación del exponente de Lyapunov del atractor extraño de Lorenz (modelo 3.17, σ=10, b=8/3, r=28) por el método de Wolf (periodo de evolución= 1, scalmin=0.00035, sclamax=3.5, m=3, τ=1, N=4000, periodo de muestreo Δt=1). El exponente converge al verdadero valor λ=*1.3* en base $\log_2$

t e m p o r a l .

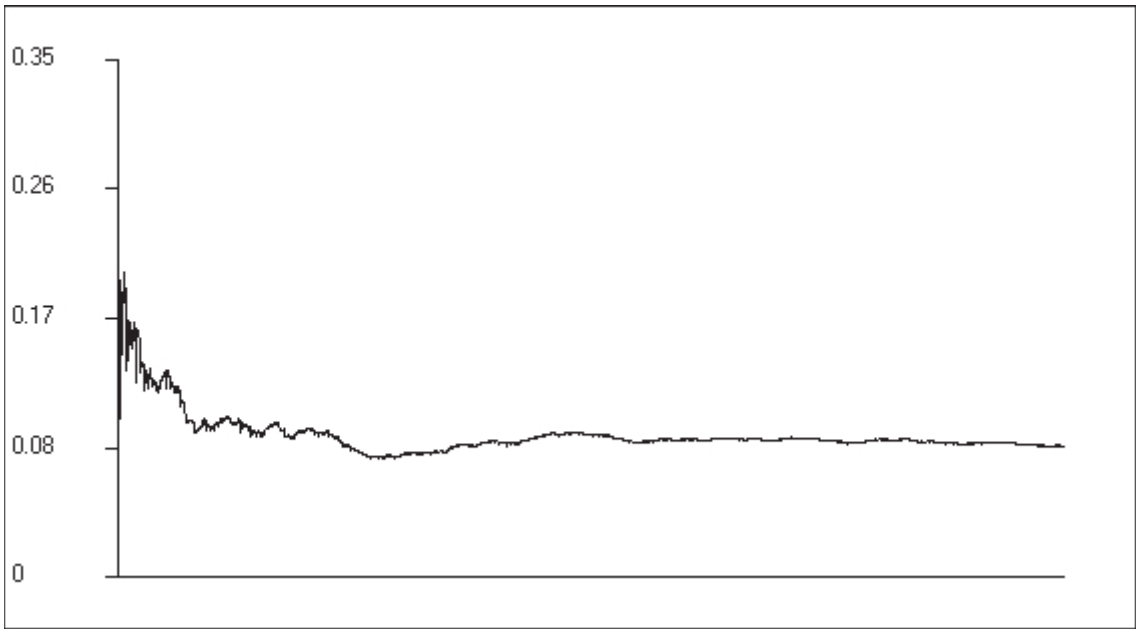


Figura 5.25.Estimación del exponente de Lyapunov del atractor extraño de Rössler (modelo 3.18, a=0.2, b=0.2, c=5.7) por el método de Wolf (periodo de evolución= 1, scalmin=0.0002, sclamax=2.05, m=3, τ=1, N=4000, periodo de muestreo Δt=1). El exponente converge al verdadero valor λ=*0.09* en base $\log_2$

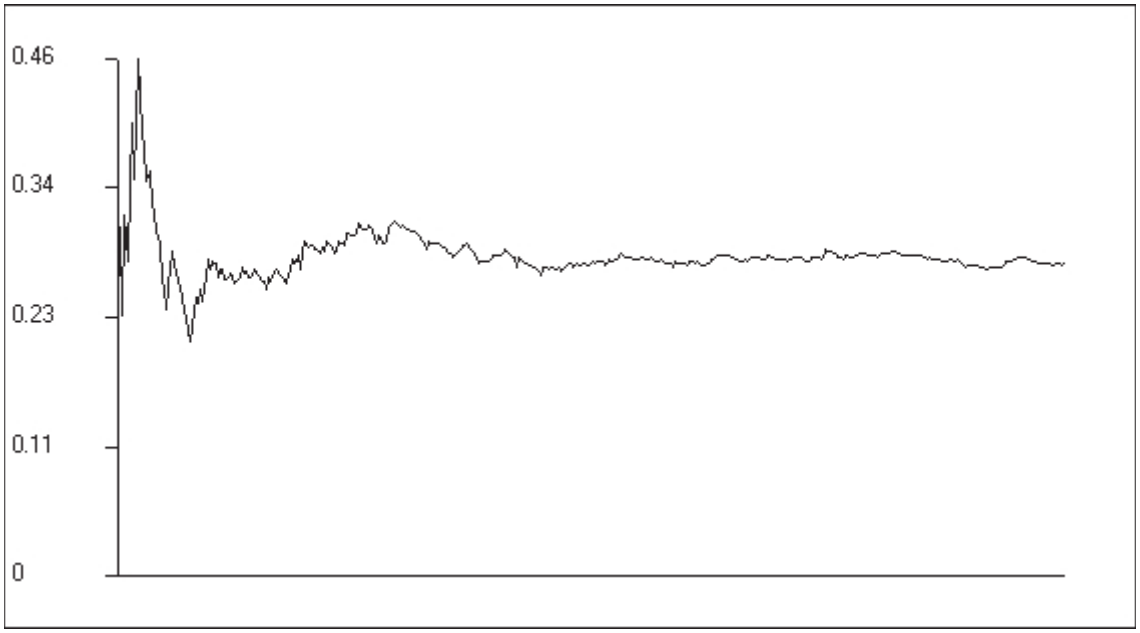


Figura 5.26. Exponente de Lyapunov positivo estimado para un proceso estocástico del tipo camino aleatorio gausiano por el método de Wolf.

Estimación indirecta del espectro de exponentes de Lyapunov: La estimación por redes neuronales

Un segundo método para el cálculo del espectro de exponentes de Lyapunov es el denominado indirecto, o de estimación o del Jacobiano (McCaffrey et al.,1992, p.685). Este método indirecto se diferencia del anterior por que trata de estimar el espectro de exponentes de Lyapunov no observando *directamente* la tasa de crecimiento de la divergencia entre dos órbitas vecinas como en el método de Wolf, sino estimando dicha tasa de crecimiento de manera *indirecta* a partir de la propia definición de los exponente de Lyapunov:

$$\lambda_i(x_0)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\left[\left|Df^T(x_0)\right|\right] \quad , \; i=1,\ldots,n \tag{5.31}$$

Más concretamente, estos métodos tratan de estimar la matriz Jacobiana del sistema subyacente que genera la serie, $\boldsymbol{Df}$,y entonces aplicar directamente la definición (5.31) para calcular el espectro de exponentes de Lyapunov. Las distintas aportaciones que componen este método difieren en el algoritmo utilizado para la estimación del Jacobiano. Así, Eckman y Ruelle (1985, pp. 651-652) –quienes inicialmente proponen este método indirecto– utilizan aproximaciones locales lineales del sistema dinámico para estimar la matriz jacobiana por mínimos cuadrados ordinarios (Eckman et al. 1986 y Sano y Sawada, 1985). Con estas estimaciones lineales del sistema dinámico subyacente se obtienen exponentes de Lyapunov que convergen a los verdaderos valores cuando se utilizan series largas y limpias de ruido, sin embargo, los exponentes

de Lyapunov estimados serán muy sensibles a la presencia de ruido puramente aleatorio. Es por ello que estas aportaciones iniciales se han extendido en otras que tratan de estimar el sistema dinámico subyacente sin imponer la restricción de linealidad local, es decir, estimando o ajustando el sistema dinámico no-lineal que mejor represente la dinámica global descrita por la órbita reconstruida por el método de los retardos.

En general, el enfoque que siguen estos modelos de estimación no-lineal puede resumirse de la siguiente forma (Gencay y Dechert,1992). A partir de una serie temporal $\{y_t\}$ (t=1, ..., N) se construye el siguiente sistema dinámico:

$$\boldsymbol{y}_t = F\left(\boldsymbol{y}_{t-\tau}\right) \quad ; F:\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \tag{5.32}$$

donde el $\boldsymbol{y}_t$ es el vector m-dimensional construido a partir de los retardos de la serie temporal (y_t, $y_{t-\tau}$, $y_{t-2\tau}$, $y_{t-3\tau}$,..., $y_{t-\tau(m-1)}$). El sistema (5.32) puede escribirse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} y_t \\ y_{t-\tau} \\ \vdots \\ y_{t-(m-2)\tau} \\ y_{t-(m-1)\tau} \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} y_{t-\tau} \\ y_{t-2\tau} \\ \vdots \\ y_{t-(m-1)\tau} \\ y_{t-m\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f\left(y_{t-\tau}, y_{t-2\tau}, \ldots, y_{t-(m-1)\tau}, y_{t-(m)\tau}\right) \\ y_{t-\tau} \\ \vdots \\ y_{t-(m-2)\tau} \\ y_{t-(m-1)\tau} \end{pmatrix} \tag{5.33}$$

donde m es la dimensión de inserción y τ es el retardo de reconstrucción. Gencay y Dechert(1992, p.145) demostraron que el sistema (5.33) es topológicamente equivalente al verdadero –y desconocido– sistema dinámico generador de la serie temporal para m suficientemente elevado, y por tanto, puede utilizarse para calcular la matriz jacobiana[21] con la que estimar el espectro de exponentes de Lyapunov del sistema dinámico generador de la serie según (5.31).

Obsérvese que el problema de la estimación del espectro de exponentes de Lyapunov se reduce a la estimación del sistema dinámico (5.33) que gobierna la evolución de la órbita en el espacio de fases m-dimensional, es decir, se reduce a la estimación de la función no-lineal desconocida $f(\cdot)$.

---

[21] La matriz jacobiana del sistema (5.33) será

$$DF = \begin{pmatrix} f_\tau & f_{2\tau} & f_{3\tau} & \cdots & f_{(m-1)\tau} & f_{m\tau} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ldots & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial y_{t-i}}$, i= τ, 2τ, 3τ, ..., (m-1)τ, m τ.

Entre estas aportaciones de estimación no-lineal, nos referiremos a las que utilizan modelos estadísticos de redes neuronales ya que éstos se caracterizan por su alta capacidad para captar cualquier estructura no-lineal desconocida presente en la serie temporal (Gencay y Dechert,1992 y 1993, McCaffrey et al. 1992 y Nychka et al. 1992) [22] . En particular, estos métodos tratan de encontrar la red neuronal artificial que mejor ajusta la función:

$$y_t = f\left(y_{t-\tau}, y_{t-2\tau}, \ldots, y_{t-m\tau}\right) + e_t \tag{5.34}$$

donde $\{e_t\}$ es un porceso estocástico de variables aleatorias independientes con media cero y varianza constante. A continuación repasamos, sin ánimo de exhaustividad , los elementos esenciales de estos modelos de redes neuronales[23].

Los modelos de redes neuronales artificiales se basan en los estudios iniciales sobre la naturaleza y el funcionamiento del celebro humano, y en particular, del proceso de aprendizaje cognitivo que se desarrolla a través de la interacción de las distintas redes neuronales del celebro. La principal carácterística de los modelos estadísticos de redes neuronales artificiales es precisamente la de imitar a esos modelos de redes biológicas, incluyendo procesos de aprendizaje modelizados a través de algún procedimiento de tipo recursivo. Así, podríamos decir que los modelos de redes neuronales artificiales son, en realidad, algoritmos o técnicas de ajuste estadístico que, imitando el comportamiento de las neuronas biológicas, analizan las series temporales en busca de las regularidades o estructuras ocultas en la evolución de la serie. Una de las principales ventajas de estos modelos es que pueden alcanzar sus objetivos sin necesidad de imponer ningún supuestos a priori sobre el modelo estructural de comportamiento de los datos analizados. Es decir, son modelos flexibles y generales capaces de captar y aproximar cualquier tipo de estructura no-lineal que, aunque sea desconocida a priori, se encuentra presenta en una serie. El único supuesto del que parten estos modelos es, precisamente, que existe dicha estructura, siendo entonces el objetivo de la red neuronal artificial el de descubrirla.

Los elementos básicos de los modelos de redes neuronales son tres: los *nodos* o *unidades* básicas de la red capaces de recibir y procesar información; las agrupaciones o filas de nodos denominadas *capas* o *niveles*; y las conexiones entre los distintos nodos que representan los canales disponibles para la transmisión de información entre las unidades. Cada una de estas conexiones estará caracterizada por una *ponderación* que mide la importancia o la calidad de cada una de estas conexiones, es decir, que determinan el caudal de información que puede fluir por cada uno de los conductos conectores de los nodos.

---

[22] Para otros métodos de estimación no-lineal véase McCaffrey et. al (1992).

[23] Seguimos básicamente a Alonso (1999) , Jungeilges (1996) y Kuan y Liu (1995).

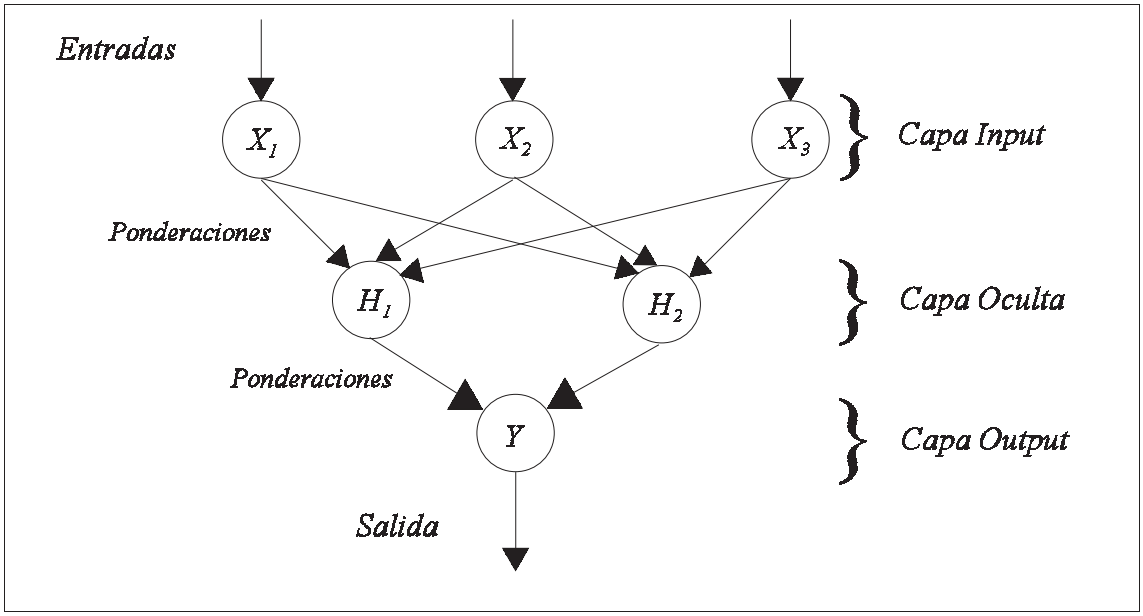


Figura 5.27. Red neuronal Artificial del tipo Feedforward con tres nodos en la capa input, una única capa oculta con dos nodos y un nodo en la capa output

Una red neuronal artificial consta de tres capas de nodos entre los que fluye información: una capa *input*, una capa *oculta* y una capa *output*[24]. Cuando la información fluye desde los nodos inputs a los ocultos y posteriormente a los nodos outputs la red se denomina del tipo *feedforward*. Cuando la información revierte desde los nodos output a los input entonces la red se dice *recurrente*. Las aplicaciones que utilizaremos para estimar los exponentes de Lyapunov son del tipo feedforward por lo que nos limitaremos aquí a exponer los elementos esenciales de éstas [25]. En estas redes la *capa input* se limita a recibir e introducir en la red la información, la *capa oculta* transforma, a través del uso de funciones no-lineales, la información o las señales recibidas desde la capa *input* en otras señales, que a su vez son recibidas por la capa output donde se genera la señal final que sale de la serie –figura 5.27–.

En general, una red neruronal feedforward tendrá p nodos input, k nodos ocultos y q nodos output, denominándose la señal proporcionada por cada uno de ellos como x_i (i=1,..., p), h_j (j=1, ..., k) e y_s (s=1, ... , q) respectivamente. El proceso de transformación de la información de entrada hasta la señal de salida de la red se puede resumir de la siguiente forma. En una primera fase, cada nodo oculto recibe una señal de cada uno de los nodos de la capa input modificada por alguna ponderación asociada a la calidad de cada uno de los canales de

[24] En realidad, en una red neuronal artificial pueden a parecer más de una capa oculta. Sin embargo, en la práctica, la mayoría de modelos se limitan a una única capa oculta de nodos, ya que si en esta hay un número suficientemente elevado de nodos, la capacidad de la red para detectar y aproximar cualquier función arbitraria es equivalente a la de otra red con más de una capa oculta (Alonso, 1999, p. 344).

[25] Para una introducción a las redes neuronales recurrentes véase Jungeilges (1996) y Kuan y Liu (1995).

transmisión. Así, si denominamos w_{ij} a la ponderación asociada a la conexión entre el nodo input i y el nodo oculto j, la señal generada por cada nodo oculto j puede representarse como:

$$h_j=\Phi\left(w_j+\sum_{i=1}^{p} w_{ij}x_i\right) \quad ; \quad j=1,..k \tag{5.35}$$

donde $\Phi(\cdot)$ es una función no-lineal denominada de *activación* que transforma la suma ponderada de las señales recibidas por cada nodo oculto desde los p nodos input. Es precisamente esta transformación no-lineal realizada en la capa oculta la que permite a la red detectar comportamientos no-lineales. En la práctica, esta función no-lineal puede elegirse de manera bastante arbitraria con la única limitación de que estén acotadas (Kuan y Liu, 1995, p 349), siendo habitual el uso de funciones de tipo sigmoide como la logística:

$$\Phi(u)=\frac{1}{1+e^{-\alpha u}} \tag{5.36}$$

donde α es el factor de ganancia que determina la rapidez con la que la función alcanza sus valores límite.

A su vez, cada una de las q unidades de la capa output transforma las señales ponderadas por un factor β_{js} procedentes de los k nodos ocultos, generando una señal de salida de la red de la forma:

$$y_s=\Psi\left(\beta_s+\sum_{j=1}^{k} \beta_{js}h_i\right) \quad ; \quad s=1,..q \tag{5.37}$$

donde la función $\Psi(\cdot)$ es de nuevo una función de activación que transforma la información recibida por el nodo de salida.

Un modelo de redes neuronales será entonces un modelo estadístico formado por distintas capas de nodos conexionados a través de las relaciones (5.35) a (5.37) capaces de aprender las reglas o estructuras subyacentes en una serie de datos observados. La utilización de una red neuronal artificial en el proceso de ajuste o aproximación de un sistema arbitrario desconocido del tipo:

$$\begin{aligned} y_1&=f_1(x_1,x_2,...,x_p)\\ y_2&=f_2(x_1,x_2,...,x_p)\\ &\vdots\\ y_q&=f_q(x_1,x_2,...,x_p) \end{aligned} \tag{5.38}$$

consiste en tratar a las variables dependientes x_i (i=1, ...p) como las señales procedentes de la capa input de la red, y las variables y_s (s=1,...q) como las señales de salida de las q unidades de la capa output, y entonces tratar de estimar o encontrar cual es el conjunto de ponderaciones y número de nodos de la capa oculta necesarios para que las señales de la capa output de la red sean lo más ajustadas o parecidas posible a los verdaderos valores de las variables

dependientes del sistema (5.38). Es decir, se trata de encontrar cual es la red neuronal artificial con la que se obtiene la mejor aproximación posible al sistema (5.38) desconocido. Esta aproximación se realiza en la fase de construcción de la red neuronal denominada de *entrenamiento*, caracterizada por algún proceso en el que de forma secuencial y repetitiva la red es capaz de descubrir o aprender las estructuras ocultas presentes en los datos. En esta fase de entrenamiento o aprendizaje el error cometido por la red a la hora de ajustar el sistema desconocido (5.38) fluye hacia atrás desde la capa output hacia la capa input modificando las ponderaciones iniciales de manera iterativa hasta que se alcanza un ajuste adecuado según algún criterio de validación *–algoritmo de retropropagación de errores–*.

En el caso que nos ocupa, la estimación de los exponentes de Lyepunov requiere la construcción de una red neuronal artificial que sea capaz de aproximar la ecuación:

$$y_t = f\left(y_\tau, y_{t-2\tau}, \ldots, y_{t-m\tau}\right) + e_t \tag{5.39}$$

Nótese que en este caso la red neuronal a utilizar tendrá un único nodo en la capa de salida, mientras que el número de inputs o variables independientes del modelo estará determinado por la dimensión de inserción m .Si suponemos que la función de activación de la capa output es la función identidad, entonces la red neuronal que debe entrenarse para aproximar la estructura determinista oculta en la evolución de la serie temporal $f(\cdot)$ puede expresarse según (5.35) a (5.37) como:

$$y_t = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \Phi\left(w_j + \sum_{i=1}^{m} w_{ij} y_{t-i\tau} \right) \tag{5.40}$$

donde se evidencia que el valor de y_t es una función no-lineal de sus valores retardados. Los algoritmos de aprendizaje que utilizamos en nuestras aplicaciones para estimar las ponderaciones de la red (5.40) tienen como objetivo la minimización del error cuadrático medio cometido por la red mediante algún algoritmo recurrente de minimización no lineal (véase Kuan y Liu 1995, y Ellner et al. 1992):

$$\frac{1}{T_m - q} \sum_{t=q+1}^{T_m} \left(y_t - \sum_{j=1}^{k} \beta_j \Phi\left(w_j + \sum_{i=1}^{m} w_{ij} y_{t-i\tau} \right) \right)^2 \tag{5.41}$$

siendo T_m el tamaño de la órbita reconstruida por el método de los retardos y q el número total de parámetros o ponderaciones a estimar en la red (5.40). Uno de los elementos de mayor arbitrariedad a la hora de elegir la red más adecuada o que mejor recoja la dinámica determinista subyacente en la serie temporal es la elección del número de nodos ocultos k. Un número muy escaso de nodos ocultos puede hacer que la red sea incapaz de aproximar la verdadera estructura determinista si presenta dinámica compleja, mientras que si es demasiado elevado, la red realizará un sobre-ajuste de la serie recogiendo básicamente el error puramente aleatorio e_t presente en la serie temporal. Existen diversos criterios para elegir el número más adecuado de unidades de la capa oculta. Nosotros utilizaremos en nuestras aplicaciones el criterio de información de Schwarz o Bayesiano. Según este criterio, el número de términos a incluir será aquél para

el cual se minimiza la varianza de los errores del modelo estimado penalizando la sobre utilización de parámetros en el mismo. Es decir, el *mejor* modelo será aquel para el cual se minimice:

$$q\frac{\ln T_m}{T_m}+\ln\frac{1}{T_m}\sum_{t=1+q}^{T_m}\hat{u}_t^2 \tag{5.42}$$

siendo $\hat{u}_t$ el error de la regresión en el instante t [26].

En nuestras aplicaciones utilizaremos dos algoritmos para la estimación de la estructura no-lineal subyacente en la serie temporal por modelos de redes neuronales artificiales, y a partir de ésta, el espectro de exponentes de Liapunov[27]. El primer algoritmo, LENNS, se define en Nychka et. al (1992) y ha sido programado por Ellner et al (1992). Este algoritmo proporciona estimaciones para el máximo exponente de Lyaponuv que, a diferencia del método directo de Wolf analizado en la sección anterior, resultan ser robustas tanto ante la presencia de componentes puramente aleatorios –por ejemplo, errores de medida– como cuando las series analizadas son cortas. En la tabla 5.1. mostramos los resultados obtenidos utilizando este método para varias series temporales. Como se observa, el valor estimado para las series caóticas tiene el signo positivo esperado y su valor se aproxima a los correspondientes valores verdaderos (para la logística $\lambda 1=0.693$; el atractor de Henon $\lambda 1= 0.416$; y el Rössler $\lambda 1= 0.068$).

Tabla 5.1

Estimación indirecta del exponente de Lyapunov Dominante. Programa LENNS

SERIE	τ	*m*	*k*	*EER*	*CIS*	exponente
Logística μ=4	1	1	2	0.002	-6.14 (-2.09)	0.691
Henon	1	3	6	0.004	-5.19 (-0.62)	0.421
Rössler (Δt=1)	1	3	8	0.031	-2.93 (4.94)	0.098
Camino Aleatorio N(0,1)	1	1	1	0.994	0.04 (-0.14)	-4.883 (-∞)
GARCH	1	1	1	0.997	0.05 (2.21)	-6.351
ARMA(2,1)	1	1	1	0.259	-1.30 (2.69)	-0.036

Tamaño muestral: 500 datos; τ= retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción;*k*: número de nodos en la capa oculta; EER: Error Estandar de la Regresión; CIS: Criterio de información de Schwarz –entre paréntesis el CIS para la serie original–; exponentes de Lyapunov en base Ln. Atractor de Rössler muestruado para Δt=1.

Para el caso de las tres series no caóticas se estima un signo negativo, no estimándose además estructura determinista en el camino aleatorio gausiano – la red estimada no mejora el Criterio de Información de Schwarz de la serie original que aparece entre paréntesis–.

---

[26] El criterio de información Bayesiano es similar al de Akaike $-(q\ln T_m)/T_m+\ln\sum \hat{u}_t/T_m-$ diferenciándose de este último porque penaliza más la sobre-utilización de parámetros en el modelo. Para otros criterios véase Ellner et al.(1992). Estos autores recomiendan el uso de este criterio sólo en el caso de que la hipótesis de linealidad se haya rechazado previamente.

[27] Estos métodos utilizan una red neuronal artificial como las presentadas en el texto para estimar la matriz Jacobiana asociada a la estructura determinista (5.33) que gobierna la evolución de la órbita reconstruida por el método de los retardos. A partir de esta estimación y utilizando el método de la descomposición QR propuesta por Eckman y Ruelle (1985, pp650-651) los exponente de Lyapunov se pueden estimar a partir de su definición en (5.31).

El segundo algoritmo que utilizaremos es el NETLE, definido en Gencay y Dechert (1992 y 1993) y Kuan y Liu (1995) y programado en Kuan, Liu y Gencay (1997), y al igual que el anterior resulta robusto incluso ante la presencia de ruido y cuando las series son cortas, pero con la ventaja de que proporciona estimaciones para el espectro completo de exponentes de Lyapunov. En la tabla 5.2. mostramos los resultados obtenidos por este algoritmos para las mismas series que el anterior.

Tabla 5.2.

Estimación indirecta del espectro completo de exponentes de Lyapunov. Programa Netle								
SERIE	τ	*m*	*k*	*EER*	*CIS*	*Espectro de exponentes*		
Logística μ=4	1	1	5	0	-14.34 (-2.09)	0.693		
Henon	1	2	6	2.4E-05	-10.34 (-0.62)	0.422	-1.634	
Rössler (Δt=1)	1	3	16	0.158	-0.84 (4.94)	92	-0.003	-593
Camino Aleatorio N(0,1)	1	1	1	0.858	-0.10 (-0.14)	-20 (-∞)		
GARCH	1	1	1	8.997	2.25 (2.21)	-12.73 (-∞)		
ARMA(2,1)	1	1	1	0.991	0.04 (2.69)	-0.036		

Tamaño muestral: 500 datos; τ= retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción;*k*: número de nodos en la capa oculta; EER: Error Estandar de la Regresión; CIS: Criterio de información de Schwarz –entre paréntesis el CIS para la serie original–; exponentes de Lyapunov en base Ln. Atractor de Rössler muestruado para Δt=1.

Los valores estimados del espectro para las series caóticas se aproxima a los correspondientes valores verdaderos –para la logística λ1=0.693; el atractor de Henon λ1= 0.416, λ2= -1.594 ; y el Rössler λ1= 0.068, λ2= 0, λ3= -5.218–, siendo para el atractor de Rössler para el que se obtiene una pero estimación. En las series no caóticas se estima un exponente negativo, siendo capaz el algoritmo de discriminar entre la serie ARMA (2,1), para la cual se detecta correctamente estructura determinista, y las series puramente aleatorias donde el criterio de información de Schawrz parece indicar la ausencia de estructura determinista.

La capacidad de este segundo algoritmo para estimar el espectro completo de exponentes –tantos como la dimensión de inserción o número de inputs de la red– proporciona no sólo información sobre la estabilidad local de la dinámica del sistema subyacente. De forma adicional, este algoritmo se puede utilizar para obtener información sobre el número de grados de libertad activos en la dinámica subyacente, esto es, su dimensión dinámica. Ello se debe a que utilizando este algoritmo es posible detectar para qué dimensión de inserción los exponentes de Lyapunov estimados resultan espurios (Gencay y Dechert, 1992, p. 156). Cuando el algoritmo se aplica para dimensiones de inserción mayores que la dimensión dinámica del sistema subyacente entonces se debería estimar un vector de derivadas nulas para aquellas dimensiones que no explican la evolución de la órbita en el atractor y que por tanto no son activas. Entonces, para las dimensiones de inserción mayores a la verdadera dimensión dinámica del atractor, habría que esperar un exponente de Lyapunov cuyo valor tienda a menos infinito[28]. Un método para detectar esos exponentes espurios es, para un tamaño muestral dado,

[28] Obsérvese que como la derivada tiende a cero en esas dimensiones, su logaritmo debe tender a menos infinito.

aplicar el algoritmo NETLE para dimensiones de inserción cada vez mayores. Entonces en las sucesivas estimaciones en las que se utilizan mayores dimensiones de inserción, los verdaderos exponentes deberían permanecer invariantes, mientras que los exponentes espurios deberían disminuir fuertemente con el aumento de la dimensión de inserción.–en la tabla 5.2 mostramos los resultados obtenidos utilizando este método para una serie temporal de 500 datos extraidos de la ecuación logística con μ=4 (el verdadero valor del exponente de Lyapunov es ln2)–.

Tabla 5.1
Exponentes de Lyaponov aplicación logística μ=4

m	1	2	3
$\lambda 1$	693	691	693
$\lambda 2$	–	-616	-4239
$\lambda 3$	–	–	-4477
EER	0	0	0,00005
CIS	-14342	-143754	-143549
k	5	5	3

EER:Error Estándar de la regresión;CIS: Criterio de información de Schwarz; *k*: número de unidades de la capa oculta de la red; Tamaño muestral de la serie 500 datos (Los exponentes de Lyapunov λi están expresados en base ln)

Terminamos, este apartado indicando de nuevo que gracias a la capacidad de los modelos estadísticos de redes neuronales para captar cualquier estructura no-lineal presente en la serie temporal, estos modelos pueden considerarse como los modelos más generales para estimar cualquier función no-lineal determinista arbitraria presente en la serie temporal –asumiendo el papel de los procesos ARMA del paradigma lineal– y por tanto pueden utilizarse de manera robusta para la estimación de los exponentes de Lyapunov de una serie temporal. De manera adicional, y siempre que la dinámica del sistema subyacente se encuentre acotada –sistema disipativo– la presencia de un exponente de Lyapunov es condición necesaria y suficiente para que el sistema se encuentre en régimen caótico –caos en sentido de Ruelle–. Es por ello, que estos modelos constituyen la principal herramienta para detectar directamente la presencia de comportamientos caóticos en las series temporales. A continuación presentamos un segundo test que tradicionalmente se ha utilizado como complemento a la estimación de los exponentes de Lyapunov en el análisis de la series temporales, la dimensión fractal.

5.6. La estimación de la dimensión Fractal

Una vez que hemos presentado algunos de los métodos para estimar los exponentes de Lyapunov del sistema dinámico generador de una serie temporal, en el presente apartado vamos a analizar la dimensión fractal, una segunda medida invariante que también puede utilizarse para detectar comportamientos caóticos.

Recordemos que los atractores extraños son objetos fractales, esto es, se caracterizan por poseer una dimensión fractal o de Hausdorff estrictamente superior a su dimensión topológica –apartado 3.4–. Es por ello que una posible vía para detectar comportamientos caóticos es estimar la dimensión fractal del atractor, en caso de que exista, al que converge la dinámica subyacente a la serie temporal. Aunque el desconocimiento sobre el proceso dinámico hace que esta dimensión fractal deba estimarse a partir del atractor reconstruido por el método de los retardos, el teorema de Takens garantiza que la dimensión así calculada coincidirá con la correspondiente al atractor original ya que ambos serán topológicamente equivalentes. Así, cuando la dimensión estimada sea no entera, entonces podremos decir que el atractor es un objeto fractal y, por consiguiente, que posiblemente el sistema subyacente presentará comportamiento caótico determinista de dinámica compleja.

La dimensión fractal proporciona, así mismo, información sobre la complejidad estructural del proceso generador de la serie temporal, lo que permitirá discriminar entre comportamientos dinámicos de baja dimensión de aquellos otros con elevada dimensionalidad –grados de libertad dinámicos o número de variables de estado–. El grado de complejidad estructural es una propiedad de la dinámica subyacente que también puede ayudar a la detección de caos determinista. Siguiendo el enfoque laplaciano, el comportamiento puramente estocástico procede de procesos con una estructura caracterizada por un elevado número de grados de libertad[29] –con una elevada dimensión dinámica–, mientras

[29] Bajo el enfoque del indeterminismo laplaciano, los fenómenos puramente aleatorios son en realidad sistemas deterministas, en el sentido de que existen leyes que gobiernan o rigen su comportamiento, pero de una elevada dimensión –con un gran número de grados de libertad–. El carácter aleatorio de esta clase de fenómenos procede del hecho de que no es posible obtener información completa sobre todos los grados de libertad del sistema, o aunque se tenga, es materialmente imposible procesar la, lo que impide el perfecto conocimiento de estos fenómenos a través de la construcción de leyes deterministas, limitándose su estudio al enfoque estadístico o probabilístico. A modo ilustrativo, podríamos afirmar que el lanzamiento de un dado, a pesar de utilizarse como ejemplo básico de fenómeno puramente aleatorio, constituye en realidad uno perfectamente determinista en la medida de que la evolución que sigue el dado desde su lanzamiento hasta que queda finalmente en reposo está perfectamente determinada por las leyes de movimiento de la física –si se conociera perfectamente la dirección y la fuerza del impulso inicial, la masa y las posibles imperfecciones en la superficie del dado, la fuerza de rozamiento con el aire, la rugosidad de la superficie sobre la que se lanza, ... entonces seríamos capaces de predecir perfectamente el resultado del lanzamiento–. Sin embargo, el imperfecto conocimiento que se tiene sobre toda esta gran cantidad de grados de libertad hace que la mejor

que los procesos deterministas –predecibles y perfectamente caracterizables a través de leyes deterministas que no incluyan variables aleatorias–, serán en general de reducida dimensión. Así, a efectos de la posible modelización o de la predicción del comportamiento futuro de la dinámica subyacente a la serie temporal, estaremos interesados en detectar *caos bajo dimensional*, en el sentido de que la existencia de un sistema dinámico determinista caótico de elevada dimensión, puede considerarse equivalente a efectos prácticos a un sistema puramente estocástico. En este sentido Dechert, Sprott y Albers (1999) muestran como, en efecto, a medida que aumentan los grados de libertad de los sistemas dinámicos no lineales –modelos de redes neuronales– la probabilidad de que presenten comportamientos caóticos aumenta en un 100%. Sin embargo, como decimos, a efectos de su posible modelización y predicción cuando estos sistemas deterministas de elevada dimensión son desconocidos, o aun siendo conocidos no es posible obtener una información infinitamente exacta sobre su verdadero estado en cada instante del tiempo, entonces, como consecuencia de la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales pueden considerarse como esencialmente estocásticos.

Observese que el propósito que se persigue con la detección del caos es la de mejorar el conocimiento y las predicciones que sobre la dinámica subyacente en un sistema proporcionan los modelos estocásticos, y si el sistema es caótico pero de elevada dimensión, entonces, muy probablemente la aproximación estocástica será la mejor que se pueda hacer no siendo posible mejorarla con la utilización de modelos deterministas.

Por otra parte, la detección de una baja dimensionalidad en la dinámica subyacente a una serie temporal, cuando se complementa con otras técnicas, como por ejemplo el análisis de la serie temporal en el dominio de frecuencias –el periodograma–, puede utilizarse para detectar comportamientos caóticos. Cuando la inspección del periodograma revele la presencia de comportamientos aperiódicos que descarte que la serie procede de un sistema de dinámica simple, para verificar si esta aperiodicidad precede de un proceso puramente aleatorio o si por el contrario ha sido generado por un sistema caótico determinista, debería estimarse el número de grados de libertad del sistema. Si el proceso subyacente resultase ser de baja dimensión, entonces podría plantearse la plausibilidad de la hipótesis de su naturaleza caótica.

Por último debemos apuntar que la estimación de la dimensión fractal a partir de una serie temporal, no puede tomarse, a diferencia del espectro de exponentes de Lyapunov, como un test suficiente para la detección de caos determinista. Ello se debe, en primer lugar, a que sólo es posible obtener estimaciones aproximadas sobre la verdadera dimensión fractal de un sistema dinámico desconocido, y por tanto, resulta muy arriesgado asegurar cuando ésta es entera o fraccionaria. En segundo, porque cuando se trabaja con series temporales, y sobre todo si son económicas, hay que aceptar como punto de partida el hecho de que en las series

---

aproximación sea la puramente probabilística, es decir, aquella que le asigna la misma probabilidad a todos los resultados posibles (Fernández Díaz, 2000, p.5).

siempre existe algún componente aleatorio, por lo que la estimación de la dimensión del proceso determinista, en caso de que exista, siempre se verá sesgada al alza, dificultándose por tanto la detección de los comportamientos caóticos de baja dimensión. Es por ello, que la estimación de la dimensión fractal –en la búsqueda de una dimensión no entera y no muy elevada– debe tomarse como un complemento a las otras técnicas para la detección de caos, una evidencia adicional, más o menos fuerte, de la posible presencia de comportamientos caóticos en la dinámica subyacente a una serie temporal.

Una vez realizadas estas consideraciones previas, pasamos a analizar algunos de los distintos métodos existentes para estimar la dimensión de Hausdorff o dimensión fractal del atractor reconstruido a partir de una serie temporal por el método de los retardos. Como se recordará del capítulo 3, la dimensión fractal hace referencia a la forma en que un objeto geométrico llena el espacio de fases. A partir del recubrimiento o en losado de una figura geométrica por una familia de infinitos subconjuntos de hiper-volumen arbitrariamente pequeño, la dimensión de Hausdorff es el factor de escala del número de conjuntos necesarios para recubrir toda la figura a medida que va disminuyendo la escala de observación –a medida que disminuye el hiper-volumen de los conjuntos del recubrimiento–.

Esta dimensión de Hausdorff, tiene un carácter métrico –pero utilizando conceptos de medida alternativos a los tradicionales de longitud, área y volumen– y suele calcularse utilizando recubrimientos formados por hiper-cubos o cajas –dimensión de recuento por cajas–. Este método para el cálculo de la dimensión fractal resulta, sin embargo, poco operativo cuando se desea estimar la dimensión del atractor reconstruido utilizando los retardos de una serie temporal cuando la dimensión euclídea de inserción es superior a dos. Es por ello que se han desarrollado otros métodos alternativos que permiten aproximar la dimensión fractal de manera ajustada y cuyo cálculo resulta más operativo que la dimensión de recuento por cajas o dimensión fractal. Estos métodos utilizan la teoría ergódica para construir una medida de carácter probabilístico del atractor –frecuencia con la que la órbita visita de las diferentes partes del atractor–, que definen nuevos conceptos de dimensión fractal cuando se analiza cómo cambia dicha medida cuando disminuye la escala de observación –la dimensión fractal será el exponente o factor de escala de la ley de potencia que relaciona la medida probabilística del atractor con el grado de exactitud con la que éste es observado–. A continuación presentamos tres de estas dimensiones probabilísticas, las denominadas dimensión de correlación, de información y de Lyapunov.

La dimensión de correlación

La dimensión de correlación propuesta por Grassberg y Procaccia (1983a) constituye una de las dimensiones fractales más ampliamente utilizadas en el análisis de series temporales para la detección del caos. Su estimación a partir del atractor reconstruido por el método de los retardos se basa en la medida denominada *integral de correlación* o *correlación espacial*.

La integral de correlación mide la probabilidad de que la distancia entre dos puntos cualesquiera del atractor sea menor que cierta cantidad *r* arbitrariamente pequeña. Suponga que el atractor de un sistema dinámico es caótico, y considere dos puntos en este atractor suficientemente alejados en el tiempo. Debido a la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, estos puntos estarán dinámicamente incorrelacionados ya que pequeños errores de medida en la determinación del punto inicial conducirán a diferentes localizaciones en el segundo punto. A pesar de esta ausencia de correlación dinámica, como ambos puntos están localizados dentro del atractor –una región acotada del espacio de fases–, entonces esos puntos deben permanecer próximos en el espacio de fases, por lo que podemos afirmar que estarán espacialmente correlacionados.

Así, se dice que dos puntos del atractor reconstruido en el espacio de inserción *m*-dimensional $\boldsymbol{y}_i$ e $\boldsymbol{y}_j$ están espacialmente correlacionados si la distancia euclidea entre ellos es menor que un radio dado *r* de una bola *m*-dimensional centrada en uno de los dos puntos:

$$\|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\| < r \tag{5.43}$$

La integral de correlación *C(r,m)* vendrá dada, asintóticamente, por la correlación espacial entre *todos* los puntos *m*-dimensionales del atractor para un *r* dado arbitrariamente pequeño:

$$C(r,m) = \lim_{T_m \to \infty} \frac{1}{T_m^2} \cdot [\textit{número de pares } i \text{ , } j \textit{ tales que } \|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\| < r] \tag{5.44}$$

o alternativamente:

$$C(r,m) = \lim_{T_m \to \infty} \frac{1}{T_m^2} \cdot \sum_{i \neq j = 1}^{T_m} \theta(r - \|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\|) \tag{5.45}$$

siendo T_m la longitud de la serie reconstruida con las *m-historias* , $\|\cdot\|$ la norma euclidea[30], y $\theta(\cdot)$ la función Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & si\ x > 0 \\ 0 & si\ x \leq 0 \end{cases} \tag{5.46}$$

La dimensión de correlación se calcula a partir de la integral de correlación

---

[30] Brock (1986, pp. 175-176) muestra que la integral de correlación es independiente de la elección entre la norma euclidea y la norma máxima. Así, por motivos computacionales suele utilizarse la norma máxima:

$$\|\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{y}_j\| = \max_{k=1,\ldots,m} \left\{ \left| y_{i+(k-1)\tau} - y_{j+(k-1)\tau} \right| \right\}$$

por lo que la integral de correlación (5.45) se podrá estimar como:

$$C(r,m) = \frac{2}{T_m(T_m - 1)} \cdot \sum_{i=1}^{T_m} \sum_{j=i+1}^{T_m} \prod_{k=1}^{m} \theta(r - |y_{i+(1-k)\tau} - y_{j+(1-k)\tau}|)$$

(5.45) observando como cambia *C(r,m)* a medida que disminuye el radio de la bola *r*. Más concretamente, Grassberg y Procaccia (1983a) muestran que ambas variables siguen la siguiente ley de potencia:

$$C(r,m) \propto r^{D_C} \tag{5.47}$$

siendo la *dimensión de correlación* el exponente o factor de escala en (5.47) para valores de *r* infinitesimalmente pequeños:

$$D_C = \lim_{r \to 0} \frac{d \ln C(r,m)}{d \ln r} \tag{5.48}$$

En la práctica, la estimación de la dimensión de correlación suele realizarse calculando la integral de correlación para distintos valores de *r*, quedando entonces definida la dimensión de correlación como:

$$D_C = \lim_{r_j \to 0} \frac{\ln C(r_j,m) - \ln C(r_{j-1},m)}{\ln r_j - \ln r_{j-1}} \quad ; \; j=1,2,3... \tag{5.49}$$

Alternativamente, podría calcularse la dimensión de correlación estimando la ley de potencia (5.48) por mínimos cuadrados ordinarios utilizando para ello la integral de correlación calculada para distintos valores de *r* arbitrariamente pequeños:

$$\ln C(r_j,m) = c_o + D_C \cdot \ln r_j + u_j \quad ; \; j=1,2,3... \tag{5.50}$$

siendo c_0 una constante arbitrara y u_j un término de error. Nótese que la dimensión de correlación así estimada dependerá en general de la dimensión de inserción *m* elegida, de las distancias *r* consideradas y del tamaño muestral de la serie temporal utilizada. A continuación pasamos a comentar algunas de las propiedades de la dimensión de correlación estimada según sean los valores considerados de esos tres parámetros.

En primer lugar, la integral de correlación *C(r,m)* así como la dimensión de correlación D_C estimada por (5.49) o (5.50), dependen de la dimensión de inserción *m* utilizada para la reconstrucción del atractor. La cuestión de cuándo y cómo la dimensión de correlación varía cuando varía *m* resulta fundamental para detectar la complejidad estructural del sistema y la mínima dimensión de inserción necesaria para reconstruir la verdadera dinámica del sistema generador de la serie temporal. En este sentido, Brock (1986, p.176) muestra que la dimensión de correlación es independiente de la dimensión de inserción elegida para la reconstrucción del atractor para una dimensión de inserción suficientemente elevada. Es decir, que la verdadera dimensión de correlación deberá revelarse cuando se alcance una dimensión de inserción suficientemente elevada. Así, si nos encontramos ante sistemas caóticos de baja dimensión, la dimensión de correlación estimada deberá ir creciendo con la dimensión de inserción utilizada hasta que se alcance la dimensión de inserción apropiada –para la cual se despliega totalmente el atractor–, y a partir de ella, la dimensión de correlación estimada deberá permanecer constante aunque se siga estimando para

dimensiones de inserción crecientes[31]. En caso contrario, es decir, en el caso en que no se alcance ninguna dimensión de inserción para la cual se estabilice la dimensión de correlación estimada, debería aceptarse que el proceso generador de la serie no converge a un atractor bajo dimensional, o si se prefiere, que el sistema presenta una dimensión dinámica o grados de libertad o complejidad estructural elevada, pudiendose considerar en tal caso como si se tratase de un sistema puramente aleatorio. En el caso de un camino aleatorio se tendría por ejemplo, que la dimensión de correlación estimada será aproximadamente igual a la dimensión de inserción utilizada –$D_C \approx m$– (Liu, Granger y Heller, 1992, p.19)[32].

Por otra parte, y en segundo lugar, la integral de correlación (5.45) se define de manera asintótica cuando $T_m \rightarrow \infty$, por lo que su estimación requiere la utilización de series temporales largas –Smith(1988, p.283) muestra que el número de puntos necesarios para calcular la dimensión de correlación debe ser $T_m \geq 42^M$, siendo M el mayor entero menor que la dimensión del atractor, aunque este límite ha sido criticado por excesivamente conservador, siendo posible obtener estimaciones ajustadas con series más cortas (Kugiumtzis et al. 1994, p.9)–. El cálculo de la integral de correlación con series cortas introduce fuertes sesgos en la estimación de la dimensión de correlación (véase Ramnsey y Yuan, 1989). Ello se debe, entre otras razones, a que con series cortas, la relación entre $\ln(C(r,m))$ y $\ln(r)$ para dimensiones de inserción suficientemente elevadas se convierte en una función de tipo *escalón*, por lo que la estimación de la dimensión de correlación como la pendiente de dicha función, se vuelve, cuanto menos problemática. Es por ello, que siguiendo a Ramsey, Sayers y Rothman (1990, p.998) calcularemos la dimensión de correlación para dimensiones de inserción crecientes hasta aquélla para la cual la dimensión de correlación caiga rápidamente, ya que esa será la señal que indique que se ha excedido el límite permitido por la muestra de datos disponibles.

En tercer lugar, la dimensión de correlación se define de manera asintótica cuando r tiende a cero. En el cálculo práctico de la integral y la dimensión de correlación, sobre todo cuando se trabaja con series de precisión limitada y perturbadas con ruidos puramente aleatorios, la elección del rango de r para la estimación de la dimensión de correlación puede sesgar los resultados obtenidos utilizando (5.49) o (5.50). Por una parte, para valores de r excesivamente elevados –de forma que la bola con radio r incluya a todo el atractor– la integral de correlación $C(r,m)$ se saturará en la unidad independientemente del valor concreto del radio r, por lo que la dimensión de correlación estimada será cero.

Por otra parte, cuando se eligen valores de r excesivamente pequeños, a pesar de que la definición de la dimensión de correlación se define para $r \rightarrow 0$ debido a

---

[31] Así la dimensión de correlación estimada proporcionará una idea de la dimensión dinámica (D_D) o complejidad esrtructural del sistema teniendo en cuenta que $m \geq D_D \geq D_F$.

[32] Precisamente en esta propiedad se fundamenta el test BDS para el contraste de la no-linealidad que será analizado en el próximo capítulo 9.

la precisión limitada de los datos entonces la integral de correlación estimada será nula. Otro problema que aparece a pequeñas escalas de *r* es que cuando la serie temporal se encuentra contaminada con ruidos puramente aleatorios, entonces la integral y la dimensión de correlación estimadas serán básicamente las del ruido aleatorio y no la de la dinámica determinista subyacente en la serie (Ramsey, Sayers y Rothman 1990, p.994). Es por ello, que deberá elegirse a priori el rango de valores de $[\underline{r}\ ,\bar{r}]$ adecuado para los cuales se calculará la integral y la dimensión de correlación evitando el sesgo introducido por el ruido aleatorio y por la saturación de la integral de correlación respectivamente.

En nuestras aplicaciones seguimos a Scheinkman y LeBaron (1989) quienes proponen utilizar un rango proporcional a la desviación típica de la serie σ, –por ejemplo $r \in [\underline{r}=0.5\sigma\ ,\bar{r}=1.5\sigma]$. Estos autores muestran que la elección del límite mínimo $\underline{r}=\gamma\sigma$ supone aceptar un término de error uniforme en la serie con desviación estándar $\sqrt{3}/6\,\underline{r}$, es decir, supone aceptar que la desviación estándar del ruido es menor que $\gamma\sqrt{3}/6\,\sigma$ –así, la elección de $\underline{r}=0.5\sigma$ supone aceptar que la desviación típica del ruido es menor que el 15% de la desviación típica de la

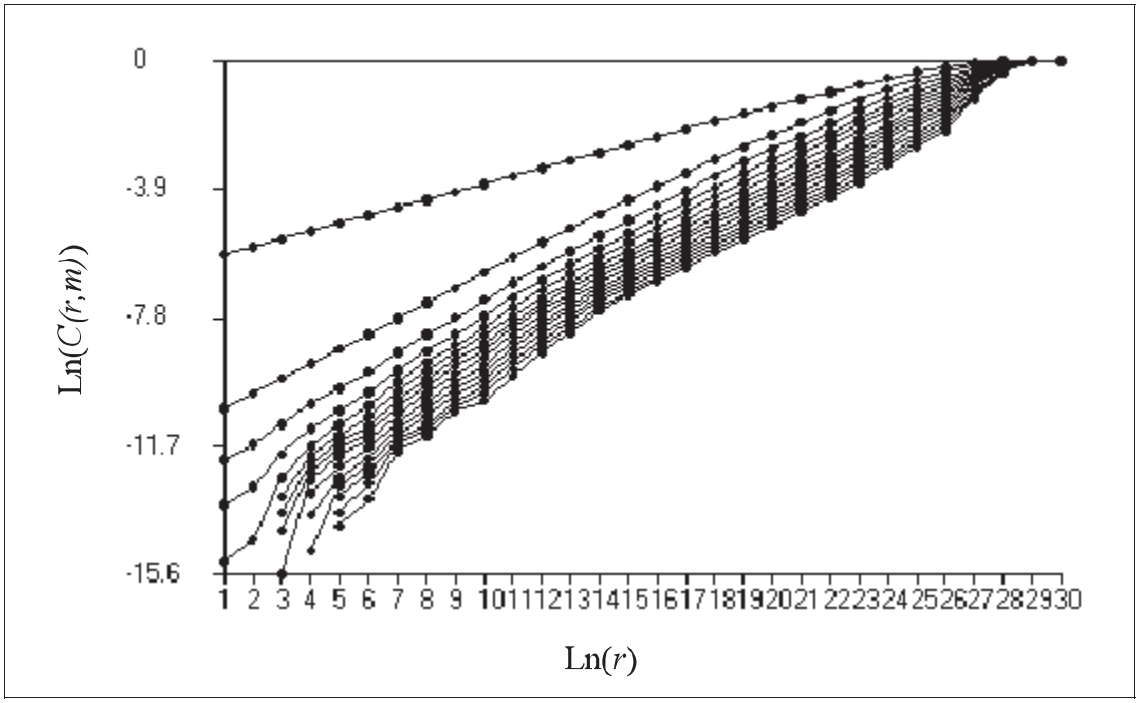


Figura 5.28. Atractor de Lorenz. Ln(C(r,m)) vs Ln(r).

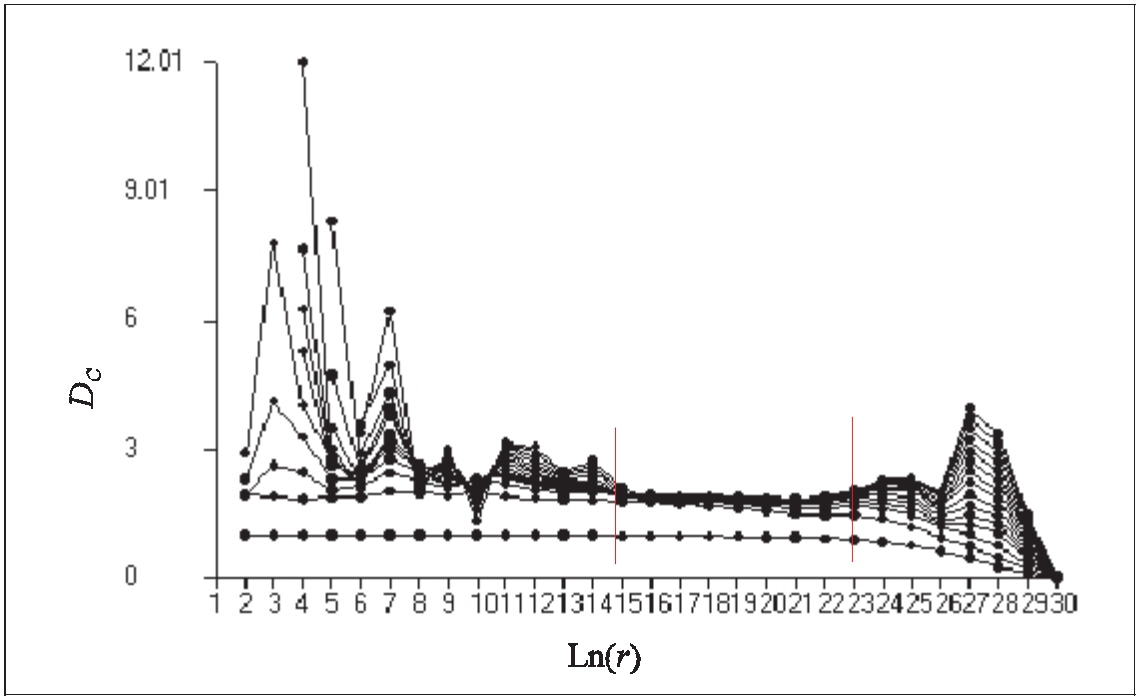


Figura 5.29. Atractor de Lorenz. Dimensión de correlación vs. Ln(r)

serie–[33].

A modo ilustrativo, en la figura 5.28 mostramos el gráfico de ln($C(r,m)$) sobre Ln(r) de la serie x obtenida por la iteración del atractor caótico de Lorenz para 30 valores de r y hasta la dimensión de inserción 15[34]. La dimensión de correlación vendrá dada por la pendiente de dicha gráfica apreciándose como a partir de la dimensión 4/5 parece alcanzarse su convergencia hacia un mismo valor. En la figura 5.29 se muestra la dimensión de correlación calculada como la tasa de variación puntual del anterior gráfico calculada según (5.49). Como se observa para un rango de valores de r pequeños, pero lo suficientemente elevados como para evitar los problemas de la precisión limitada de la serie, la dimensión de correlación parece estabilizarse para dimensiones de inserción superiores a 4/5 en el valor el valor $D_C \approx 1.89$. Este mismo resultado puede observarse más claramente en la figura 5.30 donde mostramos la dimensión de correlación estimada para distintos valores de m para el rango de valores de r donde la dimensión de correlación parecía estabilizarse –en rojo la dimensión de correlación estimada por mínimos cuadrados ordinarios (5.59) y en negro la media de la pendiente

[33] Otro problema que puede sesgar la estimación de la dimensión de correlación es que la dimensión de correlación se calcule teniendo encuenta datos altamente correlacionados temporalmente (Ramsey, Sayers y Rothman, 1990, p.994). Para evitar este sesgo debería calcularse la integral de correlación considerando sólo aquellos puntos que estén suficientemente separados en el tiempo.

[34] La utilización de la norma máxima para el cálculo de la integral de correlación hace que la integral de correlación disminuya con la dimensión de correlación elegida. El rango elegido para el radio r de las 30 bolas para las que se calcula la dimensión de correlación va desde 0.05 hasta 5 veces la desviación típica de la serie.

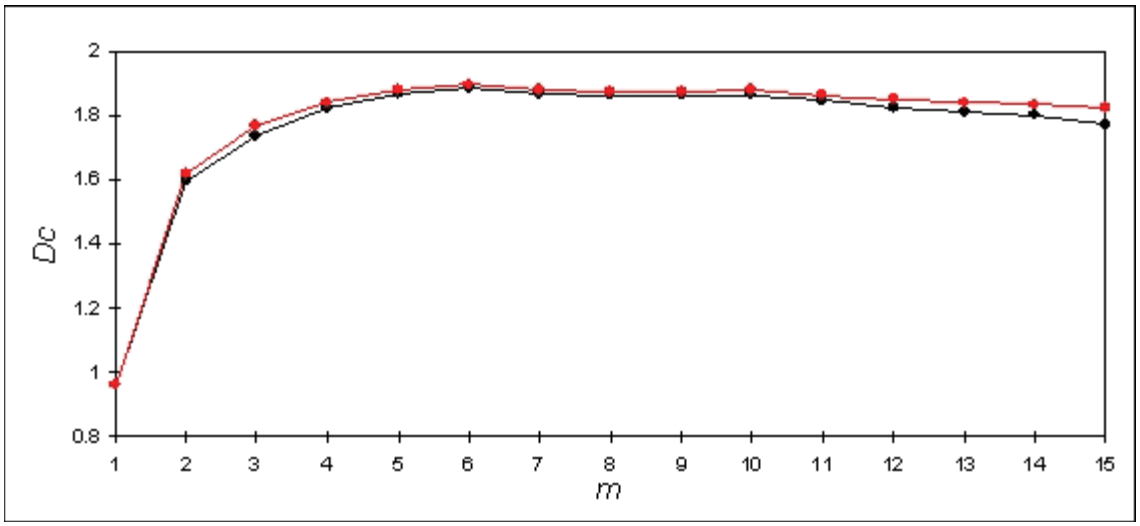


Figura 5.30. Atractor de Lorenz. Dimensión de correlación vs. Dimensión de inserción –calculadas por mínimos cuadrados y por la media de la variación puntual en negro y rojo respectivamente–.

puntual (5.49)–.

La dimensión de información

Un segundo método para el cálculo de la dimensión fractal es el que hace uso de la teoría de la información para construir una medida del atractor. Esta medida vendrá dada por la cantidad de información mínima necesaria para especificar un punto en un hiper-cubo de lado r. Así, si utilizamos un recubrimiento del atractor con $N(r)$ hipercubos de lado r, y denominamos por p_i la probabilidad de encontrar un punto del atractor en el hipercubo i. Entonces la medida de información media o entropía asociada al atractor vendrá dada por (véase apartado 5.2):

$$H(r)=-\sum_{i=1}^{N(r)} p_i \ln p_i \tag{5.51}$$

La dimensión de información o dimensión de Renyi es el factor de escala o exponente de la ley de potencia que relaciona los cambios de la entropía (5.51) con la longitud de los hiper-cubos:

$$-H(r)\propto r^{D_C} \tag{5.52}$$

definiéndose entonces la dimensión de información como el límite (véase Grassberger y Proccacia, 1983a, p.191 y Eckmann y Rueller, 1985, p.641):

$$D_I=\lim_{r\to 0}\frac{-H(r)}{\ln(r)} \tag{5.53}$$

Cohen y Procaccia (1984) muestran que la dimensión de información de un atractor puede calcularse a partir de la integral media de correlación de la órbita reconstruida a partir de los retardos de una serie temporal como:

$$D_I = \lim_{T_m \to \infty} \lim_{r \to 0} \frac{E[\ln C_i(r,m)]}{\ln(r)} \tag{5.54}$$

definiéndose la integral media de correlación en cada punto de la órbita reconstruida como:

$$E[\ln C_i(r,m)] = \frac{1}{T_m} \sum_{i=1}^{T_m} \ln C_i(r,m) \tag{5.55}$$

siendo $C_i(r,m)$ la integral de correlación individual de cada punto de la órbita reconstruida (i=1, 2, ..., T_m):

$$C_i(r,m) = \lim_{T_m \to \infty} \frac{1}{T_m} \cdot \sum_{j=1}^{T_m} \theta(r - \|y_i - y_j\|) \tag{5.56}$$

Dimensión de Lyapunov

Una tercera definición de dimensión fractal que puede utilizarse para aproximar la dimensión de Hausdorff es aquella que hace uso de los exponentes de Lyapunov estimados para el atractor reconstruido por el método de los retardos. La dimensión de Lyapunov D_L se define haciendo uso de los exponentes de Lyapunov a partir de la conjetura de Kaplan-Yorke. Esta conjetura parte de la relación entre la dimensión fractal y la suma de exponentes de Lyapunov cuya suma es mayor o igual que cero. Así si definimos a la suma de los primeros k exponentese de lyapunov ordenados de mayor a menor como (véase Eckmann y Ruelle, 1985, p.641):

$$c(k) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \tag{5.57}$$

siendo λ_i el i-ésimo exponente de lyapunov, entonces para el mayor entero k tal que $c(k) \geq 0$ y $c(k+1) < 0$ la dimensión de Lyapunov se define como:

$$D_L = k + \frac{c(k)}{|\lambda_{k+1}|} \tag{5.58}$$

Relación entre la dimensión de Hausdorff, de correlación, de información y de Lyapunov.

Como decíamos en la introducción a este apartado, los métodos propuestos para estimar la dimensión fractal –dimensión de correlación, de información y de lyapunov– proporcionan en realidad aproximaciones a la dimensión de Hausdorff, que de forma genérica guardan la siguiente relación (Grassberger y Proccacia, 1983a, pp. 191 y Eckmann y Ruelle, 1985, p. 642):

$$D_C \leq D_I \leq D_H \leq D_L \tag{5.59}$$

Ello impone fuertes restricciones a la hora de utilizar cualquiera de estas aproximaciones para identificar la verdadera dimensión de Hausdorff del atractor

al que converge la dinámica subyacente a una serie temporal y por tanto, no deberían utilizarse como una evidencia suficiente para detectar la estructura fractal de dicho atractor, es decir, como test suficiente para la detección de comportamientos caóticos a partir de una serie temporal. Sin embargo, estas aproximaciones sí pueden proporcionar información sobre la dimensión dinámica o grados de libertad o complejidad estructural de la dinámica subyacente, y es sólo en este sentido en el que creemos que deben utilizarse las dimensiones analizadas en el presente apartado.

5.7.- Entropía de Kolmogorov y pérdidas de información

Una último método que presentamos en este capítulo para contrastar la existencia de comportamientos caóticos a partir de una serie temporal se basa en el uso de la entropía de Kolmogorov o entropía métrica o simplemente entropía, que como se recordará, refleja la cantidad de información media producida en un atractor (véase apartado 5.2).

La entorpía de Kolmogorov se puede definir como sigue (véase Grassberger y Proccacia, 1983b, p. 2591).Considerese un sistema dinámico con dimensión dinámica D_d –número de grados de libertad–. Supóngase que se realiza una partición del espacio de fases en hiper-cubos de lado e. Supongase que existe un atractor en el espacio de fases, que la trayectoria $\boldsymbol{x}(t)$ se encuentra en la cuenca de atracción, y que el estado del sistema se mide a intervalos de tiempo τ. Sea $p(i_1,i_2, ..., i_d)$ la probabilidad conjunta de que el vector de estado $\boldsymbol{x}(t=\tau)$ se encuentre en el hiper-cubo i_1, $\boldsymbol{x}(t=2\tau)$ se encuentre en el hiper-cubo i_2 , ..., y que $\boldsymbol{x}(t=d\tau)$ se encuentre en el hiper-cubo i_d. Entonces la entropía de Kolmogorov se define como:

$$K=-\lim_{\tau\to 0}\lim_{e\to 0}\lim_{d\to 0}\sum_{i_1,\ldots,i_d} p(i_1,\ldots,i_d)\ln p(i_1,\ldots,i_d) \tag{5.60}$$

La entropía de Kolmogorov así definida puede interpretarse como la tasa media de pérdida de información de un sistema, o dicho de otro modo, el grado de sorpresa que sentiríamos al conocer el resultado de una medida sobre el estado del sistema (Fernández Rodríguez, 1995, p. 69). De esta forma es posible obtener información cualitativa sobre la dinámica del sistema según sea el valor de la entropía: K=0 corresponde a sistemas deterministas de dinámica simple; $K = \infty$ a procesos puramente estocásticos; y cuando la entropía sea una constante finita distinta de cero el sistema será caótico determinista. Nótese que como la entropía proporciona una medida de la pérdida de información que sufre el sistema, puede relacionarse con la capacidad de predicción del sistema a partir de una observación: cuando K=0 no hay pérdidas de información y la posibilidad de predicción no depende del tiempo, sino tan sólo de la precisión con que la que se

fijen las condiciones iniciales; en los sistemas caóticos donde $K>0$ y finito, la información contenida en las condiciones iniciales sufre un paulatino deterioro hasta desaparecer, momento a partir del cual se pierde la posibilidad de realizar predicciones ajustadas; y, en los procesos puramente estocásticos, en los que la perdida de información es infinita, la evolución futura del sistema no depende prácticamente de las condiciones iniciales de las que se parte, siendo en este caso mínima la capacidad predicitva. La entropía proporciona, por tanto, un horizonte temporal medio hasta el cual pueden realizarse predicciones en un sistema dinámico caótico. Si denominamos ϵ a la precisión con la que se fijan las condiciones iniciales, entonces, el horizonte máximo de predicción se establece por $Tmax = (1/K)\cdot\ln(1/\epsilon)$ (véase Fernández Rodríguez, 1995, p. 70) [35].

Para el cálculo de la entropía de Kolmogorov pueden utilizarse diversas aproximaciones. Una de ellas, se fundamenta en la interpretación de la entropía de Kolmogorov como una medida de la pérdida de información, más concretamente, esta aproximación propone que la entropía es una medida de la tasa media de separación de la órbita en todas las direcciones y que, por tanto, puede aproximarse haciendo uso de los exponentes de Lyapunov por (Lorenz, 1993, p.220)[36]:

$$K \leq \sum_{i}^{s} \lambda_i \ ; \ con \ \lambda_i>0 \ (i=1,...,s) \tag{5.61}$$

En las aplicaciones prácticas de este test, y debido a que es posible utilizar el algoritmo NETLE para estimar el espectro completo de exponentes de Lyapunov –robusto ante series cortas aunque estas estén contaminadas por perturbaciones puramente estocásticas– se puede utilizar este algoritmo junto a la aproximación (5.61) para la estimación de la entropía de Kolmogorov –Grassberger y Procaccia (1983b), por ejemplo, proponen utilizar la integral de correlación para aproximar la entropía como $K_2= \tau^{-1} \ln[C(e,d)/C(e, d+1)]$ con $K_2 \leq K$–.

[35] Este horizonte temporal puede aplicarse a la predicción por analogías de los sistemas caóticos discutido en el capítulo 2, donde ϵ puede tomarse como la distancia entre el estado a partir del cual se realiza la predicción y su vecino más cercano, cuya evolución temporal determina precisamente la predicción para la evolución futura y desconocida del sistema hasta el horizonte Tmax.

[36] Cuando la relación (5.61) se cumple con el signo igual se habla de la *identidad de Pesin* (Eckmann y Ruelle, 1985, p. 638)

CAPÍTULO 6

DINÁMICA ECONÓMICA SIMPLE: LIMITACIONES DEL ENFOQUE TRADICIONAL

Una vez analizados los elementos fundamentales de los sistemas dinámicos, vamos ahora a estudiar cuál ha sido su aplicación en la economía. Comenzaremos analizando los hechos estilizados de la dinámica económica, centrándonos en tres aspectos cualitativos observados que nos interesa destacar especialmente: las series económicas que recogen la actividad económica presentan una tendencia de crecimiento cíclico, irregular y difícilmente predecible en el corto plazo. Pasaremos a continuación a repasar las principales aportaciones en el campo de la dinámica económica enfocando dicho repaso al método utilizado, es decir, a las herramientas utilizadas para el análisis de la dinámica económica. Veremos que todas ellas pertenecen a lo que hemos denominado anteriormente como modelos de dinámica simple. Es por ello que este enfoque tiene poco que decir a la hora de explicar las irregularidades que presentan las fluctuaciones observadas en torno a la tendencia central de crecimiento de las series económicas reales. Ante esta limitación, y para poder explicar la existencia de ciclos económicos recurrentes, el enfoque tradicional de la dinámica económica introduce en sus modelos procesos estocásticos exógenos. Estas fuerzas exógenas son utilizadas para explicar el origen del ciclo o, en el mejor de los casos, para explicar las irregularidades del mismo.

Por otra parte, los conceptos desarrollados en los capítulos anteriores, nos permiten introducir la dinámica caótica como el medio natural para explicar de forma totalmente endógena la existencia de ciclos persistentes irregulares y de escasa predicibilidad. En efecto, como ya se ha comentado, en el enfoque tradicional la necesidad de introducir perturbaciones aleatorias exógenas viene impuesta a priori por el tipo de herramientas y modelos utilizados para estudiar los comportamientos complejos o irregulares de la actividad económica. Con la aparición de la matemática del caos se disponen de nuevos instrumentos distintos a la teoría de la probabilidad para describir dicha dinámica compleja.

Antes de comenzar con nuestra exposición es necesario aclarar dos cuestiones. En primer lugar, que la posibilidad de explicar de forma endógena la irregularidad observada en la evolución de la actividad económica, no quiere decir que nosotros apostemos por la inexistencia de fuerzas exógenas que bombardeen a las economías reales con perturbaciones puramente aleatorias. Lejos de esta postura reduccionista, pensamos que los shocks exógenos existen, aunque dichas perturbaciones son plenamente compatibles con un posible comportamiento caótico de la economía[1]. Nuestro enfoque quiere poner de manifiesto la posibilidad de explicar mediante modelos deterministas estructuralmente simples, comportamientos altamente complejos. Modelos con los que es posible reproducir las mismas características cualitativas que las observadas en la evolución de las series temporales económicas. Y todo ello, sin la necesidad de recurrir a variables exógenas, lo que consideramos un paso hacia adelante en el entendimiento de la realidad económica. Estos modelos de dinámica caótica serán analizados en los próximos capítulos. Comprobaremos entonces, que dichos modelos resultan más generales que los utilizados por el enfoque tradicional, ya que con ellos podrán representarse comportamientos no sólo simples sino también de dinámica compleja.

Ello no implica, tampoco, que apostemos por una falsa creencia en que el sistema económico sea un sistema estructuralmente simple. Por el contrario, el sistema económico es complejo, esto es, con elevados grados de libertad –multitud de agentes interactuando e interaccionando entre sí de manera auto-organizada–, que resulta, en la práctica, imposible de estudiar si no es mediante supuestos simplificadores o recurriendo a la teoría de la probabilidad. Con nuestro enfoque defendemos, únicamente, que la simplificación necesaria para profundizar en el comportamiento de la economía no implica necesariamente soluciones de dinámica simple.

En segundo lugar, que la teoría del caos o como reza el título de esta tesis la dinámica económica compleja, no constituye en sí una nueva doctrina de pensamiento económico a modo de alternativa totalmente alejada e independiente de las tradicionales neoclásica, keynesiana, monetarista, neokeynesiana, etc. Por el contrario la teoría o matemática del caos constituye simplemente un conjunto de herramientas disponibles para los economistas para entender el fenómeno económico. Un conjunto de herramientas que permite la entender algo más del posible origen de los comportamientos no sólo simples sino también complejos. Los modelos de dinámica económica caótica serán, por tanto, más generales que los utilizados tradicionalmente. Desde aquí reivindicamos la necesidad y conveniencia de su uso, ya que los modelos tradicionales presentan una serie de limitaciones en la capacidad de explicación cualitativa de ciertos aspectos de la realidad. Limitaciones que tienen su origen en el encorsetamiento que impone la linealidad de los modelos utilizados.

[1] De hecho, la existencia de dichas perturbaciones constituyen un gran problema al que nos enfrentamos a la hora de detectar comportamientos caóticos en las series temporales económica, restando potencia a los test para la detección de comportamientos caóticos.

Los modelos de dinámica económica compleja tienen su fundamento tanto en el uso de la matemática del caos, como en los supuestos de carácter económico característicos de cada escuela de pensamiento. Desde este punto de vista, la matemática del caos ayuda a la unión de las distintas doctrinas de la misma forma que lo hace el uso del cálculo diferencial por todas ellas. La matemática del caos permite, simplemente, una modelización más genérica. Sin embargo, como decimos, el fundamento teórico para crear modelos caóticos deterministas de dinámica económica compleja se encuentra en las distintas aportaciones de la dinámica económica tradicional. Es por ello que acometemos en este capítulo un repaso, sin ánimo de exhaustividad, de las principales aportaciones en este ámbito (seguimos a Fernández Díaz y Escot, 1999). En el próximo capítulo generalizaremos estos modelos para que permitan la aparición de comportamientos no sólo regulares sino también de dinámica compleja.

6.1.- Dinámica económica y sistemas dinámicos.

La dinámica económica es el estudio sistemático del cambio económico. La dinámica económica trata de explicar como se produce el cambio en la producción, el consumo, el comercio, la asignación de recursos, los precios, el bienestar y otras variables fundamentales de la economía. La representación de dichos cambios exige, por tanto, el uso de sistemas dinámicos.

En esta tesis nos centramos en la dinámica que trata de explicar cómo se produce el cambio en la dimensión de una economía, esto es, en la dinámica a largo y corto plazo de la actividad económica, y más concretamente, del nivel de renta o producción de una economía. Nos referiremos, por tanto, a las principales aportaciones dedicadas al análisis del crecimiento y el ciclo económico. Perseguimos con ello un doble objetivo. En primer lugar, analizar las implicaciones de política económica de cada una de esas aportaciones. En segundo, ver como se ha enfocado tradicionalmente el estudio dinámico de la economía, fundamentalmente en lo que hace referencia al tipo de modelos utilizados, equilibrios dinámicos considerados y posibilidades de explicación de las principales características cualitativas observadas en la evolución de la actividad económica.

Hechos estilizados de la dinámica económica.

Comenzamos nuestra incursión en la dinámica económica haciendo una breve referencia a las características esenciales que se observan empíricamente en la evolución de la actividad económica, esto es, a lo que a menudo se conocen como los hechos estilizados de la dinámica económica. Para ello hemos representado en la figura 6.1 la evolución desde principios de siglo de la renta per cápita para un conjunto de países de la economía mundial.

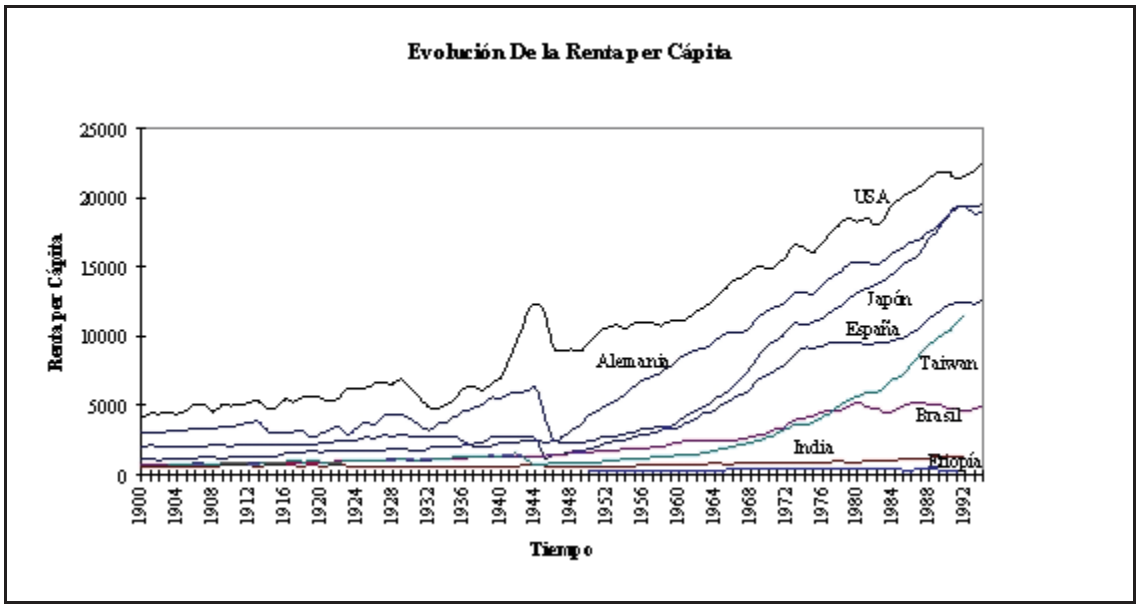


Figura 6.1. Evolución de la renta per cápita. Fuente: Maddison (1995, apéndice D)

Este gráfico revela alguna de las características esenciales de la dinámica económica. En primer lugar, se aprecia que no todos los países han seguido la misma evolución. A pesar de ello, y en términos generales se observa que a lo largo del periodo considerado, la renta per cápita –así como otras variables económicas como la producción industrial, el stock de capital, la población, etc.– muestra tendencias positivas de crecimiento en su evolución, que a veces se aceleran o frenan en algún instante del tiempo. A partir de este comportamiento general, podemos distinguir dos grandes fases en la evolución de la renta per cápita de las economías. La primera, hasta el final de la Segunda Guerra Mundial, se caracteriza por un crecimiento medio o tendencial escaso de la renta para el conjunto de la economía mundial. En la segunda, que se inicia a partir de 1945, comienzan ha observarse tasas de crecimiento medio considerablemente elevadas, al menos en los países industrializados. En países como Etiopía, India o Brasil, y en general en los países denominados subdesarrollados o en vías de desarrollo, no ha existido, por el contrario, un crecimiento lo suficientemente importante como para permitirles salir de su situación de atraso económico. Es más, la brecha existente entre estos países y los más adelantados ha ido en aumento. Otros países como Taiwán, y de forma genérica, los conocidos como los nuevos países asiáticos industrializados –Corea del Sur, Hong Kong, Singapur y Taiwán–, aun partiendo de situaciones de escaso desarrollo, han presentado unas tasas de crecimiento acelerado a partir de la década de los setenta[2].

Una segunda propiedad destacable de la dinámica económica, es que el crecimiento económico no sigue una tendencia suave. Por el contrario, se observan tasas de variación que fluctúan u oscilan en el tiempo. Esto es, la

[2] Para un análisis de las principales características de la evolución mundial y los distintos bloques económicos véase Galindo (1995) y Plaza (1997).

evolución de la renta se produce describiendo un crecimiento cíclico, con fluctuaciones aperiódicas irregulares y asimétricas que se suceden de manera recurrente en el tiempo.

Estos hechos estilizados se complementan con otros de los que sólo vamos a mencionar aquí su existencia. Nos referimos a los co-movimientos, adelantados o retardados, de mayor o menor amplitud, entre la renta per cápita y otros indicadores agregados representativos de una economía –empleo, consumo, inversión, precios, tipos de interés, etc.– que en mayor o menor medida se repiten en todos los países y en muy diversas circunstancias[3].

Igualmente significativa es la creciente coordinación en la evolución de las distintas economías como consecuencia de la cada vez mayor integración del comercio y las crecientes relaciones económicas internacionales[4].

Estas regularidades empíricas observadas en la evolución de la renta y demás indicadores del nivel de actividad de las economías han condicionado de manera fundamental la forma en la que la economía como ciencia ha afrontado el estudio y la explicación de la dinámica económica.

Modelos de dinámica económica, equilibrio económico y equilibrio dinámico.

El estudio de la dinámica económica, como ya hemos comentado, trata de explicar por qué ha sido ésta y no otra la evolución experimentada en la renta per cápita de los distintos países, cómo se espera que continúe en el futuro esa evolución, y si es posible afectarla o modificarla mediante algún tipo de medida de política económica para obtener resultados más favorables. Esto puede llevarse a cabo pensando en esa trayectoria de la renta como si se tratase de la solución a un sistema dinámico que represente cómo se produce el cambio económico, es decir, que refleje cuáles son los factores fundamentales de los que dependen las tasas de crecimiento observadas en la figura 6.1.

Las distintas aportaciones se centran en distintos factores determinantes del crecimiento. Sin embargo, la mayoría de ellas mantienen en común la forma de afrontar el problema del cambio, separando por una parte lo que es el estudio del crecimiento tendencial a largo plazo, y por otra, el de las fluctuaciones

[3] Sobre estas regularidades empíricas véase Argandoña, Gámez y Mochón (1997, pp. 31-33). Sobre la evolución de las fluctuaciones cíclicas para el caso español véase Sebastián (1997).

[4] Para un análisis de como se está desarrollando esta integración económica a nivel internacional, véase Plaza (1997)

cíclicas a corto en torno a esa tendencia general a largo plazo[5]. Surgen así la Teoría del Crecimiento y la Teoría de los Ciclos económicos. En los siguientes apartados repasaremos las características básicas de cada una de ellas. Por el momento queremos apuntar cómo se puede conectar esta distinción teórica entre ciclo y crecimiento con las características de los equilibrios dinámicos analizadas en los capítulos previos. Pretendemos con ello destacar que esta separación entre ciclo y crecimiento económico ha venido impuesta por el tipo de modelos que se han utilizado tradicionalmente para el análisis del cambio económico, modelos lineales o linealizables[6], que permiten la aparición, únicamente, de equilibrios dinámicos del tipo punto fijo.

En el capítulo 2 hemos analizado los distintos tipos de equilibrios dinámicos que de forma genérica pueden alcanzarse en el largo plazo: puntos fijos, ciclos límite toros cuasiperiódicos y atractores extraños. En los modelos de dinámica económica, la variable fundamental que se pretende explicar es la tasa de crecimiento de la renta y del resto de variables económicas (capital, población, consumo, etc.) en situaciones de equilibrio dinámico a largo plazo, esto es, una vez transcurrido el periodo de transición desde las condiciones iniciales del sistema hacia esas situaciones de equilibrio dinámico. Si dibujamos las tasas de crecimiento de cada una de las variables del modelo en el espacio de fases, podremos comparar cuáles son las sendas temporales o trayectorias que seguirían dichas variables en situación de equilibrio dinámico. Esto es lo que hacemos en la figura 6.2[7].

Cuando la tasa de crecimiento converge a un punto fijo, el nivel de renta evoluciona a largo plazo según una tasa de crecimiento constante. El resto de variables del modelo presentarán una tasa de crecimiento también constante y proporcional a la anterior. Este es el equilibrio dinámico normalmente considerado por los modelos de crecimiento económico, conocido como tasa de crecimiento equilibrado (*steady state*) en la que las variables del modelo están cambiando pero a una tasa constante, de una forma regular y proporcional. Esta tasa de crecimiento de equilibrio a largo plazo podrá ser

---

[5] Una excepción destacable fue la aportación de Schumpeter (1976 y 1927) al estudio integrador del ciclo y el crecimiento económico.

[6] Se trata de modelos no lineales pero que pueden linealizarse mediante alguna transformación que mantenga las propiedades básicas del modelo original –como el modelo de Solow que analizamos más alante–. Otras veces, los modelos no lineales han sido estudiados haciendo uso de aproximaciones lineales de los mismos para así facilitar su tratamiento matemático. Estos modelos no lineales pueden considerarse, por tanto, como de *esencialemnte lineales*.

[7] Representamos la evolución de la variable y expresada en logaritmos neperianos ya que nuestro interés, no está tanto en el propio nivel de la variable como en su tasa de crecimiento. Debido a que por definición: $\dot{y}/y=(dy/dt)/y=dlny/dt$, es decir, que la tasa de crecimiento de y viene dada por la pendiente de la trayectoria de su logaritmo, lny, respecto al tiempo. Esto permite identificar dicha tasa de crecimiento simplemente por la inspección visual de la pendiente de la senda temporal de y expresada en logaritmos.

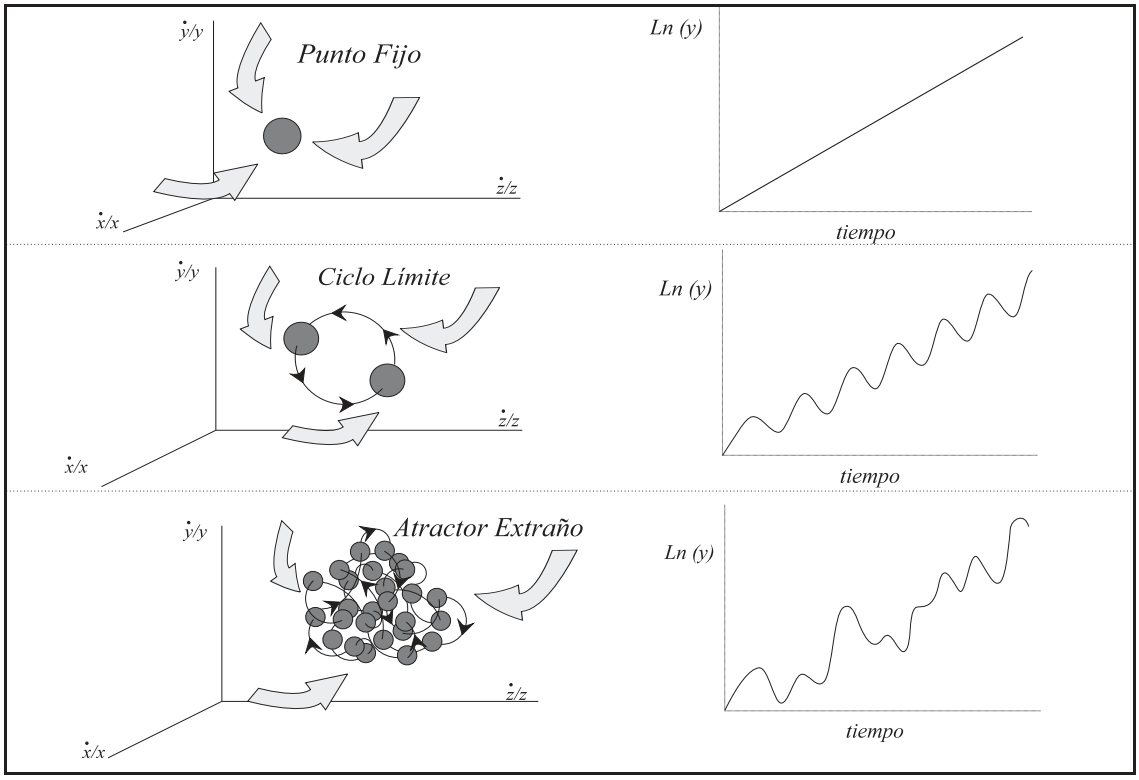


Figura 6.2. Equilibrios a largo plazo de dinámica económica.

nula, positiva o negativa dependiendo del modelo considerado, pero constante en cualquier caso. Este resultado se desprende del hecho de que los modelos normalmente utilizados son lineales o linealizables y, como ya se ha comentado, para que aparezcan otros tipos de equilibrio a largo plazo distintos al punto fijo, es necesario que los sistemas dinámicos se modelicen de forma no lineal.

Esa modelización lineal del enfoque tradicional tiene su base en la simplicidad, pero también ha estado influenciada por la tradición estática del análisis económico. En efecto, la teoría ortodoxa se centra en la noción de equilibrio general estático relacionada con el ajuste de las fuerzas del mercado –equilibrio walrasiano–. El equilibrio se define así como la situación en la cuál las fuerzas que determinan el comportamiento de las variables del sistema están equilibradas o ajustadas (*in balance*), no ejerciéndose así ninguna presión sobre esas variables para que cambien. Es una situación en la que todas las actuaciones de los agentes son mutuamente consistentes, identificando la situación de equilibrio económico con el vaciado de los mercados [8]. Este tipo

[8] En el análisis del equilibrio del mercado de bienes, por ejemplo, los precios están determinados por el proceso que conduce a los oferentes del mercado a incrementar los precios cuando la cantidad demandada al precio corriente, excede a la cantidad ofertada o producida, y a disminuir precios cuando lo que existe es un exceso de oferta sobre la demanda. Este mecanismo de mercado alcanza el equilibrio cuando las fuerzas de oferta y demanda son mutuamente consistentes y no existe por tanto incentivos a modificar los precios existentes en esa situación. En equilibrio no existe por parte ni de oferentes ni de demandantes estímulo a modificar sus decisiones en el mercado de oferta o demanda, por lo que se dice que las

de análisis se realiza además en un entorno fundamentalmente estático, sin tener en cuenta las relaciones intertemporales entre las fuerzas del mercado, realizando a lo sumo, ejercicios de estática comparativa, es decir, analizando como se ve modificado dicho equilibrio ante modificaciones de algún parámetro estructural o variable exógena del modelo[9].

Con la no linealidad surgen nuevas situaciones de equilibrio distintas al punto fijo en las que las variables del modelo evolucionan siguiendo un crecimiento con fluctuaciones cíclicas regulares (ciclos límite o cuasi-periódicos) o trayectorias caóticas deterministas (atractores extraños). Como veremos más adelante, las teorías del ciclo endógeno y las distintas aportaciones de dinámica compleja introducen no-linealidades precisamente para posibilitar la existencia de esas situaciones de equilibrio dinámico en las que el propio modelo puede generar de forma endógena crecimiento cíclico, posibilitando así la integración del estudio del ciclo y el crecimiento económico.

La consideración de modelos de dinámica económica simple, es decir, los que presentan equilibrios del tipo punto fijo, ciclo límite o cuasi-periódicos, introduce de forma adicional otra limitación en la posibilidad de estos modelos para explicar algunos de los hechos estilizados de la dinámica económica. Nos referimos concretamente a la aperiodicidad e irregularidad con la que fluctúan las variables económicas en su proceso de crecimiento. Esta limitación exige la consideración de perturbaciones aleatorias exógenas al modelo para la explicación de la irregularidad del movimiento. La dinámica económica compleja permite, por el contrario, explicar de forma endógena tanto la existencia de fluctuaciones cíclicas como su aparente aleatoriedad.

La consideración de estas distintas posibilidades –dinámica simple o dinámica compleja, equilibrios estables o inestables– en la explicación de la dinámica económica tendrá importantes consecuencias, no sólo en la capacidad explicativa de los hechos estilizados analizados anteriormente. Como veremos, también tendrá importantes repercusiones sobre las implicaciones de política económica propuestas por las distintas aportaciones en la explicación del ciclo y el crecimiento económico.

Concluimos este apartado reiterando que es importante distinguir entre el concepto de equilibrio económico walrasiano o vaciado de los mercados, con el de equilibrio dinámico, ya que como veremos más alante, existen modelos en desequilibrio económico pero que alcanzan equilibrios dinámicos.

---

actuaciones de los agentes en esta situación de equilibrio son mutuamente consistentes. Para una aplicación de la matemática del caos al proceso de ajuste de los mercados ver Day (1994).

[9] Los primeros trabajos de dinámica económica hacían referencia precisamente a esta dinámica del mercado, estudiando a un nivel fundamentalmente microeconómico, como se ajustan los mercados hasta alcanzar las situaciones de equilibrio walrasiano del tipo punto fijo, véase Day (1994, cap. 10).

6.2.- Dinámica económica simple a largo plazo: Crecimiento Económico

En términos generales, podríamos decir que la *teoría del crecimiento económico* trata de determinar qué factores son los relevantes a la hora de explicar la tasa de crecimiento tendencial a largo plazo de las distintas economías, es decir, cuál es la dinámica que rige el movimiento de la economía, y cuál es y cómo se determina la solución dinámica de dichas leyes de comportamiento temporal. Desde este punto de vista, supone un paso adelante respecto al enfoque tradicional estático, al reconocer la naturaleza intrínsecamente dinámica de la economía, y al tratar de entenderla y explicarla a través de la representación de modelos dinámicos que traten de acercar el conocimiento económico hacia una postura más realista y menos reduccionista.

No es nuestro propósito exponer aquí de forma exhaustiva el contenido de las distintas teorías de crecimiento económico[10]. Pretendemos por el contrario dar una visión general de las mismas que nos permita extraer alguna conclusión de política económica y conectar con las distintas aportaciones de la teoría del ciclo económico.

Teorías clásicas y modernas del crecimiento económico.

Dentro del conjunto de aportaciones relativas al crecimiento económico, cabe distinguir entre lo que podríamos denominar la teoría *clásica* y la teoría *moderna* del crecimiento económico. Esta clasificación, tiene su origen en el tipo de equilibrio que plantean para la tasa de crecimiento a largo plazo. Así, aunque las dos teorías proponen que en situaciones de equilibrio a largo plazo la tasa de crecimiento de la renta per cápita es constante –punto fijo–, para las aportaciones clásicas esa tasa de crecimiento es nula, mientras que en las teorías modernas toma valores positivos. Este resultado ha estado fuertemente determinado por las dos grandes fases en la evolución observada de la renta per cápita –apartado 6.1–.

La teoría clásica comprende desde los escritos de la escuela clásica –A. Smith, T.R. Malthus y D. Ricardo– hasta las aportaciones de J.M. Keynes, pasando por las visiones en cuanto a la dinámica de las economías de K. Marx y J.A. Schumpeter. La característica común de todas estas aportaciones es su pesimismo sobre las posibilidades de crecimiento a largo plazo de los países industrializados. Estos autores se centran en el estudio del funcionamiento de los países más adelantados, encontrando cada uno de ellos distintas causas que determinan el colapso y el freno al crecimiento a largo plazo de estas

[10] Para un análisis completo de las distintas teorías de crecimiento véase Galindo y Malgesini (1995) y Barro y Sala-i-Martín(1995), Aghion y Howitt (1998) y Novales y Sebastián (1999).

economías. Así, el agotamiento de las posibilidades de inversión (Smith), la ley de los rendimientos decrecientes (Ricardo), la dinámica de la población (Malthus), la llegada del socialismo (Marx), el deterioro del espíritu empresarial (Schumpeter) o la disminución de la eficacia marginal del capital (Keynes), son algunas de las causas básicas que determinan esas expectativas pesimistas sobre las posibilidades futuras del crecimiento económico[11].

A partir de la segunda guerra mundial, y en concordancia con la evolución observada en la renta per cápita de los países industrializados, que de alguna forma refutan los resultados de la teoría clásica, surgen las teorías modernas del crecimiento, en las que a diferencia de las clásicas las tasas de crecimiento a largo plazo son igualmente constantes pero positivas. Desaparece por tanto bajo este enfoque ese pesimismo en cuanto a las posibilidades futuras de crecimiento económico de las economías desarrolladas[12]. Estas teorías modernas del crecimiento se diferencian también de sus predecesoras por el mayor nivel de formalización que consiguen con el uso de sistemas dinámicos matemáticos . A continuación repasamos algunas de las principales aportaciones incluidas dentro de esta teoría moderna del crecimiento económico: el modelo de Harrod-Domar, los modelos neoclásicos de crecimiento exógeno y las teorías del crecimiento endógeno.

Dinámica Keynesiana a largo plazo: El modelo de Harrod-Domar

Como ya hemos comentado, el punto de inflexión entre las teorías clásicas y modernas del crecimiento económico se encuentra en la figura de J.M. Keynes. Más concretamente, el punto de partida de la teoría moderna del crecimiento se sitúa en los trabajos pioneros de Harrod (1939, 1948) y Domar (1946, 1947). Como característica fundamental, puede destacarse que estos modelos nacen del objetivo común de *dinamizar el análisis económico de Keynes*[13], tratando de expresar las condiciones que deben cumplirse en una economía de mercado para que se genere el volumen de demanda agregada necesario para mantener una situación de crecimiento sostenido, equilibrado y de pleno empleo. Se trata, por tanto, de un análisis en el que el nivel de producción y su crecimiento vendrán determinados por el lado de la demanda.

---

[11] Una visión completa de estas aportaciones en referencia al crecimiento económico puede encontrarse en Fernández Díaz y Galindo (1995).

[12] Como consecuencia de la incapacidad de esta teoría moderna del crecimiento para explicar la situación de los países en vías de desarrollo, y para tratar de dar respuesta a la gran dificultad que encuentran estos países para salir de su situación de atraso, surgen de manera paralela distintas aportaciones bajo la denominación de Teoría del Desarrollo. Para un análisis de las mismas véase Thirlwall, (1994) y Ghatak (1995).

[13] Para un análisis de las similitudes y diferencias entre los modelos de Harrod y Domar, véase Galindo y Malgesini (1994, pp 24-26).

Pese a que estos modelos han quedado ampliamente superados con las aportaciones posteriores sobre el crecimiento económico, constituyeron en su día el punto de partida a partir del cual se construyeron le resto de modelos sobre crecimiento económico. Su consideración en el presente trabajo se debe a que, pese a su simplicidad, recogen la esencia de la postura tradicional en cuanto al tipo de análisis dinámico adoptado por la teoría moderna del crecimiento económico. El modelo propuesto por estos autores parte de los siguientes supuestos sobre la economía[14]:

[S.1] El producto agregado obtenido en la economía (Y) se puede destinar directamente al consumo o a su acumulación en forma de stock de capital (K)para su uso en la producción de periodos posteriores, entendiendo como stock de capital el conjunto de factores productivos susceptibles de ser acumulados (capital físico público y privado, capital humano,...)

[S.2] El ahorro agregado de la economía (S) es una proporción constante (s) de la renta (Y): $S=sY$, lo que implica la aceptación de la función de consumo Keynesiana.

[S.3] Función de inversión keynesiana, es decir, se asume que el incremento en el stock de capital deseado o requerido por los empresarios para que éstos se sientan satisfechos con su inversión (K_r), es una proporción constante v_r del incremento efectivo en la renta: $\dot{K}_r=v_r\dot{Y}$

[S.4] Los factores productivos que *no* pueden ser acumulados L, (trabajo, tierra, energía) crecen a una tasa constante y exógena n: $\dot{L}/L=n$. En adelante nos referiremos por simplicidad exclusivamente al factor trabajo, considerando adicionalmente que la eficacia en la producción de dicho factor trabajo (A), crece también a una tasa constante y exógena x: $\dot{A}/A=x$. De esta forma, el factor trabajo medido en unidades de eficiencia o trabajo eficaz (AL), crece también a una tasa constante $n+x$.. Dicha eficacia en la producción del trabajo suele utilizarse como un indicador del nivel de tecnología utilizado en la producción, incluyendo no sólo factores puramente tecnológicos, sino también aquellos otros que también afectan a la capacidad productiva de una economía dadas unas dotaciones de factores productivos (regulación de los mercados, sistemas de organización empresarial, etc,). La tasa de crecimiento de este nivel tecnológico será por tanto un indicador del progreso tecnológico[15].

---

[14] Para un análisis detallado de estos modelos véase Jones (1988, pp. 51-78). Lo que aquí presentamos es una versión simplificada de los mismos.

[15] Este progreso tecnológico se dice que es potenciador del trabajo o neutral en sentido de Harrod, en la medida en que mantiene constante la proporción con la que se usan los factores productivos en la producción.

[S.5] No existe depreciación por el uso del capital. Este es un supuesto simplificador que no modifica de manera fundamental las conclusiones del modelo.

[S.6] La función de producción agregada es de proporciones fijas, es decir, sólo existe una única proporción en la que se pueden combinar los factores productivos capital (K) y trabajo eficaz (AL) para producir unidades adicionales de producto (Y):

$$Y = \min\left\{\frac{K}{v}, \frac{AL}{u}\right\} \tag{6.1}$$

La utilización de este tipo de función de producción permite que existan situaciones de desempleo de factores productivos, estando el nivel de producción de cada periodo limitado por la dotación existente de factores productivos. En cualquier caso, y debido a que el factor trabajo crece a una tasa constante, la cantidad de producción máxima de la economía vendrá dada por la cantidad de mano de obra en cada periodo. A la tasa de crecimiento de este nivel de producción máximo se le denomina *tasa natural de crecimiento* ($G_n=n+x$), y representará aquella tasa de crecimiento de la producción que mantiene a la población en pleno empleo. Si la *tasa de crecimiento efectiva* (G)fuese inferior a esta tasa natural no se estaría ocupando a toda la mano de obra y aparecería desempleo involuntario. Además esta tasa de crecimiento efectiva nunca podrá ser superior a la tasa de crecimiento natural dados los supuestos sobre la tecnología –sólo podrá ser superior momentáneamente si se parte de una situación inicial de desempleo–. Igualmente, la cantidad de capital utilizada en cada momento en la economía vendrá dada por la función de producción: $K=vY$, que expresados en términos diferenciales nos indicará la inversión neta efectiva en la economía en cada instante del tiempo[16]: $\dot{K}=v\dot{Y}$

A partir de estos supuestos podemos deducir la ecuación fundamental que exprese la dinámica de la economía suponiendo que el mercado de bienes y servicios se encuentra en equilibrio en cada momento. Esta condición de equilibrio económico exige el vaciado del mercado –oferta igual a demanda–, que en economías cerradas y sin sector público implica la igualdad entre ahorro e inversión[17]:

$$S=sY=\dot{K}=v\dot{Y} \tag{6.2}$$

[16]La introducción de estas dos interpretaciones sobre la inversión, la efectiva y la requerida, se debe a que el incremento efectivo en el stock de capital en principio no tiene porque coincidir con el que los empresarios consideran como apropiado dado el incremento efectivo en el nivel de renta

[17] La condición de equilibrio implica que la oferta se iguala a la demanda: $Y= DA$. Teniendo en cuenta que sin sector público ni sector exteriro $DA = C+ I$, y que $C=Y-S$, la anterior condición de equilibrio puede rescribiese como $S=I$.

A partir de la anterior condición de equilibrio obtenemos la expresión para la tasa de crecimiento efectiva de la renta:

$$G=\frac{\dot{Y}}{Y}=\frac{s}{v} \tag{6.3}$$

que nos indica que la tasa de crecimiento de la economía es constante y que será tanto mayor cuanto mayor sea la tasa media de ahorro (s) y la productividad del capital ($1/v$). La expresión (6.3) es la ecuación de movimiento del modelo. Ahora debemos preguntarnos por la existencia o no de una tasa de crecimiento de equilibrio dinámico a largo plazo.

Ese equilibrio es definido por Harrod a través de la *tasa de crecimiento garantizada* $G_w=s/v_r$, que será la tasa de crecimiento de la renta, que de alcanzarse, dejará a los empresarios satisfechos por haber invertido las cantidades correctas de capital dada precisamente esa tasa de crecimiento de la renta, y que por tanto, les predispondrá a mantener las mismas decisiones de inversión. Dicho de otra forma, si la tasa de crecimiento efectiva (G) coincide con la garantizada(G_w), entonces los empresarios no tendrán incentivos a modificar sus decisiones de inversión y por tanto se podrá mantener en el tiempo esta misma tasa de crecimiento garantizada. En este sentido, se dice que G_w es la tasa de crecimiento equilibrado y sostenido de equilibrio dinámico a largo plazo. Se trata por tanto de un equilibrio del tipo punto fijo, es decir, una tasa de crecimiento constante que será además positiva siempre que s y v_r sean positivas. La condición de equilibrio dinámico puede escribirse, por tanto, como:

$$G=G_w \tag{6.4}$$

Esta condición de equilibrio dinámico exige el equilibrio en el mercado de bienes y servicios, sin embargo no dice nada sobre el equilibrio en el mercado del factor trabajo. Así, si queremos eliminar la posibilidad de desempleo involuntario, la condición de equilibrio que ha de cumplirse será[18]:

$$G=G_w=G_n \tag{6.5}$$

Este sencillo modelo de crecimiento presenta dos características importantes que conviene mencionar: el problema de la existencia y el de la estabilidad. El primero hace referencia al hecho de que aunque esta condición de equilibrio dinámico con pleno empleo puede verificarse en las economías reales, será altamente improbable que ello suceda, ya que los parámetros que la definen (s, v, v_r , n y x)vienen determinados de forma independiente y exógena a la propia evolución del modelo. Es decir, no existe ningún mecanismo en el propio modelo que garantice que se alcance la situación de equilibrio a largo plazo.

[18] Este es un modelo keynesiano que permite la existencia de equilibrio en el mercado de bienes con desequilibrio en el mercado de trabajo, es decir, con desempleo o paro involuntario $G=Gw<Gn$.

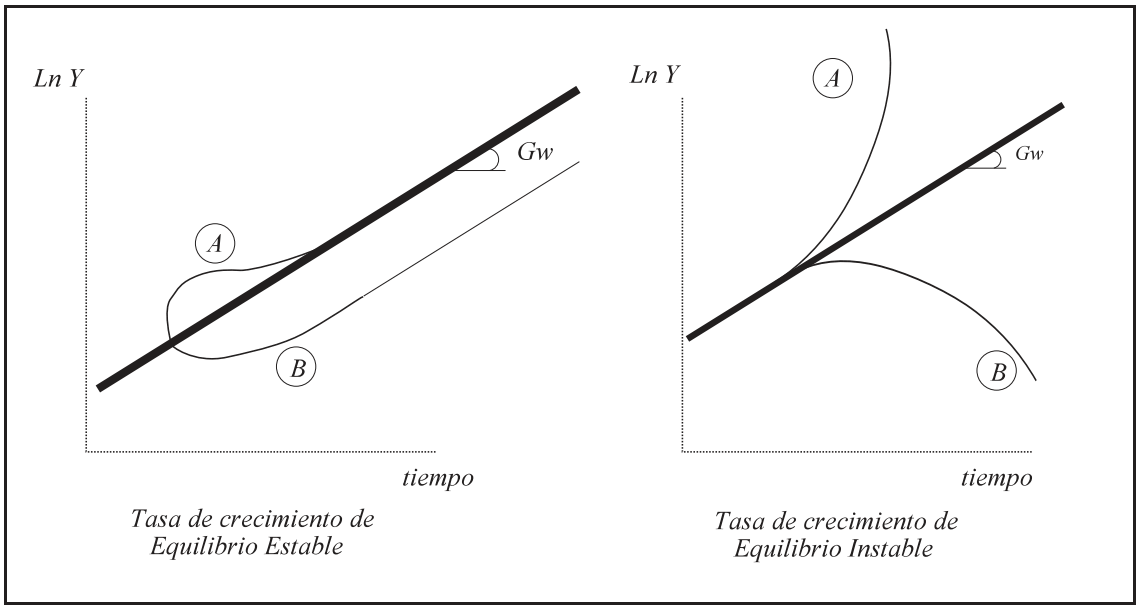


Figura 6.3. El problema de la inestabilidad en el modelo de Harrod-Domar.

El segundo problema hace referencia a la inestabilidad del equilibrio dinámico. En esta inestabilidad juega un papel fundamental el comportamiento de los empresarios a la hora de tomar sus decisiones de inversión. Debido a sus implicaciones de política económica, analizaremos brevemente este problema de la inestabilidad.

Se dice que en el modelo de Harrod-Domar la situación de equilibrio dinámico definida por (6.4) es fundamentalmente inestable, en el sentido de que cuando se producen pequeñas desviaciones entre las tasas de crecimiento efectiva y garantizada, estas desviaciones no tienden a autocorregirse o a eliminarse para volver de forma automática a la situación de equilibrio –lo que supondría que el equilibrio es estable–. Por el contrario, estas diferencias entre G y G_w tienden a hacerse mayores con el transcurso del tiempo. En la figura 6.3 tratamos de representar estas situaciones de estabilidad e inestabilidad del equilibrio dinámico.

En el gráfico de la izquierda se ha representado la situación que correspondería a un equilibrio estable ya que ante una perturbación que aleje al sistema de su senda inicial de crecimiento equilibrado, la propia dinámica del sistema hace que la tasa de crecimiento efectivo retorne a la situación de equilibrio[19]. En el gráfico de la derecha se representa el equilibrio inestable del modelo de Harrod-Domar.Para analizar de dónde surge esta inestabilidad

[19] Recordamos que las tasas de crecimiento vienen expresadas en este gráfico por la pendiente de la trayectoria temporal de la serie expresada en logaritmos. Para el caso del equilibrio estable se han representado dos posibles situaciones. En la primera (caso A), la correspondiente a un incremento en la tasa de crecimiento, el nivel de renta efectivo retorna, al igual que su tasa de crecimiento, a sus niveles originales. En la segunda (caso B), la correspondiente a una disminución de la tasa de crecimiento, la tasa de crecimiento retorna al equilibrio pero el nivel de renta permanece por debajo de la trayectoria original.

recurrimos a la definición de las tasas de crecimiento efectiva y garantizada: $G=s/v$; $G_w=s/v_r$. De esta forma por definición ha de cumplirse en todo momento que

$$v \cdot G = v_r G_w \tag{6.6}$$

Dados los supuestos del modelo, podemos entonces encontrarnos ante tres situaciones:

i) $G=G_w$, esta es la situación de crecimiento equilibrado y sostenido definida en (6.4). Ante esta situación y dada la condición (6.6), ha de verificarse que $v=v_r$, es decir, que el stock de capital que efectivamente poseen los empresarios es el que efectivamente desean mantener. Esto implica que como los agentes no se han equivocado en la determinación de sus decisiones de inversión, en el futuro mantendrán los mismos niveles de inversión, permaneciendo así la tasa de crecimiento constante de manera sostenida.

ii) $G>G_w$ (Caso A de la figura 6.3). Por (6.6) ha de verificarse que $v<v_r$, es decir, que si la tasa de crecimiento efectiva es mayor que la garantizada, los empresarios observarán que el incremento efectivo en su stock de capital es menor que el deseado –posiblemente porque al inicio del periodo hayan estimado un crecimiento de la renta menor que el que se ha producido finalmente–. De esta manera, los empresarios reaccionarán invirtiendo unas cantidades mayores de capital en relación a la inversión realizada anteriormente. Eso llevará a que la tasa de crecimiento sea aun mayor en el periodo siguiente, ampliándose la brecha inicial entre la tasa efectiva y la garantizada. Este proceso hará que, una vez alcanzado el pleno empleo, aparezcan situaciones de inflación de demanda[20], justificándose así la intervención pública mediante políticas de demanda contractivas encaminadas a reducir la demanda –inversión– privada para eliminar la inflación y retornar a la situación de equilibrio dinámico a largo plazo.

iii) $G<G_w$ (caso B de la figura 6.3). En este caso y por (6.6) tendrá que verificarse que $v>v_r$. Es decir, por un razonamiento análogo al anterior, los empresarios verán que la inversión efectiva es mayor que la deseada, con lo que en el siguiente periodo reducirán los niveles de inversión ralentizándose por tanto el crecimiento en periodos sucesivos y aumentando nuevamente la brecha entre las tasa de crecimiento efectiva y garantizada. En esta situación aparecen situaciones de desempleo involuntario creciente que no tienden a corregirse por si mismas, haciéndose necesaria de nuevo la intervención pública para retornar al equilibrio con pleno empleo. En este caso habría que utilizar políticas de demanda expansivas, que intenten compensar la insuficiencia de demanda –inversión– privada.

[20] inflación que aparece cuando la demanda es mayor que la capacidad productiva de la economía.

Detrás de los problemas de la existencia y la estabilidad de este enfoque keynesiano que justifican la intervención pública mediante políticas de demanda expansivas o contractivas para situar a la economía en situaciones de crecimiento equilibrado de pleno empleo y sin inflación[21], se encuentra el supuesto keynesiano sobre las rigideces en los precios. En efecto, los tipos de interés en el modelo de Harrod-Domar se suponen fijos. Ello se deduce del carácter fijo de la productividad marginal del capital (*1/v*) que bajo situaciones de competencia perfecta determina los tipo de interés. Igualmente los salarios nominales se suponen rígidos a la baja, para justificar así la existencia de situaciones de desempleo involuntario.

Como hemos visto la necesidad de intervenir en la economía mediante políticas económicas estabilizadoras tiene su origen en las inestabilidades que rodean al equilibrio –motivada por las decisiones de inversión– y por las distintas rigideces existentes en los mercados. Este enfoque fue rechazado por los autores neoclásicos. Estos autores demostraron que bajo situaciones de competencia perfecta con precios perfectamente flexibles, es decir, con tecnologías con elasticidad de sustitución distinta de cero, desaparecen tanto el problema de la existencia como el de la estabilidad del modelo de Harrod-Domar, garantizándose así que las economías convergerían de forma automática hacia situaciones de crecimiento equilibrado con pleno empleo sin necesidad de llevar a cabo ningún tipo de intervención pública.

La aportación neoclásica: modelos de crecimiento exógeno

El desarrollo posterior al modelo de Harrod-Domar dentro de la teoría moderna del crecimiento económico, tuvo como principal objetivo solucionar los problemas de existencia y estabilidad de este modelo. Aún teniendo en cuenta la aportación que ofrecen los modelos *postkeynesianos*, podemos afirmar que fueron los modelos de crecimiento *neoclásicos* los que una mayor aceptación y proliferación tuvieron en el mundo académico[22]. Dichos modelos parten de las aportaciones de Solow (1956) y Swan (1956).

En estos modelos, la introducción de una función de producción con rendimientos constantes a escala y decrecientes para cada uno de los factores productivos, junto al supuesto de mercados perfectamente competitivos, conduce a la economía a una situación de equilibrio sostenido a largo plazo con

[21] Sobre los conceptos de paro involuntario keynesiano, inflación de demanda, el contenido, articulación y eficacia de las políticas de demanda véase: Fernández Díaz, Parejo Gámir y Rodríguez Sáiz (1999)

[22] Los modelos de crecimiento postkeynesianos tratan de alcanzar, de forma alternativa a los neoclásicos, el objetivo de mejorar el modelo de Harrod-Domar, centrándose en el papel del ahorro y la distribución de la renta. Este enfoque se recoge fundamentalmente en el trabajo de Kaldor (1956,1957), y en las distintas aportaciones de Pasinetti(1978), Kalecki(1977) y Robinson(1973). Véase Galindo y Malgesini (1994, pp. 51-78)

pleno empleo. Esta situación de equilibrio se corresponde con tasas nulas de crecimiento de la renta per cápita. Este último resultado, junto a la necesidad de explicar las tasas de crecimiento positivas que se observan empíricamente en las distintas economías, justifican la introducción del *progreso tecnológico* como el factor *exógeno* que determina la existencia de tasas de crecimiento de la renta per cápita positivas a largo plazo[23]. Es precisamente debido a esta necesidad de introducir mejoras técnicas generalizadas y exógenas, por lo que a estos modelos se les pasa a denominar como *de crecimiento exógeno*.

A continuación repasamos el funcionamiento del modelo básico de este enfoque, el modelo de Solow-Swan. Los supuestos de los que parte el modelo son:

[S.1] El producto agregado obtenido en la economía (Y) se puede destinar directamente al consumo o a su acumulación en forma de stock de capital (K)para su uso en la producción de periodos posteriores. A diferencia del modelo de Harrod-Domar no se introduce ninguna función de inversión, simplemente se supone que la parte no consumida se ahorra invirtiéndose automáticamente en forma de capital. Se elimina de esta forma el problema de la estabilidad del equilibrio.

[S.2] El ahorro agregado de la economía (S) es una proporción constante (s) de la renta (Y): $S=sY$. Este supuesto fue criticado como veremos por el propio enfoque neoclásico, y sustituido por un problema de maximización intertemporal de la función de utilidad del agente representativo, de esta forma se consigue que el ahorro en cada instante del tiempo quede determinado de forma endógena por el propio modelo

[S.3] Al igual que en el modelo de Harrod-Domar, tanto el factor trabajo (L) como la eficacia en la producción de dicho factor trabajo (A) crecen a una tasa constante y exógena n y x respectivamente: $\dot{L}/L=n$ $\dot{A}/A=x$. El factor trabajo medido en unidades de eficiencia o trabajo eficaz (AL), crecerá, por tanto, también a una tasa constante $n+x$.

[S.4] Existe depreciación por el uso del capital a una tasa constante δ.

[S.5] La función de producción agregada es continua, con rendimientos constantes a escala, elasticidad de sustitución distinta de cero y rendimientos decrecientes para cada uno de los factores productivos

[23] Sobre este punto son conocidos los resultados obtenidos por Abramovitz (1956) y Solow (1957). Estos autores concluían que aproximadamente la mitad del crecimiento observado en los Estados Unidos no podía explicarse únicamente por el crecimiento de los factores productivos, por lo que había que considerar como factor adicional de crecimiento las mejoras en la productividad global de la tecnología.

Supondremos que dicha función de producción es del tipo Cobb-Douglas[24] que incorpora progreso técnico neutral en el sentido de Harrod:

$$Y=(AL)^{\alpha}K^{\beta} \tag{6.7}$$

Si tenemos en cuenta los supuestos sobre los rendimientos constantes a escala $\alpha+\beta=1$, y sobre los rendimientos decrecientes para el capital $\beta<1$ podemos escribir la función de producción en términos per cápita como:

$$y=Ak^{\beta} \tag{6.8}$$

donde $y = Y/L$ es la producción por trabajador[25], y $k=K/(AL)$, es el capital por trabajador medido en unidades de eficiencia. De esta forma la dinámica de la renta per cápita vendrá dada por:

$$\frac{\dot{y}}{y}=\frac{\dot{A}}{A}+\beta\frac{\dot{k}}{k} \tag{6.9}$$

es decir, por el progreso técnico de cada economía y por la dinámica del stock de capital por trabajador eficiente. El supuesto [S.3] proporcionan la dinámica del progreso técnico. Por su parte el proceso de inversión, que utiliza el ahorro para acumular capital se deduce de la condición de equilibrio continuo en el mercado de bienes y servicios:

$$S=sY=I=\dot{K}+\delta K \tag{6.10}$$

despejando de (6.10) obtenemos la dinámica del stock de capital:

$$\dot{K}=sY-\delta K \tag{6.11}$$

De esta forma, y teniendo en cuenta que por definición

$$\dot{k}=\frac{\dot{K}}{AL}-k\left(\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{L}}{L}\right) \tag{6.12}$$

---

[24]Introducimos esta tecnología Cobb-Douglas por motivos de sencillez de exposición, anuque en realidad lo único que se exige a la función de producción es el cumplimiento de las condiciones de [S.5]. Adicionalmente se suele exigir a la función de producción las condiciones Inada de buen comportamiento para garantizar la existencia y unicidad del equilibrio dinámico a largo plazo (Romer, 1996, p9):

$$\lim_{k\to 0}\frac{\partial Y}{\partial K}=\infty \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{\partial Y}{\partial K}=0$$

[25] Estamos identificando aquí la renta por trabajador con la renta per cápita, suponiendo para ello que toda la población de la economía forma parte de la población activa y, haciendo uso del enfoque neoclásico, que no existe desempleo involuntario.

la dinámica del stock de capital por trabajador eficiente vendrá dada por:

$$\dot{k}=\frac{sy}{A}-k\left(\delta+\frac{\dot{A}}{A}+\frac{\dot{L}}{L}\right) = sk^{\beta}-k\left(\delta+x+\frac{\dot{L}}{L}\right) \tag{6.13}$$

de la que se deduce que la tasa de cambio del stock de capital por trabajador eficiente viene dada por

$$\boxed{\frac{\dot{k}}{k}=sk^{(\beta-1)}-(\delta+x+n)} \quad \textbf{Ecuación fundamental} \tag{6.14}$$

Esta ecuación dinámica constituye la ecuación fundamental del modelo de crecimiento, proporcionando la dinámica del capital: el stock de capital por trabajador eficaz aumentará en el tiempo si el ahorro por trabajador es mayor que el que resulta necesario para mantener constante en el tiempo a *k*, teniendo en cuenta el efecto negativo que sobre esta variable tiene la depreciación del capital, el aumento del factor trabajo y el progreso técnico.

Esta ecuación fundamental es una función del tipo de Bernoulli por lo que al aplicar el cambio de variable $v= k^{(1-\beta)}$, la ecuación así transformada resulta lineal y puede resolverse analíticamente (Gandolfo1997, pp. 436-437) Dicha solución función del tiempo tendrá la siguiente forma analítica:

$$k_t=\left[\frac{s}{n+x+\delta}+e^{-(1-\beta)(n+x+\delta)t}\left(k_0^{1-\beta}-\frac{s}{n+x+\delta}\right)\right]^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{6.15}$$

Dicha trayectoria tiende a largo plazo a una solución globalmente estable del tipo punto fijo, siendo $(1-\beta)(n+x+\delta)$ la velocidad de convergencia a dicho estado estacionario[26]

$$\lim_{t\to\infty} k_t = k^* = \left(\frac{s}{n+x+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \tag{6.16}$$

La solución a largo plazo supone por tanto una tasa de crecimiento nula para el stock de capital por trabajador eficiente:

$$\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^{*}=0 \tag{6.17}$$

[26] En realidad la ecuación fundamental presenta dos equilibrios. El segundo punto de equilibrio se corresponde con $k^*=0$. Este equilibrio sin embargo es inestable y carece de sentido económico.

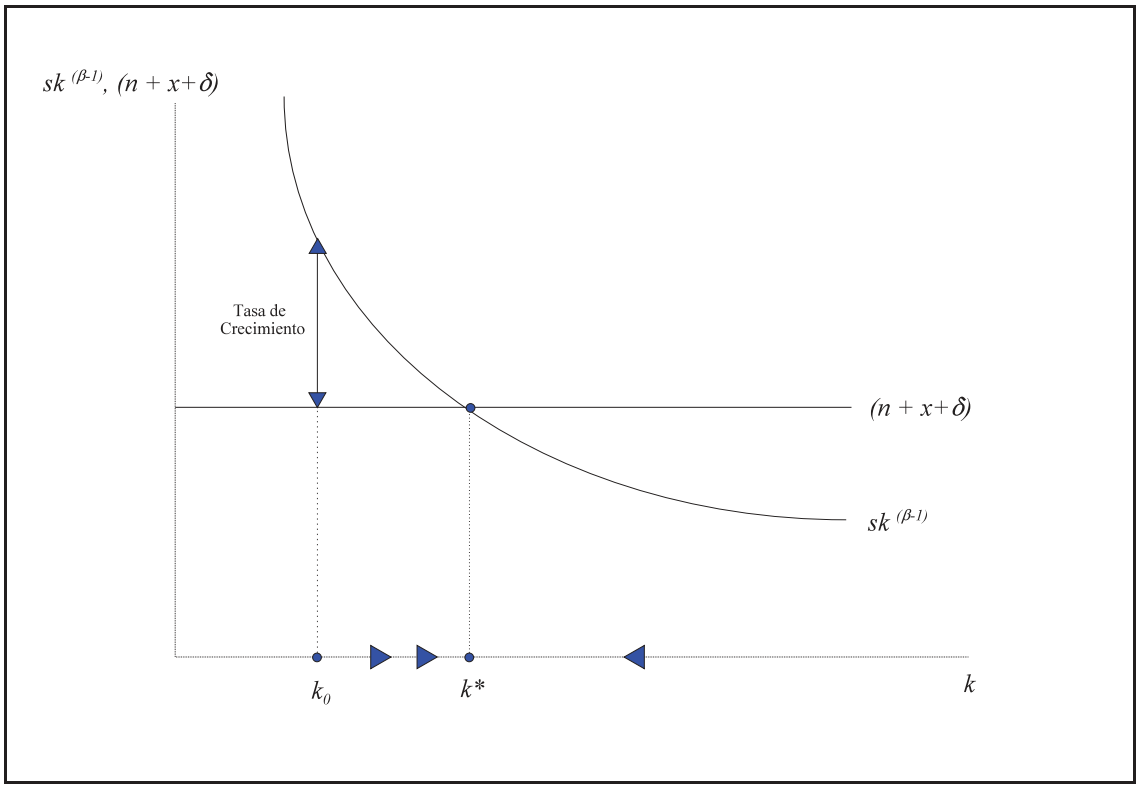


Figura 6.4. Dinámica del modelo de Solow-Swan

La dinámica del stock de capital por trabajador eficiente, es decir, la ecuación fundamental, se puede representar gráficamente haciendo uso de la figura 6.4. Como se observa en el gráfico, a partir de la situación inicial, se produce una transición o una convergencia hacia el estado estacionario. Partiendo, por ejemplo, de una situación inicial como k_0, la ecuación fundamental (6.14) nos dice que la tasa de crecimiento es positiva –diferencia entre las dos curvas–, por lo que la dinámica del sistema hace que k aumente. En el siguiente período estaremos ante un nivel de k a la derecha de k_0. En esta nueva situación la tasa de crecimiento seguirá siendo positiva, aunque de menor valor. Este proceso se repite hasta alcanzar el estado estacionario k^*, en el cual k permanece constante de manera sostenida –figura 6.5–.

Dados estos resultados, y sabiendo que la dinámica de la renta per cápita según (6.9) viene dada por el progreso tecnológico exógeno (x) y por la ecuación fundamental (6.14), en el estado estacionario la renta per cápita crecerá a una tasa constante determinada precisamente por ese progreso tecnológico exógeno:

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^* = x \tag{6.18}$$

$$y_t^* = e^{xt} A_0 \left(\frac{s}{n+x+\delta}\right)^{\frac{\beta}{1-\beta}} \tag{6.19}$$

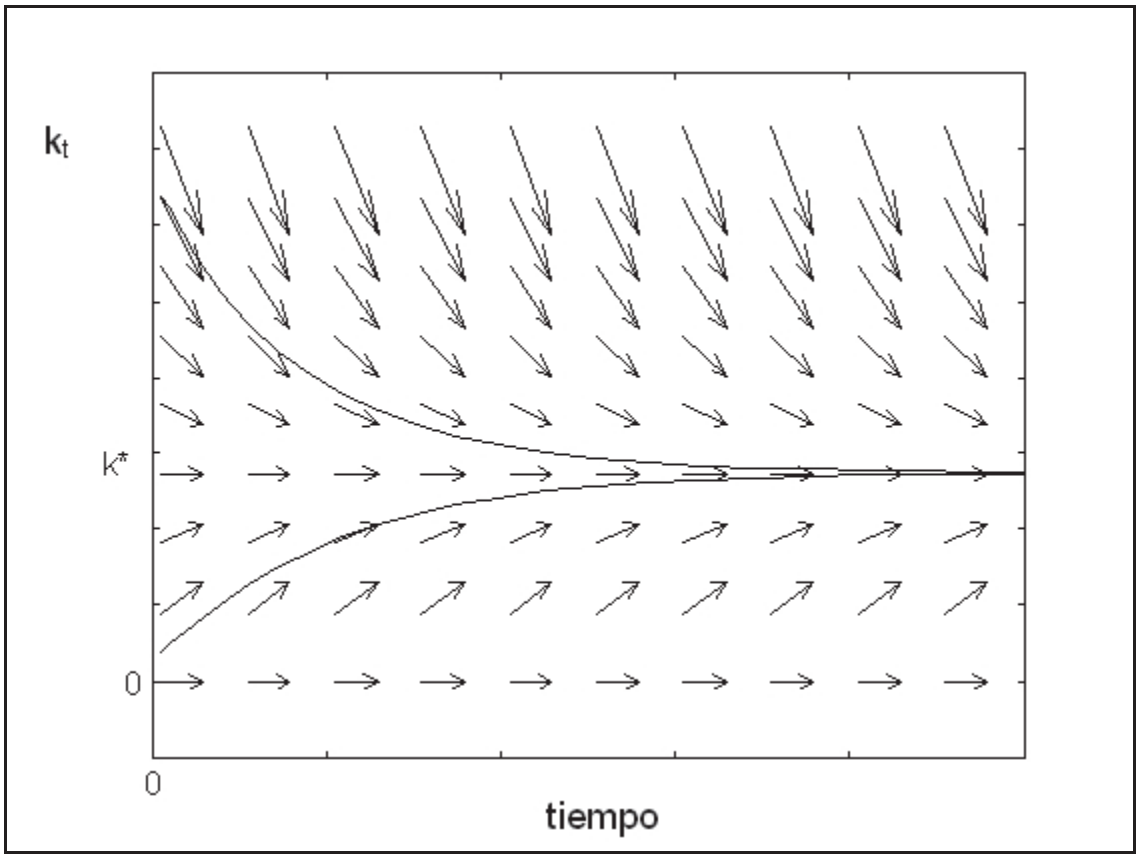


Figura 6.5. Flujo del modelo de Solow Swan

Observamos que este es exactamente el mismo resultado al que llegaban los modelos de crecimiento keynesiano de Harrod-Domar en situaciones de crecimiento equilibrado y sostenido con pleno empleo, que recordemos venía dado por la tasa natural de crecimiento de la renta $Gw=n+x$ [27]. Sin embargo, y a diferencia del enfoque keynesiano, la situación de equilibrio ahora es globalmente estable, con lo que en el enfoque neoclásico de crecimiento exógeno desaparecen los problemas de existencia y estabilidad del modelo de Harrod-Domar

Podemos resumir ahora algunas de las conclusiones que se derivan de este modelo neoclásico. Un primer resultado que se deriva de la dinámica de transición del modelo hacia el estado estacionario es el de *convergencia condicional* entre países homogéneos[28]. Un país con menor stock de capital per

[27] El modelo de Solow-Swan establece que la tasa de crecimiento de la renta per cápita en situación de equilibrio dinámico estará determinada por el progreso técnico. Esto implica que por definición, el nivel de renta crecerá a una tasa también constante:

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{*}=x \quad \Rightarrow \left(\frac{\dot{Y}}{Y}\right)^{*}=\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{*}+\left(\frac{\dot{L}}{L}\right)^{*}=x+n$$

[28] Esta homogeneidad vendrá definida por los parámetros estructurales del modelo que definen el estado estacionario: preferencias (s), tecnología (x, β), población (n), tasas de depreciación (δ).Sobre los tipos de convergencia véase Barro y Sala-i-Martin (1995, cap. 11).

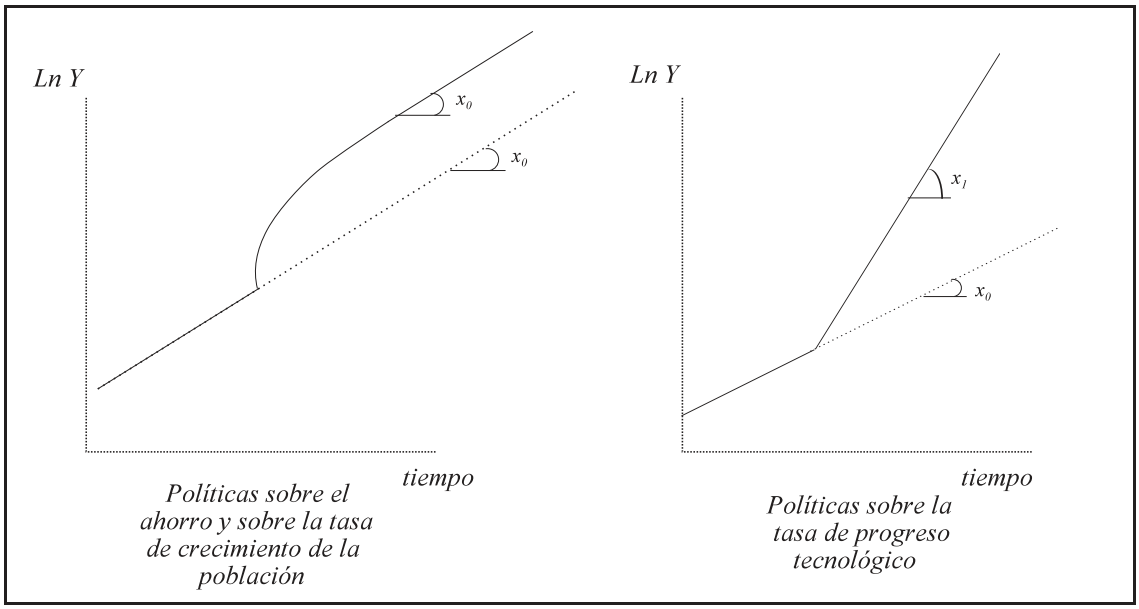


Figura 6.6. Efectos a largo plazo de las políticas económicas en el modelo de Solow-Swan.

cápita inicial, que comparta el mismo estado estacionario que otro inicialmente más adelantado, presentará una mayor productividad marginal del capital –por los rendimientos decrecientes de este factor– y por tanto, un mayor rendimiento y estímulo a la inversión. Esto supondrá para aquel país un mayor crecimiento de su renta, es decir, un acercamiento a los países inicialmente más adelantados. Por tanto, y a la luz de estos modelos, las medidas a adoptar para alcanzar la convergencia se limitarán a la modificación y adaptación de sus estructuras productivas a las del resto de países con los que se quiere converger. Una vez alcanzadas unas estructuras homogéneas, la convergencia vendrá por sí sola.

Un segundo resultado importante desde el punto de vista de la política económica se desprende del valor que toma la tasa de crecimiento equilibrado a largo plazo, que según (6.18) es independiente del valor de s y n. Es decir, políticas económicas tendentes a aumentar la tasa media de ahorro de la economía, y/o a disminuir la tasa de crecimiento de la población, *no* tendrán ningún efecto permanente sobre la tasa de crecimiento tendencial a largo plazo de la renta per cápita de la economía. Este tipo de políticas tendrán efectos positivos sobre la tasa de crecimiento sólo en el corto plazo –ecuación fundamental– y sobre el *nivel* de renta alcanzado en el largo plazo –figura 6.6–. Las únicas políticas que tendrán efectos positivos y permanentes sobre la tasa de crecimiento, serán aquéllas que aumenten la tasa de progreso tecnológico (x), ya que éste es el único factor que aparece como determinante de la tasa de crecimiento a largo plazo de la renta per cápita de la economía –figura 6.6). Estas políticas deberán referirse no sólo a los factores puramente tecnológicos –política tecnológica–, sino también a aquellos otros que también afectan a la capacidad productiva de una economía dadas unas dotaciones de factores productivos. Nos referimos fundamentalmente a las políticas que persiguen un buen funcionamiento de los mercados –políticas de regulación del mercado de

trabajo y financiero y políticas de defensa de la competencia– y a las actuaciones de la autoridades para el fomento de externalidades positivas de las que se aproveche el sector empresarial –inversiones en infraestructuras públicas, política educativa, política de promoción comercial, etc.–[29].

Como ya comentamos en el supuesto [S.2], aunque el modelo de Solow-Swan representa la versión más sencilla de la postura neoclásica –comportamientos perfectamente competitivos, flexibilidad de precios, información perfecta, pleno empleo, etc.–, la formulación del mismo ha sido criticada por la propia ortodoxia neoclásica. En particular se critica el uso de una función de consumo agregada keynesiana –tasa de ahorro constante– que carece del respaldo de una fundamentación microeconómica sobre el comportamiento racional de los agentes. Surgen así distintos modelos en los que respetando los supuestos esenciales del modelo de Solow-Swan, –situaciones de competencia perfecta, progreso tecnológico exógeno, rendimientos constantes a escala y rendimientos decrecientes para los factores acumulables–, modelizan el comportamiento de los consumidores y empresas desde un punto de vista microeconómico. El ahorro medio de la economía ya no se supone constante sino que se deduce endógenamente por el propio modelo basándose para ello en el comportamiento racional, maximizador de la función de utilidad intertemporal, del agente representativo. Entre estos trabajos cabe destacar las aportaciones de Cass (1965) y Koopmans (1965) que utilizan el enfoque de Ramsey (1928) de familias representativas que viven infinitos periodos, o el modelo de Diamond (1965) de generaciones solapadas[30].

La característica esencial de estas aportaciones se encuentra, repetimos, en que ahora se permite que las familias puedan determinar la trayectoria que seguirá su consumo, y por tanto también su ahorro, de forma óptima, es decir, de forma que su utilidad sea máxima. Para ello, estos modelos hacen uso de las técnicas de optimización dinámica.

El enfoque de Ramsey, por ejemplo, supone que la familia representativa maximiza su utilidad por el consumo realizado durante todo el periodo de planificación, periodo que para la familia representativa se supone infinito. En este enfoque no se tiene tanto en cuenta al individuo como al conjunto familiar, suponiendo así que los agentes son altruistas, preocupándose no sólo de su bienestar sino por el de todos los integrantes de la familia, tanto presentes como futuros. Dicha utilidad dependerá no sólo del consumo presente sino también del que se realizará en el futuro hasta infinitos periodos. Para la simplificación del problema se supone que la función de utilidad es aditiva separable, es decir,

[29] Sobre el contenido, alcance y posibilidades de estas políticas de oferta véase Parejo, Calvo y Paul (1995)

[30] Para un desarrollo completo de estas aportaciones véase Romer (1996, cap.2) y Barro y Sala-i-Martin (1995, cap. 2 y 3)

que la utilidad total para todo el periodo de planificación –función objetivo– resulta de la suma de las utilidades instantáneas. Bajo estos supuestos, el problema de maximización de la función de utilidad intertemporal para la familia representativa puede expresarse como:

$$\max_{c_0,c_1,\ldots} U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(C_t)\frac{L_t}{H}dt = B\int_0^{\infty} e^{-\beta t}\left(\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma}\right)dt \qquad (6.20)$$

$$s.a: \quad \dot{k}_t = y_t - c_t - (n+x)k_t$$

donde se mantienen todos los supuestos del modelo de Solow a excepción de [S.2] sobre la tasa de ahorro constante de la economía y el [S4] ya que hemos supuesto, por simplicidad, que no existe depreciación, y donde: ρ es la tasa de descuento;C_t, el consumo individual o per cápita; $u(C_t)$ es la función instantánea de utilidad de cada individuo, que se supone que presenta una tasa de aversión relativa al riesgo constante σ ; L es la población total de la economía; H el número fijo de familias existentes en la economía; y donde las variables en minúsculas expresan los valores de las respectivas variables en términos de trabajador eficaz. La restricción del problema implica que la parte de la renta no consumida se destina directamente a la acumulación de capital y puede interpretarse como la restricción presupuestaria a la que se enfrenta la familia en su problema de maximización de utilidad.

Las condiciones de primer orden para la solución del problema de maximización –anexo 6.A–, determinan la dinámica del modelo[31]:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\beta k^{\beta-1} - \rho - \sigma x}{\sigma} \qquad (6.21)$$

$$\dot{k} = k^{\beta} - c - (n+x)k \qquad (6.22)$$

La solución del sistema dinámico (6.21)-(6.22) converge al igual que el modelo de Solow-Swan a un equilibrio del tipo punto fijo, donde tanto la renta per cápita como el stock de capital y el consumo por trabajador crecen a una tasa constante y exógena determinada exclusivamente por la tasa de progreso tecnológico exógeno. La diferencia entre este enfoque optimizador del agente racional y el de Solow se encuentra no sólo en la formalización, sino también en la dinámica de transición hacia el equilibrio dinámico, que es ahora del tipo punto de silla[32]

[31] Estas condiciones de primer orden vienen dadas por el Principio del Máximo para la solución del problema de control óptimo con horizonte de planificación infinito y se recogen en el anexo 6.A. Para un desarrollo de las mismas véase Chiang(1992, cap 7 y 9).

[32] Sobre el análisis de este tipo de soluciones del tipo punto de silla y sus aplicaciones a la economía véase Gandolfo (1997, cap 22)

Las implicaciones de política económica analizadas en el modelo de Solow, siguen siendo válidas cuando se dota al modelo de una fundamentación microeconómica del comportamiento de los agentes[33]. Se desprende por tanto, que a diferencia del modelo de Harrod-Domar, en el enfoque neoclásico, la estabilidad del equilibrio elimina cualquier necesidad de intervención en la economía mediante políticas estabilizadoras. Estas intervenciones resultan innecesarias para conducir a la economía a situaciones de crecimiento equilibrado con pleno empleo. Las únicas medias posibles bajo este enfoque neoclásico de crecimiento exógeno, son como ya hemos comentado, aquellas políticas de oferta que mejoran la productividad global de la economía.

Modelos de crecimiento endógeno

Un aspecto criticable desde el punto de vista explicativo de las teoría neoclásicas de crecimiento exógeno es que, en realidad, dejan sin determinar cuáles son los verdaderos determinantes del crecimiento a largo plazo. Dicho crecimiento se supone que depende del progreso tecnológico, pero nada se dice sobre él, al venir dado de forma exógena al modelo. Quizás esta carencia fue la que motivó que a partir de principios de los 70 el interés de los economistas se desviara hacia el estudio de las fluctuaciones a corto plazo, y que surgieran como una rama separada de la teoría del crecimiento, las nuevas Teorías del Desarrollo económico, que aunque con un aparato analítico más sencillo, servían de base para el diseño de los planes de desarrollo de las naciones más atrasadas[34]

A mediados de los 80 surgen nuevos modelos que alejándose del supuesto de rendimientos decrecientes para los factores acumulables, tratan de encontrar una explicación endógena al proceso de crecimiento. Los modelos de crecimiento endógeno introducen la posibilidad de alcanzar un equilibrio dinámico con tasas de crecimiento positivas que ahora no estarán explicadas por el crecimiento exógeno de la productividad global. Es por ello que a estos modelos se los denomina de *crecimiento endógeno*.

La diferencia fundamental de estos modelos de crecimiento endógeno frente al enfoque neoclásico se encuentra, como hemos dicho, en el supuesto sobre los rendimientos de los factores acumulables en la función de

[33] Para un análisis de estas políticas en el modelo de Ramsey véase Romer (1996, pp. 59-72)

[34] Como ya comentamos, la teoría moderna del crecimiento es incapaz de explicar la situación de estancamiento económico que sufren los países en vías de desarrollo. Estas teorías de desarrollo económico tratan de explicar precisamente cuales son los frenos a los que se enfrentan los países en vías de desarrollo para salir de su situación de atraso. Estos modelos anque incorporan elementos dinámicos en su explicación del desarrollo, no serán tratados en el presente trabajo. Para un análisis de las principales aportaciones en estas teorías del desarrollo véase Thirlwall (1994) y Ghatak (1995)

producción. En efecto, el supuesto de rendimientos no decrecientes para el factor capital es el que permite explicar de manera endógena, soluciones de equilibrio dinámico con crecimiento de la renta per cápita positivo. La principal contribución de los modelos de crecimiento endógeno, es la de aportar y justificar las distintas situaciones en las que pueden aparecer tales rendimientos para el factor capital, constituyendo así un paso adelante en la búsqueda de los determinantes del crecimiento[35]. Dentro de este enfoque, podemos citar entre otras, las aportaciones de iniciales Romer (1986, 1990a, 1990b) y Lucas (1988) que como las de, Stockey(1991), Young(1991) y Barro(1990), introducen externalidades positivas, el capital humano y el capital público en sus modelos manteniendo el supuesto de competencia perfecta; o los trabajos de Grossman y Helpman (1990,1991), Aghion y Howit (1992), Segerstrom; Anant y Dinopoulos (1990) y Cheng y Dinopoulos (1992) que suponen competencia imperfecta para construir modelos en los que la inversión de recursos en proyectos de investigación y desarrollo (I+D) genera un progreso tecnológico de forma endógena.

Repasaremos a continuación las principales características de estos modelos de crecimiento endógeno. Para ello, seguimos a Sala-i-Martín(1994) y clasificamos a estos modelos en dos grandes categorías: los modelos que incluyen tecnología del tipo $Y=AK$, y aquellos que introducen tecnologías con rendimientos crecientes a escala. Pasamos a continuación a estudiar cada uno de ellos.

Modelos de crecimiento endógeno con tecnología *AK*.

La primera forma, y la más sencilla, de obtener crecimiento positivo en el estado estacionario es mediante el supuesto de tecnología *AK* (Rebelo , 1991). Los supuestos que incorpora este modelo son los mismos que los del modelo de Solow, a excepción del que hace referencia a los rendimientos decrecientes para el factor capital. Suponemos adicionalmente que no existe progreso tecnológico ($x=0$) y que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala.

Utilizando una tecnología del tipo del tipo Cobb-Douglas sin progreso tecnológico ($Y=AK^{\beta}L^{\alpha}$), teniendo en cuenta el supuesto sobre los rendimientos constantes a escala ($\alpha+\beta=1$) y sobre los rendimientos constantes para el factor capital ($\beta=1$), la función de producción agregada de la economía deberá escribirse como $Y=A\cdot K$ –tecnología *AK*–. La producción por trabajador en este modelo será por tanto:

$$y=Ak \tag{6.23}$$

[35] Una panorámica amplia de este enfoque y de sus principales aportaciones, puede encontrarse en Sala-i-Martin (1994), Barro y Sala-i-Martin (1995) y Aghion y Howitt (1998). Otros *surveys* se pueden encontrar en Amable (1994) y Jones y Manuelli (1994).

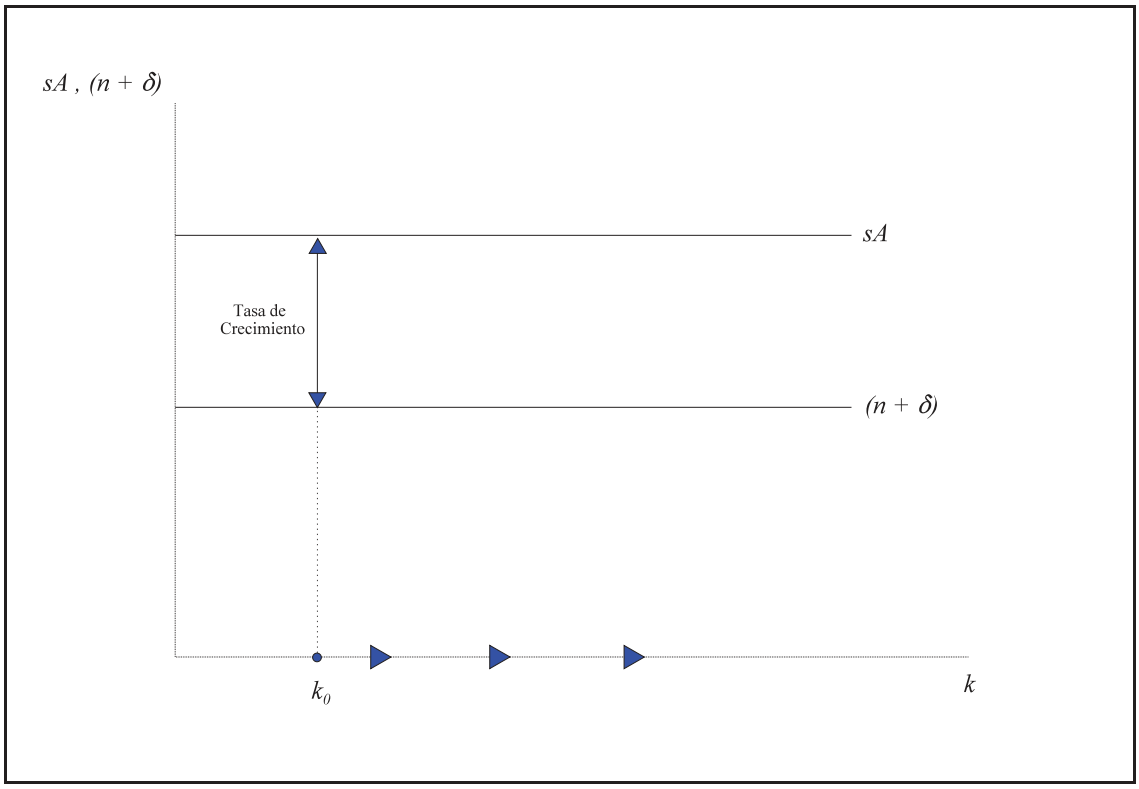


Figura 6.7. Dinámica del modelo *Ak*

donde ahora $k=K/L$. Al no existir progreso tecnológico, la dinámica de la renta per cápita queda determinada exclusivamente por la dinámica del stock de capital por trabajador, puede deducirse de manera análoga a (6.14) a partir de la igualdad entre ahorro e inversión:

$$\frac{\dot{k}}{k}=sA-(n+\delta) \qquad \textbf{Ecuación Fundamental} \qquad (6.24)$$

que constituye la ecuación fundamental del modelo. El equilibrio a largo plazo queda determinada por la propia ecuación fundamental, ya que como se observa en dicha expresión la economía evoluciona según una tasa de crecimiento constante de manera automática a partir de cualquier condición inicial. Gráficamente –figura 6.7–, y al igual que hicimos con el modelo neoclásico, la solución de este tipo de modelos quedaría determinada por la evolución del stock de capital por trabajador expresada en la ecuación (6.24). Su solución gráfica indica que para cualquier condición inicial k_0, el stock de capital por trabajador estará creciendo siempre a la misma tasa, determinada por la diferencia entre las dos rectas, que al mantenerse constante para todos los períodos, podemos denominar como de equilibrio sostenido a largo plazo.

La propia ecuación fundamental (6.24) nos indica por tanto, cuál es la tasa de crecimiento de la renta de equilibrio dinámico a largo plazo, que

nuevamente es del tipo punto fijo:

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{*}=\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^{*}=sA-(n+\delta) \tag{6.25}$$

Esta tasa de crecimiento constante tomará valores positivos, nulos o negativos dependiendo del valor que tomen los parámetros que la definen. Sin embargo, y suponiendo que la tasa media de ahorro es suficientemente grande, este sencillo modelo muestra como el supuesto de los rendimientos no decrecientes para el factor capital permite obtener tasas de crecimiento positivas en el largo plazo sin necesidad de recurrir al progreso tecnológico.

Otras conclusiones relevantes que podemos destacar de este modelo son, en primer lugar, que las políticas económicas que fomenten el ahorro (s) y el nivel global de tecnología (A), o que disminuyan la tasa de crecimiento de la población (n) y la tasa de depreciación (δ) serán efectivas tanto para aumentar la tasa de crecimiento a corto plazo como las de largo plazo –figura 6.8–. Esto constituye otra diferencia importante respecto al modelo neoclásico donde sólo las mejoras tecnológicas tenían efectos positivos sobre la tasa de crecimiento a largo plazo.

En segundo lugar, y a diferencia también del modelo neoclásico, no existe convergencia condicional, es decir, dos economías que sólo difieran en sus condiciones iniciales k_0, nunca convergerán a un mismo nivel de renta per cápita. Esta ausencia de convergencia entre países está asociada nuevamente a la desaparición de los rendimientos decrecientes del capital[36]. Según este modelo de crecimiento endógeno, para que los países más atrasados converjan con los más adelantados será necesario llevar a cabo políticas activas que mejoren el crecimiento económico de aquellas en el largo plazo.

Este modelo *AK* es uno de los más utilizados para representar la esencia del crecimiento endógeno[37] Puede sin embargo argumentarse, que este modelo es en realidad de crecimiento exógeno al igual que en el enfoque neoclásico, al venir determinada su tasa de crecimiento a largo plazo (6.25) exclusivamente por parámetros estructurales exógenos al propio modelo (A, s, n, δ). ¿Por qué se denomina entonces a este tipo de modelos de crecimiento endógeno?. La

[36] Nótese que tal y como vimos en el modelo de Solow, la velocidad de convergencia venía determinada por $(1-\beta)(n+\delta+x)$. Dicha velocidad se anula, y por tanto desaparece la convergencia, una vez que introducimos los supuestos del modelo *AK* ($\beta=1$)

[37] El supuesto sobre la tasa de ahorro constante es nuevamente un supuesto simplificador que no modifica las propiedades básicas del modelo en el largo plazo. Los supuestos básicos del modelo (rendimientos constantes a escala y constantes también para el factor capital), pueden incorporarse en el enfoque de Ramsey para dotar al modelo de fundamentación microeconómica sobre el comportamiento optimizador de los agentes. Las tasas de crecimiento a largo plazo serán también en este caso positivas sin necesiadad de suponer progreso técnico exógeno. Véase Barro y Sala-i-Martín (1995, pp. 140- 144).

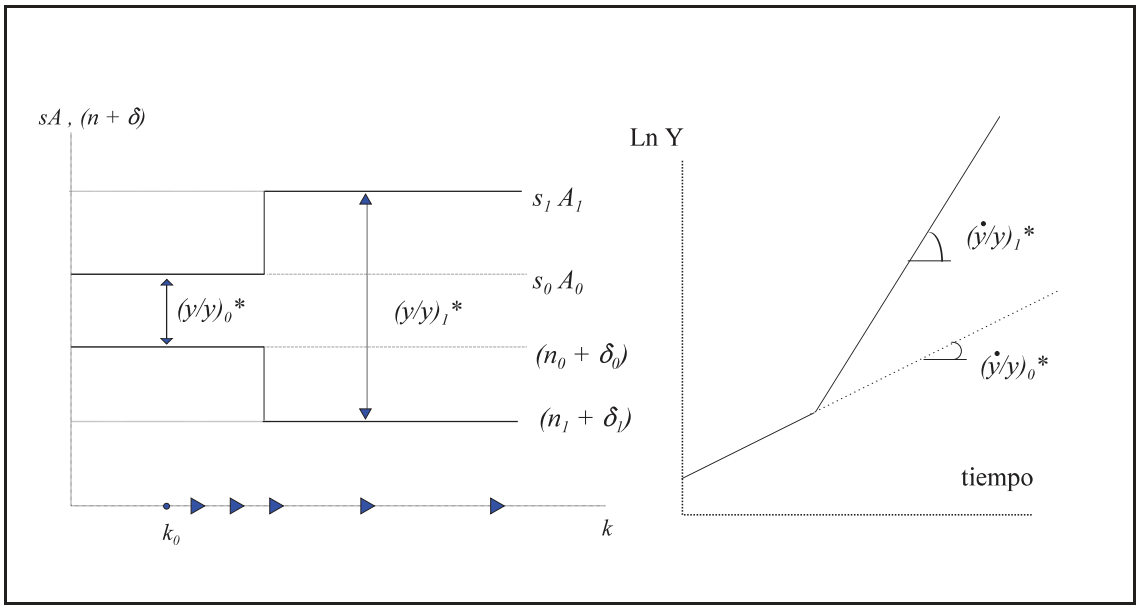


Figura 6.8. Efectos a largo plazo de las políticas económicas en el modelo *Ak*.

razón para ello se encuentra no tanto en la propia tasa de crecimiento positiva, sino en los factores que determinan la forma en que ésta es deducida, se decir, sin necesidad de introducir progreso tecnológico exógeno y simplemente suponiendo rendimientos no decrecientes para el capital. La aportación más relevante de los modelos de crecimiento endógeno es precisamente la de explicar porqué pueden darse situaciones en las que se justifique la existencia de rendimientos constantes para los factores acumulables. De esta forma, se proporcionan las bases en las que fundamentar medidas de política económica que mejoren el crecimiento tendencial a largo plazo. Entre las explicaciones que justifican una tecnología como la *AK*, se encuentran aquellas que hacen uso de un concepto amplio del factor capital, fundamentalmente a través de la consideración del papel del capital humano y el capital público en el proceso de crecimiento económico. A continuación mostramos dos versiones simplificadas representativas de estas aportaciones

Tecnología AK y Capital Humano.

Sala-i-Martín (1994, pp 84-85) proporciona una justificación sencilla para el uso de tecnologías del tipo *AK* a través de un modelo en el que coexisten el capital físico y el humano. En este caso, la producción no depende del trabajo físico ocupado (nº de personas), sino de la *cantidad de trabajo corregida por su calidad*. Esta calidad del trabajo será acumulable mediante la educación, la experiencia, etc. Dicho de otro modo, el factor trabajo relevante en la función de producción es el Capital Humano (*H*) que junto al capital físico (*K*) constituyen los factores productivos susceptibles de acumulación de este modelo.

A partir de este supuesto, resulta sencillo derivar el modelo de crecimiento endógeno *AK*, partiendo de una función de producción Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala y *decrecientes* para cada uno de los factores productivos:

$$Y = BK^{\beta}H^{(1-\beta)} \tag{6.26}$$

La dinámica del modelo quedará determinada por la siguiente ecuación diferencial, que se deduce nuevamente de la igualdad entre la inversión neta total y el ahorro menos la depreciación.

$$\dot{K}_t+\dot{H}_t=sBK_t^{\beta}H_t^{(1-\beta)}-\delta_K K_t-\delta_H H_t \tag{6.27}$$

Suponiendo que el capital físico y humano se deprecian a la misma tasa ($\delta_K=\delta_H$) y que además se comportan como sustitutivos perfectos, se deduce que las productividades marginales netas de ambos tipos de capital deben coincidir, es decir,

$$\frac{\partial Y}{\partial K}-\delta_K=\frac{\partial Y}{\partial H}-\delta_H \;\Rightarrow\; \beta\frac{Y}{K}=(1-\beta)\frac{Y}{H} \;\Rightarrow\; H=K\frac{(1-\beta)}{\beta} \tag{6.28}$$

teniendo en cuenta esta relación entre los dos tipos de capital, la función de producción podrá reescribirse como:

$$Y_t=BK^{\beta}\left[K\frac{(1-\beta)}{\beta}\right]^{(1-\beta)} = AK_t \quad , \quad A=B\left[\frac{(1-\beta)}{\beta}\right]^{(1-\beta)} \tag{6.29}$$

que toma la forma ya conocida $Y = AK$. Por su parte, la acumulación de capital, quedará:

$$\dot{K}_t+\frac{(1-\beta)}{\beta}\dot{K}_t=sBK_t^{\beta}K_t^{(1-\beta)}\left[\frac{1-\beta}{\beta}\right]^{(1-\beta)}-\delta K_t-\delta\frac{(1-\beta)}{\beta}K_t \tag{6.30}$$

$$\dot{K}_t\frac{1}{\beta}=sAK_t-\delta\frac{1}{\beta}K_t \tag{6.31}$$

$$\dot{K}_t=s\beta AK_t-\delta K_t \tag{6.32}$$

ecuación, esta última, que tendrá la misma solución que la estudiada para el modelo de tecnología *AK*. La tasa de crecimiento a largo plazo del stock de capital quedará determinada por (6.32) que por (6.28) y (6.29) determinará también la tasa de crecimiento de la renta y el capital Humano.

Tecnología AK y Capital Público .

De forma alternativa, Barro (1990)[38] proporciona otra justificación para el uso de la tecnología *AK*. Nuevamente se diferencian dos tipos de factor acumulable, el capital físico (*K*) y el capital público(*G*). La función de producción de tipo Cobb-Douglas con rendimientos constantes a escala y *decrecientes* para cada uno de esos factores productivos podrá escribirse:

$$Y = AK^{\beta}G^{(1-\beta)} \tag{6.33}$$

en la que nuevamente no aparece el trabajo como factor productivo. La introducción de un bien público (*G*) en la función de producción puede plantear problemas de eficiencia en la provisión de capital público si se deja ésta en manos de la iniciativa privada. Suponemos por ello que en situaciones de competencia perfecta los agentes toman *G* como dado y que es el Estado el encargado de proveer dicho capital público. Suponemos, adicionalmente, que el Estado mantiene el presupuesto público en equilibrio, entendiendo que todo el gasto público se financia mediante impuestos sobre la renta: $G=\tau Y$. De esta forma, expresando la restricción presupuestaria en términos per cápita y teniendo en cuenta la función de producción (6.33), se obtiene la siguiente relación entre capital público y privado[39]:

$$g=\tau y=\tau A k^{\beta}g^{(1-\beta)} \quad \Rightarrow \left(\frac{g}{k}\right)=(\tau A)^{\frac{1}{\beta}} \tag{6.34}$$

Teniendo en cuenta esta relación y sustituyéndola en la función de producción obtenemos la ya conocida tecnología *AK*:

$$Y=AK^{\beta}G^{(1-\beta)} = AK^{\beta}K^{1-\beta}(\tau A)^{\frac{1-\beta}{\beta}}=BK \quad ; B=(\tau)^{\frac{1-\beta}{\beta}}A^{\frac{1}{\beta}} \tag{6.35}$$

La dinámica del sistema quedará determinada nuevamente por la acumulación de capital privado, que tendrá que tener en cuenta los pagos por impuestos. Así, la inversión neta de capital físico será igual al ahorro neto de impuestos menos la depreciación, que en términos per cápita quedaría:

$$\dot{k}_t=(1-\tau)sAk_t^{\beta}g_t^{1-\beta}-(\delta+n)k_t \tag{6.36}$$

Sustituyendo la relación (6.34) en (6.36), la acumulación de capital privado por trabajador podrá escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\dot{k}}{k}=(1-\tau)sA\left(\frac{g_t}{k_t}\right)^{1-\beta}-(\delta+n)=(1-\tau)sA(\tau A)^{\frac{1-\beta}{\beta}}-(\delta+n) \tag{6.37}$$

que será la ecuación fundamental del modelo. Esta ecuación nos indica que el stock de capital privado por trabajador crecerá a una tasa de constante, y por

---

[38] Simplificamos aquí el modelo original de Barro(1990) suponiendo una tasa de ahorro media constante.

[39] Galindo y Escot (1998) proporcionan una versión alternativa en el que los impuestos financian la acumulación de capital público (ΔG)

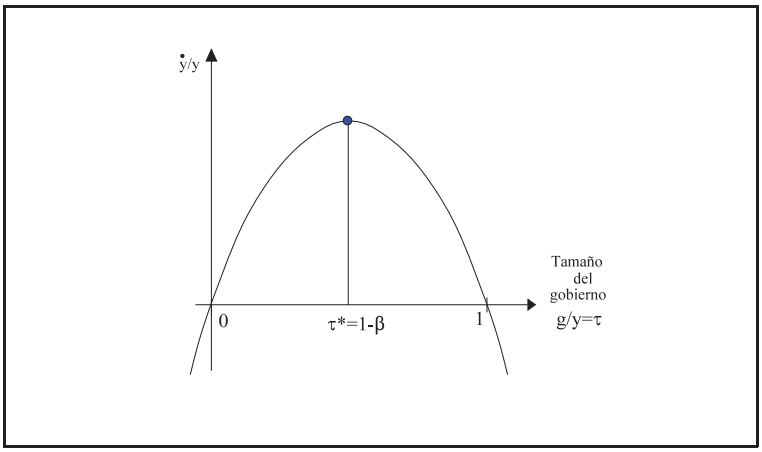


Figura 6.9. Tamaño óptimo del Gobierno. Crecimiento endógeno con tecnología *AK*.

tanto de equilibrio a largo plazo. Dada la relación (6.34) y (6.35), tanto el capital público como el nivel de renta medidos ambos en términos per cápita, crecerán también a largo plazo a esa misma tasa de crecimiento:

$$\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{*}=\left(\frac{\dot{g}}{g}\right)^{*}=\left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^{*}=(1-\tau)sA(\tau A)^{\frac{1-\beta}{\beta}}-(\delta+n) \tag{6.38}$$

Una particularidad de este modelo de crecimiento endógeno es que permite el análisis de los efectos de la política fiscal – variaciones en el tipo impositivo– sobre el crecimiento económico a largo plazo. Esto se debe a que el tipo impositivo entra a formar parte directamente de la solución a largo plazo. De esta forma, la política económica, a través de la fijación del tipo impositivo, puede ejercer una influencia significativa y permanente sobre el crecimiento económico a largo plazo. Cabe preguntarse por tanto, por cómo afecta la política económica sobre la tasa de crecimiento a largo plazo. Este efecto está representado en la figura 6.9. A partir de esta relación se puede definir la política óptima como aquella que hace máxima la tasa de crecimiento a largo plazo. Esta política óptima o tamaño óptimo del estado ($g/y=\tau$) quedará determinado por la solución del siguiente problema de maximización:

$$\begin{aligned} &\underset{\tau}{Max}\left(\frac{\dot{y}}{y}\right)^{*}=(1-\tau)sA(\tau A)^{\frac{1-\beta}{\beta}}-(\delta+n) \\ &sujeto\ a:\quad 0\le\tau\le 1 \end{aligned} \tag{6.39}$$

La solución de (5.39) implica que el tamaño o participación óptima del estado en la economía debe ser igual a (1-β), que es precisamente el rendimiento marginal del capital público en la producción[40].

[40] Este es el mismo resultado al que llega Barro (1990) fundamentando su modelo a nivel microeconómico siguiendo el enfoque de Ramsey y en el que la función objetivo en (6.39) es la de bienestar o utilidad del agente representativo. Galindo y Escot (1998), demuestran que

Modelos de crecimiento endógeno con rendimientos crecientes a escala.

Los modelos de crecimiento endógeno que utilizan tecnología del tipo *AK* han sido objeto de diversas críticas. Entre otros aspectos del modelo, se cuestiona la no consideración del factor trabajo en el proceso productivo y la inexistencia de progreso tecnológico. Con el objetivo de poder incorporar estos factores en el proceso de crecimiento manteniendo el supuesto sobre los rendimientos constantes de los factores acumulables, han surgido otras aportaciones dentro del enfoque del crecimiento endógeno que incorporan el supuesto de rendimientos crecientes a escala en la producción[41].

En este tipo de modelos, el crecimiento a largo plazo quedará determinado por el progreso técnico, que. a diferencia del enfoque neoclásico, quedará determinado endógenamente por el propio funcionamiento del modelo. Esto tendrá importantes implicaciones no sólo desde el punto explicativo del crecimiento, sino también desde el punto de vista de la política económica. Las distintas explicaciones endógenas del progreso técnico ofrecidas por estos modelos pueden proporcionar las bases, la fundamentación y los ámbitos de actuación hacia los que deben ir encaminadas las actuaciones públicas tendentes a mejorar el crecimiento económico a largo plazo.

En lineas generales podemos distinguir dos grandes grupos de modelos dentro de este enfoque[42]. Por un lado están aquellos modelos que introducen externalidades positivas a nivel agregado manteniendo el supuesto de competencia perfecta. Por otro, aquéllos que suponen situaciones de competencia imperfecta para introducir el papel de las actividades en I+D como fuente del crecimiento endógeno.

Externalidades positivas y crecimiento endógeno

Dentro de ese primer grupo podemos destacar el trabajo de Lucas (1988) que introduce externalidades positivas sobre el capital humano en un modelo bisectorial. Veamos brevemente el funcionamiento del modelo.

Lucas parte del modelo bisectorial de Uzawa (1962, 1963) para considerar una economía con dos sectores productivos que utilizan diferentes tecnologías.

---

de forma genérica tanto para el modelo neoclásico de crecimiento exógeno, como para este tipo de modelos de crecimiento endógeno, el tamaño óptimo del Estado viene dado precisamente por el rendimiento del capital público en la función de producción en relación al rendimiento agregado de todos los factores productivos susceptibles de acumulación.

[41] Para evitar soluciones explosivas, estos modelos deben suponer por el contrario que el tamaño de la población permanece constante en el tiempo, $n = 0$.

[42] Para un análisis completo de este tipo de modelos véase Barro y Sala-i-Martín (1995)y Grossman y Helpman (1991)

En el primer sector se producen bienes finales que se obtienen mediante la combinación de capital físico y humano. Se supone que esta producción final puede ser consumida o transformada en capital físico. En el segundo sector, se obtiene capital humano, y su acumulación se hace a partir de capital físico y humano. El problema al que se enfrentan los individuos es el de cómo repartir su tiempo entre los dos sectores, es decir, trabajando en el primer sector o aumentando su capital humano en el segundo.

La función de producción del primer sector toma la forma:

$$Y = AK^{\beta}(uhL)^{(1-\beta)}h_a^{\psi} \tag{6.40}$$

donde: u, es la fracción de tiempo que los individuos trabajan en el sector de bienes finales; h, la cualificación de los trabajadores; L, el número de trabajadores; y, (uhL), el total de trabajo efectivo (ajustado por su calidad) empleado en el sector de bienes finales. Esta función de producción incluye una externalidad positiva en el stock medio del capital humano de la fuerza de trabajo (h_a), que recoge el hecho de que la productividad de cada individuo depende no solo de su cualificación sino también de la del resto de individuos con los que trabaja.

La función de producción del primer sector presenta rendimientos crecientes a nivel agregado pero decrecientes a nivel individual al tomar cada agente individual h_a como dado. Esto permite calcular la solución del modelo sin alejarnos del supuesto de competencia perfecta a pesar de que existan rendimientos crecientes a nivel agregado.

La dinámica de la economía dada por (6.40) vendrá dada por la acumulación de capital físico y humano –realizada en el segundo sector–, que pueden representarse como:

$$\dot{K} = sAK^{\beta}(uhL)^{(1-\beta)}h_a^{\psi} - \delta_K K \tag{6.41}$$

$$\dot{h} = \phi h(1-u) - (\delta_h + n)h \tag{6.42}$$

donde hemos supuesto por simplicidad que la acumulación de capital humano –en términos per cápita– no requiere de la intervención del físico, siendo ϕ la productividad del segundo sector.

La resolución del sistema (6.41)-(6.42) pone de manifiesto que el sector relevante para el crecimiento es el segundo, donde se genera capital humano, explicándose los rendimientos crecientes a escala en este caso por las externalidades introducidas mediante h_a La solución de este modelo resulta sin embargo ineficiente desde el punto de vista social. El tiempo que cada individuo destinará a mejorar su cualificación resultará insuficiente. Esto es, debido a que los individuos no tienen en cuenta que cuando un individuo

aumenta su stock de capital humano, también incrementa el stock medio de capital de la economía h_a, y esto afectará positivamente a la productividad de todos los demás miembros a través de h_a^{ψ}. La solución óptima requerirá de la intervención del sector público para que los agentes internalicen estos efectos externos.

Tal y como se ha formulado el modelo, cabría incluso la posibilidad de encontrar crecimiento endógeno aunque no existieran dichas externalidades positivas de capital humano. Ello se debe a que, tras la oportunas transformaciones del tipo a las efectuadas en (6.28), el modelo se asemejaría al *AK*, estudiado anteriormente.

Dentro de este grupo de modelos de crecimiento endógeno con externalidades positivas existen otras aportaciones. Cabe mencionar aquí la de Romer (1990b) que justifica la existencia de un progreso tecnológico endógeno basándose para ello en la combinación de dos factores: las externalidades positivas derivadas de la inversión en capital conocidas como *learning by doing* o aprendizaje por la práctica; y los efectos *desbordamiento* de las mejoras generadas por el proceso de *learning by doing*. Romer concluye en su modelo que como el nivel de conocimientos agregado de la economía es un bien público, ya que una vez que una empresa ha aumentado sus conocimientos, el resto de empresas podrán acceder a él libremente y sin ningún tipo de coste, el stock de *conocimientos* que determina el crecimiento positivo a largo plazo, crecerá proporcionalmente al crecimiento agregado del capital de la economía.

Las externalidades en este modelo, se producen porque a nivel individual no se tiene en cuenta que un aumento del stock de capital, supondrá también un aumento del capital agregado, y por tanto del stock de *conocimientos* o productividad global de la economía. Nuevamente la internalización de esas externalidades dan cabida a la intervención pública para mejorar el crecimiento económico a largo plazo.

Modelos de Competencia Imperfecta.

Una forma alternativa de afrontar los problemas derivados de los rendimientos crecientes es la eliminación del supuesto de comportamiento competitivo. Bajo condiciones de Competencia Imperfecta, la retribución de los factores productivos no agota el producto total, por lo que existirán rentas que puedan ser asignadas a actividades de I+D, que aunque no sean *directamente* productivas[43] generan progreso técnico, y benefician al conjunto

[43] La productividad marginal de estas actividades es nula, por lo que en situaciones de competencia perfecta no recibirían financiación, es decir, en situaciones de competencia perfecta no hay cabida para este tipo de actividades.

de toda la economía mediante el ya mencionado efecto desbordamiento.

Desde esta perspectiva, el crecimiento de la productividad global, o progreso técnico, no estará determinado exógenamente como en el modelo neoclásico de crecimiento exógeno, sino que dependerá, en general, de la existencia de empresas dedicadas a I+D[44]. Dentro de este tipo de modelos destacan dos formas de endogeneizar el progreso técnico Sala-i- Martin(1994, pp. 113-125).

Progreso técnico entendido como el aumento del número de bienes de capital disponibles como factores productivos.

Desde este punto de vista, los aumentos de producción son posibles exclusivamente cuando se utiliza una mayor variedad de inputs de capital. Es por ello que el progreso tecnológico supone la aparición de nuevos bienes de capital disponibles como factores productivos. Este progreso técnico generará crecimiento sostenido de forma endógena porque *no existen rendimientos decrecientes en el número de bienes de capital*, por lo que las empresas dedicadas a I+D siempre desean descubrir nuevos productos.

El desarrollo de estos modelos se asemeja a la tecnología *AK*, en el que el factor acumulable (*K*) es el número de productos. Más concretamente, la función de producción de bienes finales puede escribirse como:

$$Y_t = A\left(\sum_{i=1}^{N(t)} x_{it}^{\beta}\right) L_t^{(1-\beta)} \tag{6.43}$$

donde A es un parámetro tecnológico; x_{it} son los bienes intermedios de capital; $N(t)$ es el número total de estos inputs intermedios, que se suponen todos con la misma elasticidad. La tecnología presenta rendimientos decrecientes respecto a cada x_i, pero rendimientos constantes respecto a $N(t)$, posibilitándose así el crecimiento constante del número de inputs intermedios $N(t)$, que como hemos comentado puede entenderse como una forma de progreso tecnológico. Si suponemos que en cada instante del tiempo el número de bienes de capital es igual para todos los bienes de capital, es decir, $x_i=x$, para todo i, podemos ver esto más claramente ya que la función de producción (6.43) podrá escribirse como:

$$Y_t = A\ N_t\ x_t^{\beta}\ L_t^{(1-\beta)} \tag{6.44}$$

o teniendo en cuenta el total de bienes de capital, que seguirá presentando rendimientos decrecientes,

[44] Para un desarrollo de estas aportaciones véase Barro y Sala-i-Martín (1995, caps. 6 y 7) y Grossman y Helpman (1991)

$$Y_t = A\ (N_t\ x_t)^{\beta}\ N_t^{(1-\beta)}\ L_t^{(1-\beta)} \qquad (6.45)$$

(6.45) muestra como se introducen los rendimientos crecientes de escala en la función de producción, junto con otros decrecientes respecto a los factores productivos pero constantes respecto al número de bienes de capital *N(t)*, condiciones éstas que necesitábamos para que se pudiese observar crecimiento endógeno en este tipo de modelos.[45]

Progreso técnico entendido como el aumento de la calidad de los nuevos productos.

En este caso, se supone que el progreso técnico sólo está incorporado a los nuevos productos. Son modelos de los llamados *de escalas de calidad –quality ladders–*, basados en la idea schumpeteriana de la destrucción creativa, en la que la nueva generación de productos –con mayor calidad– deja obsoleta a la generación anterior. En este caso, las empresas dedicadas a I+D, tienen incentivos para apropiarse del mercado de otras que ya están instaladas fabricando nuevos productos y dejando obsoletos a los existentes. Es decir, el proceso de inversión en I+D que genera el crecimiento económico, se debe a los incentivos de las empresas a mantener su *liderazgo tecnológico*. Como consecuencia de ello, la solución de equilibrio de estos modelos supone que los agentes privados tienden a sobreinvertir en relación a la inversión óptima desde el punto de vista social. Esto puede explicarse porque el nuevo líder, a la hora de decidir sobre los recursos destinados a actividades de I+D, no internaliza las pérdidas que genera a la empresa que se queda obsoleta, dando de nuevo cabida estos modelos a la intervención pública en la economía con el propósito de maximizar el bienestar social.

6.3.- Dinámica económica simple a Corto Plazo: Las Fluctuaciones cíclicas.

A modo de conclusión de lo visto hasta el momento, consideramos que los distintos modelos de crecimiento económico han servido para entender algo más sobre la dinámica del cambio económico al determinar cuales son los determinantes del mismo. Ello ha proporcionado a su vez, la base necearia en la que fundamentar las políticas económicas que deberían diseñarse para favorecer el crecimiento económico a largo plazo.

A pesar de ello, estos modelos no han estado exentos de críticas. Una de ellas, sobre la que nos centraremos a parir de este momento, gira entorno a las limitaciones de estos modelos para poder representar la propia dinámica del

[45] En este tipo de modelos, y debido al oligopolio de las empresas dedicadas a I+D, el precio de los nuevos producto es mayor que su precio competitivo, por lo que será óptimo desde el punto de vista social financiar el consumo de estos nuevos productos.

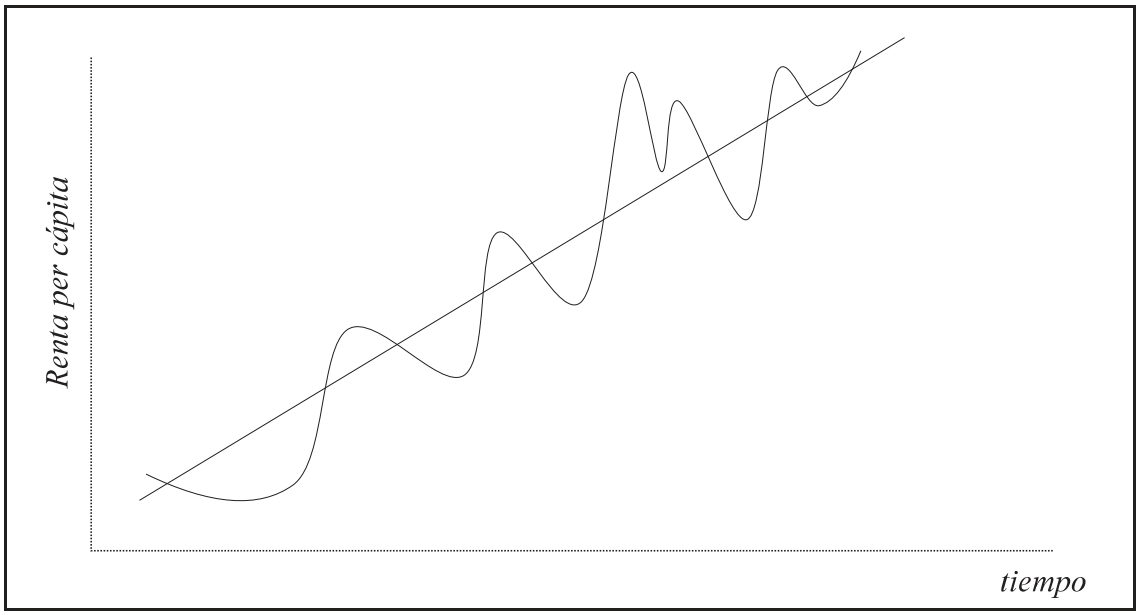


Figura 6.10. Crecimiento cíclico

crecimiento tal y como se observa en la realidad. Nos referimos a su incapacidad para explicar las fluctuaciones que acompañan al crecimiento en su evolución temporal. Según los hechos estilizados de la dinámica económica, existe poca evidencia empírica que respalde la idea de que la evolución de los datos económicos converja a una tasa de crecimiento constante.

Ya dijimos en su momento que esa limitación de la teoría del crecimiento ha venido impuesta a priori en estos modelos lineales o linealizables que sólo permiten la existencia de equilibrios dinámicos del tipo *punto fijo*. Es decir, una única solución estable donde la tasa de crecimiento permanece constante a largo plazo. Esta manera de enfocar el estudio del crecimiento ha generado la necesidad de recurrir a modelos que, de forma separada al crecimiento a largo plazo, tratan de explicar el por qué se producen estas fluctuaciones cíclicas de la actividad económica entorno a las tendencias medias de crecimiento a largo plazo –figuras 6.10 y 6.11–. Surgen así las distintas *teorías del ciclo económico*.

Al igual que sucede con el crecimiento, existen diferentes enfoques doctrinales que encuentran el origen de las fluctuaciones en diversos factores exógenos y endógenos. Limitaciones de espacio nos impiden profundizar como quisiéramos en cada una de estas aportaciones [46]. En lugar de ello vamos a continuación a exponer cuales han sido las características fundamentales de la explicación del ciclo económico desde un punto de vista cualitativo tratando de responder a preguntas como ¿qué factores causan la aparición del ciclo? o ¿qué se podría hacer para controlarlos?.

[46] Para un análisis de los distintos modelos del ciclo económico véase Dore (1993), Gabisch y Lorenz (1989) , Mullineux, Dickinson y Peng (1993), Argandoña, Gámez y Mochón (1997) y Novales y Sebastián (1999).

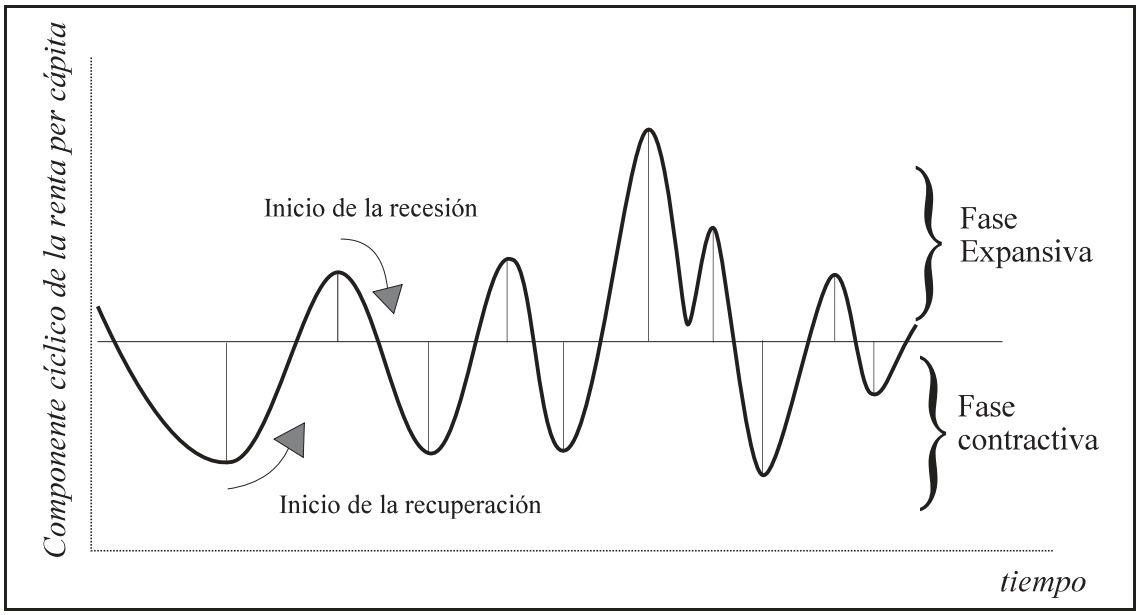


Figura 6.11. Componente cíclico de una serie temporal

Teorías del ciclo exógeno

Las *teorías del ciclo exógeno* explican las fluctuaciones aperiódicas de la actividad económica recurriendo a la existencia de una serie de shocks o perturbaciones aleatorias que *bombardean* de manera recurrente la trayectoria temporal seguida por las series económicas separándolas de sus respectivas situaciones de equilibrio dinámico a largo plazo. Este enfoque fue iniciado por los trabajos de Frisch (1933) y Slutsky (1937) que apuntaron que los ciclos podían ser el resultado de impulsos aleatorios no correlacionados que se irían propagando al resto de la actividad económica según distintos mecanismos de transmisión. Los distintos modelos del ciclo exógeno diferirán en sus supuestos sobre el origen exógeno de esos impulsos aleatorios iniciales –monetarios, de oferta o de demanda– y en los mecanismos de transmisión al conjunto de la economía.

Dentro de este enfoque encontramos, en primer lugar la postura keynesiana. En este enfoque, las perturbaciones aleatoria tienen su origen por el lado de la demanda real. Esos impulsos iniciales se propagan posteriormente por el resto de la economía como consecuencia de las rigideces en los precios y de las decisiones de inversión. Estos mecanismos de transmisión suponen un ajuste de los mercados vía cantidades que refuerzan los impulsos positivos o negativos iniciales sobre el nivel de renta de manera explosiva, propiciando así la entrada de la economía en las fases expansivas o recesivas del ciclo económico. Nos remitimos aquí al análisis efectuado en el apartado 6.2 sobre el problema de la inestabilidad del modelo de Harrod-Domar para la explicación de este proceso propagador de las fluctuaciones cíclicas de este enfoque keynesiano y de la necesidad de la actuación pública estabilizadora que mediante políticas de demanda expansivas o contractivas reconduzcan a la

economía hacia situaciones de equilibrio dinámico de crecimiento sostenido con pleno empleo y sin inflación[47].

En linea con lo expuesto al hablar de las teorías del crecimiento económico, esta postura keynesiana fue discutida y rechazada por la ortodoxia neoclásica. Según esta última, no es necesario suponer rigideces en los precios para justificar la existencia de ciclos entorno a la tendencia general de crecimiento a largo plazo. Surge así la aportación del enfoque neoclásico en la explicación del ciclo, donde el supuesto de competencia perfecta con precios perfectamente flexibles, junto al supuesto de las expectativas racionales de los agentes dan lugar a la aparición de ciclos en equilibrio económico, primero con las aportaciones de Lucas (1975) sobre los ciclos monetarios en situaciones de información incompleta, y finalmente con las de Kydland y Prescott(1982) y Long y Plosser (1983), entre otros, sobre el ciclo real[48]. La hipótesis básica de estos *modelos del ciclo real* es que los ciclos económicos son el resultado pareto óptimo de las decisiones optimizadoras de los agentes ante perturbaciones reales (Mullineux, Dickinson y Peng, 1993 p. 6). No hay cabida, por tanto, en este enfoque neoclásico para ningún tipo de medida de política estabilizadora ya que la economía, por sí misma, en situaciones de información completa, converge por si sola a situaciones de equilibrio eficientes desde el punto de vista del bienestar social.

Estos modelos del ciclo real pueden se representados por ecuaciones dinámicas cuyo equilibrio a largo plazo, es decir, su atractor, es un punto fijo estable. De esta forma cualquier perturbación exógena que aleje la evolución del sistema de su senda de equilibrio, lo hará sólo momentáneamente. La estabilidad del equilibrio dinámico se encarga de ello. Los impulsos iniciales en estos modelos del ciclo real, son impulsos o perturbaciones reales de oferta, fundamentalmente, shocks tecnológicos. En el tránsito hasta que la economía vuelve al equilibrio, se produce una transmisión del shock por toda la economía debido al ajuste que realizan los agentes económicos de forma racional y óptima, manteniéndose en todo momento las situaciones de equilibrio en los mercados. Este proceso de ajuste y eliminación de los efectos de la perturbación es la que produce la existencia del ciclo. En la figura 6.12, representamos este tipo de comportamiento.

---

[47]Este modelo de Harrod-Domar es incapaz de explicar un comportamiento fluctuante de la actividad económica. Sólo es posible encontrar comportamientos monótonos expansivos o contractivos –figura 6.3–. Aportaciones como la de Samuelson (1939) utilizan el mismo mecanismo multiplicador-acelerador del modelo de Harrod-Domar para construir modelos dinámicos lineales de segundo orden que sí permiten comportamientos cíclicos. Pensamos, sin embargo, que la esencia del enfoque keynesiano desde una perspectiva integradora del ciclo y el crecimietno queda suficientemente bien recogida en el modelo de Harrod-Domar aquí considerado.

[48] Sobre la evolución de estos modelos del ciclo neoclásicos desde las aportaciones monetaristas hasta las de la nueva macroeconomía clásica véase Mullineux, Dickinson y Peng (1993, cap 2) y Dore (1993, cap 5 y 6).

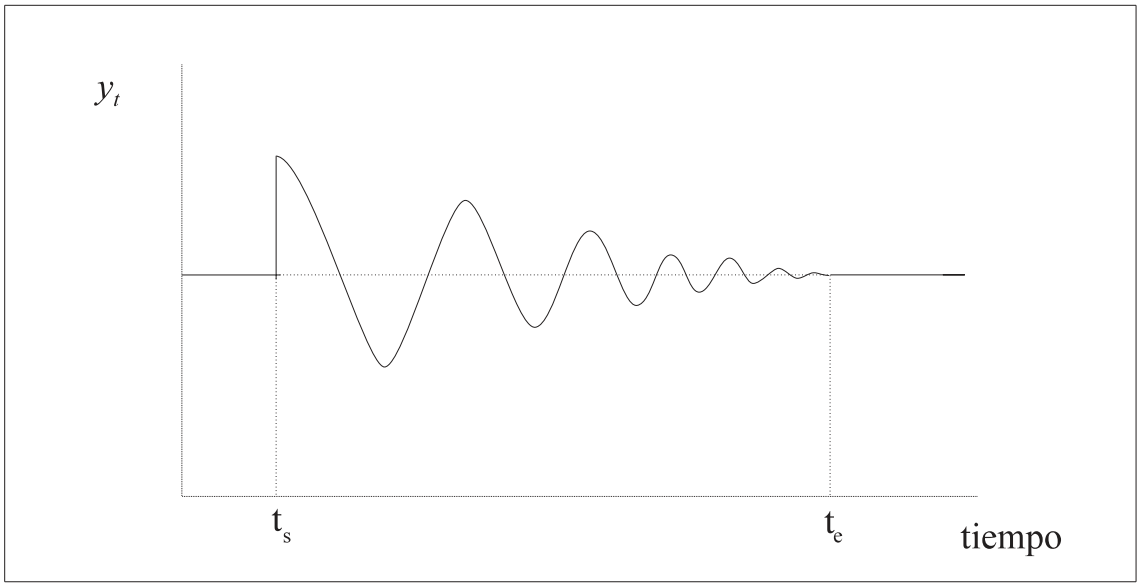


Figura 6.12. Perturbación aleatoria y ciclo exógeno.

El enfoque neoclásico de la explicación del ciclo puede integrarse con la dinámica del crecimiento a largo plazo haciendo uso del modelo de Solow. Los supuestos neoclásicos sobre la generación de los ciclos pueden introducirse en este modelo de crecimiento suponiendo que a partir de una situación inicial de equilibrio a largo plazo, la economía sufre un shock tecnológico exógeno reflejado en un incremento temporal de la tasa de progreso tecnológico (x). Los efectos de esta perturbación exógena se reflejan en la figura 6.13, donde representamos la dinámica del modelo que, como ya sabemos, depende de la evolución del stock de capital por trabajador eficiente según la ecuación fundamental (6.14). Como se observa en el gráfico, los efectos de un incremento temporal y aleatorio en la tasa de progreso tecnológico generan un efecto negativo y también temporal sobre el stock de capital por trabajador eficiente, sin que perduren los efectos sobre la tasa de crecimiento de equilibrio a largo plazo. Como consecuencia de ello y de manera paralela, se genera un incremento temporal en la tasa de crecimiento de la renta per cápita[49]. Si estas perturbaciones tecnológicas aparecieran de forma recurrente pero no correlacionada, se observaría una evolución de la renta con tasas de crecimiento fluctuantes en torno a la tasa de crecimiento tendencial a largo plazo determinado de manera análoga al modelo de Solow original por el progreso tecnológico exógeno medio $E(x_t)=x$. Esta sencilla integración de la explicación del ciclo y el crecimiento económico consigue reconciliar los resultados teóricos del enfoque neoclásico con las regularidades empíricas de la dinámica de la renta per cápita, aunque para ello se requiera de la introducción de perturbaciones aleatorias exógenas recurrentes[50].

[49] Lo contrario hubiese sucedido a partir de una caída inicial en el progreso técnico

[50] En relación con las propiedades estadísticas de las series temporales económicas os modelos del ciclo real concluyen que los datos no son capaces de rechazar la hipótesis de que el PIB sigue un camino o paseo aleatorio (random walk), lo que quiere decir, entre otras

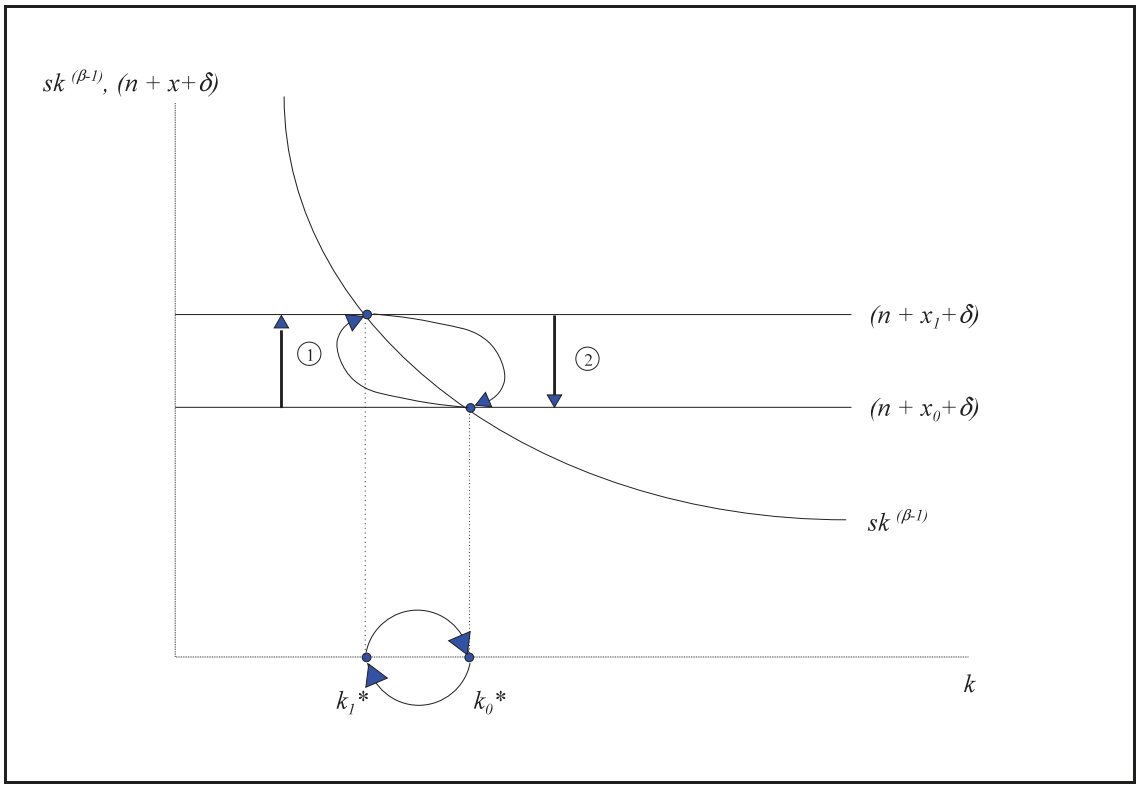


Figura 6.13. Efectos de un shock tecnológico exógeno en el modelo de Solow-Swan

Entre las críticas que se han suscitado en torno a estos modelos encontramos aquellas que atacan a la hipótesis de expectativas racionales, al agente representativo, y al resultado que se desprende de ellos en cuanto a la incapacidad de las políticas económicas de demanda para regular la economía. Otras críticas se preguntan si los shocks de oferta que sufren las economías reales son suficientemente importantes como para generar los ciclos de manera recurrente. Además, encontramos la típica crítica keynesiana: según el enfoque neoclásico, el ciclo se produce en situaciones de equilibrio, así la economía se encuentra continuamente en situación de pleno empleo, aunque éste se modifica como consecuencia del ajuste de las decisiones de los agentes –supone una sustitución intertemporal voluntaria óptima de ocio por trabajo y de manera transitoria– ¿Como se explica entonces las tasa tan elevadas de desempleo observadas de manera sostenida en algunos países fundamentalmente de Europa?.

Frente a esta visión neoclásica, surgen otros enfoques que tratan de dar una explicación alternativa del ciclo económico. Entre estas aportaciones podemos

cuestiones que son impredecibles. Normalmente, sin embargo, para contrastar empíricamente las teorías del ciclo real, en lugar de usar modelos econométricos con los que estimar el valor de los parámetros que mejor ajustan el comportamiento observado en las series temporales, dichos modelos se someten a calibración, esto es a su simulación para toda los valores posibles del espacio paramétrico, comparando los resultados obtenidos con el comportamiento observado de las series reales.

destacar la que realizan a partir de la década de los 80 los denominados nuevos keynesianos *–new keynesians–*. Estos autores retoman la postura keynesiana sobre la persistencia de los efectos reales de las perturbaciones exógenas que originan el ciclo, restableciendo así necesidad de políticas económicas para estabilizar las economías. Esta persistencia de los efectos reales, se explica por la existencia de una serie de fricciones, rigideces e imperfecciones que impiden el vaciado de los mercados. Dentro de este enfoque existen una amplia variedad de aportaciones. Podemos citar entre otras, y sólo a modo ilustrativo de esa gran variedad de enfoques, las siguientes aportaciones: los modelos de costes de menú y de racionalidad incompleta de los agentes para la explicación de las rigideces de precios en los mercados de bienes finales; la teoría de los contratos implícitos, los salarios de eficiencia y los modelos de trabajadores insiders-outsiders para la explicación de las rigideces salariales; y los modelos de racionamiento del crédito para la explicación de rigideces en los mercados monetarios y financieros. [51]

Lo novedoso del enfoque seguido por estos autores es que, a diferencia de la visión keynesiana tradicional, estos nuevos keynesianos justifican y fundamentan microeconómicamente la existencia de estas fricciones. Es decir, estas fricciones, que actúan como el mecanismo propagador del ciclo, surgen del comportamiento óptimo y racional de los agentes. Estos modelos retoman las postura más keynesiana, según la cual la existencia de ciclos permite la actuación activa de la política económica. Los resultados que se desprenden de estos modelos es que en ellos puede aparecer paro involuntario, dándose así cabida para una política económica activa eficaz.

Teorías del ciclo endógeno de dinámica simple

Frente a las teorías del ciclo que recurren a una perturbación exógena y a su posterior propagación dentro del sistema que hemos englobado bajo la denominación común de teorías del ciclo exógeno, tendríamos aquéllas en las que el ciclo surge endógenamente de la propia dinámica del modelo.

Entre estas *teorías endógenas del ciclo* encontramos las de Schumpeter (1912, 1927), Kaldor (1940)[52], Hicks (1950) y Goodwin(1951, 1955) [53] por citar algunas de las iniciales. Estos modelos tienen en común el hecho de que para explicar la existencia de ciclos económicos, no necesitan recurrir a perturbaciones o shocks exógenos. En lugar de ello, introducen en su

[51] Para una visión más completa de este enfoque véase Mankiw y Romer (1991a y 1991b). Sobre cómo estos modelos se han utilizado en la explicación del ciclo véase Argandoña, Gámez y Mochón (1997, caps. 3, 4, 5 y 6) y Blanchard y Fischer (1998, caps. 8 y 9).

[52] Ésta puede consultarse en Mullineux, Dickinson y Peng (1993, pp. 35-41).

[53] Estos dos modelos son ampliamente analizados en Abraham-Frois y Berrebi (1995, pp.132-156).

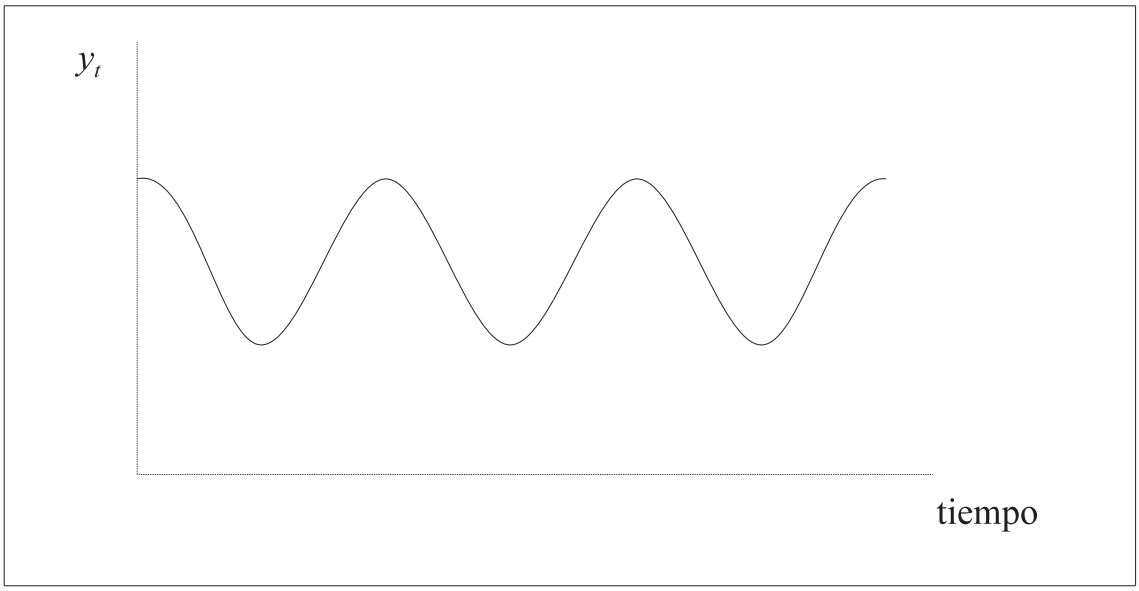


Figura 6.14. Ciclo endógeno regular de dinámica simple.

formulación algún tipo de no linealidad que les permita llegar a equilibrios dinámicos del tipo ciclo límite. En estos modelos, por tanto, las soluciones convergen a ciclos regulares perfectamente periódicos tal y como se muestra en la figura 6.14.

Estas aportaciones surgen, en la mayoría de los casos, como la evolución de modelos preexistentes formalizados de forma lineal[54]. Este es el caso del modelo de Hicks (1950), que trata de solucionar el carácter explosivo de los modelos keynesianos que, como el de Samuelson (1939) o el ya estudiado modelo de crecimiento económico de Harrod-Domar, utilizan el principio del multiplicador-acelerador para explicar la dinámica de la renta. En estos modelos el stock de capital deseado depende del nivel de la demanda agregada de la economía –principio del acelerador–. El modelo de Harrod-Domar, modeliza esta función de inversión keynesiana de forma lineal [S.2] suponiendo el incremento en el stock de capital deseado o requerido por los empresarios para que estos se sintieran satisfechos con su inversión, es una

[54] Como ya sabemos estos modelos lineales o linealizables no pueden, en general, generar soluciones periódicas del tipo ciclo límite. Sus soluciones presentarán, por el contrario y de forma genérica, evoluciones exponenciales monótonamente crecientes o decrecientes, oscilaciones amortiguadas o explosivas, o alguna combinación de las anteriores. Si la dimensión del modelo es superior a uno, la solución de estos modelos lineales puede, sin embargo, presentar oscilaciones periódicas cuando su equilibrio dinámico es del tipo *centro*. A pesar de ello, este equilibrio no resulta demasiado atractivo para la explicación endógena del ciclo económico, ya que estos equilibrios son estructuralmente inestable. Esta inestabilidad surge porque estos *centros* requieren de la verificación de una serie de relaciones muy específicas entre los parámetros que definen el modelo. Los ciclos límites son, por el contrario, estructuralmente estables y surgen para un amplio rango de valores posibles de los parámetros estructurales. Véase Gandolfo (1997, pp. 338-339 y pp. 347-349).

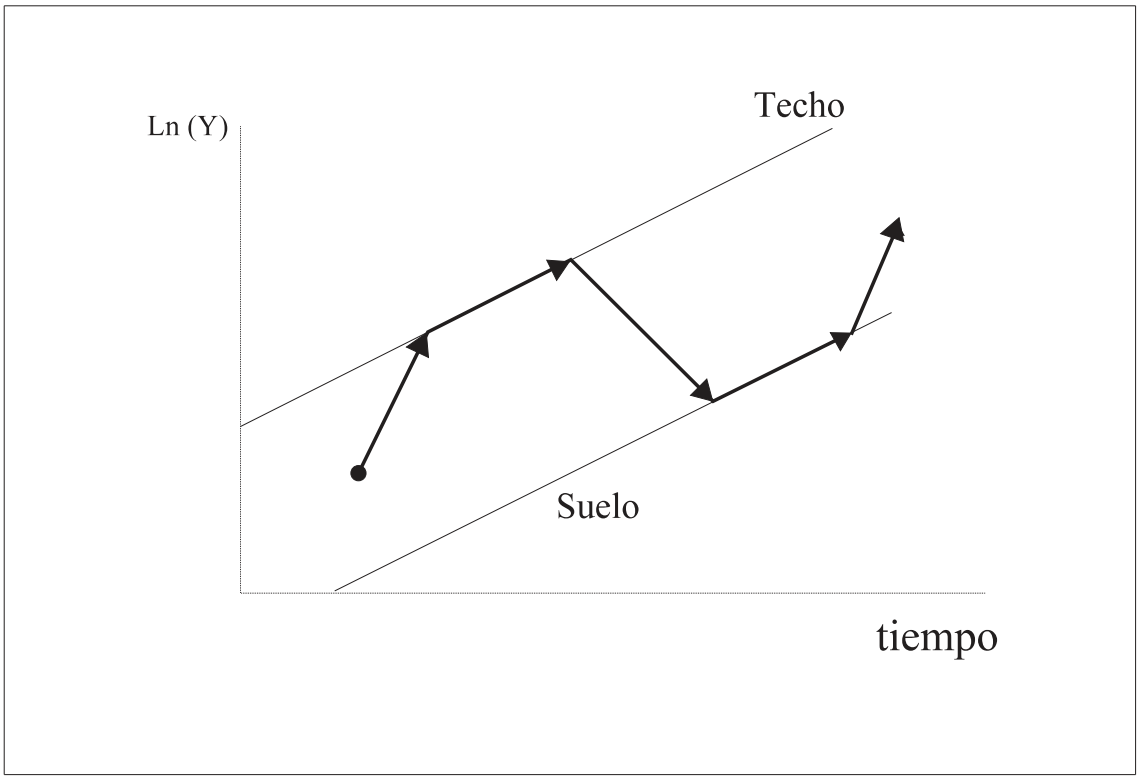


Figura 6.15. Dinámica del modelo de Hicks.

proporción constante del incremento efectivo en la renta:

$$\dot{K}_r = v_r \dot{Y} \tag{6.46}$$

Cuando se combina esta función de inversión con el efecto multiplicador ($Y=I/s$) obteníamos el modelo de Harrod-Domar de crecimiento que presentaba un equilibrio inestabe que conducía a situaciones de crecimiento o decrecimiento explosivo ilimitado –figura 6.3–. Aprovechando esta solución explosiva, y para generar un ciclo endógeno, Hicks (1950) introdujo una función de inversión no lineal a través de la imposición de un *techo* o tope máximo y *un suelo* o tope mínimo a las posibilidades de inversión:

$$\dot{K}_r = \begin{cases} I_{\min} & \dot{Y}_{\min} \geq \dot{Y} \\ v_r \dot{Y} & \dot{Y}_{\min} > \dot{Y} > \dot{Y}_{\max} \\ I_{\max} & \dot{Y} \geq \dot{Y}_{\max} \end{cases} \tag{6.47}$$

Este *techo* y *suelo* proporcionan al modelo de un punto de retorno –*turning-point*– en su evolución, generandose, así, la aparición endógena del ciclo en la evolución de la renta –figura 6.15–. Estas cotas venían impuestas por el progreso tecnológico y el crecimiento de la población, es decir, por la tasa natural de crecimiento para el tope máximo, y por el nivel mínimo de consumo determinado, por ejemplo, por el nivel mínimo de supervivencia y por el nivel mínimo de inversión por reposición para el suelo.

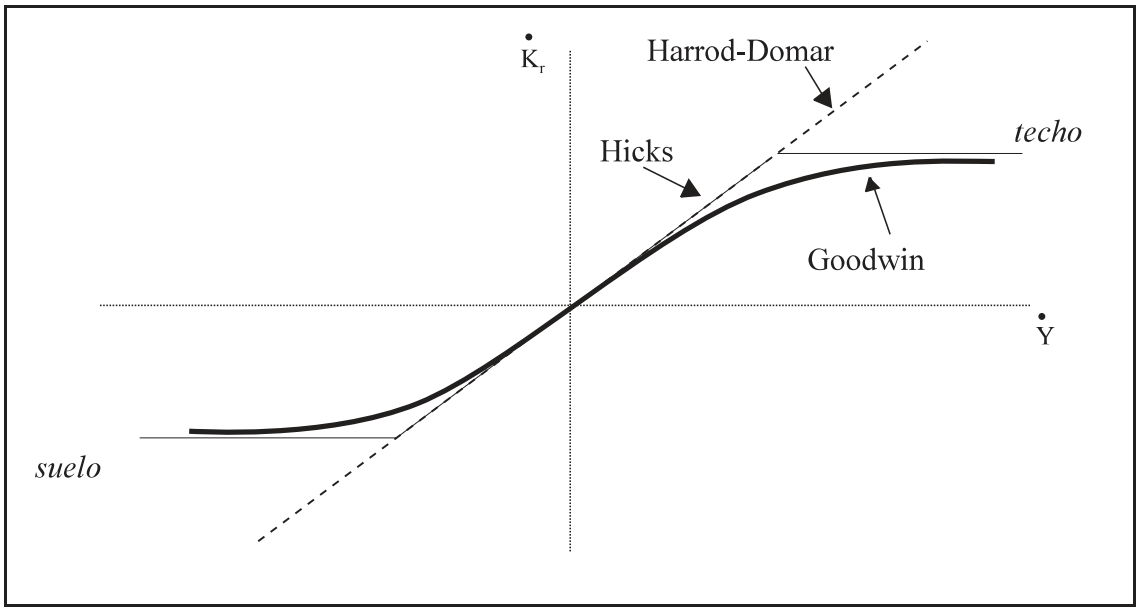


Figura 6.16. Funciones de inversión no lineales y ciclo endógeno.

Surgen a partir de este enfoque, otros trabajos que tratan de explicar la endogeneidad del ciclo económico a partir del uso de otra función de inversión keynesiana no lineal. Así, Goodwin(1951) obtiene el techo y el suelo para la acumulación de capital de forma asintótica, introduciendo para ello en su modelo una función de inversión cuadrática –figura 6.16–[55] :

$$\dot{K}_r = v_r \left(\dot{Y} - \frac{1}{2}\dot{Y}^2 \right) \tag{6.48}$$

Desde el punto de vista explicativo, estas teorías del ciclo endógeno permiten acercarnos un poco más al entendimiento de la dinámica económica proporcionando una visión alternativa a la explicación ortodoxa del enfoque Frisch-Slutsky. En contraposición a esta mejora en la explicación del ciclo, estos modelos han tenido que sufrir la ya conocida crítica neoclásica sobre la ausencia de fundamentación microeconómica de todo el enfoque keynesiano[56].

Tratando de solucionar esta falta de fundamentación microeconómica para la aparición de ciclos endógeno. Surgen distintas aportaciones del ciclo óptimo endógeno con fundamentación, basándose en la aplicación del teorema de

[55] Seguimos aquí a Puu(1991, pp. 62-70), quién generaliza este tipo de funciones de inverión no-lineal para el caso cúbico.

[56] Además de las aportaciones aquí reseñadas, dentro del ámbito de la teoría del ciclo endógeno de dinámica simple de mitad del siglo XX hay que destacar la aportacion de Kaldor quién introduce dos no-linealidades: En la función de Inversión y en la de ahorro; y el modelo presa-depredador conservativo –no es un atractor aunque sí un equilibrio dinámico– de Goodwin. Véase Chiarella (1990)

Bendixon y de la existencia de Bifurcaciones para la justificación de ciclo en equilibrio endógeno.

Nosotros no nos detendremos en este aspecto, pero sí queremos hacer notar una carencia o limitación de este enfoque. No referimos al carácter perfectamente regular y periódico que muestran sus soluciones. Estos modelos pertenecen a lo que anteriormente hemos denominado como dinámica simple. Siguen, por tanto, sin poder explicar de forma endógena la aparente irregularidad y aperiodicidad típica del ciclo económico. Nuevamente, dicha aperiodicidad tiene que ser explicada exógenamente haciendo uso de perturbaciones aleatorias recurrentes no correlacionadas.

ANEXO 6A. El Principio del Máximo con Hamiltoniano a valor corriente.

El Principio del Máximo constituye la condición de primer orden que debe cumplirse necesariamente para obtener la solución al problema de control óptimo de optimización dinámica. Una variante de dicho Principio del Máximo utilizado en aquellos problemas de control óptimo con horizontede planificación infinito en los que en la integral aparece el factor de descuento $e^{-\rho t}$, es el que utiliza el denominado *Hamiltoniano a valor corriente*. Este tipo de problemas se pueden formular de forma genérica como:

$$\textit{Maximizar} \quad V = \int_0^{\infty} F\,[t, y, u]\,dt = \int_0^{\infty} G\,[t, y, u]\,e^{-\rho t}\,dt$$

$$\textit{sujeto a} \qquad y(0) = A \qquad \text{(A dado)}$$
$$y'(t) = f\,[t, y(t), u(t)]$$
$$u(t) \in U \text{ para } 0 \le t \le T$$

El Hamiltoniano a valor corriente (H_c) de este problema se construye a partir del Hamiltoniano estándar (H) como:

$$H_c \equiv H\,e^{\rho t} = G(t,y,u) + m\,f(t,y,u) \qquad (\text{con } m = \lambda\,e^{\rho t} \text{ -variable auxiliar a valor corriente})$$

A partir de este Hamiltoniano a valor corriente se construyen las condiciones de primer orden del Principio del Máximo, que se pueden expresar ahora como:

(i) $\underset{u \in U}{Max} \quad H_c \quad \forall\, t \in [0, \infty]$

(ii) $y' = \dfrac{\partial H_c}{\partial m} = f(t,y,u)$ (ec. de movimiento para la variable de estado y)

(iii) $m' = -\dfrac{\partial H_c}{\partial y} + \rho m$ (ec.de movimiento de la variable auxiliar a valor corriente)

(iv) $\lim_{t \to \infty} H_c e^{-\rho t} = 0$ [57]

(v) $\lim_{t \to \infty} m(t) e^{-\rho t} = 0$

[57] En caso de que el problema sea autónomo, es decir, $G = G(y,u)$; $f = f(y,u)$, esta condición de trasversalidad se reduce a $[H_c]=0$. Véase Chiang (1992)

CAPÍTULO 7

DINÁMICA ECONÓMICA COMPLEJA: EXPLICANDO LA IRREGULARIDAD DEL CRECIMIENTO CÍCLICO ECONÓMICO

En el capítulo 2 hemos introducido el concepto de dinámica compleja como aquella que resulta de sistemas en régimen de comportamiento caótico. Estos sistemas dinámicos, aun siendo deterministas, muestran una evolución temporal altamente irregular con ciclos recurrentes aperiódicos. Estas propiedades de los modelos de dinámica compleja hacen de ellos potenciales candidatos para la representación del ciclo y el crecimiento económico[1]. Es decir, el empleo de modelos de dinámica caótica permite explicar de forma endógena, sin necesidad de recurrir a factores estocásticos exógenos, características típicas de estos fenómenos económicos como son el crecimiento cíclico pero irregular, aperiódico y escasamente predecible de la actividad económica[2].

Entre las aportaciones iniciales que aplican modelos de dinámica compleja al estudio del ciclo y el crecimiento económico se encuentran los trabajos de Benhabib y Day (1981, 1982), Dana y Malgrange (1984) y Day y Shafer (1985) sobre los ciclos endógenos de carácter keynesiano, Pohjola (1981) sobre el

[1] Day y Walter (1988), Day y Pianigiani (1991, pp.74-81), Day(1992), Day (1993) y Day (1999, pp. 157-325), proponen el uso de sistemas dinámicos en régimen de comportamiento caótico con *transición de fases* para el estudio del desarrollo más a largo plazo desde una perspectiva evolutiva.

[2] Para una introducción y aplicaciones del caos a la economía véase Baumol y Benhabib (1989), González Veiga (1995), Fernández Díaz (1994, 1995b y 2000), Day (1992), Brock y Dechert(1991), Banertt, Medio y Serletis (1997).Obras donde se recopilan las principales aportaciones de la dinámica caótica compleja son, entre otras: Day y Chen (1993), Dechert (1996), Benhabib (1992), Grandmont (1987), Abraham-Frois (1998).

ciclo endógeno de Goodwin (1955)[3], y Day (1982, 1983), Grandmont (1985) y Boldrin y Montrucchio(1986) sobre el ciclo irregular en modelos neoclásicos de crecimiento[4].

En el presente capítulo mostraremos algunas de estas aportaciones con el fin de defender la tesis de que con el uso de modelos de dinámica caótica compleja es posible explicar de manera endógena el crecimiento cíclico irregular observado en la evolución de la economías reales. No pretendemos defender, sin embargo, la tesis de que las economías reales pueda describirse correctamente por ninguno de estos modelos. Por el contrario, pensamos que la verdadera dinámica económica es estructuralmente mucho más compleja. Tan sólo queremos mostrar cómo con el uso de la matemática del caos es posible representar y explicar de forma endógena con modelos estructuralmente simples –de baja dimensión– aunque no-lineales, ciertas propiedades cualitativas observadas en la evolución de las economías reales. Las soluciones a estos modelos difieren cuantitativamente de las series macroeconómicas reales, es decir, estos modelos, aunque son capaces de explicar de manera endógena ciertas propiedades cualitativas observadas en las series temporales económicas –crecimiento cíclico irregular–, parecen ser excesivamente simples como para poder recoger la verdadera dinámica de la economía. Por eso, lo único que pretenden estos modelos es mostrar la posibilidad de que los modelos tradicionales empleados para la explicación del ciclo y el crecimiento económico pueden generalizarse, a través de la introducción de no-linealidades, para que presenten comportamientos caóticos y, con ello, poder explicar no sólo la existencia de ciclos endógenos, sino también de dinámica compleja sin la necesidad de introducir variables aleatorias exógenas –como hace la teoría tradicional del ciclo exógeno siguiendo el enfoque Frisch-Slutsky–.

Es por ello, que en una siguiente etapa habrá que preguntarse si las series observadas han sido generadas por algún tipo de modelo caótico aunque este sea desconocido. Esta tarea la dejamos pendiente para los próximos capítulos, centrándonos, de momento, en el estudio de la dinámica económica compleja desde un punto de vista más teórico.

Queremos mostrar además que estos modelos pueden formularse bajo distintos supuestos doctrinales sobre el funcionamiento de la economía

---

[3] Conviene hacer notar aquí que el propio Goodwin ha sido un de los primeros autores en entender la relevancia que la matemática del caos puede tener en la economía, véase Goodwin(1982 y 1990)

[4] Las aplicaciones del caos al estudio del ciclo económico han ido apareciendo de manera acelerada a partir de estas aportaciones iniciales. Surveys sobre la aplicación de la teoría del caos al estudio del ciclo y el crecimiento económico son entre otros: Nishimura y Sorger (1996), Boldrin y Woodford (1990), Majumdar, Mitra y Nishimura (2000) y Day (1999). Sobre la utilización de la teoría del caos en otras parcelas de la economía como las finanzas véase Montero (1996), Fernández Díaz(2000), Brock y Hommes (1997)

–enfoque neoclásico, keynesiano, etc.–, resultando relativamente sencillo construir modelos, con una plausibilidad creciente con el número de grados de libertad dinámica del sistema, cuyas soluciones se comporten de manera caótica. De hecho, la principal crítica que se hace a los modelos caóticos del ciclo y el crecimiento económico radica en que los valores que deben tomar los parámetros para que emerjan comportamientos caóticos, son en muchos casos ciertamente forzados y poco verosímiles desde el punto de vista empírico –véase, por ejemplo, Blanchard y Fischer (1998, pp. 260-261)–. Sin embargo, el origen de esa escasa plausibilidad empírica se encuentra precisamente en la simplicidad estructural con la que están definidos dichos modelos. Es decir, a medida que estos modelos se formulan asumiendo mayores grados de libertad dinámica –mayor dimensión–, las soluciones caóticas exigen un menor grado no-linealidad, adquiriendo mayor plausibilidad o verosimilitud empírica el valor de los parámetros necesarios para que aparezcan soluciones caóticas (véase Brock y Hommes, 1997 y Dechert, Sprott y Albers,1999).

7.1. Dinámica económica caótica en el modelo del ciclo endógeno de Hicks.

A continuación desarrollaremos una sencilla aplicación de la matemática del caos al estudio del ciclo y el crecimiento económico basada en la explicación endógena del ciclo que realiza Hicks (1950). Brevemente, esta explicación se basa en el multiplicador keynesiano unido al principio del acelerador, de forma que el stock de capital deseado depende del nivel de la demanda, que vendrá determinada en última instancia por la renta nacional (Jones, 1988. p. 28). De esta forma, el nivel de renta se ve impulsado en su evolución temporal desde su nivel máximo a su nivel mínimo – *techo* y *suelo* respectivamente, figura 7-1–. El crecimiento tendencial de esas cotas máximas y mínimas de los niveles de renta, proporcionan a ésta un crecimiento tendencial medio positivo.

Como decimos, con el ánimo de ilustrar cómo puede aplicarse la teoría del caos en el estudio del ciclo y el crecimiento económico vamos a desarrollar a continuación un sencillo modelo basado en esa idea del ciclo *hicksiano*. Para la representación del proceso diseñado por Hicks en su modelo, haremos uso de la ecuación logística de May (1976) introducida en el capítulo 2 .

Nos limitamos al caso de una economía cerrada y sin sector público, de forma que suponiendo que los mercados se vacían en cada instante del tiempo, para analizar cuál es la dinámica de la renta (Y_t), necesitaremos conocer la dinámica de la inversión (I_t) y el consumo (C_t) agregados:

$$Y_t=DA_t=I_t+C_t \tag{7.1}$$

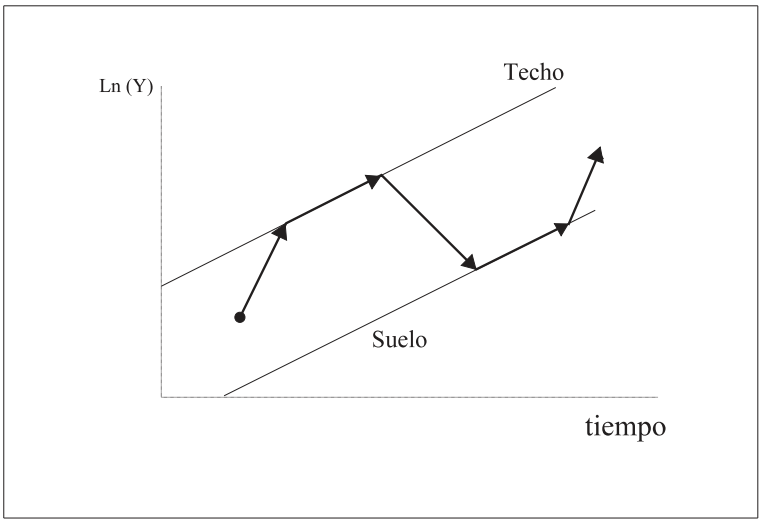


Figura 7-1. Dinámica del modelo de Hicks.

La función de Inversión, siguiendo el principio del acelerador, podrá escribirse como:

$$I_t = v_t \cdot Y_{t-1} \tag{7.2}$$

expresión que nos indica que cuanto mayor sea el nivel de renta en el periodo anterior mayor será el nivel de inversión del presente periodo, esto es, si inicialmente la renta se encuentra en una fase expansiva, este crecimiento se verá acelerado mediante el proceso de inversión. Si por el contrario, la economía se encontrara en una fase depresiva, esta se verá alimentada por la caída en la inversión. Como se recordará del capítulo 6, este principio del acelerador es precisamente el que genera los problemas de inestabilidad en el modelo de crecimiento de Harrod-Domar, justificando la aplicación de medidas de política económica contra-cíclica para reconducir a la economía a la situación de crecimiento de equilibrio con pleno empleo.

En el mismo capítulo 6 se introdujo el modelo de Hicks y de Goodwin quienes introducían no-linealidades en la función de inversión que restringían la posible evolución de la renta entre un *techo* y un *suelo* generandose así el comportamiento cíclico regular de forma endógena.

En este sentido, supondremos la existencia de un nivel máximo de renta que podrá venir dado, al igual que en el modelo de Hicks, por el progreso tecnológico y el crecimiento de la población, es decir, por la tasa de crecimiento natural de la renta utilizando terminología de Harrod. Supondremos que este techo crece a una tasa constante x^{max} . De manera análoga supondremos que también existe un nivel mínimo de renta, que vendrá dado por el nivel mínimo de consumo, por ejemplo, el determinado por el nivel mínimo de supervivencia, y el nivel mínimo de inversión por reposición. Este suelo, crecerá igualmente a una tasa constante x^{min}.

Para introducir la dinámica del modelo de Hicks, es decir, la existencia de un punto de retorno en la evolución de la renta, es necesario un decrecimiento en la inversión cuando estamos aproximándonos al nivel máximo de renta (y un crecimiento de la inversión cuando estamos llegando al mínimo). Esta desaceleración (aceleración) del ritmo de inversión puede ser modelizada a través del parámetro *v* en 7.2, que en lugar de considerarse constante, podemos suponer que es una función decreciente del propio nivel de renta. De esta forma, si estamos en una fase expansiva, el nivel de inversión será creciente pero se irá desacelerando poco a poco –la participación de la inversión en el nivel de renta irá disminuyendo– hasta que se anule justo cuando se alcanza el *techo* o máximo nivel de renta, con lo que en el siguiente periodo el nivel de renta se verá mermado por la ausencia de inversión en el periodo precedente, entrando así en un periodo de crisis.

Para la justificación de este comportamiento para la inversión, habrá que contar con el proceso de formación de expectativas por parte de los empresarios a la hora de tomar sus decisiones de inversión. Cuando se está próximo al máximo nivel de renta, las expectativas de crecimiento de la demanda no serán muy favorables, por lo que apenas habrá inversión –se espera un crecimiento de la renta como máximo igual a x^{max}–. Esta ralentización del proceso de inversión hace que se entre en la fase de crisis. De igual manera, si estamos en una fase depresiva, como la disminución en el nivel de renta provocada por una tasa de crecimiento negativa no puede colocar al nivel de renta por debajo de su cota mínima, llegará un momento en el que sólo pueden haber expectativas de crecimiento en el nivel de renta, lo que impulsa el proceso de inversión rompiendo con la fase recesiva.

Supondremos, por tanto, que el valor de *v* dependerá de cual sea el valor de la renta en el periodo anterior:

$$v_t = f(Y_{t-1}) \tag{7.3}$$

Podemos especificar una forma funcional lineal sencilla a esta relación (7.3):

$$v_t = a - b \cdot Y_{t-1} \tag{7.4}$$

El análisis gráfico de esta ecuación (7.4) –figura 7.2–, aclara su significado: cuando la renta ha llegado a su nivel máximo no se espera que el incremento en la renta realizado en el periodo anterior se traslade al corriente por lo que $v_t = 0$. Igualmente si estamos en un periodo donde la renta ha llegado a la cota mínima no se puede esperar más que crecimiento, por lo que *v* alcanzará su valor máximo v^{max} [5]. La ecuación (7.4) puede expresarse en función de los valores máximos y mínimos de la renta –Y^{max}, Y^{min}– y del parámetro *v* –v^{max}–. Haciendo $v=0$ se obtiene:

[5] Como ya veremos, el valor que tome este parámetro será fundamental para la dinámica del sistema

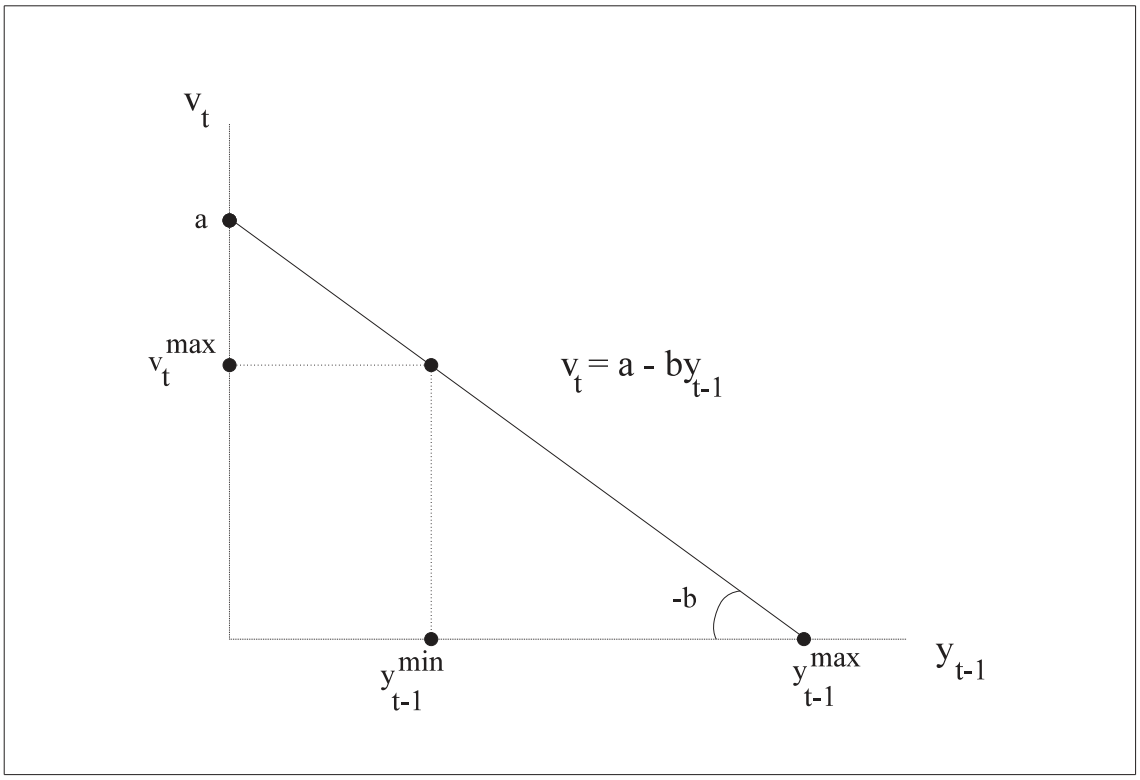


Figura 7.2. Variación *v* respecto a la renta.

$$b=\frac{a}{Y_{t-1}^{\max}} \tag{7.5}$$

y haciendo $v = v^{max}$ obtenemos:

$$a=v_t^{\max}\left(1-\frac{Y_{t-1}^{\min}}{Y_{t-1}^{\max}}\right)^{-1} \tag{7.6}$$

con lo que la ecuación (7.4) puede escribirse como:

$$v=v_t^{\max}\left(1-\frac{Y_{t-1}^{\min}}{Y_{t-1}^{\max}}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{Y_{t-1}}{Y_{t-1}^{\max}}\right) \tag{7.7}$$

Si expresamos todas las variables en relación a Y^{max} y las denotamos con minúsculas, podemos volver a escribir nuestra función de inversión (7.2) de la siguiente forma:

$$\frac{I_t}{Y_t^{\max}}=i_t=v_t^{\max}\left(1-\frac{Y_{t-1}^{\min}}{Y_{t-1}^{\max}}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{Y_{t-1}}{Y_{t-1}^{\max}}\right)\cdot\left(\frac{Y_{t-1}}{Y_{t-1}^{\max}\cdot(1+x^{\max})}\right)= \tag{7.8}$$

$$=\frac{v_t^{\max}}{(1+x^{\max})}\left(1-y_{t-1}^{\min}\right)^{-1}\cdot(1-y_{t-1})\cdot(y_{t-1})$$

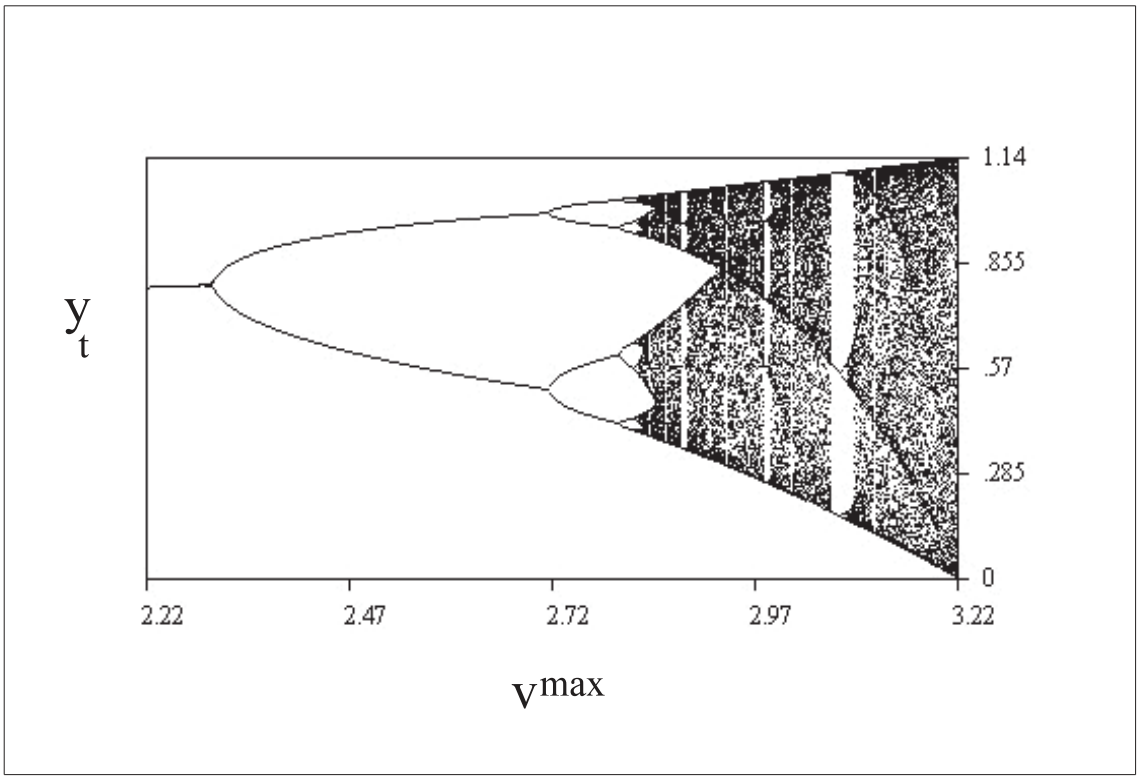


Figura 7.3. Diagrama de Feigenbaum modelo de Hicks.

Para cerrar el sistema, especificamos una función sencilla de consumo:

$$C_t = cY_{t-1} \tag{7.9}$$

donde *c* es la propensión media al consumo, que vamos a suponer constante –multiplicador *keynesiano*–. Si expresamos la función de consumo en relación a Y^{max}, podemos reescribirla como:

$$\frac{C_t}{Y_t^{\max}} = c_t = c \cdot \frac{Y_{t-1}}{Y_{t-1}^{\max} \cdot (1+x^{\max})} = \frac{cy_{t-1}}{(1+x^{\max})} \tag{7.10}$$

La dinámica de la renta puede establecerse suponiendo que la economía se encuentra en equilibrio en todo instante, y sustituyendo (7.8) y (7.10) en (7.1):

$$\frac{DA_t}{Y_t^{\max}} = \frac{Y_t}{Y_t^{\max}} = \frac{I_t}{Y_t^{\max}} + \frac{C_t}{Y_t^{\max}} = i_t + c_t =$$

$$y_t = \frac{v_t^{\max}}{1+x^{\max}} \left(1 - y_{t-1}^{\min}\right)^{-1} \cdot (1-y_{t-1}) \cdot (y_{t-1}) + \frac{c \cdot y_{t-1}}{1+x^{\max}} \tag{7.11}$$

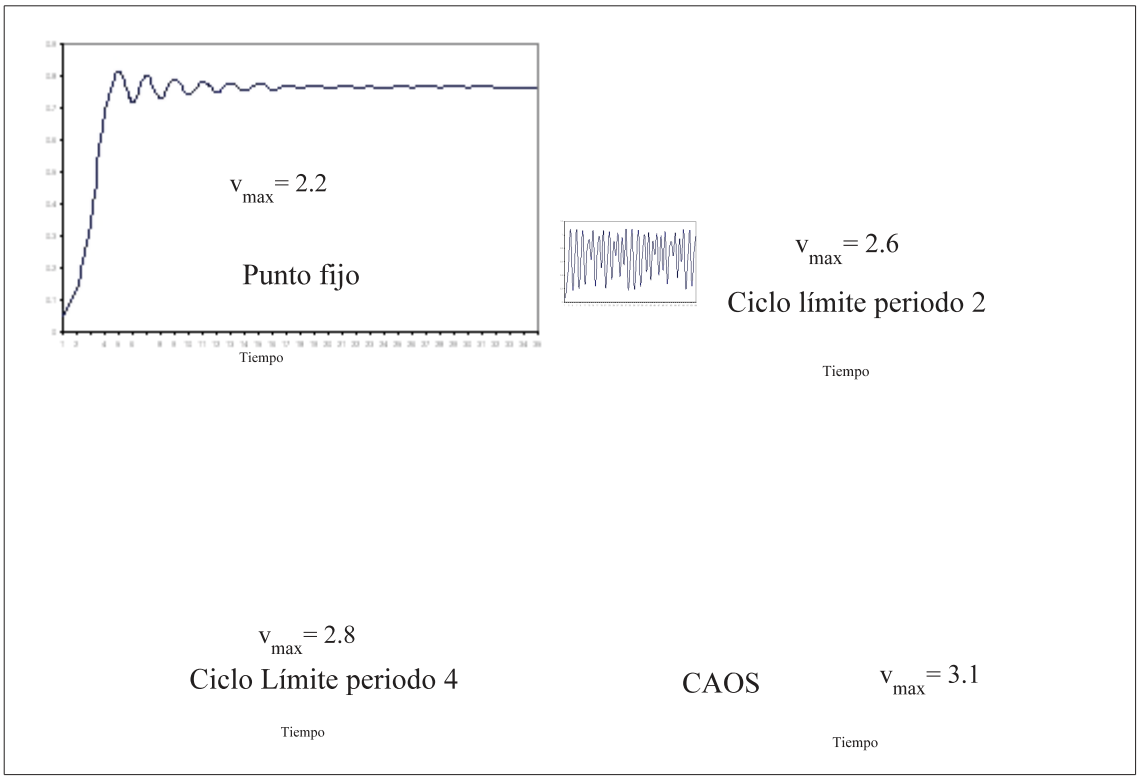


Figura 7.4. Soluciones numéricas de la ecuación de movimiento para distintos valores de v^{max}

La anterior ecuación (7.11), que representa la dinámica de la renta, es una aplicación dinámica no lineal en tiempo discreto que habrá que solucionar. En principio calcularemos solamente la solución numérica. Ésta dependerá de las condiciones iniciales y del valor concreto que tomen los parámetros, así que mantendremos los valores de x^{max}, x^{min}, c y las condiciones iniciales y_0, y_1, y_0^{max}, y_0^{min} iguales a 0.02, 0.02, 0.5, 0.05, 0.06, 1 y 0,1 respectivamente, y calcularemos distintas soluciones numéricas variando el valor que toma v^{max} para analizar la evolución de la renta y los distintos regímenes de comportamiento que esta alcanza a largo plazo, es decir realizamos un análisis de dinámica comparativa (Day, 1994, pp. 19-20).

Para realizar una visión conjunta de los distintos regímenes de comportamiento a largo plazo puede utilizarse el conocido como gráfico de Feigenbaum o de *bifurcaciones* –Figura 7.3–. En este gráfico se representa el valor o conjunto de valores al que converge el estado de la variable y_t , para cada valor del parámetro v^{max}. Como se observa para valores comprendidos entre 0.77 y 2.45 aproximadamente, el sistema converge a un único valor, es decir, el equilibrio es del tipo punto fijo. Este punto fijo o único valor de la variable de estado en equilibrio se transforma o bifurca a partir de entonces en dos puntos cuando el valor del parámetro v^{max} está comprendido aproximadamente entre 2.45 y 2.72. El nuevo equilibrio es por tanto del tipo ciclo límite, en el que el periodo se ha duplicado respecto a la situación anterior, pasando de ser 1 en el punto fijo a 2 en este ciclo límite. Este proceso

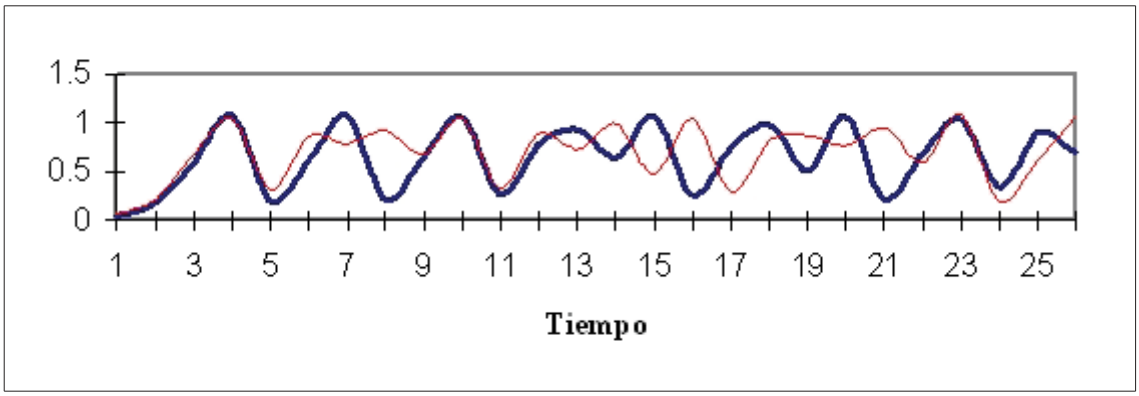


Figura 7.5. Dependencia Sensitiva a las condiciones iniciales.

de desdoblamiento o duplicación del periodo continúa a medida que vamos aumentando el valor del parámetro. Para valores de v^{max} comprendidos aproximadamente entre 2.72 y 2.9 el ciclo límite es de periodo cuatro. A partir de este último valor, la cascada de duplicaciones hace que el número de puntos tienda a cubrir una mayor región del espacio, hemos encontrado la ruta hacia el caos, el atractor se ha convertido en extraño.

Para mostrar, la segunda, de las propiedades de los sistemas caóticos, hemos representado en la figura 7.4 la solución del sistema para distintos valores del parámetro v^{max} . Puede observarse como por ejemplo para el valor 3.1, la solución no presenta un periodo claro, el sistema se ha convertido en caótico.

Finalmente, en la figura 7.5, hemos ilustrado otra propiedad de los sistemas caóticos deterministas, su dependencia sensitiva a las variaciones en las condiciones iniciales. En esta figura hemos representando conjuntamente dos soluciones que se diferencian en su condición inicial tan sólo en 0.01. Como se observa en el gráfico, ambas trayectorias divergen rápidamente en su comportamiento.

La integración del ciclo y el crecimiento económico.

Hay que destacar que la serie normalizada por y^{max} se comporta de manera cíclica en torno a un valor constante, sin embargo, y como hemos añadido una tendencia lineal a este valor máximo, la serie original presentará de forma conjunta una tendencia lineal a largo plazo junto a una serie de oscilaciones aperiódicas en torno a la misma como se muestra en la figura 7.6. Es decir, hemos integrado el análisis del ciclo y el crecimiento económico, y hemos conseguido explicar de forma endógena dos características fundamentales que se observan en la evolución de las economías reales, la existencia de irregularidades en su oscilación, y la incapacidad de realizar predicciones ajustadas más allá del corto plazo. Esta última se deriva, como ya comentamos, de la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales.

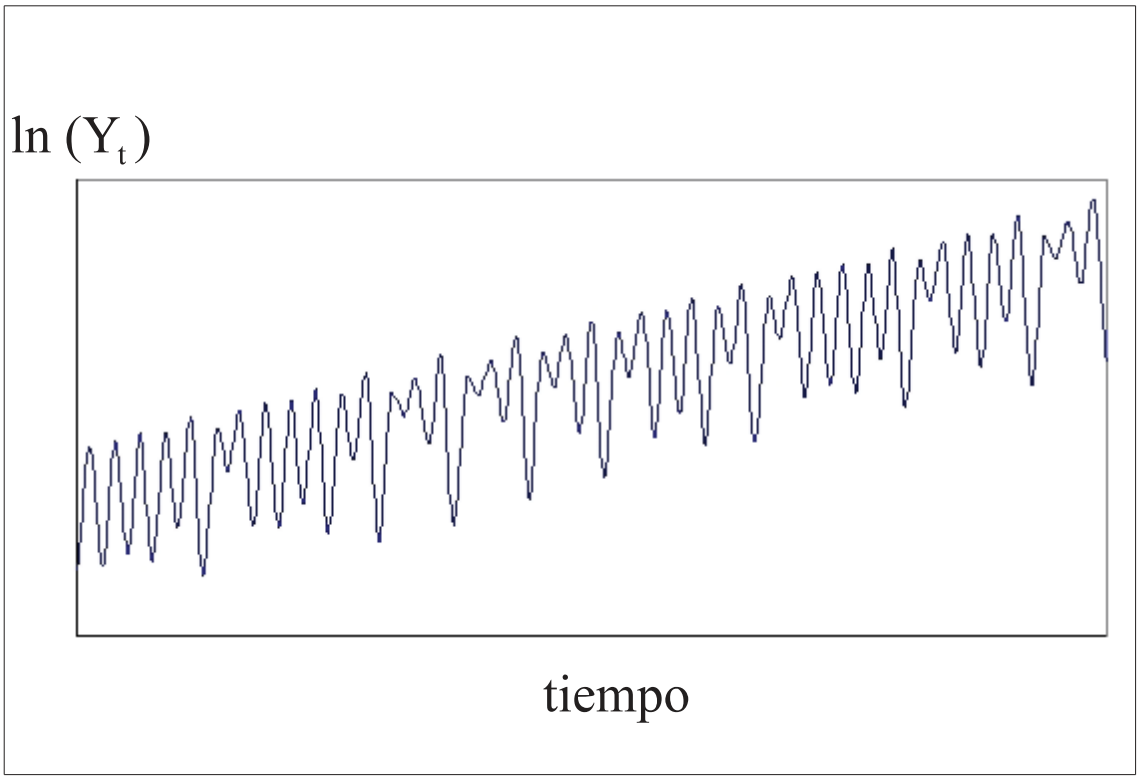


Figura 7.6. Integración del ciclo y crecimiento en el modelo de Hicks.

7.2. Caos en los modelos neoclásicos de crecimiento

Como ya se ha comentado en la introducción de este capítulo, los comportamientos caóticos pueden emerger de modelos de ciclos y crecimiento económico formulados bajo distintos enfoques doctrinales. De hecho, la mayoría de aportaciones en este ámbito tratan de generalizar el modelo neoclásico de crecimiento y del ciclo real, en las que se muestra que la aparición de ciclos endógenos también pueden surgir en el enfoque neoclásico sin necesidad de recurrir a shocks aleatorios exógenos.

Caos a partir del modelo neoclásico de crecimiento de Solow

A continuación desarrollaremos una sencilla aplicación de la matemática del caos en el estudio del ciclo y el crecimiento económico que está basada en el modelo neoclásico de crecimiento exógeno de Solow(1956)-Swan(1956).

Utilizaremos para ello la versión en tiempo discreto de éste modelo de crecimiento[6], que bajo las mismas condiciones que para su versión continúa –apartado 6.3– y suponiendo que no existe progreso técnico podemos exponer como (Shone 1997, pp 100-101):

$$\begin{gathered} S_t=sY_t \\ I_t=\Delta K_{t+1}+\delta K_t \\ \Delta L_{t+1}=nL_t \\ Y_t=F(K_t,L_t) \end{gathered} \tag{7.12}$$

donde por rendimientos constantes a escala podemos expresar la función de producción en términos per cápita:

$$y_t=f(k_t) \tag{7.13}$$

con $y_t=Y_t/L_t$; $k_t=K_t/L_t$.

La ecuación fundamental que describe la dinámica del stock de capital se deduce a partir de la condición de equilibrio en el mercado ($I_t=S_t$), y se puede escribir como:

$$k_{t+1}=\frac{sf(k_t)+(1-\delta)k_t}{1+n} \tag{7.14}$$

que bajo el supuesto de los rendimientos decrecientes para el capital tendrá un punto de equilibrio dinámico estable[7]: $k^*=sf(k^*)/1(1+n)$. Hasta aquí el modelo original de Solow.

Una de las primeras aportaciones que muestran como a partir de la generalización de los modelos tradicionales de crecimiento pueden surgir comportamientos caóticos es la de Day (1982 y 1983). Estas extensiones del modelo de Solow-Swan en su versión discreta se realizan mediante la introducción de una tasa de ahorro variable, de interacciones entre el crecimiento y el medio ambiente, de restricciones a la flexibilidad para incorporar el progreso tecnológico en el proceso productivo, o la endogenización del ritmo de crecimiento de la fuerza de trabajo. Estas generalizaciones convierten a la ecuación fundamental (7.14) –que expresa la dinámica de la economía– en aplicaciones caóticas del tipo logística –unimodales– (véase Day 1999, pp.84-106 y Day y Pianingiani, 1991). A continuación repasaremos una de estas generalizaciones del modelo de crecimiento de Solow-Swan que permite la existencia de comportamientos

[6] La razón para utilizar la versión en tiempo discreto es, nuevamente, simplificadora, ya que para que sea posible obtener soluciones caóticas en sistemas dinámicos en tiempo continúo es necesario que su dimensión –número de variables de estado– sea como mínimo 3. En los modelos de tiempo discreto no encontramos esta restricción. Este mismo ejemplo podría sin embargo generalizarse para el caso continuo suponiendo, por ejemplo, más de un sector productivo.

[7] Requerimos para ello el cumplimiento de las condiciones Inada de buen comportamiento –apartado 6.3.–

caóticos distintos al estado estacionario. Este modelo incorpora en la función de producción unas externalidades negativas como consecuencia de la contaminación del medio ambiente[8]. Para ver como se introducen estas externalidades vamos a dar una especificación del tipo Cobb-Douglas sin progreso técnico a la anterior función de producción (7.13):

$$y_t = A k_t^{\beta} \tag{7.15}$$

donde la constante A es un indicador de la productividad global, recogiendo todos aquellos factores que afectan a la capacidad de producción de la economía dada una dotación de factores productivos. Esta productividad dependerá del estado de la tecnología, pero también de otros factores. Day(1982) supone que entre esos otros factores debe recogerse el estado global del medio ambiente, y en particular de la capacidad de éste para absorber o asimilar la contaminación generada por el propio sistema productivo. Se intenta con ello recoger el hecho de que una vez que se incorpora el medio ambiente en el análisis del crecimiento, cuanto menor es su capacidad de absorción de la contaminación generada por el proceso productivo, menor será también la capacidad productiva global de la economía[9]. De esta forma podemos suponer que la productividad global de la economía A es una relación multiplicativa entre el estado global de la tecnología o estado de conocimientos (T) y la capacidad del medio ambiente de asimilar contaminación (P):

$$A = T^{\phi} P^{\gamma} \tag{7.16}$$

donde ϕ y γ representan las respectivas elasticidades. Mantendremos de momento el supuesto de que el estado de tecnología T permanece constante –no existe progreso técnico–. Sin embargo, supondremos que la capacidad de asimilación P no es constante, dependiendo negativamente de la intensidad de uso del capital en el proceso productivo:

$$P_t = p(k_t) \tag{7.17}$$

Podemos suponer que dicha relación negativa toma una forma lineal sencilla:

$$P_t = a - b k_{t-1} \tag{7.18}$$

---

[8] La posibilidad de que aparezcan comportamientos caóticos como consecuencia de la consideración de la interacción entre la actividad productiva y el medio ambiente puede extenderse también para que surjan en modelos de crecimiento óptimo –de generaciones solapadas– véase Zhang (1999)

[9] Esta hipótesis tiene su base en que el medio ambiente juega un doble papel en el proceso productivo, por una parte, la de dotar de recursos naturales al proceso productivo, y por otra la de recibir los residuos que el propio sistema genera. Entre estos dos papeles existe además una relación negativa, en la medida de que cuanto peor sea la capacidad del medio ambiente de asimilar la contaminación generada, mayor es el deterioro del medio ambiente y menor la cantidad de recursos naturales utilizables en el proceso productivo. Sobre los distintos papeles que juega el medio ambiente en el proceso productivo véase Common (1996)

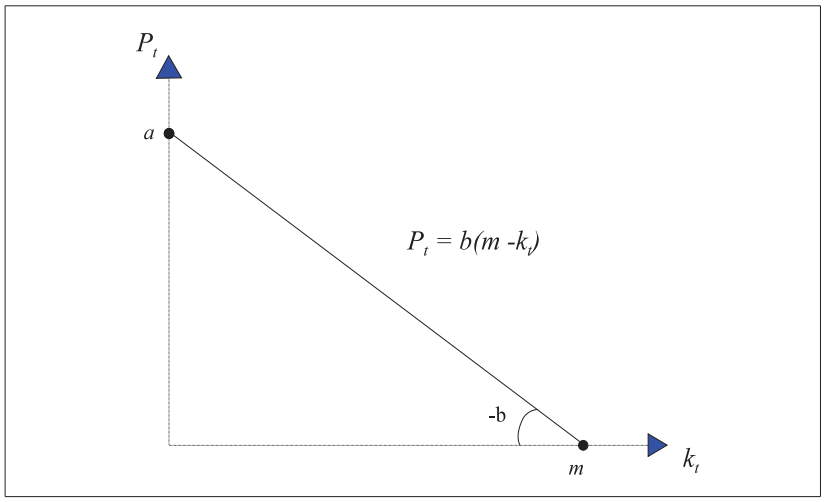


Figura 7.7. Externalidades por contaminación en el modelo de Solow

El análisis gráfico de esta relación en la figura 7.7, aclara el significado de esta relación: cuando no se usa capital en la producción, *P* alcanza un máximo; y el sistema se congestiona cuando se utiliza el capital con una intensidad *m*. El efecto negativo de un incremento en la intensidad de uso del capital sobre la capacidad de asimilación *P*, viene recogida por el parámetro *b*. Teniendo en cuenta este nivel de congestión, la relación (7.18) se puede rescribir cómo:

$$P_t = b(m - k_t) \tag{7.19}$$

Al incorporar la productividad global (*A*) así definida en la función de producción (7.15), obtenemos que la producción por trabajador incorpora las externalidades negativas por la contaminación (7.19):

$$y_t = B(m - k_t)^{\gamma} k_t^{\beta} \quad ; \; B = T^{\phi} b^{\gamma} \tag{7.20}$$

Al considerar esta nueva función de producción en el modelo de Solow, obtendremos la siguiente ecuación fundamental para el stock de capital:

$$k_{t+1} = \frac{sB(m - k_t)^{\gamma} k_t^{\beta} + (1 - \delta) k_t}{1 + n} \tag{7.21}$$

que será la ecuación que representa la dinámica del sistema que intentaremos solucionar para analizar como se comporta la economía en el largo plazo. En principio calcularemos solamente la solución numérica. Ello requiere que asignemos algún concreto a los parámetros estructurales del modelo. Supondremos para simplificar que $\beta = \gamma = \delta = m = 1$. La ecuación (7.21) se reduce entonces a:

$$k_{t+1} = \mu k_t (1 - k_1) \quad ; \; \mu = \frac{sB}{1 + n} \tag{7.22}$$

que es formalmente idéntica a la ecuación logística (2.30) de May (1976). A partir de la ecuación (7.22) podemos calcular distintas soluciones numéricas

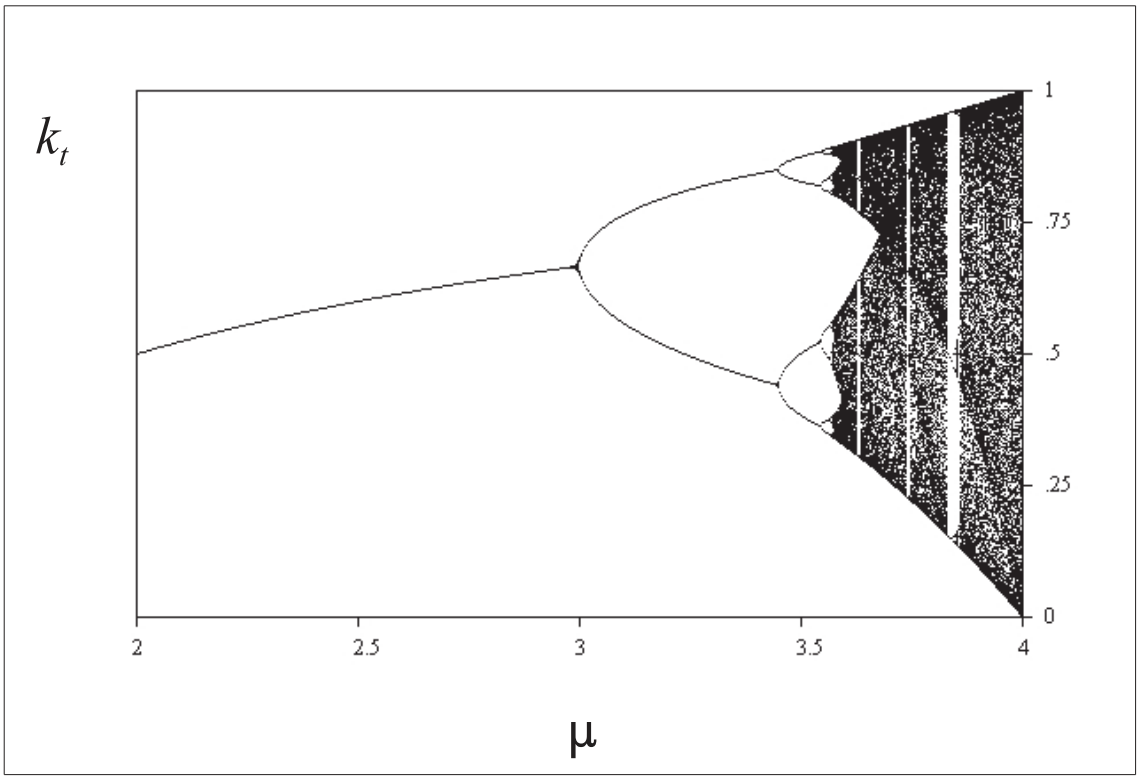


Figura 7-8. Diagrama de Feigenbaum de la ecuación logística

del modelo variando el valor de μ. De esta forma podremos analizar la evolución del stock de capital por trabajador y los distintos regímenes de comportamiento que éste alcanza en el largo plazo, es decir, podremos llevar a cabo un análisis de dinámica comparativa (Day, 1994, pp.19-20).

Para realizar una visión conjunta de los distintos regímenes de comportamiento a largo plazo puede utilizarse el conocido como diagrama de Feigenbaum o gráfico de *bifurcaciones* –figura 7.8–. En este gráfico se representa el valor o conjunto de valores al que converge el estado de la variable k_t , para cada valor del parámetro μ. Como se observa para valores comprendidos entre 0 y 3, el sistema converge a un único valor, es decir, el equilibrio es del tipo punto fijo. Esta es el mismo tipo de comportamiento observado en el modelo de Solow original, es decir, la convergencia a un estado estacionario. Esta ecuación logística, sin embargo, acepta más comportamientos a largo plazo.

El punto fijo o único valor de la variable de estado en equilibrio se transforma o bifurca en dos puntos cuando el valor del parámetro μ está comprendido entre 3.2 y 3.5. El nuevo equilibrio es por tanto del tipo ciclo límite, en el que el periodo se ha duplicado respecto a la situación anterior, pasando de ser 1 en el punto fijo a 2 en este ciclo límite. Este proceso de desdoblamiento o duplicación del periodo continúa a medida que vamos aumentando el valor de μ (periodo cuatro, ocho, dieciséis, ...). Para valores de μ a partir de 3.58, la cascada de duplicaciones hace que el número de puntos

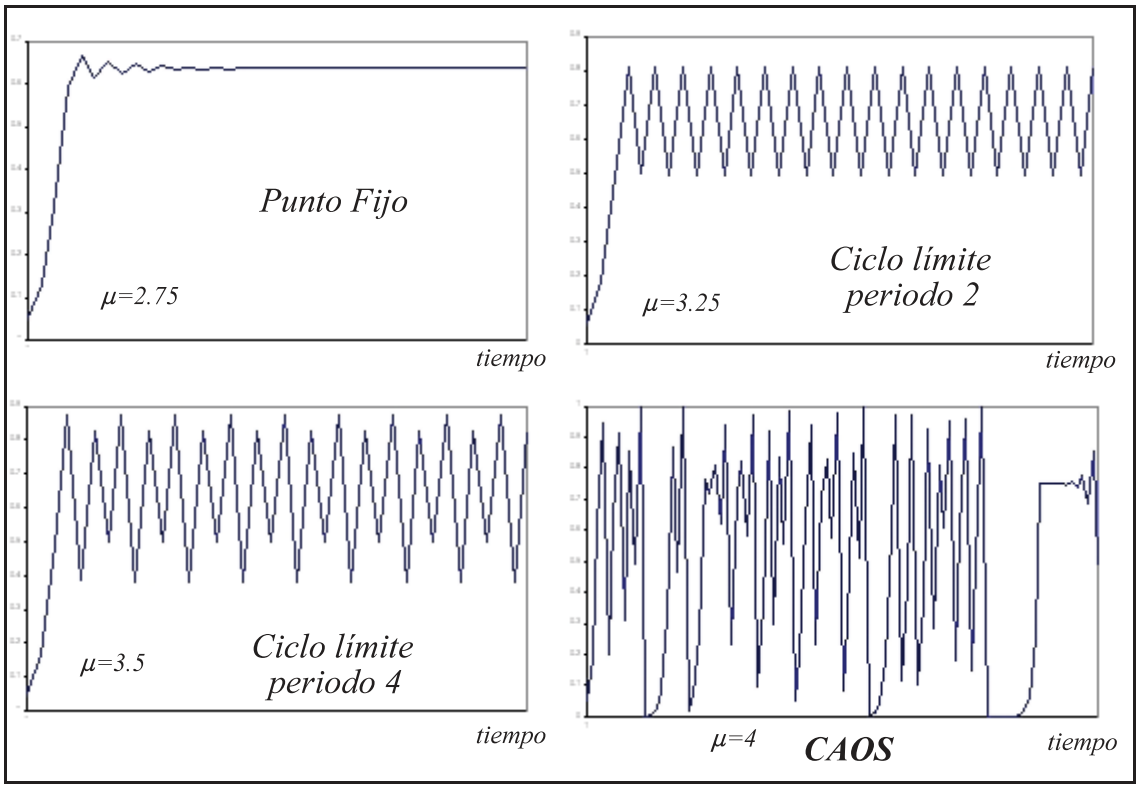


Figura 7.9. Solución de la ecuación logística: evolución temporal

tienda a cubrir una mayor región del espacio, hemos encontrado la ruta hacia el caos, el atractor se ha convertido en extraño. En la región caótica del diagrama de bifurcaciones se observan pequeñas zonas en blanco –las ventanas del caos– donde el sistema presenta comportamientos periódicos regulares pero siempre de orden impar[10]. Excluyendo estas ventanas, el sistema presenta atractores formados por infinitos puntos acotados en un intervalo fijo del espacio de fases, que en este caso es la recta real. Para los valores de μ donde aparece este comportamiento el atractor es caótico (por ejemplo, $\mu=4$, con un atractor comprendido en el intervalo (0,1)).

Las soluciones correspondientes a cada uno de esos equilibrios a largo plazo se representan en las figuras 7.9 y 7.10. En el primero hemos dibujado la senda temporal que describen las correspondientes soluciones, mientras que en el segundo hemos dibujado la evolución de la variable haciendo uso de la propia ecuación fundamental (7.22) –gráfico de transición–.

Como ya sabemos, los sistemas presentan dependencia sensitiva a las condiciones iniciales. Así, cuando nuestro modelos se sitúa en régimen de comportamiento caótico, presentará dicha dependencia respecto a las

[10] Recordemos que en esta característica se basa el teorema de Li-Yorke (1975) para la existencia de caos. Este teorema demuestra que, bajo condiciones específicas, cuando en el modelo puede aparecer un ciclo regular de periodo tres, entonces pueden aparecer ciclos de cualquier periodo, incluyendo los caóticos.

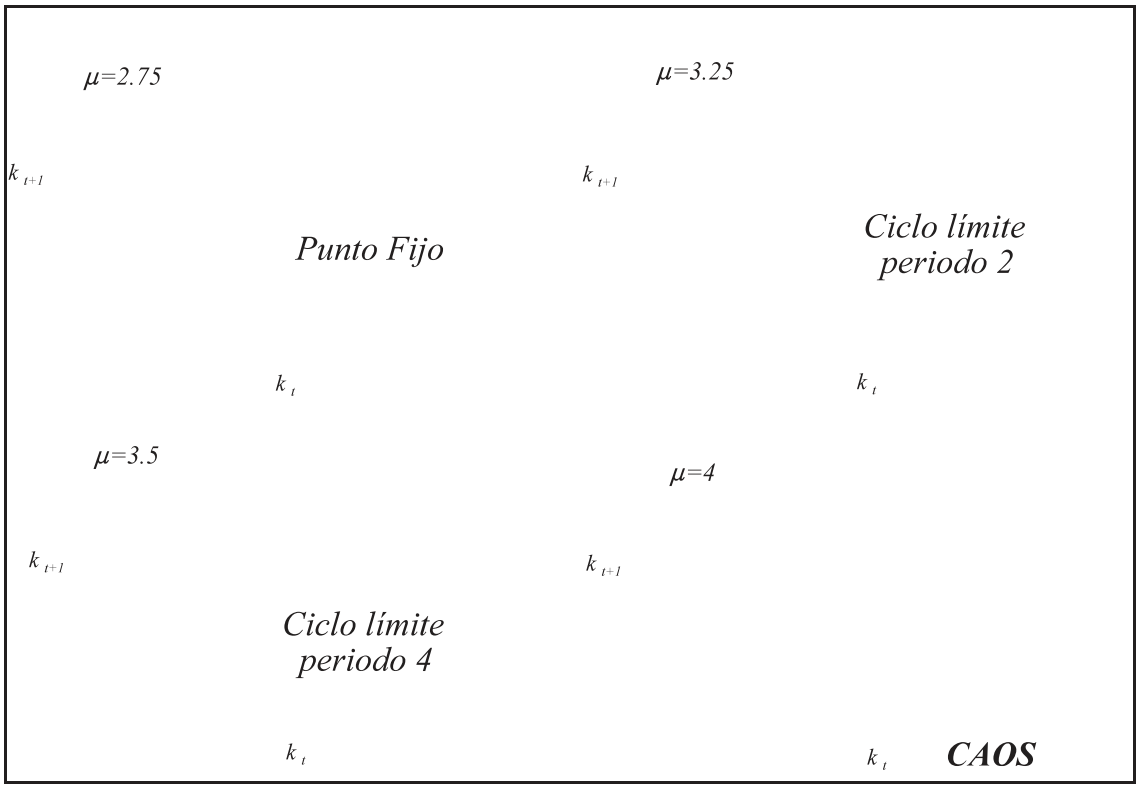


Figura 7.10. Solución de la ecuación logística: Evolución en el espacio de fases

condiciones iniciales. En la figura 7.11, hemos ilustrado esta propiedad, representando conjuntamente dos soluciones con $\mu=4$ que se diferencian en su condición inicial tan sólo en 0.00001 unidades. Como se observa en el gráfico, ambas trayectorias divergen rápidamente en su comportamiento. Esta dependencia a las condiciones iniciales puede explicar la incapacidad práctica de realizar predicciones más allá del corto plazo, que es otra característica de la evolución cíclica de la economía. A pesar de que el comportamiento en media es bien conocido, resulta difícil predecir el momento exacto en el que la economía entrará o saldrá de las etapas recesivas. La utilización de modelos de caos deterministas puede mejorar las previsiones, al menos en el corto plazo, basadas en comportamientos puramente aleatorios[11]

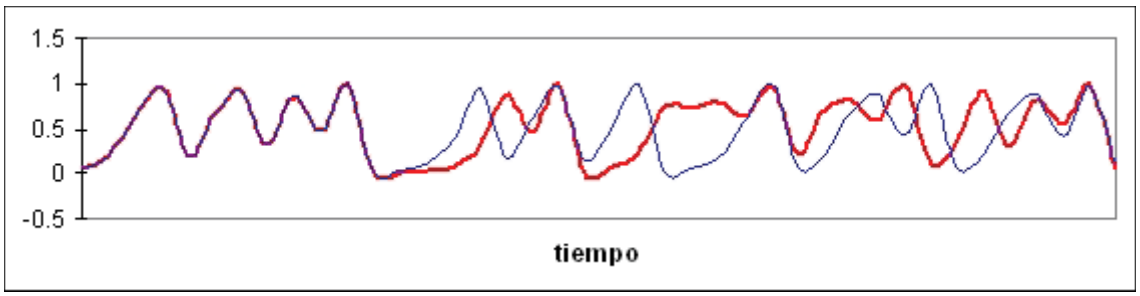


Figura 7.11. Dependencia Sensitiva a las condiciones iniciales

[11] Sobre los distintos métodos de predicción sobre series caóticos, véase Fernández Rodríguez (1995).

Crecimiento cíclico irregular endógeno neoclásico

La evolución del capital en este modelo no presenta ninguna tendencia general de crecimiento. Esto se debe a que como en el modelo de Solow, la tasa de crecimiento media tendencial a largo plazo depende de la tasa de progreso tecnológico, que hemos supuesto nula. Cuando incorporamos el crecimiento exógeno del nivel de tecnología ($\Delta T_t/T=x$) la evolución del stock de capital por trabajador presentará una tendencia media positiva . Para ello debemos suponer que dicho progreso técnico se incorpora en la función de producción de forma neutral en sentido de Harrod, es decir, potenciador del trabajo, y que la capacidad de asimilación de la contaminación (P) depende de la intensidad de uso del capital en relación al trabajo eficiente. Introduciendo estos supuestos en el modelo la ecuación de producción podría escribirse como (haciendo $\phi=1$):

$$Y_t=P^{\gamma}K_t^{\beta}(T_tL_t)^{1-\beta} \tag{7.23}$$

o en términos de trabajador eficiente (T_tL_t) e incorporando las externalidades por la contaminación:

$$\hat{y}_t=B\left(m-\hat{k}_t\right)^{\gamma}\hat{k}_t^{\beta} \quad ; \; B=b^{\gamma}; \; P_t=b(m-\hat{k}_t) \tag{7.24}$$

La ecuación fundamental quedará en este caso:

$$\hat{k}_{t+1}=\frac{sB(m-\hat{k}_t)^{\gamma}\hat{k}_t^{\beta}+(1-\delta)\hat{k}_t}{(1+n)(1+x)} \tag{7.25}$$

que nuevamente puede ser transformada en la ecuación logística haciendo $m=\delta=\beta=\gamma=1$ y $\mu=sB/((1+n)(1+x))$. Con esta incorporación del progreso tecnológico hemos conseguido dotar al modelo de Solow de una solución en la que la renta per cápita integra en su evolución un crecimiento tendencial medio dado por el progreso tecnológico con una serie de oscilaciones aperiódicas cuando el valor del parámetro alcanza la región caótica –figura 7.12–.

Es decir, hemos integrado el análisis del ciclo y el crecimiento económico, y hemos conseguido explicar de forma endógena dos características fundamentales que se observan en la evolución de las economías reales, la existencia de irregularidades en su oscilación, y la incapacidad de realizar predicciones ajustadas más allá del corto plazo.

Un último resultado que debemos comentar de este modelo hace referencia a las implicaciones de política económica. En cuanto a las políticas de crecimiento a largo plazo, las conclusiones básicas que se desprenden del modelo original de Solow se mantienen en esta versión, es decir, sólo las políticas económicas que mejoren el progreso tecnológico tendrán efectos sobre la tasa media de crecimiento tendencial a largo plazo. Por el contrario las política estabilizadora del ciclo económico debe ahora tener un carácter activo. Este carácter activo se desprende directamente de la explicación que el modelo

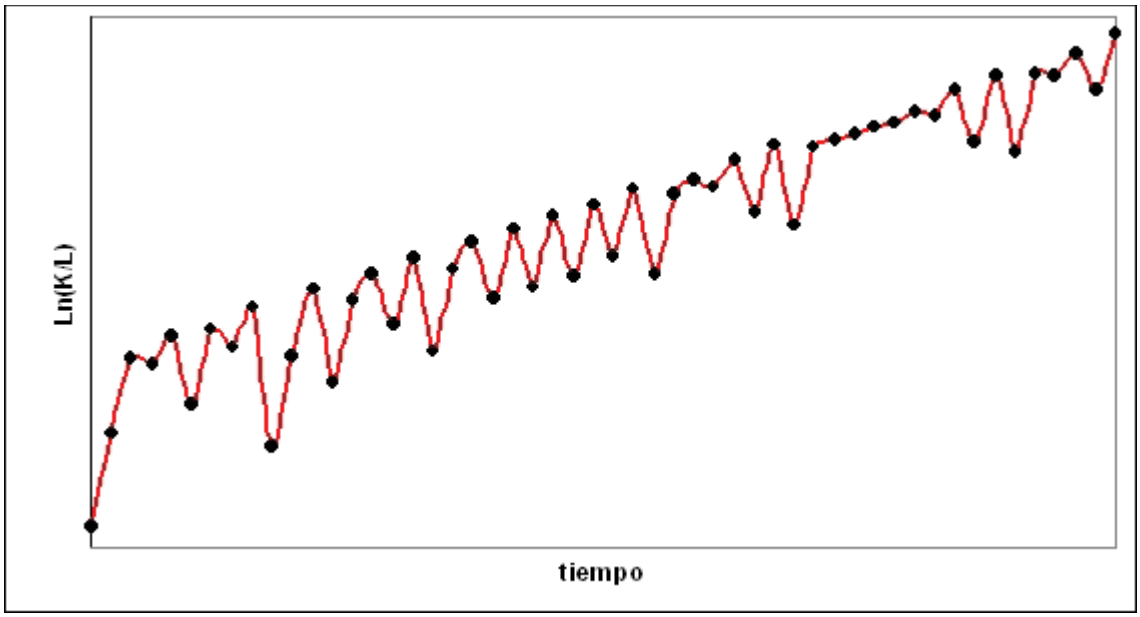


Figura 7.12. Crecimiento cíclcico irregular en el modelo de Solow

da a la aparición de los ciclos. Como hemos visto anteriormente, los distintos regímenes de comportamiento a largo plazo aparecen cuando se modifica el parámetro de control μ. En la medida en que dicho parámetro dependa de algún instrumento de política directamente controlable por el decisor político, existirá cierto margen de maniobra para el control del comportamiento cualitativo del sistema. Así, si bien en el modelo de Solow original las modificaciones en la tasa media de ahorro sólo tenía efectos sobre el nivel de renta a largo plazo, ahora tendrán un efecto permanente sobre el comportamiento cualitativo de la renta, pudiendo incluso originar la aparición de fluctuaciones caóticas. En los modelos de dinámica compleja, por tanto, los ejercicios de dinámica comparativa de los modelos estáticos tradicionalmente considerados como el *IS-LM*, han de sustituirse por los de la dinámica comparativa, y el control de las variables objetivo de la política económica deberá realizarse mediante el control del atractor. Es decir, mediante el control de su comportamiento cualitativo a largo plazo. Las intervenciones para eliminar o reducir fluctuaciones de tipo caótico tienen que ser estructurales, ya que la estabilización no se alcanza sin modificar los valores de los parámetros estructurales que gobiernan el comportamiento del sistema(Fernández Díaz, 1995 pp. 369-370).

Caos en modelos neoclásicos de crecimiento de óptimo.

Los anteriores modelos agregados suelen denominarse descriptivos por su falta de fundamentación microeconómica. En particular, estos modelos resultan inconsistentes con el comportamiento maximizador de la función de utilidad intertemporal del agente representativo. Tradicionalmente, los modelos de crecimiento que siguen el enfoque de optimización sólo pueden exhibir dinámica simple (Majumdar y Mitra,2000,p.110), convergente a puntos fijos –normalmente del tipo punto de silla–.

Con el propósito de superar estas limitaciones, han ido apareciendo en la literatura una gran cantidad de aportaciones que muestran que los comportamientos caóticos también pueden aparecer en modelos de crecimiento económico de equilibrio que siguen el enfoque de optimización. Es decir, modelos que incluyen los supuestos tradicionales sobre agentes racionales, que maximizan una función de utilidad o de beneficios, que actúan en mercados perfectamente competitivos con información completa, pero que incluyen no-linealidades, por lo que se permite la posibilidad de que sus soluciones muestren trayectorias de dinámica compleja con oscilaciones cíclicas aperiódicas recurrentes de manera endógena (véase Baumol y Benhabib,1989 y Boldrin y Woodfrod 1990 para un resumen de estas aportaciones).

En efecto, Benhabib y Day (1981), por citar una de las primeras aportaciones en este sentido, muestran como en un modelo de elección racional optimizadora pueden aparecer comportamientos caóticos cuando las preferencias dependen de las experiencias pasadas. Siguiendo a estos autores podemos representar el problema de maximización de un agente representativo con una función de utilidad del tipo Cobb-Douglas como:

$$\begin{aligned} &Max\ U(x,y;\alpha)=\alpha\log x+(1-\alpha)\log y \\ &s.a\ p_x x + p_y y = R \end{aligned} \tag{7.26}$$

con $0<\alpha<1$. Las condiciones de primer orden de este problema de maximización proporcionan las funciones de demanda de *x* y de *y:*

$$x=\alpha\frac{R}{p_x}\ ;\quad y=(1-\alpha)\frac{R}{p_y} \tag{7.27}$$

El comportamiento caótico puede surgir cuando se introducen no-linealidades en la formulación del problema de maximización (7.26). En paricular Benhabib y Day (1981) suponen que la función de utilidad en (7.26) depende no sólo del consumo corriente sino que también depende de la experiencia pasada a través del parámetro α :

$$\alpha_t=rx_{t-1}y_{t-1} \tag{7.28}$$

donde *r* es un indicador de la dependencia del pasado. La condición de primer orden del problema de maximización se convierte entonces en un sistema de ecuaciones dinámicas de primer orden que pueden exhibir comportamientos caóticos. Así. por ejemplo, sustituyendo (7.28) en (7.27), y haciendo uso de la restricción presupuestaria, la función de demanda para *x* bajo el supuesto de que los precios son constantes quedaría:

$$x_t=\frac{rR}{p_x p_y}x_{t-1}\left(R-p_x x_{t-1}\right) \tag{7.29}$$

La ecuación (7.29) es una ecuación dinámica del tipo logística –unimodal– que puede presentar comportamientos caóticos. De hecho, la ecuación (7.29) equivale a la aplicación logística (2.30) cuando $p_x=p_y=R=1$, y por tanto, puede exhibir comportamientos caóticos dependiendo del valor del parámetro r –a medida que la dependencia respecto al pasado es mayor, la probabilidad de encontrar comportamientos caóticos también aumenta–.

Caos en modelos de optimización con horizonte temporal infinito.

Dentro del enfoque de optimización, existen dos grandes tipos de modelos de crecimiento óptimo según sea el horizonte temporal considerado en el problema de decisión del agente representativo: los modelos con horizonte temporal infinito de tipo *Ramsey*, y los modelos con horizonte finito de generaciones solapadas. En esta sección nos centraremos en el primero de ellos, ilustrando como en este tipo de modelos pueden introducirse no-linealidades que conduzcan a la economía hacia reglas de decisión pareto óptimas con comportamiento complejo.

De forma reducida, el problema de Ramsey de crecimiento óptimo neoclásico formulado en tiempo discreto puede representarse de la siguiente forma. Se supone que la economía está compuesta por un conjunto de hogares idénticos que viven infinitos periodos con una función de utilidad intertemporal que puede escribirse como la suma infinita descontada de utilidades instantáneas. El problema de maximización al que se enfrenta la familia representativa puede escribirse entonces como:

$$Max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \tag{7.30}$$

sujeto a la restricción presupuestaria intertemporal que establece que en el límite, y dado un tipo de interés en cada instante del tiempo, el valor corriente de la riqueza total de los individuos no puede ser negativa (Romer,1996, p.43). Por otra parte, $u(\cdot)$ representa la función de utilidad instantánea que proporciona el consumo c_t –y que verifica las condiciones tradicionales $u'>0$, $u''<0$ –, y $\beta \in (0,1)$ es la tasa de descuento o grado de impaciencia por el consumo presente frente al consumo futuro –cuanto menor sea la tasa de descuento menor será la importancia que le otorga el agente representativo al consumo futuro–. Por el lado de la producción se supone que existe un único bien en la economía que se puede consumir directamente o ahorrar en forma de capital –economía real–. Este bien se produce utilizando trabajo y capital a través de una función de producción con rendimientos constantes a escala y decrecientes para cada uno de los factores productivos.

La solución a este modelo de crecimiento queda determinada por una trayectoria de acumulación óptima de capital que puede expresarse de forma genérica como:

$$k_{t+1}=\Phi(k_t) \tag{7.31}$$

esto es, por una ecuación dinámica unidimensional que habrá que resolver. Un resultado importante en cuanto al comportamiento a largo plazo del stock de capital es el desarrollado por Dechert (1984), quién demuestra que la aplicación dinámica (7.31) es monótona creciente e independiente de β, por lo que el único equilibrio a largo plazo alcanzable en este modelo de Ramsey de crecimiento óptimo es el punto fijo –*steady state*–. Este es el resultado típico que se alcanza en la teoría tradicional del crecimiento económico. Para que la dinámica descrita por este modelo permita la aparición de comportamientos distintos al crecimiento equilibrado habrá que introducir alguna variante en el modelo.

Una de las primeras generalizaciones del modelo de optimización con horizonte infinito que permite la aparición de comportamientos caóticos es la desarrollada por Boldrin y Montrucchio (1986).Estos autores muestran que cuando el anterior modelo de Ramsey de crecimiento óptimo se extiende para el caso de dos sectores productivos, uno donde se producen los bienes de consumo y otro donde se producen los bienes de capital, las trayectorias óptimas pueden describir comportamientos a largo plazo distintos al punto fijo. La gran relevancia de la aportación de estos autores radica en que en ella se demuestra que siempre será posible encontrar un modelo de optimización –formas explícitas para la función de utilidad– para las que el modelo de crecimiento óptimo describe una ecuación dinámica (7.31) que se comporta de manera caótica[12], esto es, el *teorema de la indeterminación* formulado por Boldrin y Montrucchio (1986) implica que virtualmente todo tipo de comportamiento dinámico es completamente compatible con los supuestos tradicionales de rendimientos decrecientes , mercados competitivos y previsión perfecta Para ello será necesario sin embargo, –y ésta es una de las principales críticas a este trabajo– unas tasas de descuento relativamente elevadas –alta impaciencia por el consumo presente–[13]. Otras aportaciones en las que también se utilizan modelos bi-sectoriales en los que el modelo de crecimiento óptimo permite la aparición de comportamientos caóticos son entre otras Benhabib y Nishimura (1985), Deneckere y Pelikan(1986), Boldrin y Deneckere (1990) y Nishimura y Yano(1995).

---

[12]Boldrin y Montrucchio (1986) utilizan para su demostración el problema de maximización en forma reducida, en el que el interés se centra en la utilidad instantánea generada por la transición desde un stock de bienes en un periodo a otro determinada por la tecnología o función de transformación (véase Majumdar, Mitra y Nishimura, 2000, pp.37-41. Montrucchio (1992) y Sorger(1990) generalizan este resultato para la formulación del problema de maximización en tiempo continuo. Herbert, Kopel y Feichtinger (1997) generalizan los resultados de Boldrin y Montruccio para el problema primal con horizonte infinito. Por otra parte, Carrera y Morán (1993) utilizan este mismo enfoque para demostrar que también es posible construir funciones de utilidad y funciones de producción para que el problema de generaciones solapadas describa cualquier tipo de comportamiento dinámico, incluido el caótico.

[13] Sorger (1992) y Mitra (1998) muestran, por ejemplo, que para que un problema de optimización con horizonte infinito pueda describir ciclos límite de periodo tres –caos en sentido de Li-Yorke– es necesario una tasa de descuento $\beta \leq (\sqrt{5}-1)/2 \approx 0.618$

Entre las aportaciones que tratan de generalizar el modelo de optimización unisectorial de Ramsey para permitir dinámicas caóticas podemos citar: Majumdar et al.(2000, pp. 110-148) que introducen en el problema de maximización del agente representativo una función de utilidad instantánea que depende no sólo del consumo sino también del stock de capital -efectos riqueza-; Sorger (1995), Woddford (1986 y 1988) que utilizan modelos con agentes heterogénos; y, Matsuyama(1991) y Azariadis (1993, sección 26.4) que introducen el papel del dinero en la economía.

A continuación mostramos un sencillo ejemplo de este último tipo de extensiones caóticas del modelo de Ramsey, esto es, un modelo neoclásico de crecimiento óptimo con dinero que puede presentar comportamientos caóticos (Barnett, Medio y Serletis, 1997, pp. 39). La diferencia fundamental con el problema de maximización original radica en el supuesto sobre la función de utilidad, que se supone dependiente no sólo del consumo, sino también de la cantidad de dinero. Ignorando por simplicidad la acumulación de capital, la producción y la deuda pública, el problema de maximización intetemporal de la familia representativa puede expresarse entonces como:

$$\begin{aligned} &Max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, m_t) \\ &s.a \;\; P_t(m_t + c_t) = P_t w + H_t + P_{t-1} m_{-1} \end{aligned} \tag{7.32}$$

donde c, m y w son el consumo, los saldos reales de dinero y las dotaciones de fondos constantes en términos per cápita respectivamente. Por otro lado, H representan las transferencias per cápita del gobierno a las familias que se supone que vienen dadas en forma de dinero, es decir, $H = \mu M_{t-1}$, siendo $\mu>0$ la tasa constante de crecimeinto de la cantidad de dinero

La solución al problema de maximización (7.32) es la siguiente ecuación dinámica de primer orden:

$$m_{t+1} u_c(w, m_{t+1}) = \frac{1+\mu}{\beta} [u_c(w, m_t) - u_m(w, m_t)] m_t \tag{7.33}$$

Cuando se utiliza, por ejemplo, una función de utilidad instantánea:

$$u(c,m) = \frac{\left(c^{1/2} m^{1/2}\right)^{1-\sigma}}{1-\sigma} \tag{7.34}$$

siendo $\sigma >0, \neq 1$ el recíproco de la elasticidad de sustitución entre el valor corriente y futuro del producto agregado $(cm)^{1/2}$. Sustituyendo las correspondientes derivadas de (7.33) en (7.34), la solución al problema de maximización intertemporal (7.32) se reduce a la siguiente ecuación dinámica:

$$x_{t+1}^{\alpha} = \frac{1-\mu}{\beta} x_t^{\alpha} (1 - x_t) \tag{7.35}$$

siendo $x_t=w/m_t$ y $\alpha=(\sigma-3)/2$. La ecuación (7.35) pertenece a la familia de aplicaciones *logística generalizada*, que para distintos valores de los parámetros puede presentar comportamientos caóticos. En particular, cuando $\alpha=1$ la ecuación (7.35) se convierte en la logística que, como ya se mostró en el apartado 2.3, permite la aparición de comportamientos caóticos para valores de μ y β suficientemente bajos –baja tasa de crecimiento de la cantidad de dinero y elevada impaciencia por el consumo presente–.

Caos en modelos de crecimiento óptimo de generaciones solapadas

Como ya se ha comentado, muchas de las aportaciones iniciales en la aplicación de la matemática del caos en el estudio del ciclo y el crecimiento económico en modelos de optimización utilizan los modelos de generaciones solapadas introducidos por Samuelson (1958) y Diamond (1965) donde los agentes tienen un horizonte de planificación finito [14]. Entre las primeras de estas aportaciones se encuentran por ejemplo Benhabib y Day (1982), Grandmont (1985), Reichlin(1986) Jullien (1988) y Benhabib y Laroque (1988), en los que se utiliza el teorema de Li-Yorke para probar la existencia de ciclos de periodo tres –*caos topológico en sentido de Li-Yorke*–. No ha sido hasta la aportación de Carrera y Morán (1993) cuando se ha demostrado un teorema que, de manera análoga a la aportación de Boldrin y Montrucchio(1986), garantiza que siempre es posible formular un modelo de crecimiento óptimo de generaciones solapadas donde la solución permita cualquier tipo de comportamiento dinámico, incluido el caótico.

A continuación y a modo ilustrativo vamos a presentar un sencillo modelo de crecimiento óptimo en el que pueden aparecer comportamientos caóticos de dinámica compleja para ciertos valores de los parámetros estructurales que definen el modelo. A diferencia de la mayoría de dichas aplicaciones, el modelo que presentamos aquí, original de Medio y Negroni (1996), es un modelo para una economía real -no existe dinero - con producción y sin incertidumbre. La dinámica de la economía estará determinada por las reglas de decisión óptima del agente representativo.

Supondremos que la economía en todo instante del tiempo está formada por dos generaciones de individuos nacidos en distintos instantes de tiempo. En

[14] El modelo de generaciones solapadas ha sido, junto al modelo con horizonte infinito de Ramsey, ampliamente utilizado para estudiar la dinámica del crecimiento bajo los supuestos neoclásicos y utilizando el enfoque optimizador del agente representativo. La diferencia fundamental entre el enfoque de generaciones solapadas y el enfoque de optimización con horizonte infinito se encuentra precisamente en que ahora se asume explícitamente que los agentes viven un número finito de periodos, o desde otro punto de vista, que los agentes no se preocupan necesariamente por lo que pase después de su muerte. Cuando los agentes sí se preocupan por el bienestar de las generaciones venideras, la solución al modelo de generaciones solapadas es idéntica a la del modelo de Ramsey

particular se supone que los individuos viven durante dos periodos. En el primero, mientras se es joven, debe decidirse cuánto consumir en dicho periodo y cuánto trabajar. En cada instante del tiempo se produce un único bien que se puede consumir directamente o acumular en forma de capital. La renta no consumida se ahorra y se convierte en capital para ser utilizado en la producción del siguiente periodo. El stock de capital es generado por tanto por el ahorro de los individuos durante su periodo de trabajo, ahorro que se destinará a financiar su consumo durante la etapa de jubilación. El modelo está formulado en tiempo discreto, y supondremos por simplicidad que la tasa de crecimiento de la población es nula y que la tasa de depreciación es unitaria. El problema al que se enfrenta el individuo representativo es el de maximizar su función de utilidad intertemporal, que supondremos que es aditiva separable en tres componentes: la utilidad por el consumo en el primer periodo de vida del individuo $u_1(c_t)$; la utilidad por el consumo en su segundo periodo de vida $u_2(c_{t+1})$; y la desutilidad que le supone al individuo el tener que trabajar mientras es jóven $v(l_t)$. Supondremos que las funciones de utilidad/desutilidad satisfacen $u_i'(c)>0$, $u_i''(c)<0$ (i=1,2), $v'(l)>0$ y $v'(l)>0$. El problema del agente representativo se puede representar entonces como:

$$\begin{aligned} &\underset{c_t,c_{t+1},l_t}{Max} \; u_1(c_t)+u_2(c_{t+1})-v(l_t) \\ &s.a \\ &\qquad s_t=k_t=w_t l_t-c_t \\ &\qquad c_{t+1}=R_{t+1}k_t \\ &\qquad c_t,c_{t+1},k_t,l_t>0 \end{aligned} \tag{7.36}$$

donde s_t es el ahorro del agente representativo en el primer periodo que se destina íntegramente a acumular capital $s_t = k_t - k_{t-1} + \delta\, k_{t-1}$ –supondremos por simplicidad que la tasa de depreciación es unitaria δ =1–; w_t es el salario real; y R_{t+1} es el rendimiento real que obtendrá el agente representativo en el segundo periodo de su vida por el ahorro efectuado en su etapa de trabajador.

Cada agente debe resolver cuando es joven el problema de maximización (7.36), es decir, debe decidir cuánto consumir y cuánto trabajar, de forma que se maximice su utilidad total sujeto a su restricción presupuestaria intertemporal y tomando como dados el salario y el tipo de interés real. Las condiciones de primer orden de la solución a este problema de decisión proporcionan las reglas de decisión óptima del agente representativo:

$$\frac{u_1'(c_t)}{u_2'(c_{t+1})}=R_{t+1} \tag{7.37}$$

$$\frac{v'(l_t)}{u_2'(c_{t+1})}=R_{t+1}w_t \tag{7.38}$$

$$c_{t+1}=R_{t+1}(w_t l_t-c_t) \tag{7.39}$$

La condición (7.37) implica que el consumo óptimo del individuo debe ser tal que la valoración del agente de una unidad de consumo presente en términos de consumo futuro $-u_1'(c_t)/u_2'(c_{t+1})$– coincida con la valoración del mercado $-R_{t+1}$–. La condición (7.38) implica que la oferta óptima de trabajo debe verificar que su valor en términos de consumo futuro $-v'(l_t)/u_2'(c_{t+1})$– se iguale con el valor de mercado $R_{t+1}\cdot w_t$. La condición (7.39) recoge simplemente el hecho de que la solución óptima debe cumplir con la restricción presupuestaria intertemporal. Teniendo en cuenta las restricciones (7.37-39), la regla de decisión óptima puede reducirse a la siguiente ecuación:

$$u_2'(c_{t+1})c_{t+1}+u_1'(c_t)c_t-v'(l_t)l_t=0 \tag{7.40}$$

Si definimos $U_1(c_t)\equiv u_1'(c_t)\cdot c_t$; $U_2(c_{t+1})\equiv u_2'(c_{t+1})\cdot c_{t+1}$; y, $V(l_t)\equiv v'(l_t)\cdot l_t$, entonces la condición de óptimo (7.40) se podrá escribir como:

$$U_1(c_t)+U_2(c_{t+1})-V(l_t)=0 \tag{7.41}$$

que proporciona la siguiente ecuación dinámica siempre que $U_2(c_{t+1})$ sea invertible:

$$c_{t+1}=U_2^{-1}[V(l_t)-U_1(c_t)]=h(l_t,c_t) \tag{7.42}$$

Para cerrar el modelo necesitamos determinar la dinámica de la oferta de trabajo l_t , para lo cual acudimos al problema del productor representativo. Por el lado de la producción se supone que las empresas actúan bajo situaciones de competencia perfecta y rendimientos constantes a escala, por lo que ninguna de ellas obtendrá beneficio extraordinario estando determinada la demanda de trabajo y capital de cada una de ellas por la igualdad entre la productividad marginal y su remuneración real. Para mostrar la dinámica de la economía supondremos que la función de utilidad y la función de producción toma las siguientes formas explícitas[15]:

$$\begin{aligned} u_1(c_t)&=\frac{c_t^{\theta}}{\theta}\\ u_2(c_{t+1})&=\frac{c_{t+1}^{\alpha}}{\alpha}\\ v(l_t)&=\frac{l_t^{\gamma}}{\gamma}\\ y_t=f(l_t,k_{t-1})&=\min\{al_t,bk_{t-1}\} \end{aligned} \tag{7.43}$$

[15] Medio y Negroni (1996) muestran que los comportamientos caóticos también pueden surgir cuando se toman funciones de utilidad con aversión absoluta al riesgo constante y cuando la función de producción presenta una elasticidad de sustitución entre factores productivos positiva

esto es, supondremos que las funciones de utilidad presentarán un coeficiente de aversión relativa al riesgo constante[16] determinado por (1-θ), (1-α) y (1-γ) respectivamente, y que la función de producción es de tipo Leontieff o de proporciones fijas.

La constancia del grado de aversión relativa al riesgo garantiza la invertibilidad de $U_2(c_{t+1})$. por lo que sustituyendo ahora (7.43) en (7.42) se obtendrá que la dinámica del consumo quedará determinada por:

$$c_{t+1}=\left[l_t^{\gamma}-c_t^{\theta}\right]^{\frac{1}{\alpha}} \tag{7.44}$$

Por otra parte, bajo el supuesto de competencia perfecta y tomando el precio del output y_t como unitario, se tendrá que y_t-wl_t-R_tk_{t-1}=0, es decir, R_t= y_t/k_{t-1}-wl_t/k_{t-1}, y suponiendo que la economía se sitúa en todo momento en situación de pleno empleo de factores productivos, entonces se tendrá que la remuneración del capital es $R_t= b(1-w_t/a)$; $y_t=al_t$; $y_t=bk_{t-1}$.

La dinámica del trabajo puede determinarse a partir de la condición de equilibrio:

$$y_t=c_t+k_t \tag{7.45}$$

ya que teniendo en cuenta la condición de pleno empleo de capital:

$$y_t=bk_{t-1} \tag{7.46}$$

la condición (7.45) puede escribirse como:

$$y_{t+1}=b(y_t-c_t) \tag{7.47}$$

y por la condición de pleno empleo de trabajo:

$$y_t=al_t \tag{7.48}$$

por lo que la dinámica del factor trabajo puede escribirse haciendo uso de (7.45-48) como:

$$l_{t+1}=\frac{b}{a}(al_t-c_t) \tag{7.49}$$

que junto a la ecuación (7.44) representan el sistema que rige la dinámica de la economía.

---

[16] La tasa de aversión relativa al riesgo es una medida de la curvatura de la función de utilidad $u(c)$, y se define como $c\cdot u''(c)/u'(c)$

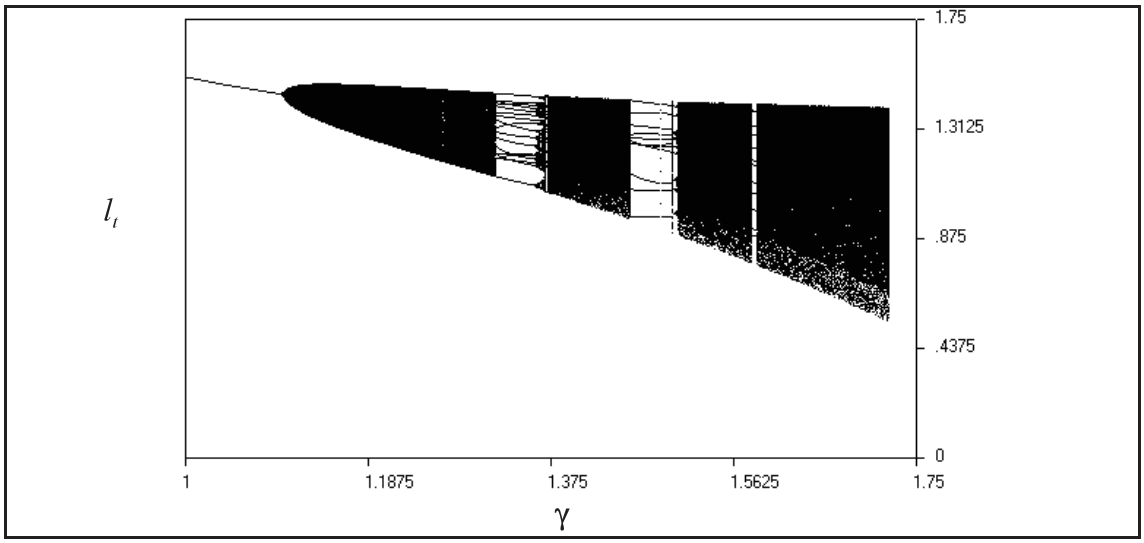


Figura 7.13. Gráfico de bifurcaciones modelo Medio y Negroni(1996). Variable de estado l_t; b=1.2; $a=1$; $\theta=\alpha=0.2;\gamma\in(1,1.75)$.

Este sistema tiene una forma parecida a la de las aplicaciones discretas bidimensionales introducidas en el apartado 3.3, y al igual que ellas, permite la aparición de comportamientos de dinámica simple, pero también de dinámica caótica compleja. Para mostrar la posibilidad de soluciones caóticas mostramos en las figuras 7.13 a 7.18 los gráficos de bifurcación –ruta cuasiperiódica al caos– y de espacio de fases para un conjunto de valores específicos de los parámetros del modelo.

Como se observa en estos gráficos, la posibilidad de que aparezcan comportamientos caóticos se verifica para un amplio rango de valores del espacio paramétrico pudiendose afirmar que la aparición de comportamientos cuasi-periódicos y caóticos es norma y no excepción al menos en el caso de este sencillo modelo de optimización con producción.

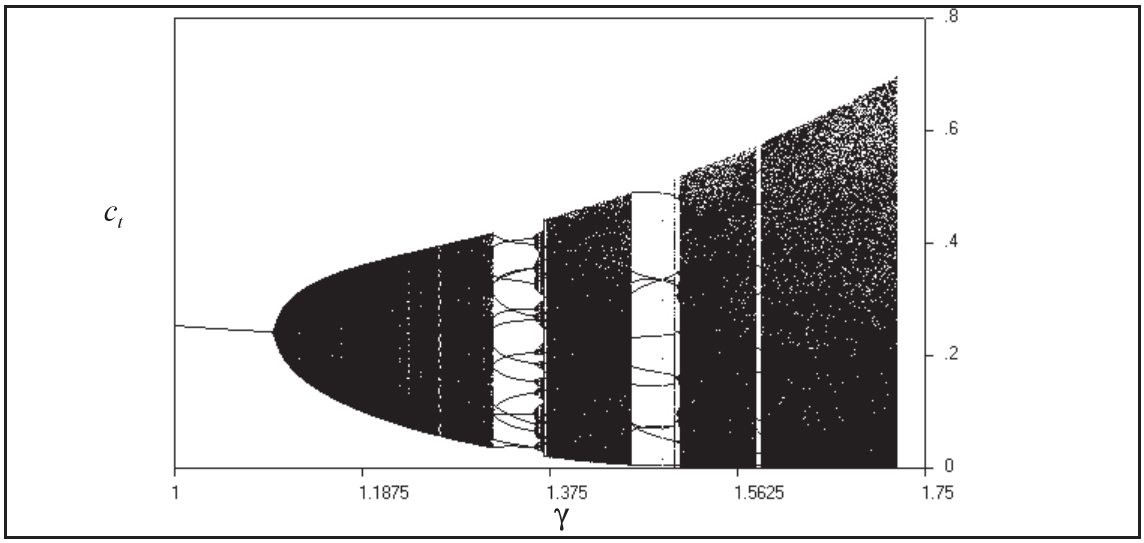


Figura 7.14. Gráfico de bifurcaciones modelo Medio y Negroni(1996). Variable de estado c_t ; b=1.2; $a=1$; $\theta=\alpha=0.2;\gamma\in(1,1.75)$.

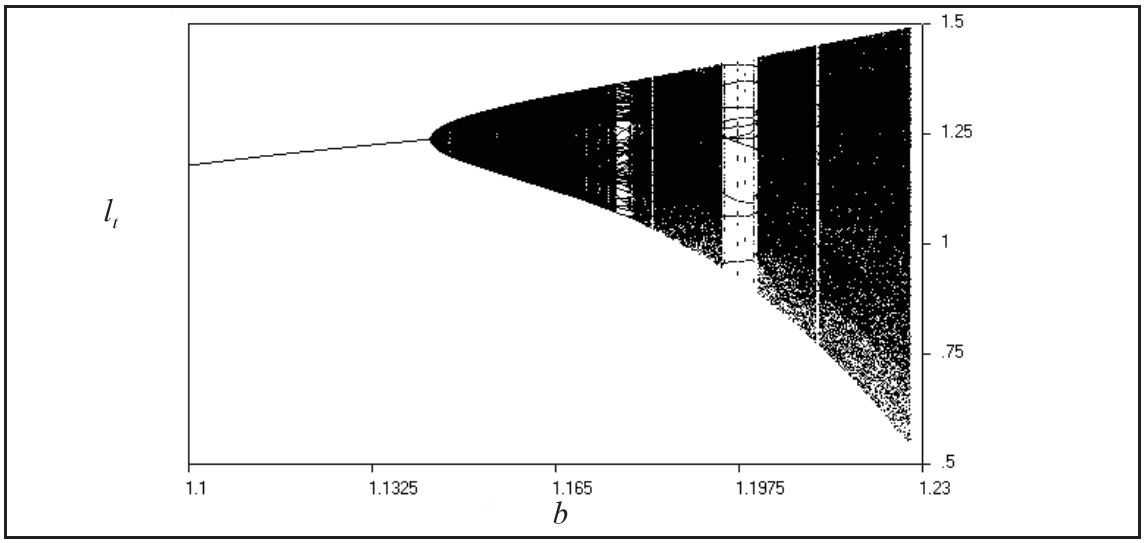


Figura 7.15. Gráfico de bifurcaciones modelo Medio y Negroni(1996). Variable de estado l_t ; $b \in (1.1,1.23)$; $a=1$; $\theta=\alpha=0.2;\gamma=1.5$.

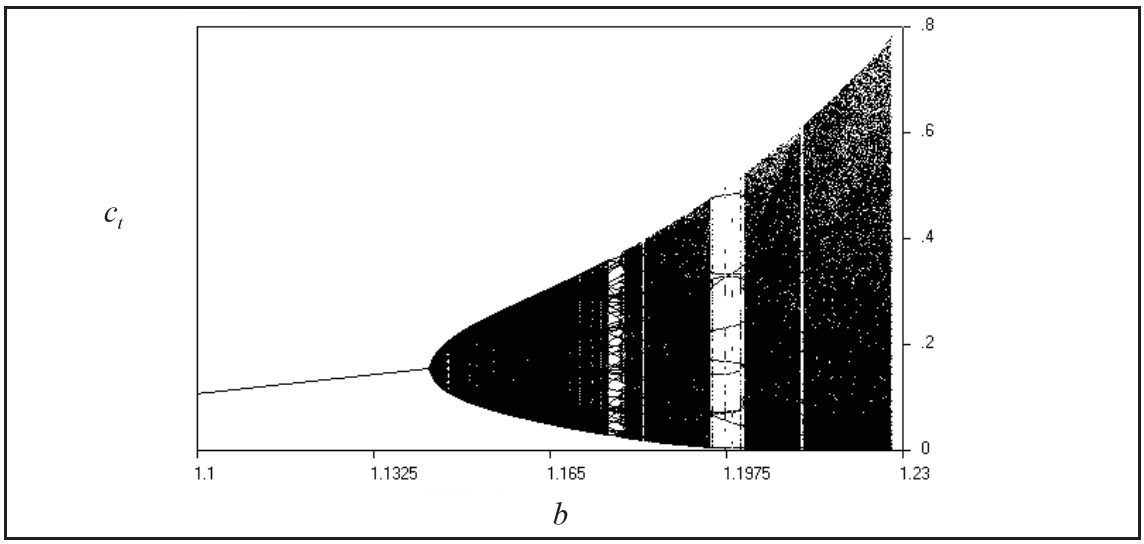


Figura 7.16. Gráfico de bifurcaciones modelo Medio y Negroni(1996). Variable de estado c_t ; $b \in (1.1,1.23)$; $a=1$; $\theta=\alpha=0.2;\gamma=1.5$.

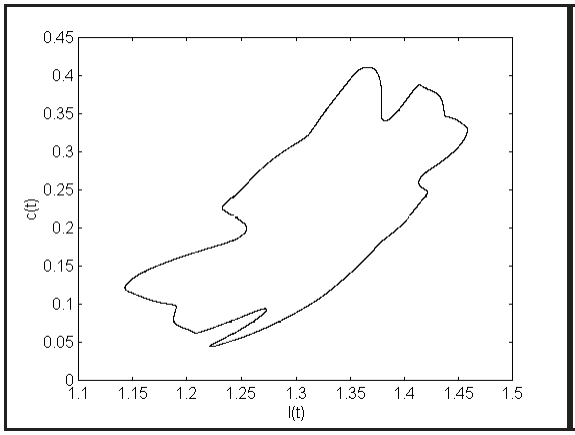


Figura 7.17. Atractor cuasiperiódico Modelo Medio y Negroni(1996). $b=1.2$; $a=1$; $\theta=\alpha=0.2;\gamma=1.3$.

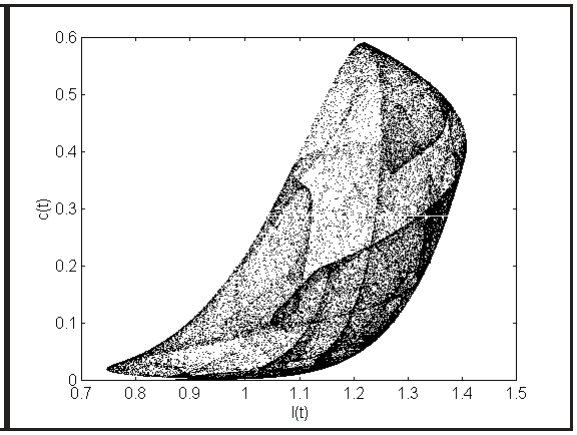


Figura 7.18. Atractor Extraño Modelo Medio y Negroni(1996). $b=1.2$; $a=1$; $\theta=\alpha=0.2;\gamma=1.6$.

7.3 Caos y crecimiento cíclico endógeno evolutivo de tipo Schumpeteriano.

A continuación presentaremos el modelo de Matsuyama (1999) de crecimiento endógeno que permite la aparición de crecimiento cíclico irregular de dinámica compleja. Este modelo puede englobarse dentro del grupo de modelos de crecimiento endógeno de carácter neo-schumpeteriano. Como se recordará del capítulo 6, en este tipo de modelos el progreso tecnológico, generador del crecimiento a largo plazo, se determina de manera endógena por la existencia de empresas innovadoras dedicadas a actividades de I+D que generan el progreso tecnológico entendido como la aparición de nuevos bienes intermedios de capital que posteriormente podrán ser incorporados en el proceso productivo general de la economía.

Este modelo de Matsuyama modeliza de manera simplificada la visión de Schumpeter (1912,1927) sobre el proceso de crecimiento cíclico de las economías modernas. Según Schumpeter, dicho proceso se caracteriza por la alternancia entre fases de crecimiento estacionario y fases de crecimiento evolutivo, originándose la ruptura del equilibrio estacionario por la introducción de innovaciones en el proceso productivo por parte de determinadas empresas –*empresario innovador*–, dándose entonces paso a la fase de crecimiento evolutivo. La fase de crecimiento estacionario o crecimiento nulo está caracterizada por la repetición continua de los mismos procesos productivos, en la que la economía actúa en régimen de competencia perfecta de carácter neoclásico, con rendimientos constantes a escala y plena utilización de los recursos. La fase de crecimiento positivo o crecimiento evolutivo se inicia por la introducción de innovaciones en el proceso productivo[17] –nuevos bienes intermedios de capital– por parte del empresario innovador con la expectativa de obtener beneficios extraordinarios. Dichos beneficios se originan como consecuencia de la posición monopolística que adquiere el empresario innovador sobre el nuevo bien intermedio. A medida que el resto del sistema productivo va imitando esa innovación con el fin de aprovecharse de esas oportunidades de beneficio la economía experimenta un crecimiento positivo que termina con la llegada nuevamente a un estado estacionario cuando el nuevo bien intermedio vuelve a producirse en condiciones perfectamente competitivas.

La esencia del proceso de crecimiento cíclico se produce, por tanto, por la continua perturbación del régimen de producción neoclásico que se produce de

[17] Schumpeter identificó cinco tipos de innovaciones en el proceso productivo: introducción de nuevos bienes; de nuevos métodos de producción; la apertura de un nuevo mercado; la obtención de una nueva fuente de obtención de materias productivas; y, el cambio en la organización de la producción.

manera discontinua y endógena en forma de innovaciones –que surgen de la expectativa de conseguir beneficios monopolísticos a favor de la primera empresa que lo introduce–.

Como decimos, Matsuyama (1999) trata de recoger esta dinámica económica evolutiva schumpeteriana a través de un modelo de crecimiento cíclico formulado en tiempo discreto. El modelo parte de la producción de un único bien, Y_t, que se puede consumir directamente, C_t, o invertir en bienes de capital que serán utilizados en la producción del siguiente periodo, I_t. El modelo supone que la producción de este bien de consumo final se ofrece en situaciones de competencia perfecta, por lo que en cada instante del tiempo se cumplirán las condiciones de equilibrio económico o vaciado de mercado:

$$Y_t=C_t+I_t=C_t+K_t-K_{t-1}+\delta K_{t-1} \tag{7.50}$$

Supondremos por simplicidad que la tasa de depreciación $\delta=1$, por lo que la inversión bruta estará determinada por el stock de capital K_t. La producción de Y_t se realiza bajo rendimientos constantes a escala combinando factor trabajo y factor capital. Se supone que el factor trabajo L permanece constante a lo largo del tiempo, y que el stock de capital K_t no puede utilizarse directamente en el proceso productivo, esto es, que el stock de capital acumulado en un instante t debe transformarse en toda una serie de bienes intermedios que serán utilizados en la producción del siguiente periodo como factor productivo. Se supone que estos bienes intermedios se agregan utilizando una función CES simétrica formando un stock de capital compuesto agregado que junto a la oferta inelástica de trabajo L determinan la producción Y_t en cada instante del tiempo $Y_t=f(L_t, K_{t-1})$. Si se supone que la función de producción es del tipo Cobb-Douglas, el producto obtenido en cada instante del tiempo puede escribirse como:

$$Y_t=BL^{\frac{1}{\sigma}}\left\{\int_0^{N_t}[x_t(z)]^{1-\frac{1}{\sigma}}dz\right\} \tag{7.51}$$

donde $x_t(z)$ es el input de la variedad z en el periodo t; $\sigma\in(1,\infty)$ es la elasticidad de sustitución parcial entre cada par de bienes intermedios; B es un factor tecnológico fijo que recoge la productividad global de la economía; y $[0, N_t]$ es el rango de bienes intermedios o tipos distintos de variedades disponibles en t. Nótese que la función de producción presenta rendimientos constantes a escala para un N_t dado; $1/\sigma$ es la participación del trabajo en la renta ; y, que la elasticidad precio de la demanda de cada bien intermedio por parte del sector de producción de bienes finales es σ.

La estructura del mercado de bienes intermedios es la siguiente. Los bienes intermedios *viejos* en el instante t , es decir, aquellos que pertenecen a las variedades incluidas en el rango $[0, N_{t-1}]$ se venden de forma competitiva y se producen utilizando una cantidad fija a de capital K por unidad de bien intermedio. Las innovaciones, por otro lado, serán aquellas variedades en el rango $[N_{t-1}, N_t]$, que serán producidos y vendidos bajo condiciones de

competencia monopolística por las empresas que se han encargado de su desarrollo. La producción de estos bienes intermedios de nueva creación requieren de una cantidad fija F de capital para su invención más a unidades de capital por unidad de bien intermedio para su producción.

Supondremos que el precio unitario del capital K_t viene dado por r_t. De esta manera, el precio unitario de los bienes intermedios viejos que se venden de forma competitiva vendrá dado por[18]:

$$p_t(z) \equiv p_t^c = ar_t \quad \forall z \in [0, N_{t-1}] \tag{7.52}$$

y el precio unitario de los nuevos bienes intermedios ofrecidos bajo competencia monopolística vendrá determinado por [19]

$$p_t(z) \equiv p_t^m = ar_t \frac{\sigma}{\sigma - 1} \quad \forall z \in [N_{t-1}, N_t] \tag{7.53}$$

Como todos los bines intermedios se incorporan simétricamente en la función de producción de bienes finales (7.51), se tendrá que la demanda y la producción de cada una de ellas vendrá dada por:

$$\begin{aligned} x_t(z) &\equiv x_t^c \quad \forall z \in [0, N_{t-1}] \\ x_t(z) &\equiv x_t^m \quad \forall z \in [N_{t-1}, N_t] \end{aligned} \tag{7.54}$$

que verifican que

$$\frac{x_t^c}{x_t^m} = \left(\frac{p_t^c}{p_t^m} \right)^{-\sigma} = \left(1 - \frac{1}{\sigma} \right)^{-\sigma} \tag{7.55}$$

La función de producción podrá escribirse por tanto como:

$$\begin{aligned} Y_t = BL^{\frac{1}{\sigma}} \left[\int_0^{N_t} [x_t(z)]^{1-\frac{1}{\sigma}} dz \right] = \\ BL^{\frac{1}{\sigma}} \left[\int_0^{N_{t-1}} [x_t^c]^{1-\frac{1}{\sigma}} dz + \int_{N_{t-1}}^{N_t} [x_t^m]^{1-\frac{1}{\sigma}} dz \right] = \\ BL^{\frac{1}{\sigma}} \left[N_{t-1} [x_t^c]^{1-\frac{1}{\sigma}} + (N_t - N_{t-1}) [x_t^m]^{1-\frac{1}{\sigma}} \right] \end{aligned} \tag{7.56}$$

Para determinar las cantidades x_t^c y x_t^m debe tenerse en cuenta que la innovación o creación de nuevos bienes intermedios está incentivada por la posibilidad de obtener los beneficios de monopolio –durante un periodo–. Dicho beneficio vendrá dado por:

---

[18] el precio se determina por la condición de primer orden $p=CMG=ar$

[19] el precio se determina por la condición de primer orden $IMG=CMG=\rightarrow p(1-1/\sigma)=ar$

$$\Pi_t = p_t^m x_t^m - r_t(a x_t^m + F) = \frac{a r_t x_t^m}{\sigma - 1} - r_t F \tag{7.57}$$

La libre entrada en el mercado de bienes intermedios asegura que

$$a x_t^m \leq (\sigma - 1)F \;;\; N_t \geq N_{t-1} \;;\; [a x_t^m - (\sigma - 1)F](N_t - N_{t-1}) = 0 \tag{7.58}$$

es decir, que no existirá ninguna empresa que obtenga un beneficio extraordinario, garantizándose que el conjunto de empresas que producen bienes intermedios innovados no obtiene beneficios en conjunto. Así, cuando

$$x_t^m < (\sigma - 1)\frac{F}{a} \tag{7.59}$$

no existen incentivos a innovar $N_t = N_{t-1}$. Por otra parte, cuando sí existe innovación, $N_t > N_{t-1}$, entonces la libre entrada garantiza que ninguna empresa obtiene beneficios y por tanto:

$$x_t^m = (\sigma - 1)\frac{F}{a} \tag{7.60}$$

Para determinar la cantidad de bienes innovados ($N_t > N_{t-1}$) debemos tener en cuenta la restricción de capital:

$$K_{t-1} = N_{t-1} a x_t^c + (N_t - N_{t-1})(a x_t^m + F) \tag{7.61}$$

utilizando esta restricción, (7.55) y (7.58) se obtiene que:

$$a x_t^c = a\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)^{-\sigma} \cdot x_t^m = \min\left\{\frac{K_{t-1}}{N_{t-1}}, \theta\sigma F\right\} \tag{7.62}$$

y

$$N_t = N_{t-1} + \max\left\{0, \frac{K_{t-1}}{\sigma F} - \theta N_{t-1},\right\} \tag{7.63}$$

con

$$\theta \equiv \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right)^{1-\sigma} \tag{7.64}$$

que tomará valores de 1 a $e \approx 2.71828$ cuando σ varía de 1 a ∞. Nótese que los valores de x_t^c dependerán en cada instante del tiempo de si existe o no innovación de nuevos bienes intermedios de capital. La función de producción podrá escribirse a partir de (7.62-64) como

$$Y_t = \begin{cases} A\left(\theta\sigma F N_{t-1}\right)^{\frac{1}{\sigma}} (K_{t-1})^{1-\frac{1}{\sigma}} & si \;\; K_{t-1} \leq \theta\sigma F N_{t-1} \\ A K_{t-1} & si \;\; K_{t-1} > \theta\sigma F N_{t-1} \end{cases} \tag{7.65}$$

con

$$A \equiv \frac{B}{a}\left(\frac{aL}{\theta\sigma F}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \tag{7.66}$$

las ecuaciones (7.62-66) resumen la dinámica de la estructura productiva de la economía. Si $K_{t-1}/N_{t-1} \leq \theta\sigma F$, el stock de capital de la economía es pequeño en relación al numero de bienes intermedios existentes y no existirán incentivos a la innovación $N_t = N_{t-1}$. En este caso todos los bines intermedios se ofrecerán competitivamente y la función de producción agregada de bienes finales tendrá las propiedades típicas del modelo neoclásico de crecimiento –incluyendo rendimientos decrecientes para el factor capital–, y por ello diremos que la economía se encuentra en el régimen de *Solow*. Si por otra parte $K_{t-1}/N_{t-1} > \theta\sigma F$, el stock de capital es suficientemente elevado como para incentivar la introducción de nuevos productos, situándose la economía en régimen de crecimiento endógeno con rendimientos constantes de capital del tipo modelo *AK* –véase apartado 6.2–

Para cerrar el modelo debemos introducir la función de producción (7.65) en la condición de equilibrio (7.50). Supondremos por simplicidad que los agentes ahorran una proporción contante *s* de su renta, por lo que dicha condición de equilibrio quedará:

$$K_t = sY_t \tag{7.67}$$

Si denominamos

$$k_t \equiv \frac{K_t}{\theta\sigma F N_t} \tag{7.68}$$

entonces el punto crítico que separa el régimen de Solow del régimen de crecimiento endógeno será $k_c = 1$, y la dinámica de la economía podré expresarse por la siguiente aplicación $\Phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$

$$k_t = \Phi(k_{t-1}) = \begin{cases} G(k_{t-1})^{1-\frac{1}{\sigma}} & si \;\; k_{t-1} \leq 1 \\ \dfrac{Gk_{t-1}}{1+\theta(k_{t-1}-1)} & si \;\; k_{t-1} > 1 \end{cases} \tag{7.69}$$

con $G = sA$.

La dinámica de la economía queda recogida por la aplicación no-lineal (7.69) y su comportamiento a largo plazo dependerá de cual sea el valor de *G*.

i) Cuando $G \leq 1$la economía quedará atrapada en el régimen de Solow convergiendo al punto fijo

$$k_t = k^* \equiv G^{\sigma} \leq k_c = 1 \tag{7.70}$$

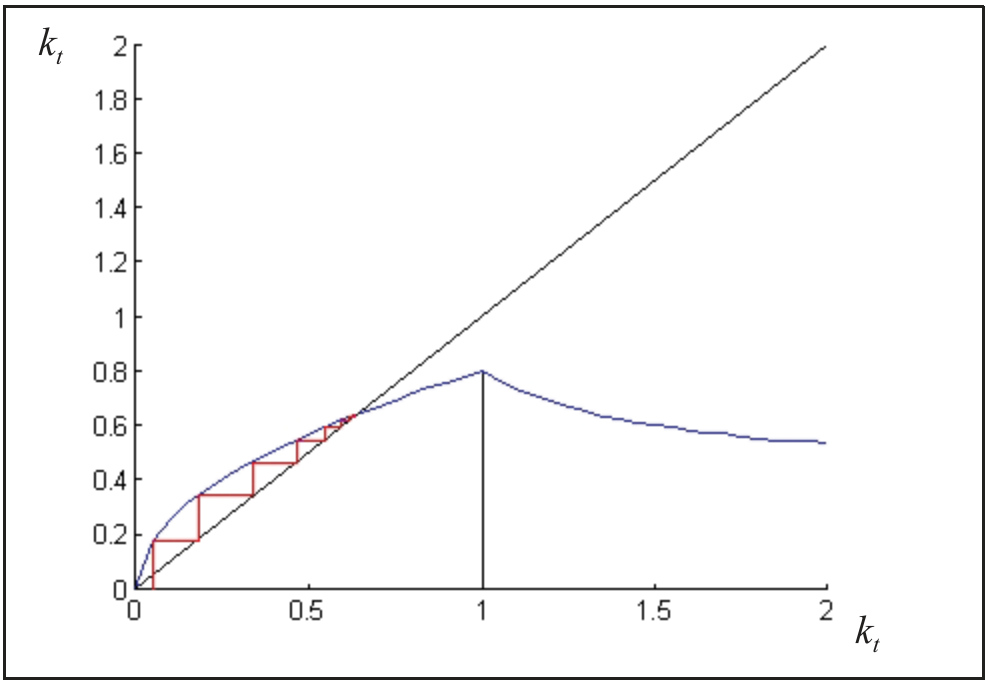


Figura 7.19. Curva de transición. Modelo de Matsuyama (1999) régimen de *Solow* σ=2, *G*=0.8.

Este equilibrio dinámico se corresponde con una situación en la que como consecuencia de que el ahorro/productividad global –que dependerá a su vez de *A* de *L* e inversamente del coste fijo de innovación *F*– es relativamente escaso, $G \leq 1$, no existirá entonces incentivo a la innovación. Todos los bienes intermedios se ofrecen competitivamente y la economía presenta rendimientos decrecientes en el capital agregado por lo que se alcanza el estado estacionario k* globalmente estable en el que no se experimenta crecimiento económico. En la figura 7.19 (σ=2, *G*=0.8)representamos la curva de fase de la dinámica de *k* asociada a este régimen de Solow.

ii) Cuando $G>1$ entonces la economía queda atrapada en el largo plazo en el régimen de crecimiento endógeno en el que como consecuencia de que el ahorro/productividad global *G* es relativamente elevado, ahora sí existe incentivo a la innovación y por tanto al crecimiento económico. Dentro de este régimen de crecimiento endógeno debemos diferenciar a su vez dos tipos de comportamientos a largo plazo según sea el punto fijo del sistema estable o no. En efecto, el punto fijo asociado al régimen de crecimiento endógeno vendrá determinado por:

$$k_t = k^{**} \equiv 1 + \frac{G-1}{\theta} > k_c = 1 \qquad (7.71)$$

Cuando la economía se encuentre en este punto fijo (7.71) y al estar éste situado en el régimen de crecimiento endógeno, se estarán introduciendo nuevos bienes de capital de forma continuada en el proceso productivo, esto es, el stock de capital *K* y el número de bienes intermedios *N* estarán creciendo a la misma tasa constante.

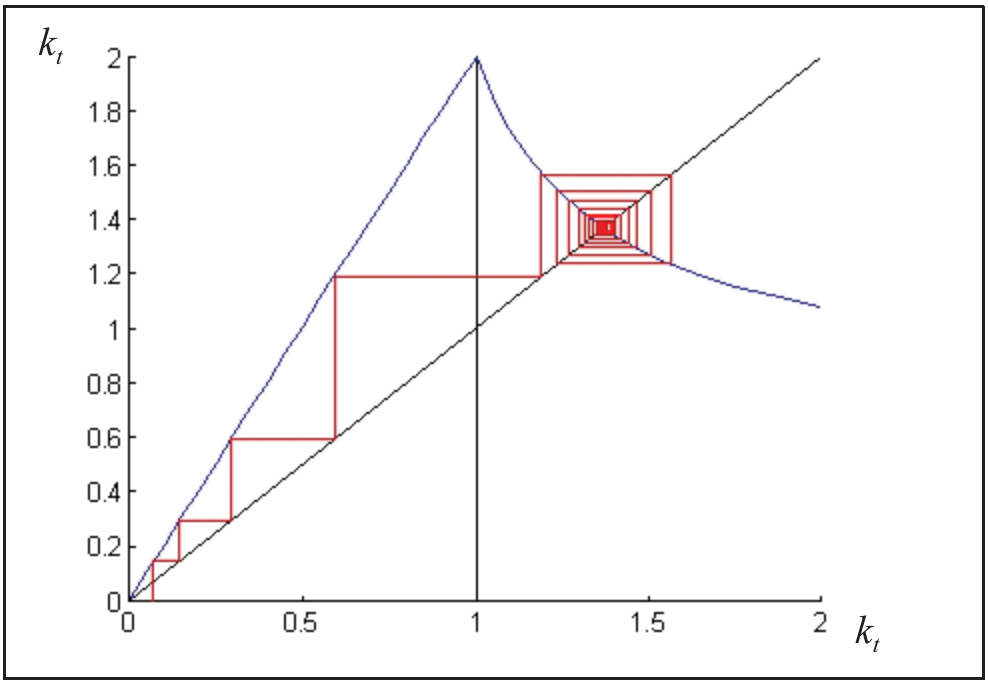


Figura 7.20. Curva de transición. Modelo de Matsuyama (1999) régimen de *crecimiento endógeno* σ=100, *G*=2

Esta tasa de crecimiento vendrá dada por *G*, ya que haciendo uso de la ecuación (7.65) tendremos que:

$$K_t^{**}=sY_t^{**}=sAK_{t-1}^{**}=GK_{t-1}^{**} \tag{7.72}$$

por lo que la tasa de crecimiento en el estado estacionario del régimen de crecimiento endógeno (*G*>1) será:

$$\left(\frac{Y_t-Y_{t-1}}{Y_{t-1}}\right)^{**}=\left(\frac{K_t-K_{t-1}}{K_{t-1}}\right)^{**}=(G-1)>0 \tag{7.73}$$

Nótese por tanto que el parámetro $G = sA$ determinará a la postre la tasa media de crecimiento en el estado estacionario.

El estado estacionario (7.71) no es sin embargo globalmente estable para cualquier valor de *G*>1. En efecto, recordemos que la estabilidad de un punto fijo venía dada por el signo de la derivada de la aplicación en el punto fijo. Es fácil comprobar, que en nuestro caso se tendrá que:

$$\Phi'(k^{**})=\frac{1-\theta}{G} \tag{7.74}$$

por lo que el estado estacionario k^{**} será globalmente estable cuando –figura 7.20 σ=100, *G*=2–:

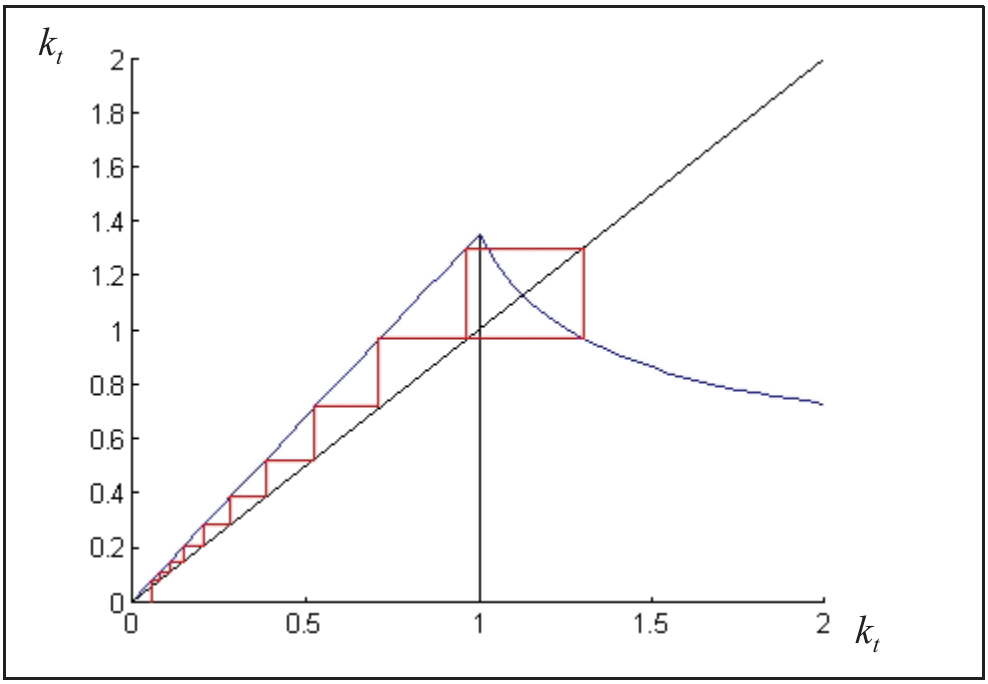


Figura 7.21. Curva de transición. Modelo de Matsuyama (1999) ciclo límite periodo dos σ=100, *G*=1.35

$$\left|\frac{1-\theta}{G}\right|<1 \Rightarrow \frac{\theta-1}{G}<1 \Rightarrow G>\theta-1 \tag{7.75}$$

Por otro lado, el estado estacionario k^{**} será localmente inestable cuando:

$$1<G<\theta-1 \tag{7.76}$$

Matsuyama (1999) demuestra que en este caso ($G<\theta-1;\theta>1\Rightarrow\sigma>2$), existe un equilibrio dinámico del tipo ciclo límite periodo 2 -figura 7.21 (σ=100, *G*=1.35)-, presentando entonces la economía un crecimiento cíclico positivo donde además la tasa de crecimiento media de la economía es superior a la correspondiente con el estado estacionario k^{**}. En este régimen de crecimiento cíclico endógeno se van alternando periodos donde no se introducen innovaciones con otros donde sí aparecen nuevos bienes de capital.

Sin embargo, la convergencia a un ciclo límite periodo dos no es el único tipo de comportamiento en este rango de valores ($G<\theta-1;\theta>1\Rightarrow\sigma>2$), pudiendo aparecer comportamientos a largo plazo de dinámica caótica figuras 7.22 y 7.23 (σ=100, *G*=1.2).

A modo de conclusión, y para realizar un análisis global del sistema mostramos en las figuras 7.24-26 el gráfico de bifurcaciones del sistema (7.69). La dinámica a largo plazo puede resumirse de la siguiente forma. Para cualquier θ, un *G* suficientemente elevado –$G>\theta-1$– conduce a la economía al estado estacionario k^{**} de crecimiento equilibrado.

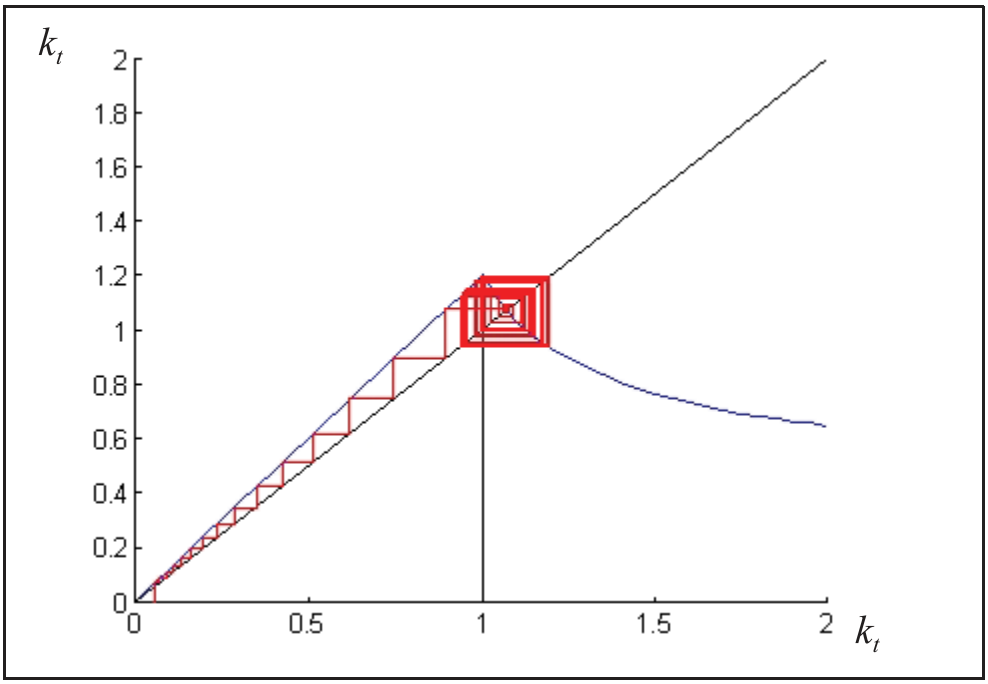


Figura 7.22. Curva de transición. Modelo de Matsuyama (1999) comportamiento caótico σ=100, *G*=1.2

Cuando *G* es suficientemente pequeño –*G*<1– la economía queda atrapada en el régimen neoclásico convergiendo al estado estacionario *k** en el que la economía no crece. Cuando θ>1 o equivalentemente σ>2, existe un rango intermedio de valores de *G* para el que la economía presenta crecimiento cíclico en el régimen de crecimiento endógeno –el estado *k*** sigue siendo de equilibrio pero ahora es inestable–. Esto es, cuando *G* cae por debajo de θ-1

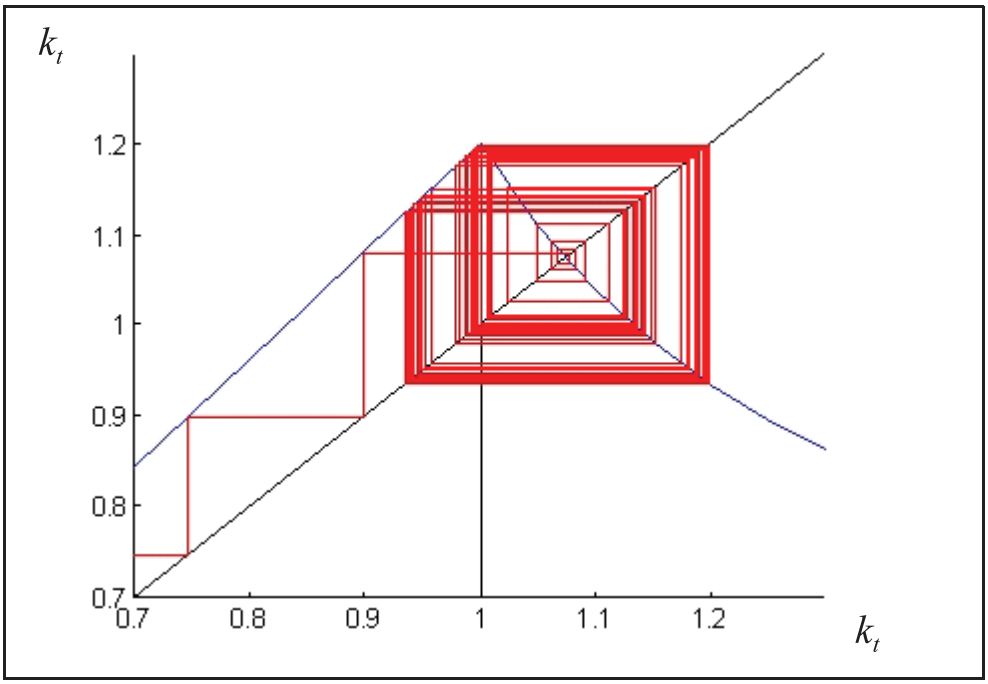


Figura 7.23. Curva de transición. Modelo de Matsuyama (1999) comportamiento caótico σ=100, *G*=1.2

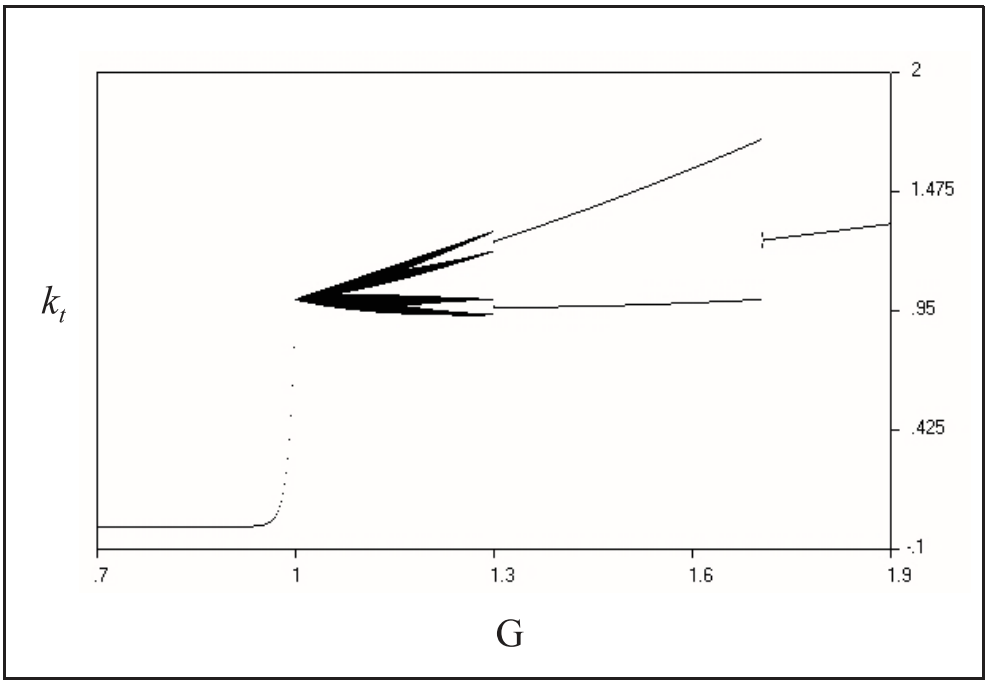


Figura 7.24. Gráfico de bifurcaciones. Modelo de Matsuyama (1999)

se observará como aparecen ciclos límite estables de periodo 2. Cuando *G* sigue disminuyendo, el ciclo límite periodo dos pierde su estabilidad, entrando la economía en un régimen de crecimiento cíclico caótico –primero con un periodo medio cuatro; luego el periodo medio pasa a dos; y finalmente desaparece dicho periodo medio de la región cotica–. Este régimen de comportamiento caótico desaparece finalmente, convergiendo la economía a *k** cuando *G* cae por debajo de 1.

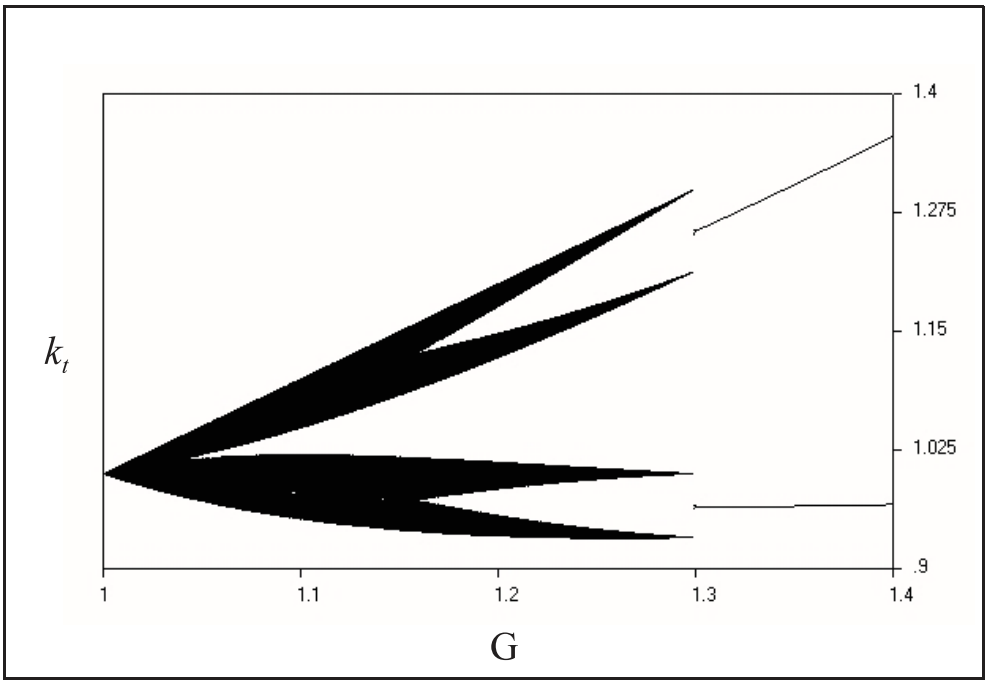


Figura 7.24. Gráfico de bifurcaciones. Modelo de Matsuyama (1999)

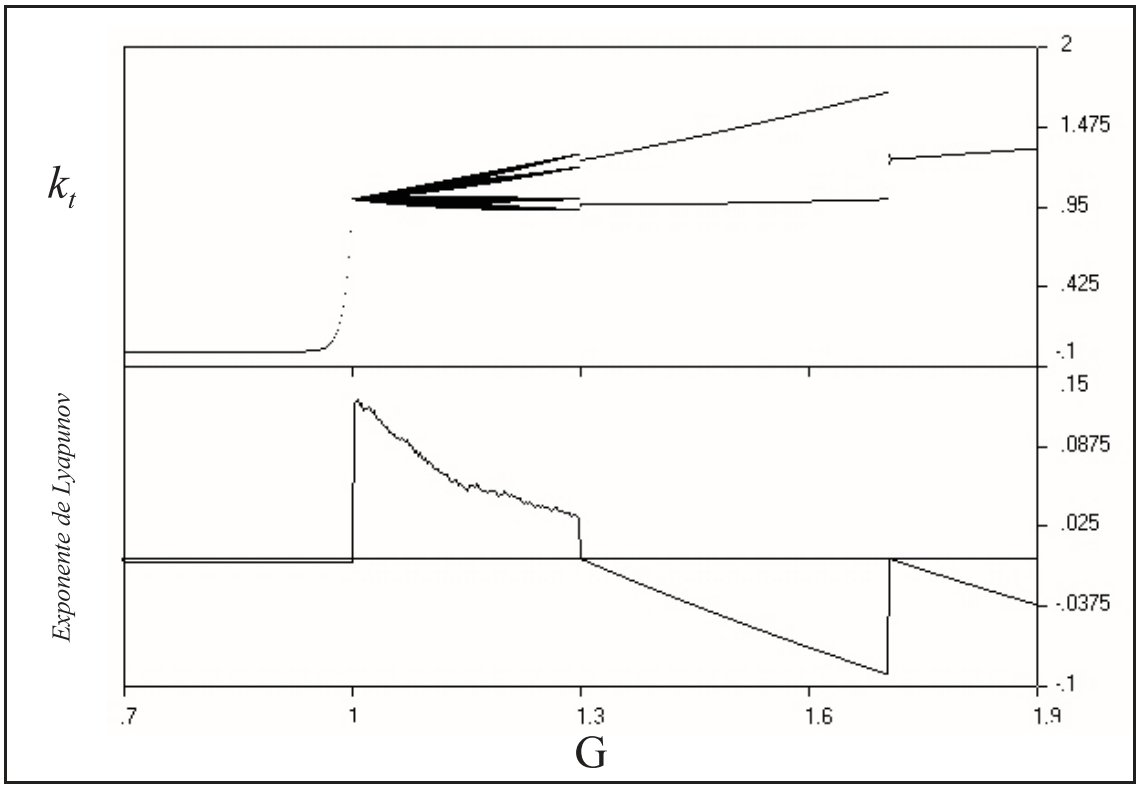


Figura 7.26. Gráfico de bifurcaciones y exponente de Lyepunov. Modelo de Matsuyama (1999)

En la figura 7.26 mostramos el exponente de Lyapunov asociado al sistema para cada valor de *G* junto al gráfico de bifurcaciones. Como puede observarse en la región caótica el exponente resulta positivo, mientras que en el resto de casos –Ciclo dos y estado estacionario el exponente de Lyapunov es negativo –anulándose en los puntos de bifurcación–.

7.4 Ciclos crecimiento y caos: implicaciones para la política económica

La Economía como Ciencia se ha planteado desde sus inicios el propósito de entender como funcionan los diversos fenómenos socio-económicos de la realidad. Con ello se pretende la sistematización de dichos fenómenos para poder realizar predicciones sobre su evolución futura, elaborar diagnósticos sobre la realidad económica, y proponer medidas con fundamento teórico para alterarla o corregirla cuando esta resulta insatisfactoria.

Hasta ahora hemos tratado de exponer como la utilización de sistemas dinámicos no lineales para la descripción y la explicación del ciclo y el crecimiento económico permite explicar de forma endógena la aparición de un crecimiento cíclico con oscilaciones irregulares, aperiódicas y difícilmente predecibles en la práctica. En este apartado trataremos con el análisis de la Política Económica, es decir, nos centramos en la vertiente normativa del

análisis económico, aun teniendo presente que el análisis económico es único y finalista, sin que pueda de hecho hacerse una separación clara entre teoría y política.

En los anteriores apartados hemos mostrado como los modelos tradicionales de crecimiento económico pueden generalizarse para que sus soluciones describan trayectorias con comportamiento caótico. La implicación desde el punto de vista teórico de la matemática del caos radica precisamente en la endogeneización de las fluctuaciones cíclicas irregulares observadas en las economías reales sin necesidad de recurrir a variables exógenas puramente aleatorias como originadoras del ciclo económico. La aparición de comportamientos caóticos en los modelos del ciclo y el crecimiento económico también supone un cambio importante desde el punto de vista normativo o de política económica.

En el capítulo anterior se repasaron las propuestas de política económica que se desprendían de los distintos enfoques doctrinales en relación al crecimiento y el ciclo económico cuando estos fenómenos se modelizan haciendo uso de las herramientas tradicionales de la dinámica económica esencialmente lineal.

En los modelos de crecimiento caótico analizados anteriormente, el crecimiento medio potencial sigue viniendo determinado por los supuestos doctrinales que en ellos se incorporen. Así, en los modelos de corte neoclásico, es el progreso tecnológico exógeno el que en última instancia va a explicar el crecimiento tendencial medio de la economía, y por lo tanto, las recomendaciones de política para aumentar el crecimiento medio a largo plazo deben ir encaminadas a mejorar dicho progreso técnico. En el caso del modelo caótico del crecimiento endógeno de Matsuyama (1999) el crecimiento tendencial medio de la economía venía propiciado por aquellas situaciones donde existen rendimientos crecientes a escala que permiten la innovación. En definitiva, las propuestas básicas de la política económica para mejorar el crecimiento tendencial de la economía que se desprenden de cada enfoque doctrinal y que fueron analizadas en el capítulo 6 siguen siendo esencialmente válidas. Esta conclusión cambia radicalmente de signo cuando pasamos al terreno de la política estabilizadora o anticíclica, sobre la que nos centraremos a partir de este momento.

En lo que se refiere a las medidas de política económica estabilizadora, la teoría tradicional que sigue el enfoque del ciclo exógeno propone el uso de políticas estabilizadoras exclusivamente en aquellas situaciones en las que la economía por sí misma es incapaz de alcanzar equilibrios pareto óptimos –información incompleta y rigideces en los mercado, externalidades y otro tipo de fallos de mercado–. En el caso de que no concurran ninguna de dichas situaciones, la teoría neoclásica del ciclo real propone que la mejor política económica es la no-política económica, ya que debido a que el origen del ciclo se encuentra en los shoks aleatorios exógenas que de manera recurrente

perturban la economía y, al quedar dichas perturbaciones fuera del control de la política económica, nada se puede hacer para tratar de mejorar dicha situación. Es más, estos ciclos exógenos son pareto óptimos, resultado del comportamiento racional óptimo de los agentes. La política económica puede de hecho suponer una fuerza exógena adicional a la puramente aleatoria que propicie la aparición de fluctuaciones económicas.

Desde esta perspectiva neoclásica, los modelos de ciclo endógeno caótico analizados previamente siguen siendo pareto óptimos, y por tanto, no necesitados, en principio, de la intervención pública activa de carácter contra cíclica –las soluciones caóticas altamente irregulares y localmente inestables son pareto óptimas en el sentido de que surgen de la condición de primer orden de maximización de la función de utilidad del agente representativo–. Esta recomendación coincide con la que se desprende del análisis tradicional lineal de las teorías neoclásicas del ciclo real exógeno. Sin embargo, existe una diferencia fundamental en el origen de estas dos recomendaciones en contra de una política económica activa. En las teorías del ciclo real la no intervención se justifica fundamentalmente en que debido a que el origen de las fluctuaciones es aleatorio y exógeno, fuera por tanto del control de la política económica, en los modelos del ciclo caótico neoclásico la no intervención se debe exclusivamente a la condición de optimalidad paretiana de dichas soluciones, aunque el carácter endógeno de dichas fluctuaciones sí permite la posibilidad de que la política económica contracíclcica o estabilizadora tome un papel activo. En este punto, los resultados coinciden con las teorías del ciclo endógeno de dinámica simple de mediados del siglo XX, en el que como el origen del ciclo se encuentra en la propia dinámica de la economía, sí es posible controlar de alguna forma dichas oscilaciones. Sin embargo, y como argumentan Bullard y Butler (1993) debido a que las soluciones a estos sistemas caóticos de optimización son pareto óptimos, la única justificación para la intervención pública en la economía debe buscarse, de nuevo, en la existencia de fallos de mercado, por lo que desde la perspectiva la política económica, la matemática del caos no cambiaría las conclusiones esenciales derivadas de las distintas posturas doctrinales.

Frente a esta postura, y dejando al margen las aportaciones como las de Woodford(1989), Sasakura (1995) Goodwin (1995) u Olmedo et al.(2000) en las que se muestran que es precisamente la intervención pública la que originan los comportamientos caóticos, y que por tanto, la estabilización de la economía requerirá la desaparición de dicha intervención pública, queremos reseñar que el supuesto sobre el comportamiento caótico de la economía sí que puede implicar cambios radicales en cuanto a la necesidad de una política económica estabilizadora activa fundamentalmente en el enfoque neoclásico con mercados perfectos y sin imperfecciones de ningún tipo. Nos referimos al caso en el que las oscilaciones cíclicas se consideren como algo a eliminar, algo negativo desde el punto de vista del bienestar social.

Aunque como ya se ha comentado las soluciones caóticas resultan pareto óptimas, existe una justificación teórica para la intervención pública activa en los modelos neoclásicos del ciclo óptimo endógeno caótico que mejore el bienestar de la economía. Nos referimos a que los modelos de crecimiento cíclico caótico óptimo mostrados anteriormente suponían ausencia de incertidumbre y predicción perfecta por parte de los agentes. Este es, sin embargo, un resultado que contrasta o choca fuertemente con la hipótesis de comportamiento caótico, en el que debido a la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, resulta imposible realizar predicciones sobre el futuro más alla del corto plazo a menos que se tenga un conocimiento infinitamente exacto de la economía, por lo que la hipótesis de predicción perfecta y comportamientos caóticos resultan incompatibles con el caos determinista. Este resultado se mantiene también cuando se parte del supuesto de expectativas racionales ya que esta hipótesis sobre formación de expectativas supone una información perfecta sobre el comportamiento de la economía. Cuando se profundiza en esta hipótesis de expectativas racionales, podemos llegar a la conclusión de que sólo puede sostenerse cuando la dinámica de la economía converge a soluciones del tipo punto fijo, ya que es entonces cuando el sistema de aprendizaje de los individuos –y no precisamente a partir de un proceso de expectativas adaptativas– es el que permite realizar expectativas racionales, esto es, sólo la dinámica simple permite el conocimiento perfecto del modelo que justifica la hipótesis de expectativas racionales en lasque el error de previsión tiene un a esperanza cero (véase Grandmont, 1985). Cuando el sistema es caótico, existirá un impedimento práctico para un aprendizaje perfecto del funcionamiento de la economía, e incluso en este caso, pequeños errores de medida conducirán a un error de predicción que tienda a infinito. Es por ello, que asumiremos explícitamente que incluso en este caso de los modelos neoclásicos con expectativas racionales una política que consiga controlar y estabilizar las trayectorias caóticas puede resultar óptima o positiva desde el punto de vista del bienestar social.

Desde este punto de vista, y sobre todo porque como ya se ha visto en los capítulos 4 y 5, las trayectorias caóticas pueden confundirse con procesos estocásticos puramente aleatorios, la propuesta de no-política económica de la teoría del ciclo real tradicional estaría totalmente injustificada, ya que si el ciclo irregular tuviese efectivamente un origen caótico, las intervenciones públicas activas estabilizadoras sí ejercerían un efecto positivo significativo sobre el bienestar social de las economías. Resulta, por tanto, una cuestión fundamental la de detectar si efectivamente la dinámica económica observada a partir de las series temporales presenta alguna evidencia clara a favor del caos determinista o si por el contrario las irregularidades observadas en la evolución de la actividad económica tienen una explicación puramente aleatoria. A este tema le dedicaremos los próximos capítulos, centrándonos de momento en cómo debe diseñarse la política económica bajo regímenes de comportamiento dinámico caótico.

A este respecto conviene hacer notar que la teoría o metodología de la política económica estabilizadora debe tener en cuenta explícitamente el carácter caótico y no lineal de la dinámica económica, rechazando por tanto los enfoques reduccionistas de Theil y Tinbergen e incluso la teoría del control óptimo tal y como se ha venido entendiendo tradicionalmente (véase Fernández Díaz et al.1999, pp.69-95). De hecho, la teoría de la política económica en el ámbito de los modelos caóticos cae de lleno en el marco de la teoría del control o anticontrol del caos, o en palabras del profesor Nieto de Alba (1998, p.159), en la teoría de la *gestión del caos*.

El término *gestión del caos* frente al de *control del caos* tiene su origen en la respuesta a la siguiente pregunta ¿Es el caos por sí mismo positivo o negativo?. En principio el caos no puede considerarse ni bueno ni malo, dependiendo en todo caso de las distintas situaciones que estemos considerando. Así, por ejemplo un encefalograma plano y periódico no podrá considerarse positivo –indicativo de muerte cerebral–, mientras que las arritmias cardiacas pueden considerarse negativas cuando de ellas se deriva la parada del corazón. En el terreno de la economía nos encontramos ante el mismo tipo de situaciones enfrentadas. Si las inestabilidades en la evolución de la actividad económica se consideran negativas para el bienestar social –como se ha discutido anteriormente–, los esfuerzos de la política económica deberían ir encaminada a controlar el atractor extraño y convertirlo en periódico. Como apunta el profesor Nieto de Alba (1998 p. 182), la inestabilidad también puede ser positiva en ciertas situaciones. Por ejemplo, es positiva en los mercados financieros, ya que para los agentes que intervienen en estos mercados las inestabilidades típicas de las fluctuaciones caóticas resultan necesarias para poder operar con la posibilidad de hacer beneficios. Como expone el profesor Ubaldo Nieto, si la evolución de los mercados financieros fuese perfectamente regular y predecible, los agentes no tendrían posibilidad de obtener beneficios. La atonía de los mercados podría incentivar a los propios agentes a introducir ciertas inestabilidades en los mercados financieros, e indirectamente fomentar la intervención del resto de la economía, que finalmente podrá conducir a mejorar la asignación de recursos y la capacidad de ahorro de una economía –son precisamente las inestabilidades que permiten obtener beneficios especulativos, por lo que cuando no existan, habrá que generarlas–. En el caso del crecimiento económico, se ha visto igualmente como el modelo de Matsuyama (1999) muestra que las soluciones caóticas resultan más beneficiosa para el crecimiento medio tendencial de la economía que las situaciones de atonía neoclásica en las que no existe incentivo para la realización de las actividades de I&D. Si el objetivo es el de mejorar ese crecimiento medio, entonces deberá fomentarse las actividades de I&D aunque para ello sea necesario situarse en equilibrios dinámicos caóticos.

Teniendo en cuenta estas cuestiones, vamos a centrarnos a continuación en la teoría de la política económica en presencia de comportamientos caóticos. Dicha teoría de la política económica se sigue fundamentando en el uso de los modelos teóricos como base para la toma de decisión. En este caso, los

modelos utilizados son los que presentan comportamientos caóticos, por lo que a la hora de diseñar las políticas económicas habrá que tener en cuenta todas las limitaciones asociadas a estos sistemas.

A este respecto, y con independencia de lo expuesto hasta el momento, debemos reseñar que la matemática del caos impone una fuerte restricción a la eficacia de la política económica derivada de la existencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, y no sólo por la incertidumbre que se genera en el conocimiento de los resultados exactos que tendrá la intervención pública en el futuro, sino también porque agrava el problema de los retardos de la política económica.

Otro cambio fundamental en el diseño de la política económica como consecuencia de la matemática del caos hace referencia a la posibilidad de utilizar la política coyuntural para alcanzar ciertos valores considerados como socialmente óptimos para las variables objetivo. Con la matemática del caos, el objetivo de la política económica no debe ir encaminada tanto a controlar el valor de las variables objetivo como a regular el comportamiento asintótico del sistema dentro del atractor, reduciendo el grado de extrañeza del atractor de la economía (Nieto de Alba, 1998, p.192). En este sentido, la política estabilizadora o coyuntural se integra dentro de la política estructural, ya que la inestabilidad del sistema proviene de los valores concretos de las parámetros estructurales del modelo dinámico y no del valor que tomen las variables de estado. El papel activo de la política económica no debe encaminarse ahora al control del valor de las variable objetivo sino al control de su atractor. Los modelos de dinámica caótica muestran que los distintos regímenes de comportamiento a largo plazo aparecen cuando se modifica algún parámetro de control. En la medida en que dicho parámetro de control dependa de algún instrumento de política directamente controlable por el decisor político, existirá cierto margen de maniobra para el control del comportamiento cualitativo del sistema. Esto es, en los modelos de dinámica compleja, los ejercicios de *estática comparativa* de los modelos tradicionalmente como el IS-LM-BP, han de sustituirse por los de la *dinámica comparativa*, y el control de las variables objetivo de la política económica deberá realizarse mediante el control del atractor, es decir, mediante el control de su comportamiento cualitativo a largo plazo. Las intervenciones para eliminar o reducir fluctuaciones de tipo caótico tienen que ser estructurales, ya que la estabilización no se alcanza sin modificar los valores de los parámetros estructurales que gobiernan el comportamiento asintótico del sistema (Fernandez Díaz 1995, pp., 369-370)

De nuevo se observa, por tanto, como la teoría del caos no sólo permite integrar el fenómeno del ciclo y el crecimiento sino también la separación tradicional y artificial entre políticas estructurales o a largo plazo y las políticas

estabilizadoras o a corto plazo[20].

La teoría del control del caos parte de la modelización de la dinámica económica a través de sistemas no-autónomos en el que a los campos vectoriales que lo definen incluyen fuerzas exógenas a la evolución del propio sistema. Estas fuerzas exógenas son las que se utilizan para *controlar* su evolución. Estas fuerzas o *variables de control* representan, como decimos, una acción exógena al propio sistema en el sentido de que la evolución de éstas afecta al comportamiento del sistema sin que, en principio, se de la dependencia inversa. Las variables de control pueden actuar superponiéndose a la acción del sistema dinámico ($\boldsymbol{g}$) *–control aditivo–*, o sobre los propios parámetros que definen el sistema (μ) *–control paramétrico–*:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\mu}(t))+\boldsymbol{g}(t) \quad ; \boldsymbol{x}\in D\subset\mathbb{R}^n \; ; \; t\in\mathbb{R} \; ; \; \boldsymbol{\mu}\in V\subset\mathbb{R}^p \; ; \; \boldsymbol{g}\in W\subset\mathbb{R}^q \tag{7.77}$$

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\boldsymbol{\mu}(k)) + \boldsymbol{g}(k) \quad ; \boldsymbol{x}\in D\subset\mathbb{R}^n \; ; \; k\in\mathbb{N} \; ; \; \boldsymbol{\mu}\in V\subset\mathbb{R}^p \; ; \; \boldsymbol{g}\in W\subset\mathbb{R}^q \tag{7.78}$$

Estas fuerzas exógenas son el componente fundamental de la teoría del control de los sistemas dinámicos. Esta teoría trata de determinar cuál es la trayectoria que deberían seguir las variables de control para poder conducir la evolución de las variables de estado hacia los equilibrios dinámicos deseados o consideradas óptimos. Esta teoría del control supone el sustento teórico en el que se apoya el diseño y ejecución de la política económica encaminada a regular la dinámica del ciclo y el crecimiento económico.

La base en la que se fundamentan los distintos métodos de control del caos es que por definición, en el interior de los atractores extraños existen multitud de equilibrios dinámicos periódicos –de dinámica simple–. Cuando el sistema se encuentra en régimen de comportamiento caótico dichos equilibrios de dinámica simple son sin embargo inestables. Es decir, aunque están ahí, el sistema, por sí sólo nunca podrá alcanzarlos. Con los métodos de control del caos se intenta precisamente *estabilizar* alguno de esos equilibrios haciendo uso de fuerzas externas o de control. Nótese que el propósito que persigue el control del caos es el de modificar el comportamiento cualitativo a largo plazo del sistema. El control o estabilización del caos en realidad busca la estabilización de alguna de las infinitas órbitas periódicas presentes en un

[20] Cuando nos centramos en el estudio del ciclo y el crecimiento económico el objetivo de política económica generalmente aceptado es el de mejorar el crecimiento económico a largo plazo y el de estabilizar la evolución de la economía en torno a esa tasa de crecimiento a largo plazo. Este objetivo viene influenciado tradicionalmente, de nuevo, por la teoría existente para explicar el crecimiento económico, que como ya comentamos es incapaz de explicar evoluciones cíclicas, periódicas o caóticas, ya que todas ellas se limitan al análisis de modelos esencialmente lineales que solo permiten la aparición de soluciones del tipo punto fijo. En el terreno de la política económica esta visión tradicional del fenómeno del crecimiento se tradujo en la separación artificial dentro de la política económica de la política coyuntural o estabilizadora o a corto plazo de la política estructural o de desarrollo.

atractor extraño mediante pequeñas perturbaciones en las variables o en los parámetros del sistema. Esta es la esencia de la teoría del control o gestión del caos.

Los primeros pasos en el control del caos los dieron en 1990 E. Ott, C. Gregory y J. Yorke, quienes introdujeron lo que actualmente se conoce como método OGY, y que se basa en la variación controlada de los parámetros del sistema –*control paramétrico*–(seguimos a continuación a Solé y Manrubia, 1996, pp. 260-267). Para la aplicación de este método es necesario conocer la expresión analítica de la órbita que se desea estabilizar, o cuanto menos el punto por donde intersecta la sección de Poincaré –el punto fijo de la aplicación correspondiente–. También es posible el cálculo a partir de precisas estimaciones numéricas, con lo cual en principio no es necesario conocer *a priori* la dinámica del sistema de forma analítica. Un segundo método de control, que relajaba las condiciones exigidas por el método OGY, fue propuesto por Güemez y Matías (*método GM*) en 1994. En este caso, era posible llegar a estabilizar órbitas de periodo arbitrario *p* en un sistema caótico aplicando perturbaciones periódicas con este mismo periodo –*control aditivo*–. La ventaja de este nuevo método es que no es necesario conocer *a priori* la dinámica del sistema, ni analítica ni numéricamente. Veamos estos métodos y sus aplicaciones (seguimos a Solé y Manrubia, 1996, pp. 260-267).

Comenzando con el metodo OGY de *control paramétrico*, consideremos un sistema dinámico en tiempo discreto del tipo[21]

$$\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(k),\mu);\ \boldsymbol{x}\in D\subset\mathbb{R}^n\ ;\ k\in\mathbb{N}\ ;\ \mu\in V\subset\mathbb{R} \tag{7.79}$$

donde μ es el parámetro variable del sistema, de valor real pero restringido a cierto intervalo, de forma que únicamente se permitirán pequeñas variaciones alrededor de cierto valor $\bar{\mu}$, que supondremos que es el que determina la dinámica real del sistema, $|\mu - \bar{\mu}| < \delta$ .Supondremos que trabajamos en el régimen caótico y por lo tanto cuando $\mu = \bar{\mu}$ debemos obtener un atractor extraño con infinitas órbitas periódicas inestables arbitrariamente próximas a cualquier punto.

El primer paso en el control del sistema consiste en decidir cuál de esas órbitas periódicas inestables se desea estabilizar. A partir de aquí, de forma local, en un entorno de esa solución periódica, se aplicará el método de control. La dinámica caótica asegura por la propiedad de mezcla que el sistema entrará en este dominio en tiempo finito, momento en el cual se llevará a cabo el control. Nos centraremos a partir de ahora en la estabilización de órbitas de período 1, como ejemplo de la forma de trabajar con el método de control

[21] Este método también puede utilizarse para el control de sistemas en tiempo continuo, en cuyo caso habría que recurrir su sección de Poincaré, es decir, habría que discretizar el sistema con lo que los resultados que mostraremos a continuación también serían aplicables.

OGY. Llamemos $\boldsymbol{x}^*(\mu)$ al punto fijo inestable que se desea estabilizar. Para valores de μ cercanos a $\bar{\mu}$ y en un entorno del punto fijo $\boldsymbol{x}^*(\bar{\mu})$, la aplicación (7.79) se puede aproximar linealmente por

$$\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}^*(\mu) = \mathbf{A}\,[\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}^*(\bar{\mu})] + \mathbf{B}\,(\mu - \bar{\mu}) \tag{7.80}$$

donde **A** es una matriz jacobiana $n \times n$ y **B** es un vector n-dimensional,

$$\mathbf{A}=\mathbf{D}_{xi}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\mu) \qquad \boldsymbol{B}=\mathbf{D}_{p}\,\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\,\mu) \tag{7.81}$$

con las derivadas parciales evaluadas en los puntos fijos, $\boldsymbol{x}^*(\bar{\mu})$ y $(\bar{\mu})$. Supondremos que el parámetro μ es una función lineal de la variable $\boldsymbol{x}_i$ *–así es como se introduce el control en el sistema–* de la forma

$$\mu - \bar{\mu} = -\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\,[\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}^*(\bar{\mu})] \tag{7.82}$$

El problema de control se reduce entonces a elegir la matriz $1 \times n$-dimensional $\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ adecuada de forma que el punto fijo $\boldsymbol{x}^*(\mu)$ sea estable.

Sustituyendo (7.82) en (7.80) se obtiene

$$\boldsymbol{x}_{i+1} - \boldsymbol{x}^*(\bar{\mu}) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^{\mathrm{T}})[\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}^*(\bar{\mu})] \tag{7.83}$$

que muestra que el punto fijo será estable si la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ es asintóticamente estable, es decir, si todos sus valores propios tienen módulo menor que la unidad. El problema de determinar el valor del vector $\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ para que la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ tenga valores propios previamente especificados –menores que la unidad– se soluciona mediante la técnica conocida como *emplazamiento de los polos*. Los valores propios de la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ se denominan *polos reguladores*.

Si suponemos que deseamos obtener el conjunto $\{\lambda_1, \ldots\lambda_n\}$ de valores propios para la matriz $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$, los resultados que siguen garantizan la existencia y la unicidad de la solución, y proporcionan el método para obtenerla –método de Ackermann–.

i) El problema del emplazamiento de los polos tiene una solución única si y sólo si la matriz n x n

$$\mathbf{C}=(\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^2\mathbf{B} \vdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}) \tag{7.84}$$

es de rango n. **C** se llama *matriz de controlabilidad.*

ii) La solución al problema del emplazamiento de los polos está dada por

$$\mathbf{K}^{\mathrm{T}} = (\alpha_n - a_n,\ldots,\alpha_1 - a_1)\mathbf{T}^{-1} \tag{7.85}$$

con $\mathbf{T} = \mathbf{CW}$, y

$$W=\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.86}$$

donde $\{a_1, a_2,..., a_n\}$ son los coeficientes del polinomio característico de **A**,

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^n + a_1 s^{n-1} + ... + a_n \tag{7.87}$$

y $\{\alpha_1,\alpha_2,..., \alpha_n\}$ son finalmente los coeficientes del polinomio característico de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}^T$,

$$\prod (s - \mu_j) = s^n + \alpha_1 s^{n-1} + ... + \alpha_n \tag{7.88}$$

Hasta el momento, se ha limitado la aplicación del control a un entorno fijo del punto $\boldsymbol{x}^*$. Por otra parte, dado que se ha limitado el rango en el que se puede variar el parámetro de control μ, obtenemos una restricción

$$| \mathbf{K}^T[\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{\mu}})] | < \delta \tag{7.89}$$

que define una franja de anchura $2\delta / | \mathbf{K}^T |$. Se activará el control sólo para valores de $\boldsymbol{x}_i$ en el interior de este dominio, y el parámetro tendrá el valor real $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ cuando el sistema se halle fuera de la franja determinada. En resumen, se determina el control por la siguiente regla

$$\mu - \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{\mu}}) = -\mathbf{K}^T [\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{\mu}})] \times u (\delta - | \mathbf{K}^T [\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{x}^*(\bar{\boldsymbol{\mu}})] |) \tag{7.90}$$

para valores arbitrarios de $\boldsymbol{x}_i$, no necesariamente cercanos al punto fijo, y donde $u(\cdot)$ es la función Heaviside[22].

Cuando trasladamos este método de control al terreno de la política económica, observamos que implica la adopción por parte de esta de determinadas reglas de actuación automática, más o menos sofisticadas, que recuerdan a las funciones de reacción o reglas de actuación de la política monetaria conocidas genéricamente como *reglas de Taylor* (véase Taylor, 1993)

[22] En principio, cualquier elección de los polos reguladores en el interior del círculo unidad sería válida. Sin embargo, si se conoce el punto fijo y el valor de los vectores propios que definen las direcciones de la variaciones asociadas a este punto fijo, se puede imponer por ejemplo que el vector KT tenga dirección paralela a la variedad estable, lo cual optimiza el tiempo de estabilización necesario.

Un segundo método de control es el propuesto por Güemez y Matías (GM) *–de control del caos aditivo–*. Este método es más sencillo de aplicar que el anterior, ya que no implica ningún conocimiento de las órbitas periódicas del sistema. Intuitivamente, el funcionamiento de este método de control es el siguiente. Si deseamos estabilizar una órbita de período *p* en un sistema caótico debemos perturbar el sistema con pulsos periódicos proporcionales al estado que el sistema presenta[23]. *Para algún valor de la intensidad de la perturbación*, que deberá ser determinado en cada caso y para cada sistema, la órbita deseada se estabiliza. En principio, si se varía la intensidad de la perturbación, γ, se obtiene todo un diagrama de bifurcación. Para algún valor de γ, en particular, será posible obtener la órbita del periodo deseado.

Este método es más apropiado para controlar sistemas en los que no se conozcan los parámetros que los guían, pero en los que se pueda realizar una medida sobre las variables. Conociendo las variables y actuando sobre ellas se estabiliza el sistema. En particular, en el caso de la política económica, podríamos pensar en algún tipo de *ciclo político* o *ciclo del gasto público* como mecanismo regulador del nivel de actividad de la economía –incluso cuando se desconozca el verdadero funcionamiento de la dinámica de la economía–.

La aplicación del método sería la siguiente. Consideremos una aplicación *n*-dimensional del tipo

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \mathbf{F}_j (\boldsymbol{x}_k, \mu) \tag{7.91}$$

donde μ es un parámetro del sistema. Si se desea estabilizar una órbita *p*-periódica, aplicaremos una perturbación a intervalos regulares, en la forma en que se ha dicho, obteniendo una nueva aplicación de la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{F}_j (\boldsymbol{x}_k , \mu) \quad j=1,..., i\text{-}1, i\text{+}1,...n \\ \boldsymbol{x}_{k+1} &= \boldsymbol{F}_i (\boldsymbol{x}_k , \mu) \times (1 + \gamma\ \delta_{i,\mathrm{p}}) \end{aligned} \tag{7.92}$$

donde como se puede ver, la perturbación se aplica a una sola de las variables de estado (x_i), y γ –intensidad de la perturbación– es un *parámetro* en esta nueva aplicación. El término $\delta_{i,\mathrm{p}}$ es una variable cualitativa que significa que sólo debemos multiplicar el estado actual de la variable de estado *i* por $(1 + \gamma)$ cada *p* pasos de tiempo –periodo del ciclo límite que se desea estabilizar. Mediante el manejo de la intensidad de la perturbación γ se podrán obtener nuevos comportamientos asintóticos del sistema. La variación de este parámetro podría inducir incluso a una nueva cascada de bifurcaciones sucesivas hacia el caos. Sin embargo, todos esos tipos de regímenes de comportamiento serían ahora controlables mediante el parámetro γ. En algunos casos, para conseguir estabilizar un ciclo de periodo *p* es necesario sin someter

[23] Nótese que precisamente este es el principio en el que se fundamentan los marcapasos utilizados en la medicina para controlar los latidos del corazón.

al sistema a unas perturbaciones regulares de una elevada intensidad. Para evitarlo, se podrán introducir tantas perturbaciones exógenas controladas sobre tantas variables de estado como se considere oportuno, de forma que la intensidad de cada una de esas perturbaciones controladas pueda ser más leve.

CAPÍTULO 8

LA DETECCIÓN DEL CAOS EN LAS SERIES TEMPORALES ECONÓMICAS: ESTACIONARIEDAD Y TEST DE NO-LINEALIDAD

Hasta ahora, hemos centrado la aplicación de la matemática del caos al estudio de la dinámica económica desde un punto de vista teórico, es decir, analizando distintos modelos teoréticos con los que se trata de representar, de manera simplificada, la dinámica económica.

Con ello queríamos destacar la capacidad que proporcionan estas herramientas para explicar la irregularidad intrínseca observada en la evolución de las principales magnitudes de la economía. Hemos analizado también las implicaciones que para la política económica presenta la consideración de sistemas con comportamiento caótico.

Es por ello que resulta una tarea fundamental, que de forma adicional y complementaria al anterior desarrollo teórico, realicemos un análisis empírico para intentar encontrar alguna evidencia de comportamiento caótico en la evolución de las series observadas de la economía real.

8.1. La detección de caos determinista a partir de series temporales económicas: introducción.

El propósito del presente y el próximo capítulo es el de aplicar las distintas técnicas analizadas en los capítulos 4 y 5 para tratar de encontrar evidencia de comportamientos caóticos en las series económicas reales españolas. Recordemos que el objetivo del capítulo anterior donde hemos presentado algunos modelos económicos con comportamiento caótico no es más que el de apuntar la posibilidad de que los modelos tradicionales pueden extenderse o generalizarse de tal forma que sus trayectorias evolucionen de forma caótica. No pretendíamos con ello defender que la dinámica real de la economía pueda representarse de manera ajustada por ninguno de esos modelos. Aceptando, por tanto, que esas generalizaciones no dejan de ser *ad-hoc,* el problema que se plantea a continuación es el de verificar empíricamente si efectivamente las series económicas presentan o no comportamiento caótico cualquiera que sea el sistema –desconocido– generador de dichas series. En este sentido, los test de detección del caos tienen la ventaja de que sirven para detectar comportamientos caóticos aunque no se conozca el modelo subyacente que rige la dinámica económica. Es decir, no necesitan una especificación concreta previa del modelo generador de las series temporales observadas. Desafortunadamente, nos enfrentamos a toda una serie de problemas que restan potencia a estos test cuando las aplicamos a las series económicas. De hecho, los resultados obtenidos en las aplicaciones de dichos test a las series económicas resultan, en el mejor de los casos, poco concluyentes respecto a la existencia de caos determinista. Es por ello, que a pesar de que como apunta Serletis (1996, p. S211) la inexistencia de una evidencia clara a favor de la hipótesis de caos determinista en la dinámica subyacente a las series temporales macroeconómicas invalida y deja vacío de contenido todo el análisis teórico de modelos económicos caóticos quedaría vacío, debería profundizarse más en el análisis tanto teórico como sobre todo empírico para tratar de salvar las limitaciones en la detección del caos en economía.

Las limitaciones a la que nos enfrentamos a la hora de contrastar la hipótesis de comportamientos caóticos en la evolución de las series temporales económicas se encuentran, fundamentalmente, en la calidad y cantidad de los datos disponibles. La mayoría de las técnicas propuestas para detectar la posible presencia de comportamientos caóticos necesitan de series largas y limpias de culaquier tipo de ruido puramente aleatorio. Esto es debido a que muchos de esos test, han surgido en campos de conocimiento como la Física y otras disciplinas, donde la posibilidad de realizar experimentos controlados permite la obtención de series largas y precisas. Por el contrario, en Economía nos encontramos con que las observaciones muestrales son obtenidas por distintos métodos –registros y encuestas– que además de llevar asociados todos los problemas de representatibilidad y de errores de medida de este tipo de muestreos, no han sido llevados a cabo de manera rigurosa en la mayoría de

los países hasta fechas muy cercanas. Como resultado de lo anterior nos encontramos con que las series económicas disponibles son en general series cortas desde la perspectiva de los test del caos. Este es el primer y principal inconveniente ante el que nos enfrentamos a la hora de aplicarlas sobre la economía real.

Un segundo tipo de limitaciones son las que surgen como consecuencia de que la mayoría de test pierden potencia cuando las series además del posible componente caótico determinista, presentan algún componente puramente estocástico o aleatorio –errores de medida o perturbaciones puramente aleatorias–, ya que esos test no son capaces de discriminar entre los dos tipos de ruidos.

Existen otros problemas que también limitan la capacidad para detectar caos en las serie temporales económicas. Entre ellos, podemos citar los siguientes: las construcción de algunas series históricas[1] y trimestrales[2] por interpolaciones lineales de los datos conocidos o estimados para ciertos años –lo que imposibilita la detección de caos determinista no-lineal–; la escasa cadencia o periodicidad con la que se muestrean ciertas series –que puede limitar la elección del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor–; la excesiva agregación de las series –que puede atenuar las posibles no-linealidades presentes en los distintos componentes de la serie–; y la no estacionariedad de la mayoría de las series macroeconómicas –los test para la detección del caos están diseñados para se aplicados sobre series estacionarias en media, es decir, sin una tendencia central de crecimiento–.

Como consecuencia de estas limitaciones, debemos aceptar el hecho de que la aplicación de las técnicas para la detección del caos a las series económicas deben considerarse con cierta precaución. En particular, sus resultados no deberían interpretarse como una herramienta totalmente concluyente para contrastar la hipótesis de determinismo frente a la del indeterminismo laplaciano o probabilista. Por el contrario, deben considerarse, simplemente, como técnicas complementarias a las tradicionales para el análisis de series temporales que pueden servir para mejorar el conocimiento del proceso subyacente generador de la serie temporal.

---

[1] Este es el caso de los datos de la serie de la población española que han sido obtenidas a partir de los censos realizados cada 4 o cinco años –véase el apartado 9.1–.

[2] Muchas de las series de la economía real –renta, consumo, inversión– proceden de la Contabilidad Nacional. Dichas estadísticas además de ser cortas en años, han sido elaboradas tradicionalmente con una periodicidad anual. Así, aunque hay disponibles datos trimestrales para la contabilidad nacional, dichos datos trimestrales no proporcionan información adicional para detectar comportamientos caóticos ya que en la mayoría de los casos han sido deducidos directamente de las series anuales previamente trimestralizadas usando distintos filtros lineales Para un análisis de los problemas asociados a las distintas técnicas de trimestralización véase Cabo (1997).

En este sentido, recordemos que los modelos estadísticos tradicionales se restringen, en la mayoría de los casos, a especificaciones estructurales lineales, o esencialmente lineales. Este enfoque lineal legitima, por el principio de la superposición, el estudio aislado de cada uno de esos elementos por separado –el comportamiento agregado quedará perfectamente determinado por la superposición lineal o agregación de cada uno de ellos–. Por el contrario, el paradigma no-lineal rechaza este principio de superposición. El todo es algo más que la simple suma de las partes. El comportamiento global de un sistema se determina por la relación no-lineal entre los comportamientos individuales de cada uno de sus componentes. El estudio aislado de los elementos integrantes de un sistema no mejora, necesariamente, el conocimiento del todo. Debe considerarse de forma explícita la interacción no lineal entre el todo y sus partes.

Estos problemas para la detección de caos determinista a partir de estas series disponibles aparecen como consecuencia de las propias restricciones impuestas por los test para la detección del caos, fundamentalmente, porque sus resultados requieren de series largas y son muy sensibles a la presencia de ruidos puramente aleatorios en las series –por ejemplo, errores de medida–. Esto es, no sólo debemos considerar que el problema procede exclusivamente de las series temporales de la economía real, sino también del propio diseño de los test. Resulta, por tanto, altamente interesante contrastar si el comportamiento observado en la economía a través de las series temporales sustenta o no la validez del principio de superposición, esto es, la hipótesis de linealidad, ya que el método de análisis a adoptar en caso contrario debería ser totalmente diferente –piénsese, por ejemplo, en el vacío existente entre el análisis microeconómico y el macroeconómico: ¿es el todo igual a la suma de las partes?–. Además, la existencia de no-linealidad es condición necesaria, aunque no suficiente para la posible existencia de comportamientos caóticos deterministas. Un primer punto fundamental que analizaremos en este capítulo será por tanto utilizar los test de no-linealidad a las series económicas reales de la economía.

Por otra parte las limitaciones para la detección del caos determinista se ha intentado subsanar a través del desarrollado de nuevos test y algoritmos, que tratan de aprovechar al máximo la información disponible en estas series cortas y posiblemente contaminadas por ruidos de pequeña escala para encontrar evidencia de caos. Este es el caso por ejemplo de el test BDS, el test de Kaplan, el test residual de Brock y el test de barajado de Scheinkman y LeBaron. En este capítulo introducimos estas técnicas que de manera complementaria a las analizadas en el capítuo 4 y 5 deberán utilizarse para la detección de caos determinista en las series temporales macroeconómicas. Comenzaremos analizando el problema de la no-estacionariedad de las series y cuales son las transformaciones que pueden utilizarse para convertirlas en estacionarias, requisito previo para que éstas puedan ser utilizadas por los distintos test del caos.

A continuación presentaremos algunos de los test que tradicionalmente se han utilizado para la detección de no-linealidades en la estructura dinámica del proceso generador de las series –el test de Engle, el de Kaplan, análisis R/S y el estadístico BDS–. Recordemos que la no-linealidad es una condición necesaria para la existencia de comportamientos caóticos.

La utilización de estos test en la detección del caos se fundamenta en la potencia de estos contrastes incluso cuando se aplican en series cortas y contaminadas con ruido puramente aleatorios. Recordemos, sin embargo, que con ellos no será posible obtener ninguna evidencia directa de posibles comportamientos caóticos. Para ello, deben estimarse las medidas invariantes del caos introducidas en el capítulo 5 –dimensión de fractal y el espectro de exponentes de Lyapunov–. Precisamente para tratar de superar las limitaciones ya reseñadas a las que nos enfrentamos cuando tratamos de obtener estimaciones de estas medidas invariantes del caos a partir de las series económicas, introduciremos el test residual de Brock y el del barajado de Scheinkman y LeBaron, que tratan precisamente de fortalecer las conclusiones que se obtengan sobre la detección de caos a partir de las series temporales económicas.

8.2. Análisis de la estacionariedad de las series temporales

Los test que utilizaremos para detectar posibles comportamientos caóticos en las series temporales económicas parten del supuesto de estacionariedad. Es por ello que dedicaremos este apartado a repasar brevemente el concepto y los test tradicionales de estacionariedad.

Dado un proceso estocástico, es decir, una secuencia temporal de variables aleatorias –$\{x_t\}$, $t=1,2,.....$–, se dice que éste es estacionario si su distribución de probabilidad conjunta no depende del tiempo, es decir, la distribución de probabilidad es idéntica para cada variable y para subconjunto de variables consecutivas en el tiempo. La hipótesis de estacionariedad toma importancia cuando tratamos de inferir cuáles son las propiedades de dicha distribución conjunta de probabilidad a partir de observaciones muestrales o realizaciones del proceso estocástico, esto es, a partir de las series temporales. En efecto, la estimación de la distribución conjunta de probabilidad requerirá, en general, disponer de un gran número de realizaciones para el proceso completo. Como consecuencia de ello, y del hecho de que en el caso particular de la economía sólo se dispone de una única observación de las variables económicas para un mismo instante del tiempo, esto es, de una única serie temporal o realización del proceso, resulta altamente complicado acometer cualquier tipo de inferencia sobre la estructura del proceso estocástico poblacional, a no ser que éste sea estacionario, ya que entonces podrán utilizarse las realizaciones en distintos

instantes del tiempo para hacer inferencia sobre la distribución conjunta de todo el proceso.

Cómo nuestro interés se centra fundamentalmente en la estimación de la media, la varianza y la autocovarianza del proceso estocástico del que consideramos que nuestra serie temporal es una realización, exigiremos únicamente que el proceso sea estacionario de segundo orden o en sentido débil. Esta estacionariedad débil implica que los momentos de primer y segundo orden sean finitos y que no varíen en función del tiempo[3]:

$$\begin{aligned} E[x_t] = E[x_{t+s}] = \mu < \infty \ , \ \forall s \\ Var[x_t] = Var[x_{t+s}] = \sigma^2 < \infty \ , \ \forall s \\ Cov[x_t x_{t+k}] = Cov[x_{t+s} x_{t+s+k}] = \mu_k < \infty \ , \forall s,k \end{aligned} \tag{8.1}$$

La no estacionariedad producida por una media que varía en el tiempo– por la presencia de una tendencia determinista– o la no estacionariedad en varianza –presencia de tendencia estocástica– puede generar, como ya hemos comentado, problemas en la estimación de los momentos de primer y segundo orden del proceso estocástico. Es por ello, que resulta necesario como paso previo a cualquier análisis contrastar la hipótesis de estacionariedad, y en caso de rechazarse, encontrar alguna forma de convertir o transformar la serie en otra que contenga la misma información y que sí resulte estacionaria[4].

El método que utilizaremos para identificar si una serie es estacionaria o no, consta de tres etapas: El análisis media-desviación típica, los test de raíces unitarias y el análisis de la función de correlación simple y parcial de la serie.

El análisis media-desviación típica: la transformación logarítmica

Un primer paso utilizado tradicionalmente para solucionar problemas de estacionariedad es la transformación logarítmica de la serie. Esta transformación suele utilizarse para paliar, aunque no eliminar completamente, el problema de la heterocedasticidad de la serie, esto es, cuando su varianza no es constante, depende de otra variable[5].

---

[3] En el caso en que se suponga que el proceso siga una distribución normal *n*-dimensional, como ésta queda determinada por las medias, las varianzas y las covarianzas de las variables aleatorias que forman el proceso, entonces la estacionariedad débil implica también la estacionariedad en sentido estricto del modelo

[4] Sobre los problemas de la no estacionariedad, test de raíces unitarias y sobre las posibles pérdidas de información cuando se trabaja con series diferenciadas para conseguir estacionariedad véase Suriñach, et al. (1995, pp. 1-40).

[5] La transformación logarítmica permitirá a su vez interpretar los resultados en términos de tasa de crecimiento considerando que por definición dlny/dt=(dy/dt)/y.

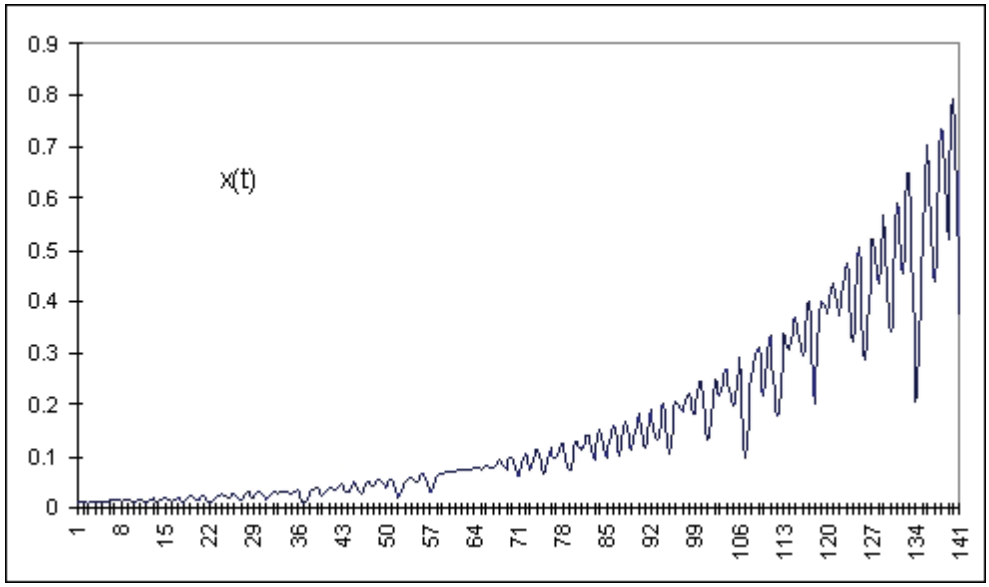


Figura 8.2

En el caso concreto de las series económicas, el caso típico es aquél en el que la varianza depende, al igual que la media, positivamente del tiempo –figura 8.1–. La transformación logarítmica consigue eliminar la inestabilidad de la varianza, linealizando a su vez la evolución de la serie –figura 8.2–.

La detección de esta pauta en el comportamiento de la varianza de una serie, además de la inspección de su gráfico temporal, suele apoyarse en el análisis del gráfico media-desviación típica (Peña, 1986, pp. 542-545). Para la construcción de este gráfico se divide la serie en grupos pequeños de

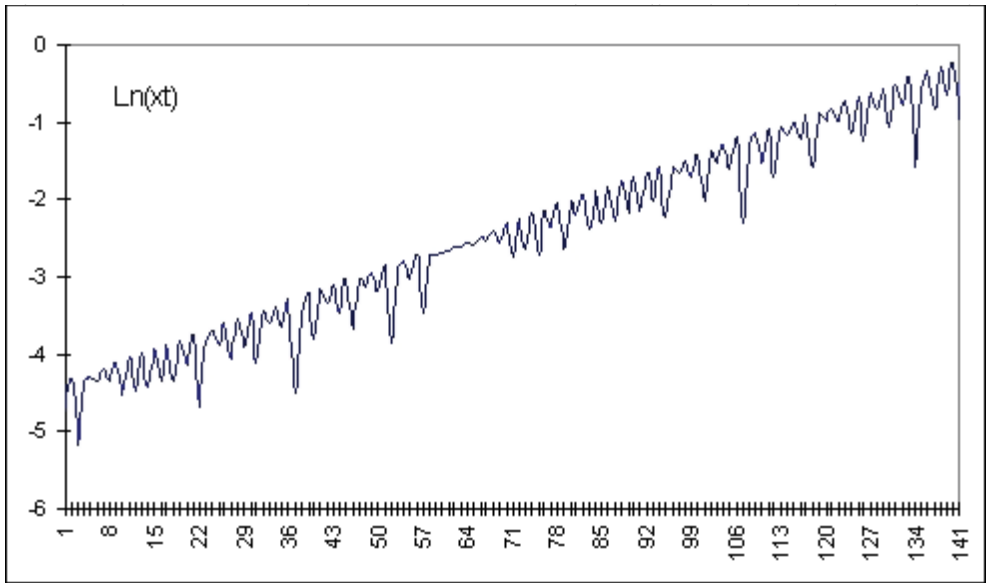


Figura 8.1

[6] Con series anuales pueden utilizarse grupos de 4 o 5 años. Para series con frecuencia estacional, los grupos deben hacerse tomando el período estacional completo para eliminar la influencia de la estacionalidad (Peña, 1986, p.545).

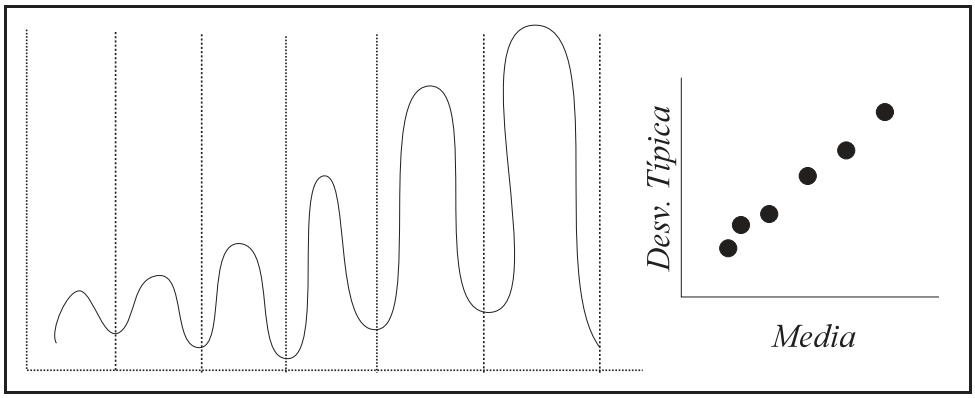


Figura 8.3

Como hemos comentado anteriormente, la inestabilidad de la varianza de las series económicas se caracteriza porque su variabilidad aumenta con el nivel de la serie, que a su vez aumenta con el tiempo[7]. Por tanto, el gráfico media-desviación típica debe presentar una pendiente positiva –figura 8.3–.

Con la transformación logarítmica –transformación Box-Cox– se consigue homogeneizar la varianza de la serie, desligándola de la evolución de la media y por consiguiente del tiempo. La razón que sustenta esta transformación se encuentra en el supuesto de que la falta de constancia en la varianza se debe a que la serie es el producto –en lugar de la suma– de un componente sistemático o predecible y un término de error $-x_t=f(t, x_{t-1}, ...)u_t-$ de forma que una varianza homogénea en u_t producirá una variabilidad en x_t tanto mayor cuanto mayor sea el valor de la parte sistemática $-f(t, x_{t-1}, ...)-$. Entonces, con la transformación logarítmica se puede obtener una descomposición aditiva de ambos componentes, de forma que la serie transformada tendrá, ahora, varianza constante $-ln(x_t)=ln[f(t, x_{t-1}, ...)] + ln(u_t)-$.

Por otra parte, como con la transformación logarítmica además de homogeneizar la varianza, se *linealiza* la evolución de la serie temporal, cabría preguntarse si es posible que este tipo de transformación afecte o distorsione

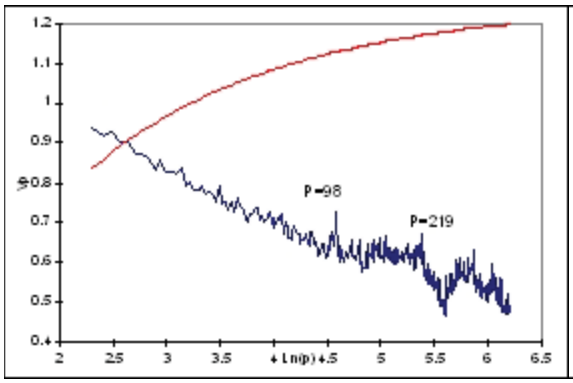


Figura 8.4. Estadístico V_p. Serie x_t

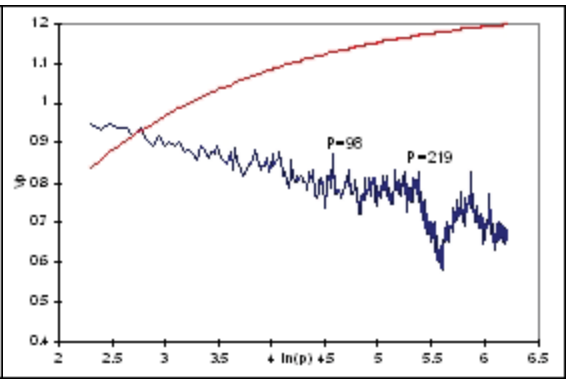


Figura 8.5. Estadístico V_p. Serie z_t

[7] Más concretamente este análisis parte del supuesto de que para cada grupo *i*: $\sigma_i=k\mu_i^{\alpha}$

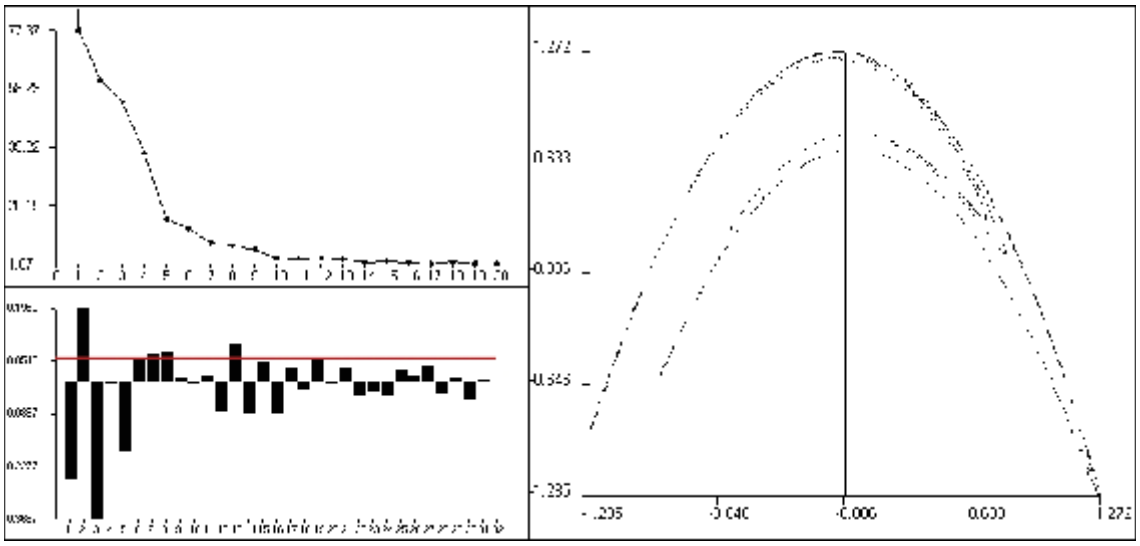


Figura 8.6 Información mutua, correlograma y reconstrucción del atractor. Serie x_t

la capacidad de los test analizados en el capítulo 5 para detectar comportamientos caóticos. Con el objeto de analizar la sensibilidad de estos tests ante la transformación logarítmica, hemos comparado los resultados obtenidos cuando aplicamos dichos test sobre la serie x_t obtenida a partir del modelo de Henon (apartado 3.3). Los valores para los parámetros son a=1.4 y b=0.3, y la transformación logarítmica aplicada a los 1000 datos de la muestra es $z_t=ln(x_t+1.3)$. En primer lugar, encontramos que las estimaciones del Exponente de Hurst a partir del análisis R/S aunque son sensibles a la transformación logarítmica –$H(x_t)=0.35$, $H(z_t)=0.4$–, concluyen en ambos casos que la serie es antipersistente –los valores del estadístico de Anis Lloyd son $AN(x_t)=-206.317$ y $AN(z_t)=-154.519$, rechazándose en ambos casos la hipótesis nula de Ruido Blanco Gausiano. Por otro lado, el estadístico V_p presenta en ambos casos la misma pauta de comportamiento –figuras 8.4 y 8.5–.

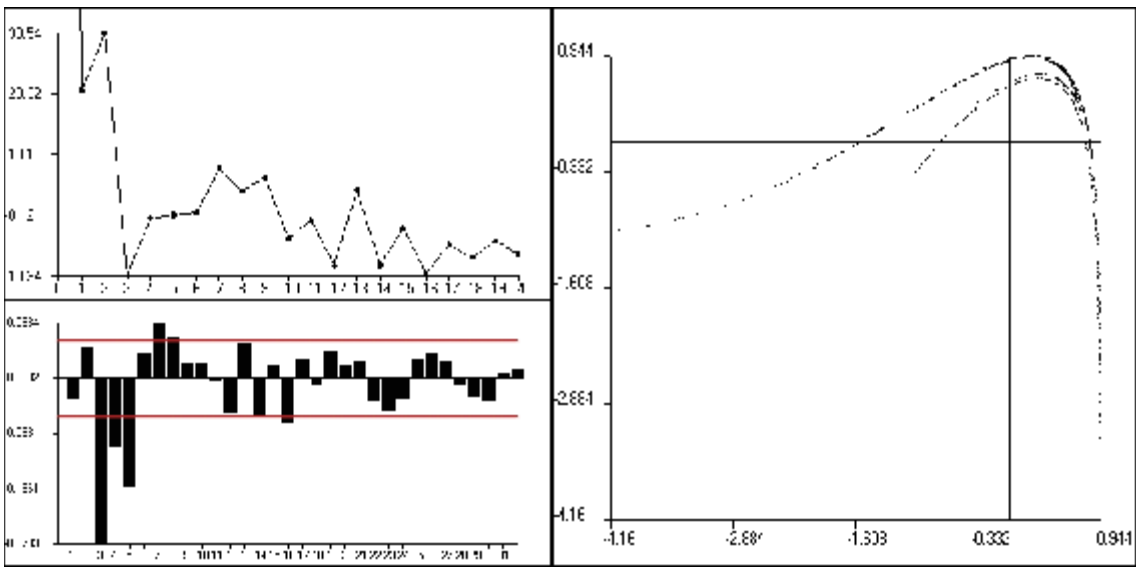


Figura 8.7. Información mutua, correlograma y reconstrucción del atractor. Serie z_t

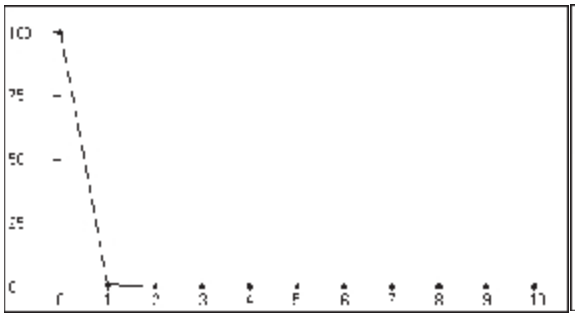


Figura 8.8. Falsos vecinos. Serie x_t

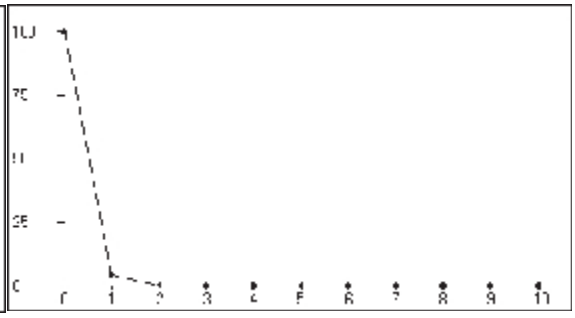


Figura 8.9. Falsos vecinos. Serie z_t

Por lo que se refiere a la elección del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor, el análisis de la función de información mutua indica, en ambos casos, que el retardo óptimo es uno –en la serie original x_t por el decaimiento monótono, y para z_t, porque el primer mínimo de dicha función se alcanza en el primer retardo–. Por el contrario, sí se observa un cambio significativo en el correlograma de las series y en la apariencia del atractor –figuras 8.6 y 8.7–.

El análisis del porcentaje de falsos vecinos apunta que en ambos casos que la dimensión de inserción óptima es *m=2* –figuras 8.8 y 8.9–. A pesar de ello, la eliminación total de falsos vecinos para la serie transformada sólo se alcanza para la dimensión *m=17*. Este resultado sobre la dimensión de inserción se ve confirmado con los resultados sobre el análisis de la dimensión de correlación y la dimensión de información –figuras 8.10 a 8.13–. Además, no se observa una diferencia significativa en las estimaciones de la dimensión fractal obtenidas a partir de las dos series –$D_C(x_t)=1.18$, $D_C(z_t)=1.20$, $D_I(x_t)=1.20$, $D_I(z_t)=1.16$–.

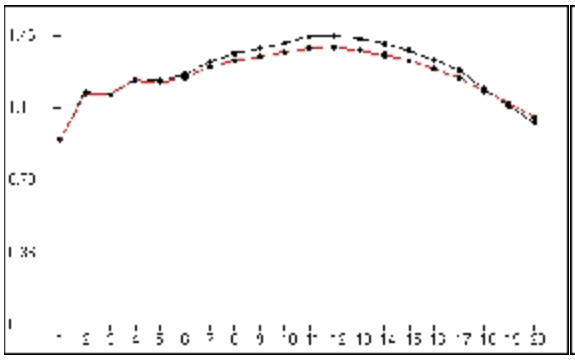


Figura 8.10. *Dc* vs *m*. Serie x_t

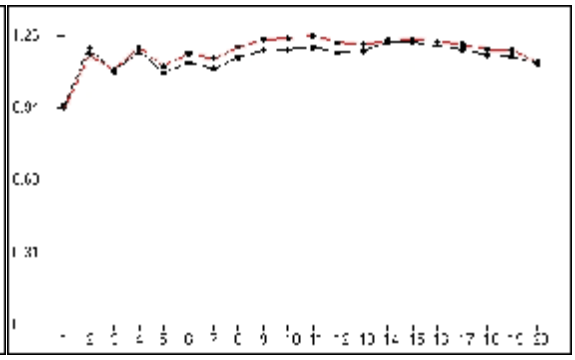


Figura 8.11. *Dc* vs *m*. Serie z_t

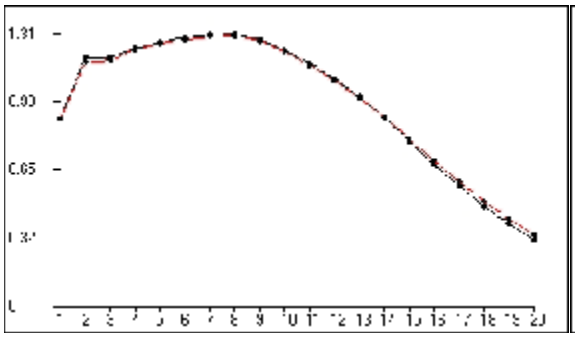


Figura 8.12. *DI* vs *m*. Serie x_t

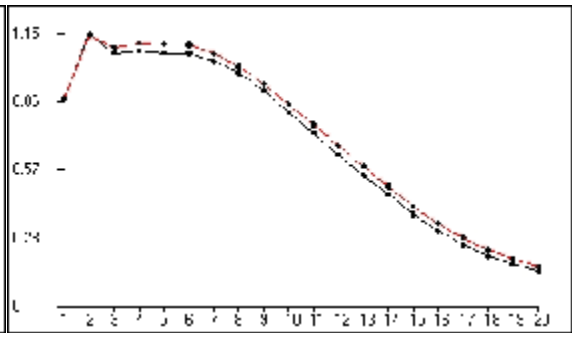


Figura 8.13. *DI* vs *m* z_t

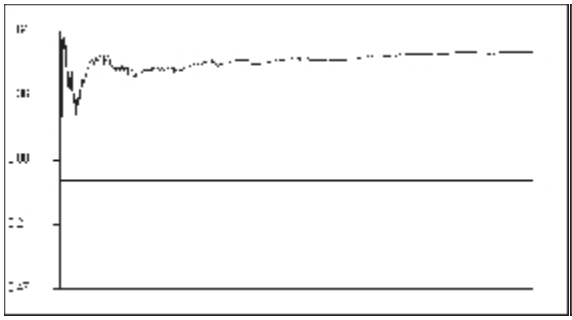


Figura 8.14. Exponente Lyapunov (Wolf). Serie x_t

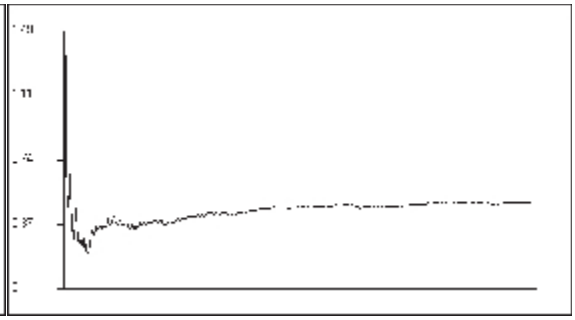


Figura 8.15. Exponente Lyaponov (Wolf). Serie z_t

Para terminar, estimamos los exponentes de Lyapunov asociadas a ambas series. La estimación del mayor exponente de Lyapunov por el método de Wolf –figuras 8.14 y 8.15– muestra una convergencia hacia los valores $\lambda_1(x_t)=0.38$ y $\lambda_1(z_t)=0.35$. El método NETLE por su parte, permite la estimación del espectro completo de exponentes con los siguientes resultados $\lambda_1(x_t)=0.41$, $\lambda_2(x_t)=-1.61$; $\lambda_1(z_t)=0.46$, $\lambda_1(z_t)=-1.2$; $D_L(x_t)=1.25$, $D_L(z_t)=1.37$.

Podemos concluir por tanto, que en el caso de la estimación de los exponentes de Lyapunov –recordamos, único test que contrasta directamente la hipótesis nula de comportamiento caótico–, no se observa, al menos en el caso estudiado aquí, una alteración significativa cuando se transforma la serie logarítmicamente. Este resultado, junto a los anteriores sobre el exponente de Hurst y la dimensión fractal del atractor, sugiere que el análisis de series temporales económicas para detectar comportamientos caóticos, permite la transformación logarítmica en caso de que el análisis del gráfico media-desviación típica así lo indique[8]. La razón de ello se encuentra precisamente en que el teorema de la reconstrucción de Takens es válido para cualquier función observador suave, cumpliendo la transformación logarítmica dicha propiedad (véase capítulo 5)

Tests de raíces unitarias

De forma complementaria, en su caso, a la transformación logarítmica, la solución tradicional ante la presencia de no estacionariedad en una serie temporal, incluye la diferenciación de la misma hasta conseguir que la nueva serie transformada o diferenciada sí aparezca como estacionaria. Así, se dice que una serie está integrada de orden d, –se expresa $I(d)$–, si al aplicarle d diferencias regulares se convierte en estacionaria, esto es, si cuando al aplicarle el operador $(1-L)^d$ verifica (8.1), siendo L es el operador retardos ($L^s x_t=x_{t-s}$).

Este método de la diferenciación de la serie se fundamenta en el hecho de que la no estacionariedad puede tener su origen en la existencia de raíces unitarias en el polinomio autorregresivo del proceso generador de la serie.

[8] Tampoco el análisis BDS, que basado en la integral de correlación, muestra una sensibilidad significativa ante la transformación logarítmica.

Dicho polinomio aparece en la representación autorregresiva del proceso de la forma $(1-\phi_1 L-\phi_2 L^2-\cdots-\phi_p L^p)x_t=e_t+u_t$, donde e_t es el término de error, que también puede estar autocorrelacionado; y u_t recoge la posible presencia de comportamientos deterministas (término constante, tendencia determinista, etc). De hecho, los test usados tradicionalmente para contrastar la estacionariedad son, en realidad, test de existencia de raíces unitarias en el polinomio autoregresivo. Con estos test se trata de encontrar el orden de diferenciación *d* para el cual la serie parece estacionaria, es decir, se trata de contrastar cuándo en el polinomio $(1-\phi L)^d$, se verifica que $\phi=1$.

Entre estos contrastes de raíces unitarias uno de los más utilizados es el conocido como contraste de Dickey-Fuller Ampliado cuyo contenido vamos a resumir a continuación[9]. Este test trata de contrastar la hipótesis nula de no estacionariedad –existencia de raíces unitarias en el polinomio autoregresivo del
proceso– frente a la hipótesis alternativa de estacionariedad, y supone una ampliación o generalización del test de raíces unitarias propuesto por Dickey-Fuller(1979).

El análisis de estacionariedad propuesto inicialmente por estos autores parte de tres posibles especificaciones del proceso estocástico no estacionario generador de la serie temporal:

i) $(1-L)x_t=\alpha\, x_{t-1}+e_t \quad e_t \sim$ Ruido Blanco (8.2)
En este caso, la *hipótesis nula de no estacionariedad* –existencia de una raíz unitaria– implicaría H_0: $\alpha=0$, bajo la cual el proceso estocástico sería un paseo aleatorio sin deriva y con $x_0=0$[10]. El rechazo de dicha hipótesis nula implicaría que el proceso estocástico generador de la serie es un AR(1) estacionario con media cero.

ii) $(1-L)x_t=\mu+\alpha\, x_{t-1}+e_t \quad e_t \sim$ Ruido Blanco (8.3)
La hipótesis nula sería H_0: $\alpha=\mu=0$, bajo la cual el proceso estocástico (8.3) sería un paseo aleatorio sin deriva. La hipótesis alternativa implicaría ahora que el proceso generador es un AR(1) estacionario con media μ.

iii) $(1-L)x_t=\mu+\beta t+\alpha\, x_{t-1}+e_t \quad e_t \sim$ Ruido Blanco (8.4)
La hipótesis nula quedaría ahora H_0: $\alpha=\beta=0$, bajo la cual (8.4) es un paseo aleatorio con deriva. La aceptación de la hipótesis alternativa implicaría en este caso que el proceso es un AR(1) estacionario sobre una tendencia determinista.

---

[9] Para un análisis de la distribución y aplicación de este y otros test de raíces unitarias véase Maddala y Kim (1998, pp.61-78 y pp.362-383)

[10] Véase apartado 4.5

Dickey-Fuller propusieron la construcción de un estadístico *F* para el contraste de las correspondientes hipótesis nulas. Dicho estadístico no sigue, sin embargo, las distribuciones estándar, por lo que estos autores tuvieron que tabular los valores de su distribución asintótica. En nuestras aplicaciones utilizaremos los valores tabulados en MacKinnon (1991).

La estrategia que seguimos a la hora de utilizar este test es la siguiente (Suriñach et al. 1995, p.34): primero examinamos la especificación más general (8.4). Si no rechazamos la H_0 y β es no significativa –no hay tendencia determinista– entonces pasamos a (8.3). Si no se rechaza la H_0 y μ es no significativa –no hay término constante– examinamos (8.2). Por último, en caso de no rechazarse la hipótesis nula, habría que aceptar que la serie no es estacionaria.

Uno de los problemas de este test de raíces unitarias es que supone que el término de error e_t no está correlacionado en el tiempo. Cuando se incumple dicho supuesto, es decir, cuando sí existe cierta correlación en el término de error, la inferencia en cualquiera de los tres casos anteriores se verá afectada. Para corregir este problema de inferencia Dickey-Fuller(1981) propusieron incluir en el anterior test una estructura de retados de la variable dependiente que permitiese capturar la estructura autorregresiva de ésta, de forma que el término de error quedase lo más incorrelacionado posible. Esta alternativa es conocida como el test de *Dickey-Fuller ampliado*. Las tres posibilidades anteriores quedarían ahora:

$$i) \quad (1-L)x_t = \alpha x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i (1-L)X_{t-i} + e_t \quad , \; e_t \sim R.B. \tag{8.5}$$

$$ii) \quad (1-L)x_t = \beta t + \alpha x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i (1-L)X_{t-i} + e_t \quad , \; e_t \sim R.B. \tag{8.6}$$

$$iii) \quad (1-L)x_t = \mu + \beta t + \alpha x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \gamma_i (1-L)X_{t-i} + e_t \quad , \; e_t \sim R.B. \tag{8.7}$$

con *p* suficientemente grande como para garantizar que e_t sea aproximadamente ruido blanco. Para contrastar la significatividad de estos retardos utilizaremos el tradicional *t* de Student, utilizando los mismos valores críticos tabulados para el test original para contrastar la significatividad de μ, β y α.

Hay que tener en consideración que este análisis sirve para contrastar la integrabilidad de primer orden, esto es, que la primera diferencia de la serie es estacionaria. En el caso de querer contrastar la necesidad de tener que tomar diferencias de mayor orden para conseguir estacionariedad –un mayor orden de integración–, debe tenerse en cuenta que el anterior test propone como hipótesis alternativa la ausencia de raíces unitarias, esto es, estacionariedad.

Así, debería utilizarse el test anterior comenzando por el mayor orden de integrabilidad que se desee contrastar. En caso de rechazarse la hipótesis nula –ausencia de raíces unitarias de ese orden– debería aplicarse de nuevo el test, utilizando como base del contraste un nivel inferior de integración[11].

Por otro lado, debemos apuntar que cuando se trabaja con series temporales con periodicidad inferior al año debe contrastarse también la existencia de raíces unitarias estacionales, esto es, la estacionariedad estacional. En términos generales, en caso de que el proceso no sea estacionario estacionalmente, debería transformarse la serie aplicando diferencias estacionales $(1-L^s)$, que a su vez, siempre puede descomponerse como:

$$(1-L^s)=(1-L)(1+L+L^2+\cdots+L^{s-1})=(1-L)S_s(L) \tag{8.8}$$

A partir de la anterior expresión (8.8) puede definirse el concepto de integrabilidad estacional. Así, se dice que una serie es estacionaria estacionalmente con ordenes d_0 y d_s –se expresa $SI(d_0,d_s)$–, si al aplicarle el operador $(1-L)^{d0}\ S_s(L)^{ds}$ se obtiene una serie estacionaria.

Para contrastar la existencia de raíces unitarias *trimestrales* puede utilizarse el test propuesto por Hylleberg, Engle, Granger y Yoo (1990)[12]. Este test analiza la significatividad de los parámetros π_i en la siguiente regresión por mínimos cuadrados ordinarios(Maddala y Kim, 1998, pp.367-368):

$$\begin{aligned}(1-L^4)x_t=&\sum_{s=1}^{4}\alpha_s D_{st}+\gamma T_t+\pi_1 y_{1,t-1}+\pi_2 y_{2,t-1}+\pi_3 y_{3,t-2}+\pi_4 y_{3,t-1}+\\&+\sum_{i=1}^{p-1}\phi_i(1-L^4)x_{t-i}+e_t\end{aligned} \tag{8.9}$$

con p suficientemente grande como para que los residuos estén incorrelacionados; D_{st} son variables ficticias o cualitativas deterministas estacionales –*dummies*–; T_t es la tendencia determinista; y

$$\begin{aligned}y_{1,t}&=(1+L+L^2+L^3)x_t\\y_{2,t}&=-(1-L+L^2-L^3)x_t\\y_{3,t}&=-(1-L^2)x_t\end{aligned} \tag{8.10}$$

---

[11] Así, si se desea contrastar la hipótesis de dos raíces unitarias debería utilizarse el test de Dickey-Fuller ampliado sobre $(1-L)^2x_t$. En caso de rechazarse, deberíamos comprobar si la primera diferencia es efectivamente estacionaria utilizando el test sobre $(1-L)x_t$.

[12] Este test trata de contrastar la hipótesis nula de no estacionariedad estacional teniendo en cuenta que ni todas las frecuencias estacionales asociadas al polinomio $S_s(L)$ en (8.8) ni tienen que presentar todas ellas el mismo módulo, ni éste tiene que ser necesariamente unitario. Sobre los test de estacionariedad estacional véase Maddala y Kim (1998, pp.362-371).

Así, cuando π_1=0, la serie presenta una raíz unitaria en la frecuencia cero, lo que implica que la serie tiene una tendencia estocástica no estacional. Cuando π_2=0, entonces la frecuencia es de dos ciclos por año. Si π_3=0 y π_4=0, la serie posee las raíces *i* y *-i*, esto es, raíces unitarias estacionales en las frecuencias anuales[13]. Los filtros a usar en cada caso son: (1-*L*) si π_1=0; (1+*L*) si π_2=0 y (1+L^2) si π_3=0 y π_4=0 conjuntamente. Un resumen de estos resultados se muestra en el cuadro 8-1.

Cuadro 8-1.

$(1-L^4)=(1-L)(1+L)(1-iL)(1+iL)$					
H_0	Factor	Raíz	Frecuencia *f*	Periodo 1/*f*	Ciclo por año (4 *f*)
$\pi_1 = 0$	(1-L)	1	0	∞	0
$\pi_2 = 0$	(1+L)	-1	1/2	2	2
$\pi_3 = \pi_4 = 0$	$(1+L^2)$	± *i*	1/4	4	1

Fuente: Suriñach et al. (1995, p.101) y elaboración propia.

Por otra parte, la no estacionariedad estacional bajo la hipótesis nula impide utilizar los valores tradicionales para realizar los contrastes de este test. Afortunadamente, los valores críticos para el test-*t* de significatividad de π_1 y π_2 y el test-*F* para la significación conjunta de π_3 y π_4 han sido tabulados por los propios autores.

Franses (1990) ha extendido el anterior test para el caso de que se desee contrastar la existencia de raíces unitarias estacionales *mensuales*. En este caso, debe analizarse la significatividad de los parámetros π_i en la siguiente regresión por mínimos cuadrados ordinarios:

$$\begin{aligned}(1-L^{12})x_t = &\sum_{s=1}^{12}\alpha_s D_{st} + \gamma T_t + \pi_1 y_{1,t-1} + \pi_2 y_{2,t-1} + \pi_3 y_{3,t-2} + \pi_4 y_{3,t-1} + \\ &+ \pi_5 y_{4,t-2} + \pi_6 y_{4,t-1} + \pi_7 y_{5,t-2} + \pi_8 y_{5,t-1} + \pi_9 y_{6,t-2} + \pi_{10} y_{6,t-1} + \\ &+ \pi_{11} y_{7,t-2} + \pi_{12} y_{7,t-1} + \sum_{i=1}^{p-1}\phi_i (1-L^{12})x_{t-i} + e_t\end{aligned} \qquad (8.11)$$

De nuevo, el polinomio autoregresivo *p* trata de recoger la correlación temporal del término de error; D_{st} y T_t recogen los componentes deterministas a través de variables *dummies* estacionales y una tendencia determinista respectivamente; y con

[13] Nótese que el polinomio $(1-L^4)=(1-L)(1+L)(1-iL)(1+iL)$, tiene cuatro posibles raíces –dos de ellas complejas conjugadas– *estacionales*, correspondiéndose cada una con π_1,π_2, π_3 y π_4 respectivamente.

$$
\begin{aligned}
y_{1,t} &= (1+L)(1+L^2)(1+L^4+L^8)x_t \\
y_{2,t} &= -(1-L)(1+L^2)(1+L^4+L^8)x_t \\
y_{3,t} &= -(1-L^2)(1+L^4+L^8)x_t \\
y_{4,t} &= -(1-L^4)(1-3^{1/2}L+L^2)(1+L^2+L^4)x_t \\
y_{5,t} &= -(1-L^4)(1+3^{1/2}L+L^2)(1+L^2+L^4)x_t \\
y_{6,t} &= -(1-L^4)(1-L^2+L^4)(1-L+L^2)x_t \\
y_{7,t} &= -(1-L^4)(1-L^2+L^4)(1+L+L^2)x_t
\end{aligned}
\tag{8.12}
$$

En caso de que exista alguna raíz unitaria estacional, el correspondiente π_i estimado sería cero[14]. Debido a que las raíces complejas están conjugadas, debe tenerse en cuenta que dichas raíces sólo podrán estar presentes cuando las π_i correspondientes se anulen a pares conjuntamente. Por ejemplo, las raíces *i* y *-i* sólo estarán presentes cuando $\pi_3=0$ y $\pi_4=0$. En general, no habrá raíces unitarias estacionales cundo π_2 a π_{12} sean significativamente distintas de cero. Cuando $\pi_1=0$, entonces la presencia de raíz unitaria en la primera diferencia regular no se podrá rechazar. Si $\pi_1=0$ y π_2 a π_{12} sean distintas de cero, la estacionalidad podrá recogerse usando *dummies* estacionales y una diferencia regular. En el caso de que todas las π_i , $i=1, ...,12$ se anulen el filtro a aplicar para conseguir estacionariedad será la primera diferencia estacional $(1-L^{12})$ (Maddala y Kim, 1998, pp.368-371). En el cuadro 8-2 resumimos los anteriores resultados. Los valores críticos para los test-*t* de significación individual y los test-*F* de significación conjunta por pares se encuentran tabulados en Franses(1990).

Cuadro 8-2.

$(1-L^{12})=(1-L)(1+L)(1-iL)\ (1+iL)\ [1+(3^{1/2}+i\ )L/2]\ [1+(3^{1/2}-i\ )L/2]$ $[1-(3^{1/2}+i\ )L/2]\ [1-(3^{1/2}-i\ )L/2][1+(3^{1/2}+i\ )L/2]\ [1-(3^{1/2}-i\ )L/2]$ $[1-(3^{1/2}+i\ )L/2]\ [1+(3^{1/2}-i\ )L/2]$					
H_0	Factor	Raíz	Frecuencia *f*	Periodo 1/*f*	Ciclo por año
$\pi_1 = 0$	1-L	1	0	∞	0
$\pi_2 = 0$	1+L	-1	1/2	2	6
$\pi_3 = \pi_4 = 0$	$1+L^2$	$\pm i$	1/4	4	3
$\pi_5 = \pi_6 = 0$	$1+3^{1/2}L+L^2$	$(-3^{1/2} \pm i\ )/2$	5/12	2.4	5
$\pi_7 = \pi_8 = 0$	$1-3^{1/2}L+L^2$	$(3^{1/2} \pm i\ )/2$	1/12	12	1
$\pi_9 = \pi_{10} = 0$	$1-L+L^2$	$(1\pm i\ 3^{1/2})/2$	1/6	6	2
$\pi_{11} = \pi_{12} = 0$	$1+L+L^2$	$(-1\pm i\ 3^{1/2})/2$	1/3	3	4

Fuente: Suriñach et al. (1995, p.102) y elaboración propia.

[14] Obsérvese que ahora el polinomio $(1-L^{12})=(1-L)(1+L)(1-iL)\ (1+iL)\ [1+(3^{1/2}+i)L/2]\ [1+(3^{1/2}-i)L/2]\ [1-(3^{1/2}+i)L/2]\ [1-(3^{1/2}-i)L/2][1+(3^{1/2}+i)L/2]\ [1-(3^{1/2}-i)L/2]\ [1-(3^{1/2}+i)L/2]\ [1+(3^{1/2}-i)L/2]$, presenta doce raíces estacionales, diez de ellas complejas conjugadas.

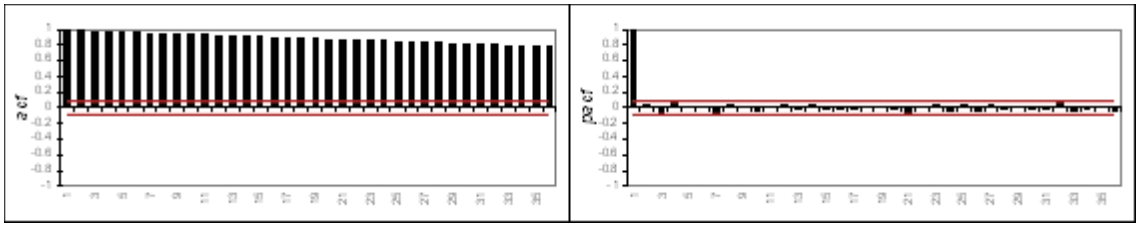


Figura 8.16 Correlograma de una serie no estacionaria

El análisis de la función de autocorrelación simple y la función de autocorrelación parcial.

Para terminar con el análisis de la estacionariedad, y como apoyo a los test de raíces unitarias, la determinación del orden de diferenciación necesario para conseguir que una serie sea estacionaria puede deducirse a partir del correlograma, es decir, de la función de autocorrelación simple (*acf*) y la función de la autocorrelación parcial (*pacf*). Cuando una serie no sea estacionaria, se caracterizará, porque los coeficientes de la *acf* decrecerán o se amortiguan muy lentamente. El caso típico se presenta cuando la *acf* tiene valores próximos a uno decreciendo de forma suave, junto a una *pacf* con el primer coeficiente próximo a uno y el resto nulos –figura 8.16–. Esta estructura se corresponde precisamente con la de un proceso autoregresivo de primer orden AR(1), $(1-\phi L)x_t=e_t$, con $\phi=1$, es decir, con una raíz unitaria, que desaparece al diferenciar la serie[15]. Además, en caso de existir alguna estructura autorregresiva adicional, como ésta se añade de manera multiplicativa, el correlograma quedará dominado por esa raíz unitaria.

En cualquier caso, hay que recordar que la presencia de estructura media movil, o comportamientos ARMA estacionales, pueden hacer que el correlograma no siga exactamente la pauta de la figura 8.16 aunque la serie no sea estacionaria (Peña, 1986, pp546-548). En cualquier caso, sin embargo, lo que sí se observará siempre es un decrecimiento lento de la *acf* –monótono o con oscilaciones–. Es por ello por lo que la necesidad de diferenciar la serie debe fundamentarse en dicho decrecimiento suave de la *acf*.

De manera análoga, la no estacionariedad estacional, se evidenciará en el decrecimiento lento de los coeficientes de la *acf* para los retardos estacionales, desapareciendo, en general, cuando so toman diferencias estacionales de la serie. En cualquier caso, el análisis de la *acf* y *pacf* debe tomarse con cautela y siempre como complemento a los anteriores test de raíces unitarias.

---

[15] Recordemos que la estructura del correlograma de un AR(1) es la siguiente. Los coeficientes de la *acf* para cada retardo *k* serán $r_k=\phi^k$, por lo que si ϕ está próximo a uno la acf presentará un decrecimiento lento (en el caso límite en el que $\phi=1$, todos los coeficientes serán unitarios). Por otro lado, los coeficientes de la *pacf* serán $r_1=\phi$; $r_k=0$ para $k=2, 3, \ldots$

La extracción del componente cíclico de una serie temporal

La matemática del caos se centra en el estudio de los fenómenos que presentan un comportamiento cíclico irregular, aperiódico y recurrente pero sin tendencia media de crecimiento o decrecimiento. Es por ello, que de manera complementaria al análisis de la estacionariedad, cuando trabajamos con las series reales de la economía caracterizadas por una tendencia media positiva de crecimiento a largo plazo, nos enfrentamos con la necesidad de extraer el componente cíclico de las series temporales económicas.

El problema de la extracción del componente cíclico parte del supuesto de que dada una serie temporal $\{y_t\}$ (t=1, ..., N), ésta puede descomponerse linealmente en tres componentes:

$$y_t = T_t + C_t + e_t \tag{8.13}$$

donde T_t es el componente tendencial a largo plazo, C_t es el componente cíclico entorno a la tendencia y e_t sería un componente puramente aleatorio que se sumaría a los dos anteriores para explicar la evolución observada en la serie original y_t.

Nótese que esta descomposición lineal de la serie está íntimamente relacionado con el paradigma tradicional lineal que haciendo uso del principio de la superposición, enfoca el estudio de la serie a partir de análisis separado de cada uno de sus componentes –el todo es igual a la suma de las partes–. Por otra parte, la aplicación del caos determinista al estudio del ciclo y el crecimiento económico supone aceptar que la dinámica económica está regida por sistemas no-lineales, esto es, supone rechazar el principio de superposición –el todo es más que la suma de las partes–, siendo entonces posible explicar de manera conjunta el crecimiento cíclico e irregular de la economía cuando ésta se comporta de manera caótica. La detección de caos determinista en la evolución de las series reales económicas debería, por tanto, realizarse directamente sobre la serie y_t.

Por otro lado, en el apartado anterior, y como consecuencia de que los test para la detección del caos determinista requieren que las series analizadas sean estacionarias –y ello implica que no presenten ninguna tendencia media de crecimiento–, vimos que, en caso de que ello sea necesario, la serie y_t debe ser transformada logarítmicamente y/o diferenciada hasta conseguir que sea estacionaria como paso previo a la aplicación de los test para la detección del caos determinista.

En el análisis de la detección de caos a partir de series reales en economía, diversas aportaciones (Brock, 1986 y Chen, 1993 y 1996, entre otros) muestran que en el proceso de transformación de una serie temporal para que ésta resulte estacionaria es necesario extraer la tendencia media de crecimiento de la economía. Ello implica aceptar, que es el componente cíclico en (8.13) el que representa la evolución de la dinámica de la economía en el atractor –en caso

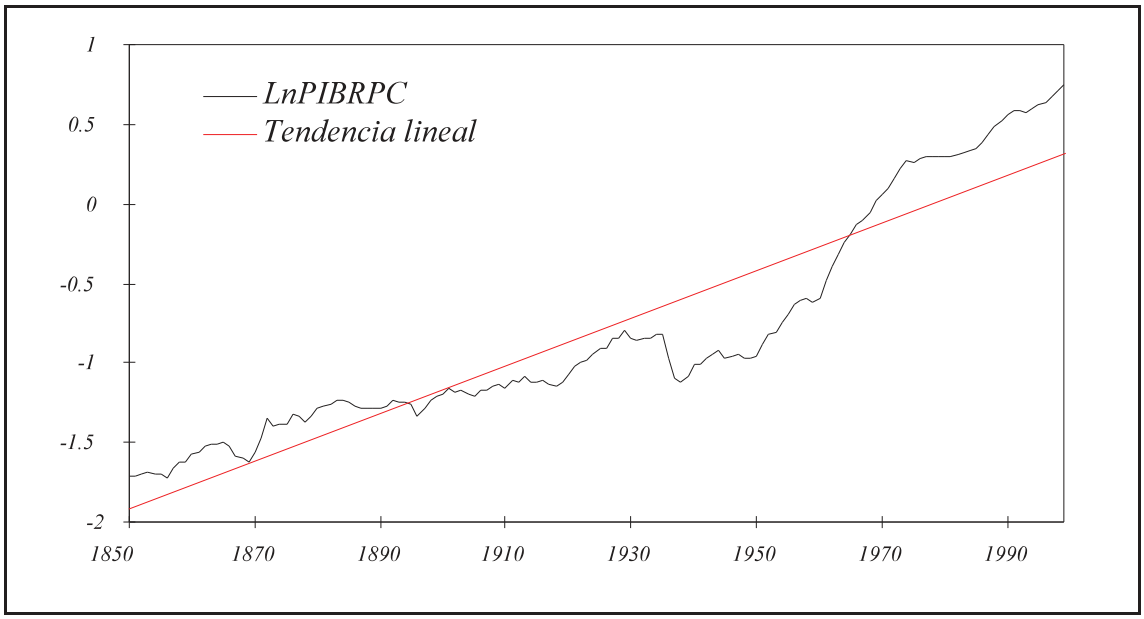


Figura 8.17

de que exista–, y que el objetivo que debe buscarse es el de diagnosticar si dicho atractor es del tipo extraño o caótico. Desde esta perspectiva, la evolución de la tendencia media de crecimiento estaría recogiendo la evolución a largo plazo de dicho equilibrio dinámico –caótico o no– y no debería considerarse en el análisis de la detección de caos determinista a partir de las series temporales. Siguiendo este enfoque, en nuestras aplicaciones sobre la economía real española, trataremos de extraer el componente tendencial de la serie cuando ello sea necesario.

Se plantea entonces el problema de como extraer el componente tendencial de una serie temporal. Un primer método consiste en suponer que la tendencia central es lineal en el tiempo:

$$T_t = a+b\cdot t \tag{8.14}$$

siendo a y b dos constantes a determinar en cada serie. Este supuesto sobre la tendencia lineal es el que incorporan los test de Raíces unitarias analizados en el apartado 8.2, por lo que podremos utilizar dichos test para averiguar cuando será necesario extraer dicha tendencia lineal. En la figura (8.17) mostramos la tendencia lineal estimada para la serie del PIB real per cápita de la economía española para el periodo 1850 a 1999, transformada logarítmicamente[16].

La extracción del componente cíclico mediante la sustracción de una tendencia lineal –figura 8.18– proporciona un ciclo económico de elevada periodicidad y no estacionario –ciclos largos–, que parecen recoger más que el

[16] Véase el próximo apartado 9.1 para la definición y fuente de esta serie). La transformación logarítmica permite interpretar el coeficiente b en (8.14) como la tasa media de crecimiento de la economía: $\ln y_t = a + b\ t \Rightarrow \partial \ln y_t/\partial t = b$, que puede estimarse mediante una regresión por mínimos cuadrados ordinarios.

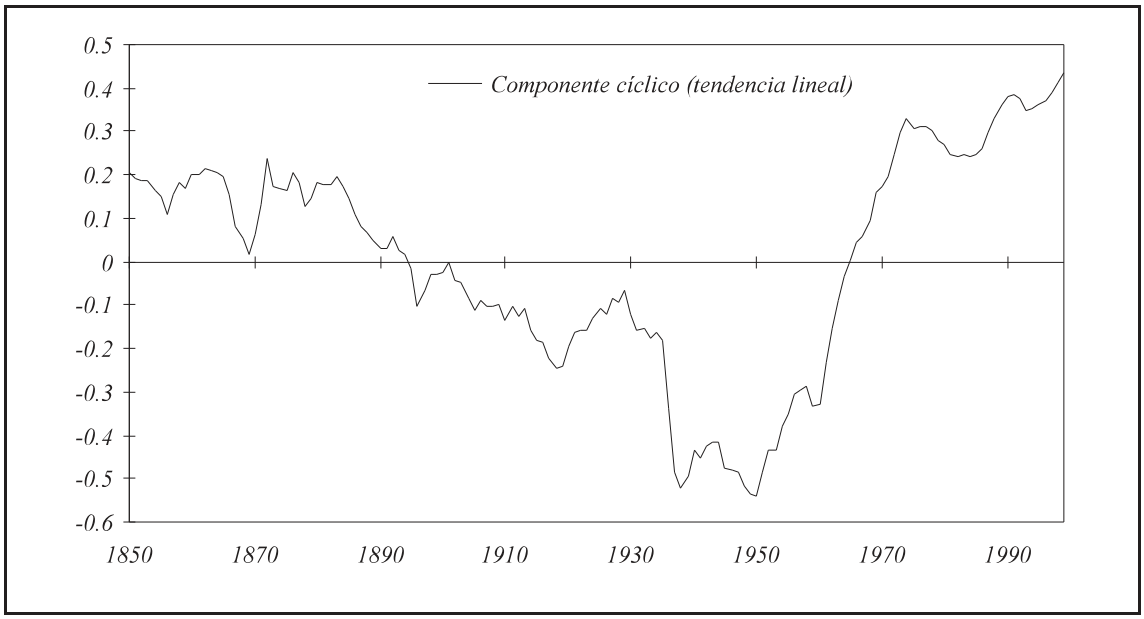


Figura 8.18

comportamiento cíclico a corto plazo de la economía –oscilaciones dentro del atractor–, el posible cambio en la tendencia lineal a largo plazo sufrido en la economía española a partir de la segunda mitad del siglo XX. Es por ello, que el supuesto sobre la componente tendencial lineal en el tiempo, no parece ser el más adecuado cuando se aplica sobre ciertas series económicas reales como el PIB per cápita de la economía española para un periodo amplio de tiempo.

Como alternativa a esta tendencia lineal en el tiempo, se han planteado otros métodos de extracción del componente cíclico de una serie temporal que suponen de manera explícita que el componente tendencial medio a largo plazo puede variar con el transcurso del tiempo. Es decir, estos métodos suponen que

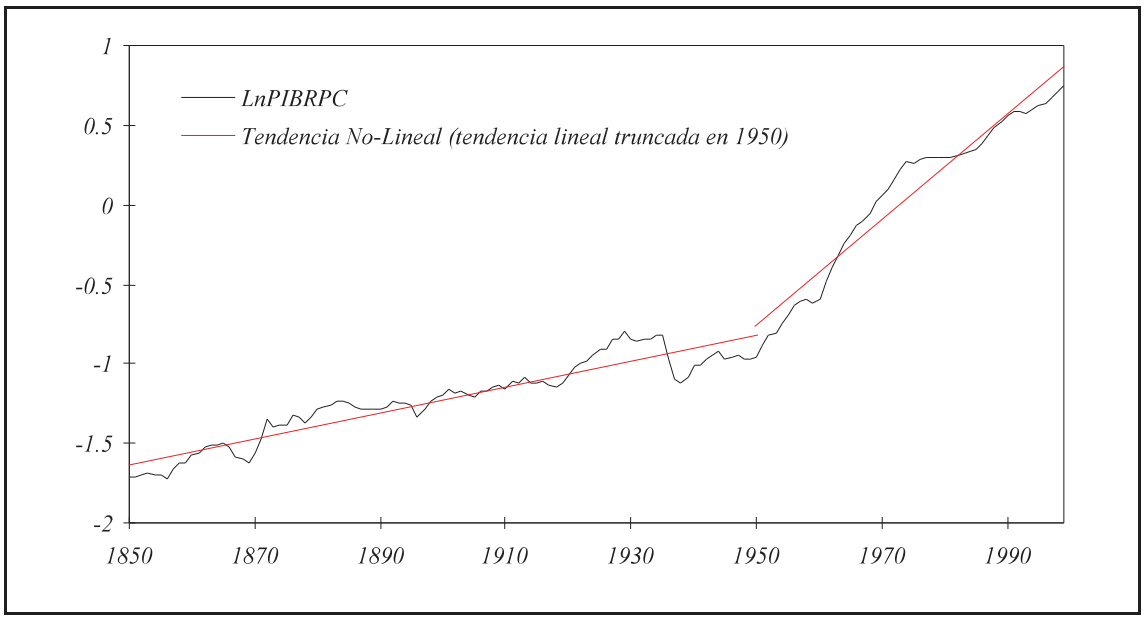


Figura 8.19

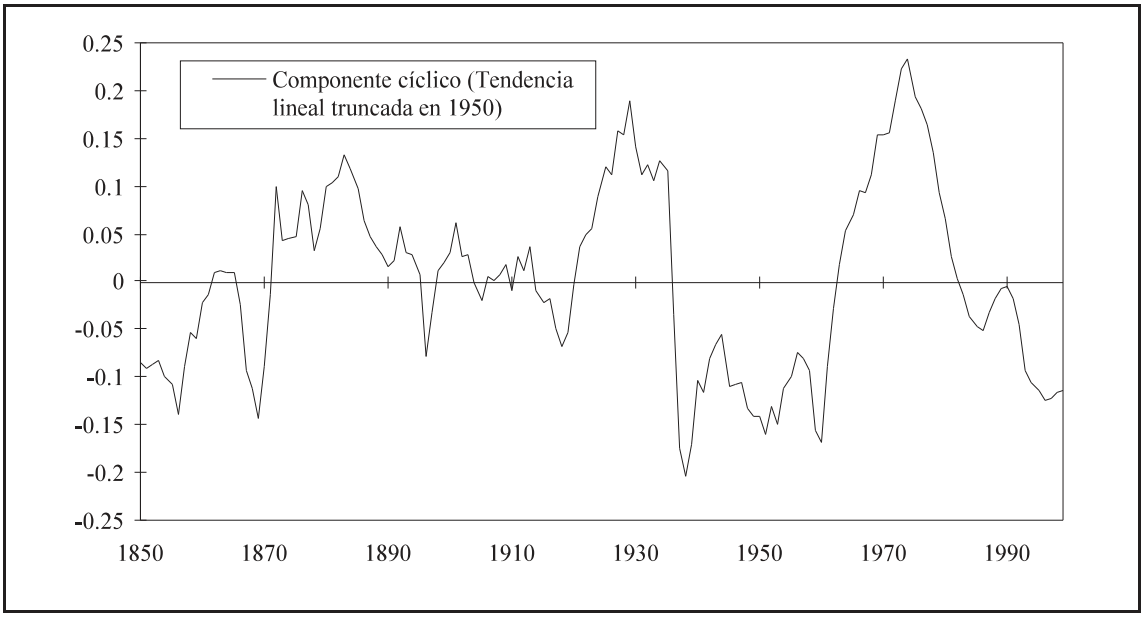


Figura 8.20

el componente tendencial de una serie es esencialmente no-lineal. Dentro de este enfoque existen a su vez diversas aportaciones. Una primera alternativa sería aquella que asume tendencias lineales pero truncadas en el tiempo, esto es, tendencias lineales que se mantienen sólo durante ciertos periodos de tiempo. En la figura 8.19 mostramos el componente tendencial no lineal para la anterior serie del PIB real percápita de la economía española suponiendo que una tendencia lineal truncada en 1950:

$$T_t = \begin{cases} a_0 + b_0 \cdot t & t \leq 1950 \\ a_1 + b_1 \cdot t & t > 1950 \end{cases} \tag{8.15}$$

El componente cíclico obtenido por la extracción de esta tendencia con un truncamiento –figura 8.20– parece recoger mejor las oscilaciones cíclicas de la economía a corto plazo. Sin embargo, este enfoque presenta una serie de inconvenientes. Entre ellos se encuentra la gran arbitrariedad que existe a la hora de determinar tanto el número total de truncamientos como los años en los que estos se producen.

Como respuesta a estos inconvenientes, Hodrick y Presscot (1981), proponen un nuevo método para extraer el componente tendencial no-lineal de una serie temporal. Este método consiste en filtrar o transformar linealmente a la serie original –filtro HP– de forma que se obtenga un componente tendencial que aun siendo suave –sin cambios bruscos– se ajuste bastante a la evolución original de la serie –figura 8.21–. Formalmente, este componente tendencial puede representarse como la solución al siguiente problema de minimización:

$$\min_{T_t} \mathcal{L} = \sum_{t=1}^{N} C_t^2 + \lambda \sum_{t=1}^{N} \left[(1-L)^2 T_t \right]^2 \tag{8.16}$$

donde L es el operador retardos. El primer sumatorio de la función objetivo en (8.16) recoge la bondad del ajuste de la tendencia a la serie original –mayor

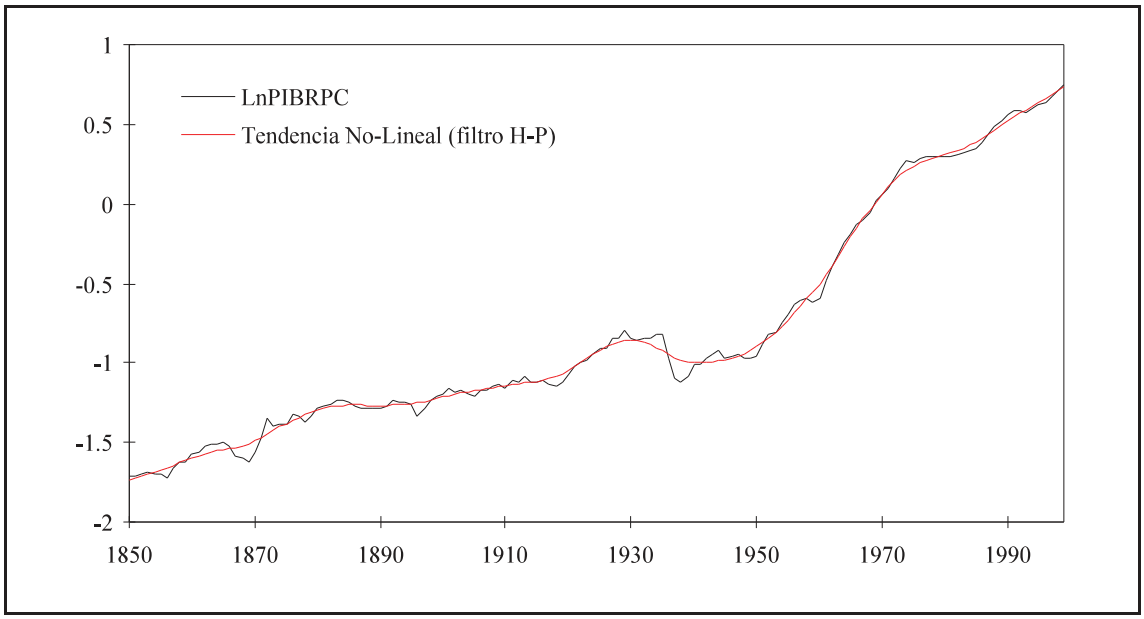


Figura 8.21

cuanto menor sea el componente cíclico C_t–, mientras que el segundo recoge su suavidad –mayor cuanto menores sean los cambios en su primer diferencia–.

Nótese que la tendencia obtenida dependerá del valor concreto que tome el parámetro λ, esto es, a la importancia relativa que se le de a cada uno de esos dos factores –bondad del ajuste y suavidad–, siendo este uno de los elementos más arbitrarios que introduce el filtro HP. Para los valores extremos de este parámetro se obtendrá una tendencia que se ajusta totalmente a los datos originales, $\lambda=0$, o una tendencia perfectamente lineal $\lambda=\infty$. Para valores intermedios, se obtendrá un componente tendencial no-lineal que se ajustará de manera suave a la serie original. En la práctica los valores de λ deben seleccionarse de forma que varianza del componente tendencial sea menor que la del cíclico, siendo los valores comúnmente utilizados de $\lambda=100$ para datos anuales, $\lambda=1600$ para datos trimestrales y $\lambda=14400$.

En la figura 8.22 mostramos el componente tendencial obtenido para la serie del PIB real per cápita de la economía española mediante el uso del filtro HP [17]. Cuando se resta esta tendencia no-lineal a la serie original se obtiene un ciclo estacionario con oscilaciones recurrentes y aperiódicas que puede considerarse como característico de la dinámica económica a corto plazo –la figura 8.22–.

Es por ello y también por el hecho de que el filtro HP es una transformación lineal suave de la serie original, y por tanto, que respeta las condiciones establecidas en el teorema de Takens para la correcta reconstrucción del atractor –apartado 5.1–, que pese a las deficiencias que presenta este método

[17] Para un análisis completo de la aplicación del filtro HP al estudio del ciclo económico de España véase Dolado, Sebastián y Vallés (1993).

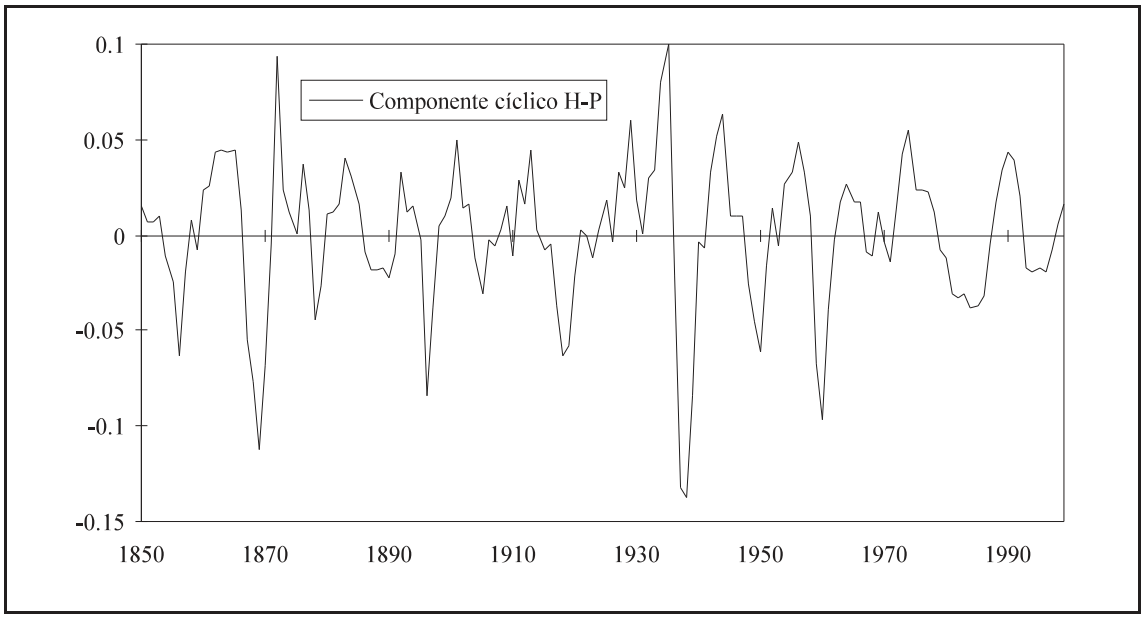


Figura 8.22

para la extracción de la tendencia a largo plazo –sobre todo en lo que se refiere a la correcta identificación de las fases recesivas y expansivas de la economía–, utilizaremos, siguiendo a Chen (1996), este filtro para la detección del caos determinista en nuestras aplicaciones sobre las series reales de la economía Española[18].

8.3. Test de No-linealidad

El supuesto de linealidad –principio de superposición– impone fuertes restricciones a los posibles comportamientos a largo plazo que, desde un punto cualitativo, pueden mostrar de los sistemas dinámicos. En particular, la hipótesis de linealidad en la relación estructural que define a un sistema dinámico sólo permite la aparición de puntos fijos. Con la no linealidad es posible modelizar comportamientos más complejos –ciclos límite, movimientos cuasi-periódicos y comportamientos caóticos–.

Aunque nuestro objetivo en este capítulo es la detección del caos, como paso previo trataremos de detectar comportamientos no-lineales en las series económicas. La identificación de no linealidades en el proceso generador de las series económicas, exigirá rechazar la modelización lineal de las series (Potter, 1999)–desde el punto de vista práctico las predicciones utilizando modelos lineales ARIMA resultarán como poco insatisfactorias cuando el proceso es caótico como consecuencia de la dependencia a las condiciones iniciales–.

[18] Para un análisis de dichas deficiencias véase Sebastián (1997, p.15-33) quién propone la aplicación de un método alternativo para estudiar el componente cíclico de una serie temporal y lo aplica también al caso español.

Como consecuencia de lo anterior se ha dedicado un gran esfuerzo en la elaboración de test para detectar no-linealidades en las series económicas (véase Tong 1990, pp. 221- 281, Teräsvirta, 1994, y Ashley y Patterson,1999). En este trabajo nos centraremos en dos de los test más utilizados y que mejor resultado han mostrado en la detección de no-linealidades (Barnett et al., 1995,1996 y 1997) que tienen su origen en la matemática del caos: el test *BDS* y el de *Kaplan*[19]. Completaremos estos test, con el test LM de *Engle* para la detección de procesos ARCH y retomaremos el *análisis R/S* para mostrar cómo puede utilizarse para detectar no-linealidades.

Queremos volver a insistir en que estos contrastes no constituyen por sí mismos ningún test para la detección directa del caos determinista. Sin embargo, dada su potencia para encontrar dependencias temporales y no-linealidades, pueden complementar de manera muy significativa a las herramientas del capítulo 4 y 5 para el análisis de serie temporales caóticas. En este sentido, la búsqueda de comportamientos no-lineales puede tomarse como un primer paso en la detección del caos determinista, ya que éste es no-lineal.

Una vez que con estos test la hipótesis de linealidad haya sido rechazada, habremos encontrado evidencia de no-linealidad en la dinámica subyacente a la serie temporal, pero no necesariamente de comportamiento caótico. Esto se debe a que existen procesos puramente estocásticos no-lineales –ARCH, GARCH, Medias Móviles no-lineales, etc.– que también pueden explicar la evolución no-lineal de la serie.

De esta forma, una vez encontrada evidencia de comportamientos no-lineales y con el objetivo de delimitar si el proceso generador de la serie es de tipo estocástico no lineal o de tipo caótico determinista, entonces, en una segunda etapa, se deberá seguir profundizando en el análisis de la serie buscando el posible origen caótico de esas no-linealidades –buscando atractores de baja dimensión y con algún exponente de Lyapunov positivo–.

La importancia de esta primera etapa en búsqueda de comportamientos no-lineales, radica precisamente en que la potencia de contraste de estos test de no-linealidad es mucho mayor que la del resto de técnicas sobre todo cuando nos enfrentamos, como nos ocurrirá en las aplicaciones sobre la economía real, ante series cortas y perturbadas con ruidos puramente aleatorios.

---

[19] Otros test de no-linealidad también utilizados en Barnett et al.(1995, 1996 y 1997) para comparar la potencia de cada uno de ellos cuando se utilizan series cortas son el test de Hinich (1982) para detectar no-linealidad en varianza y el de White (1989) para detectar no-linealidad en media que se basa en el filtrado de la serie por modelos de redes neuronales artificiales –véase Jungilges (1996)–. Para una comparación de la potencia entre estos y otros test de no-linealidad véase también Guarda y Salmon(1996), Jaditz y Sayer (1996) y Ashley y Patterson (1999).

Estadístico BDS

Basándose en las propiedades de la integral de correlación, Brock, Dechert y Scheinkman (1987) propusieron la utilización del estadístico BDS para contrastar la hipótesis de independencia estadística de los valores de una serie temporal estrictamente estacionaria. El test BDS puede utilizarse para contrastar la hipótesis nula de que los datos de la serie están Idéntica e Independientemente Distribuidos (IID), y por consiguiente, complementa a otros estadísticos existentes en la literatura como el estadístico Q de Box-Pierce utilizado en el análisis ARIMA de series temporales, o al análisis R/S –que como se recordará (apartado 4.2) podía utilizarse para contrastar la hipótesis nula de ruido blanco gausiano o normal– para detectar la posible presencia de dependencia y autocorrelación temporal en los datos –lineal o no lineal, determinista o estocástica–(Brock, Dechert, LeBaron y Scheinkman,1996) [20]

Aunque el test BDS no constituye un test para la detección de comportamientos caóticos, si puede utilizarse como un test de no-linealidad cuando es utilizado como test residual, es decir, cuando se aplica sobre los residuos obtenidos de la aplicación del mejor filtro lineal a la serie temporal[21].

Estos filtros lineales pueden construirse utilizando modelos ARMA(p,q) de serie temporales siguiendo la metodología Box y Jenkins (1970):

$$y_t = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_n y_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j u_t - j \quad ; \; u_t \sim IIDN(0,\sigma_u) \tag{8.17}$$

Estos modelos ARMA pueden considerarse como modelos lineales generales, es decir, capaces de recoger o captar cualquier estructura lineal presente en la serie temporal. De esta forma, una vez seleccionado el modelo ARMA que mejor se ajuste a los datos, puede asumirse que sus residuos quedan des-linealizados. Aplicando entonces el test BDS sobre esos residuos podrá contrastarse si todavía existe dependencia en la serie, en cuyo caso será del tipo no-lineal , estocástica o determinista. Si por el contrario, con el filtro ARMA se consigue blanquear la serie, el test BDS no rechazará la hipótesis nula de IID, con lo que podría concluirse que no existe evidencia de no-linealidad en el proceso subyacente generador de la serie, y que, por tanto, ésta no puede preceder de un sistema caótico. Existen varias dificultades que hay que considerar cuando se utiliza este enfoque (Barnett et. al, 1996, p.176-177). En primer lugar, estos modelos ARMA a pesar de ser muy generales, puede resultar insuficientes para captar cualquier tipo de dependencia lineal. Adicionalmente, la distribución muestral del estadístico utilizado por el test BDS se puede ver afectado en una gran cantidad de formas desconocidas por

[20] En este sentido el test BDS resulta más potente que el tradicional Q, ya que es incluso capaz de detectar dependencia temporal incluso en series no autocorrelacionadas linealmente.

[21] Brock et al.(1996) muestran que el estadístico BDS también puede ser utilizado como test de estacionariedad y para contrastar la bondad del ajuste y especificación de los modelos.

las varianzas no nulas de los coeficientes estimados de los procesos ARMA. A pesar de ello, el test BDS es una de las herramientas más potente para la detección de comportamientos no-lineales el proceso generador de las series temporales –estocásticos o deterministas– que presenta la ventaja de no requerir ningún supuesto a apriori sobre la distribución de las variables aleatorias IID bajo la hipótesis nula. De hecho, las conclusiones del test BDS pueden considerarse como muy potentes cuando de éste se deriva una aceptación de la hipótesis nula, es decir, la aceptación de la hipótesis nula debe considerarse como una fuerte evidencia a favor de la no-dependencia en al serie. Brock, Hsieh y LeBaron (1991) muestran mediante simulaciones de Monte Carlo que los resultados del test son robustos incluso en series cortas, de 500 datos, frente a una gran variedad de alternativas a la hipótesis de *IID*[22].

La formulación el test BDS se fundamenta en el hecho de que si una serie temporal es un auténtico proceso aleatorio, entonces la integral de correlación debería aumentar proporcionalmente con la dimensión inserción. Esta idea fue apuntada ya al analizar la dimensión de correlación cuando se comentó que si la serie temporal procedía de un proceso estocástico del tipo paseo aleatorio entonces su dimensión de correlación debería crecer con la dimensión de inserción sin llegar a estabilizarse en ningún momento ya que este tipo de procesos tiene potencialmente infinitos grados de libertad y por tanto su dimensión de inserción debería ser infinita. Con el test BDS, sin embargo, se dispone de un estadístico formal cuya distribución es conocida y que por consiguiente se puede utilizar consistentemente para contrastar la hipótesis nula de *IID* (Brock, Dechert, LeBaron y Scheinkman,1996).

La construcción del estadístico es la siguiente. El primer paso consiste en reconstruir el atractor a partir de la serie temporal $\{y_t\}^{T}_{t=1}$ con las *m-historias*

$$\boldsymbol{y}_t^{\boldsymbol{m}} = \left(y_t \, , \, y_{t+1} \, , \, y_{t+2} \, , \, y_{t+3} \, , \, \cdots \, , \, y_{t+(m-1)} \right) \tag{8.18}$$

donde m la dimensión de inserción[23]. Se obtiene así una órbita $\left\{\boldsymbol{y}_t^{\boldsymbol{m}}\right\}$ de vectores m-dimensionales a partir de los cuales se define la integral de correlación como (Grassberg y Procaccia, 1983a):

$$C(r,m) = \lim_{T_m \to \infty} \frac{1}{T_m^2} \cdot \sum_{i,j=1}^{T_m} \theta(r - \|\boldsymbol{y}_i^{\boldsymbol{m}} - \boldsymbol{y}_j^{\boldsymbol{m}}\|) \tag{8.19}$$

---

[22] Igualmente Barnett, Gallant, Hinich, Jungeilges, Kaplan y Jensen (1997), muestran la potencia del test BDS –junto al test de Kaplan (1994)– frente a otras técnicas alternativas a la hora de detectar no-linealidades

[23] Nótese que en (8.18) se utiliza un retardo de reconstrucción τ=1, que será óptimo bajo la hipótesis nula según de IID cualquiera de los criterios de elección que utilicemos –primer mínimo de la función de información mutua media o primer cero de la función de autocorrelación simple–.

siendo $T_m = T-(m-1)$ la longitud de la serie de las *m-historias* $\mathbf{y}_t^m$, $\|\cdot\|$ la norma máxima:

$$\|\mathbf{y}_i^m - \mathbf{y}_j^m\| = \max_{k=1,\ldots,m} \left\{ \left| y_{i+(k-1)} - y_{j+(k-1)} \right| \right\} \tag{8.20}$$

y $\theta(\cdot)$ la función Heaviside:

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & si\ x>0 \\ 0 & si\ x \le 0 \end{cases} \tag{8.21}$$

Bajo la hipótesis nula de que los valores de la serie $\{y_t\}_{t=1}^T$ están idéntica e independientemente distribuidos, y como por la definición de la norma máxima:

$$\theta(r - \|\mathbf{y}_i^m - \mathbf{y}_j^m\|) = \prod_{k=1}^m \theta(r - |y_{i+(1-k)} - y_{j+(1-k)}|) \quad ;\ \forall i,j \tag{8.22}$$

entonces, para cualquier $m>1$ y $r>0$ (Brock, Dechert y Scheinkman 1987):

$$C(r,m) = C(r,1)^m \quad ;\ cuando\ T \to \infty \tag{8.23}$$

Brock Dechert y Scheinkman (1987) y Brock, Dechert, LeBaron y Scheinkman (1996) muestran que la distribución asintótica de la integral de correlación bajo la hipótesis nula de que la serie temporal estrictamente estacionaria de variables aleatorias se encuentra idéntica e independientemente distribuida, es:

$$W(r,m) = \sqrt{T_m} \frac{C(r,m) - C(r,1)^m}{\sigma(r,m)} \sim N(0,1) \tag{8.24}$$

con

$$\sigma^2(r,m) = 4\left[K(r)^m + 2\sum_{j=1}^{m-1} \left(K(r)^{m-j} C(r)^{2j} + (m-1)^2 C(r)^{2m} - m^2 K(r) C(r)^{2m-2} \right) \right] \tag{8.25}$$

donde las constantes $C(r)$ y $K(r)$ se definen como

$$\begin{aligned} C(r) &= E[H(r - |y_i - y_j|)] \\ K(r) &= E[H(r - |y_i - y_j|) \cdot H(r - |y_j - y_k|)] \end{aligned} \tag{8.26}$$

y $K(r) > C(r)^2$.

Para la utilización del test BDS en la detección de dependencias temporales o de no-linealidades en la serie –en este último caso cuando la serie ha sido previamente filtrada por un modelo ARMA– será preciso obtener el valor del estadístico $W(r,m)$ asociado a la serie temporal y compararlo –el estadístico es a una cola– con los valores tabulados de la N(0,1), rechazándose la hipótesis nula de IID cuando $W(r,m)$ sea grande –posiblemente mayor que 2–. Para ello necesitamos además de los valores calculados para $C(r,m)$ y $C(r,1)$, obtener una

estimación de la varianza $\sigma^2(r,m)$, esto es, necesitamos estimar las constantes $K(r)$ y $C(r)$. Brock, Dechert, LeBaron y Scheinkman (1996) muestran que estas constantes se pueden estimar consistentemente por:

$$\hat{C}(r)=C(r,1)$$
$$\hat{K}(r)=K(T,r)=\frac{6}{T_m(T_m-1)(T_m-2)}\sum_{1\le i\le j\le k\le T}h_r(y_i,y_j,y_k) \tag{8.27}$$

con $h_r(x,y,z)=\frac{1}{3}[\theta(r-|x-y|)\cdot\theta(r-|x-z|)\cdot\theta(r-|z-y|)]$.

El contraste de la hipótesis nula debe realizarse calculando el estadístico BDS –W(m,r)– para varias dimensiones de inserción y para varios valores de r. En cuanto a la elección de r, quizás el elemento de mayor arbitrariedad de este test, existen varias propuestas (Brock, Dechert, LeBaron y Scheinkman, 1996, p.219). Nosotros nos decantamos por el enfoque de Brock, Hsieh y Lebaron (1991, p.50-53) quienes recomiendan elegir r entre 0.5 y 1.5 veces la desviación típica de la serie temporal.

En la tabla 8.3 mostramos los resultados de la aplicación del test BDS sobre un conjunto de series temporales. El tamaño muestral de todas las series es de 500 datos. Hemos seleccionado series generadas por 7 procesos no-lineales y una generada por un modelo ARIMA (2,1) –figuras 8.23 a 8.30–. Entre los procesos no-lineales hemos incluido tres procesos puramente estocásticos un proceso ARCH, un proceso GARCH y un proceso de medias móviles no-lineales –NMA–[24]. Tanto estas series como la correspondiente al modelo ARMA han sido tomadas de Barnett et al. (1997). Las series no-lineales deterministas corresponden a las soluciones de cuatro sistemas en régimen caótico:la aplicación de Henon –a=1.4; b=0.3–, la logística –μ=4–, el modelo de Lorenz –σ=10; r=28; β=8/3– y el de Röslsler–a=0.1, b=0.1 c=14–, estos dos últimos muestreados a intervalos unitarios de tiempo. En todos los casos se ha filtrado la serie por el modelo ARMA que mejor ajuste la serie, eligiendo como criterio de selección del orden del polinomio autoregresivo y de media móvil, el Criterio de Información de Schawrz –CIS–[25].

---

[24] Proceso ARMA(2,1):X(t)=0.8X(t-1)+0.15X(t-2)+u(t)+0.3u(t-1);con X(0)=1, X(1)=0.7
Proceso ARCH: $X(t)=(1+0.5X(t-1)^2)^{1/2}$ u(t); con X(0)=0.
Proceso GARCH:$X(t)=h(t)^{1/2}u(t)$; con $h(t)=1+0.1X(t-1)^2+0.8h(t-1)$, h(0)=1 y X(0)=0
Proceso NMA: X(t)=u(t) +0.8u(t-1)·u(t-2)
u(t)~N(0,1).

[25] Recordemos que el criterio de información de Schwarz o bayesiano considera que el número términos a incluir en el modelo es aquél para el cual se minimiza la siguiente expresión:

$$k\frac{\ln N}{N}+\ln\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{N}\hat{u}_t^2$$

siendo N el tamaño muestral; $\hat{u}_t$el error de la regresión en el instante t; y k el número de parámetros del modelo. Es decir, este criterio busca aquel modelo para el cual se minimiza la

TABLA 8.3
Test BDS

	r	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9	m=10
ARIMA	1.902	215.766	348.604	605.842	1127.638	2235.595	4677.739	10182.922	22886.385	52922.651
	2.743	162.772	228.910	338.097	526.922	860.009	1453.691	2535.686	4539.623	8287.133
	3.957	106.285	129.825	162.491	210.617	282.222	388.175	546.906	787.113	1149.778
	5.706	66.096	70.404	75.445	82.576	92.174	104.542	120.271	140.123	165.094
RARIMA	0.492	-1.092	-1.325	-1.190	-1.646	-2.318	-4.258	-4.795	-3.859	-3.169
	0.709	-1.240	-1.109	-1.044	-0.886	-0.995	-0.562	-0.600	-1.055	-0.592
	1.023	-1.175	-0.930	-1.029	-0.972	-1.060	-0.907	-0.543	-0.386	-0.401
	1.476	-1.442	-1.338	-1.384	-1.279	-1.276	-1.161	-0.912	-0.774	-0.771
ARCH	0.647	5.836	6.043	5.083	3.893	3.839	4.148	1.859	-1.556	-2.825
	0.934	6.101	6.507	5.888	5.221	4.869	4.447	4.738	4.560	3.761
	1.346	6.347	6.535	5.949	5.580	5.358	5.237	5.438	5.278	4.977
	1.942	6.203	6.578	6.211	5.801	5.390	5.270	5.275	5.130	4.953
NMA	0.606	4.041	4.678	4.350	5.007	5.534	4.691	3.654	-1.056	-2.997
	0.874	4.304	5.079	4.894	5.251	5.249	4.989	4.202	2.732	2.397
	1.261	4.402	5.184	4.976	5.038	5.026	4.931	4.536	4.135	3.841
	1.819	4.185	5.129	4.873	4.917	4.959	4.972	4.770	4.562	4.298
GARCH	1.492	0.046	0.383	0.705	0.194	-0.350	0.204	-1.739	-3.619	-2.968
	2.151	0.209	1.165	1.568	2.175	2.479	3.021	3.691	4.144	6.586
	3.103	0.113	1.090	1.534	1.960	2.136	2.326	2.761	2.955	3.144
	4.475	0.170	0.923	1.327	1.811	2.009	2.226	2.484	2.605	2.599
Henx	0.363	84.019	139.704	214.105	355.322	629.182	1189.693	2349.969	4846.216	10288.036
	0.524	55.022	69.431	88.549	115.948	160.129	235.246	357.549	554.785	893.068
	0.755	35.230	33.215	37.005	38.783	43.188	51.561	62.065	74.914	91.460
	1.090	16.309	10.251	10.641	8.620	8.548	9.365	10.623	11.614	12.683
Rhenx	0.317	31.007	55.507	114.816	214.834	424.008	875.635	1868.162	3991.060	8672.798
	0.457	23.217	37.703	59.559	83.458	125.153	198.838	320.885	515.064	835.067
	0.659	15.744	22.095	27.233	31.224	36.426	45.644	57.735	72.021	90.563
	0.951	8.113	9.294	7.777	7.352	6.694	6.867	7.379	8.102	8.996
log4	0.175	340.583	457.097	594.696	802.817	1114.971	1646.023	2386.678	3416.994	5380.456
	0.252	305.305	345.547	371.385	418.894	479.334	563.896	667.924	785.842	980.495
	0.364	119.505	105.494	98.564	93.894	89.701	86.790	83.533	83.951	86.757
	0.524	9.078	1.083	0.753	-0.271	-0.620	-1.117	-1.338	-1.270	-1.303
lordx	4.030	9.982	22.280	31.954	43.574	53.833	66.941	77.750	75.832	123.724
	5.812	3.411	9.453	13.204	15.521	17.573	19.230	23.610	26.380	35.083
	8.382	-0.466	1.004	3.166	4.115	3.820	3.908	3.826	3.294	3.421
	12.089	-4.386	-6.145	-3.908	-2.620	-2.444	-1.866	-1.542	-1.691	-1.439
rossdx	5.907	170.853	563.150	1338.856	3172.994	7845.734	20210.886	54044.595	149072.884	421338.605
	8.519	110.474	332.414	650.218	1208.073	2288.801	4470.443	9021.439	18688.035	39617.974
	12.286	40.734	132.886	226.717	344.920	517.843	788.169	1227.004	1942.394	3130.012
	17.720	10.810	32.123	57.866	78.089	98.495	122.670	153.140	191.766	242.078
Rossdx	1.008	15.100	24.794	35.986	55.544	99.253	193.359	419.924	1001.844	2457.001
	1.454	13.779	20.261	26.346	32.919	43.705	59.880	89.679	144.088	247.542
	2.097	12.469	16.117	19.701	21.858	23.900	26.012	29.173	33.882	41.819
	3.024	9.948	10.908	13.231	14.011	13.928	13.473	12.414	11.375	10.965

Las series *RARIMA*, *Rhenon* y *Rrossdx* corresponden a los residuos de los filtro ARMA(2,1), ARMA(3,1) y ARMA(3,4) respectivamente. Nótese que la serie *RARIMA* constituye un proceso del tipo camino aleatorio gausiano.

suma cuadrática de los residuos pero penalizando por el excesivo número de parámetros incluidos en el modelo. Este criterio es utilizado también por Ashely y Patterson (1999) para filtrar las series antes de aplicar los test de no-linealidad.

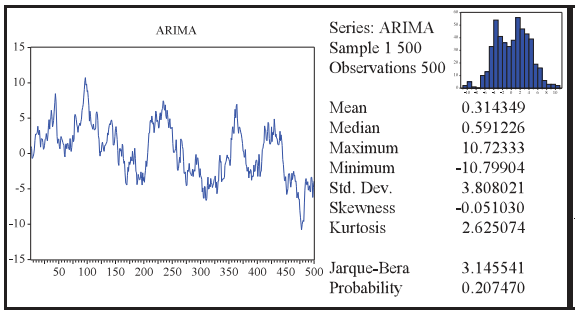


Figura 8.23

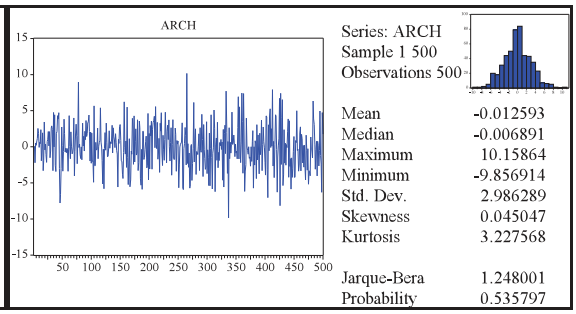


Figura 8.24

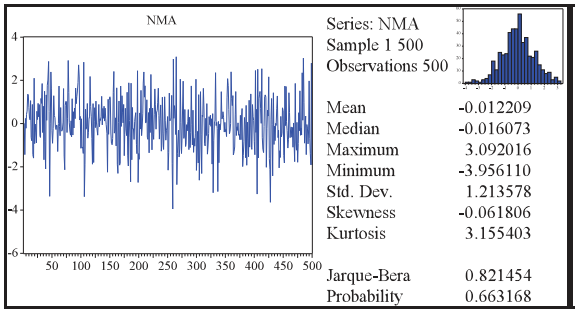


Figura 8.25

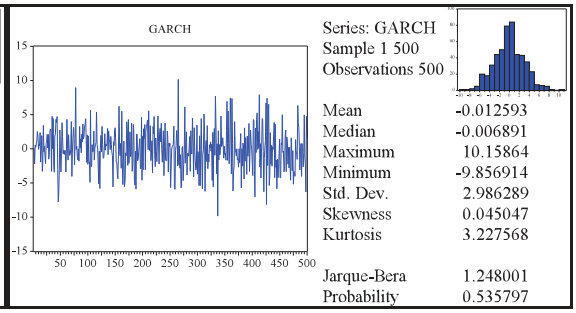


Figura 8.26

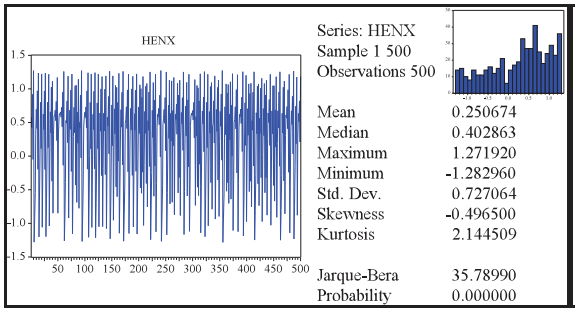


Figura 8.27

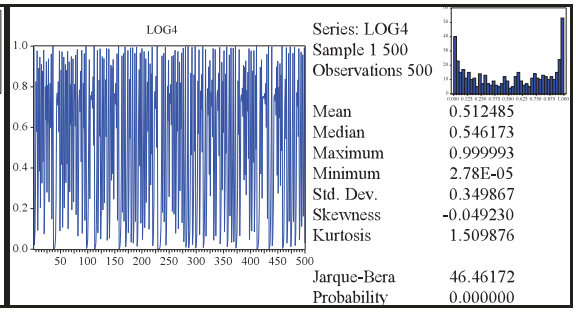


Figura 8.28

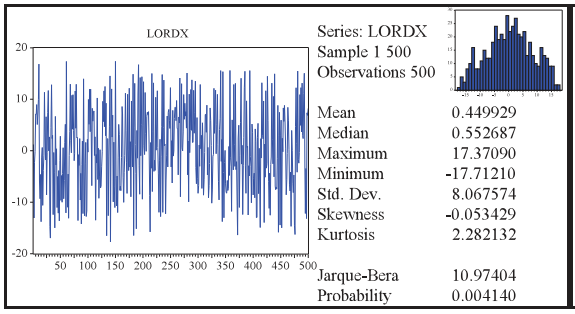


Figura 8.29

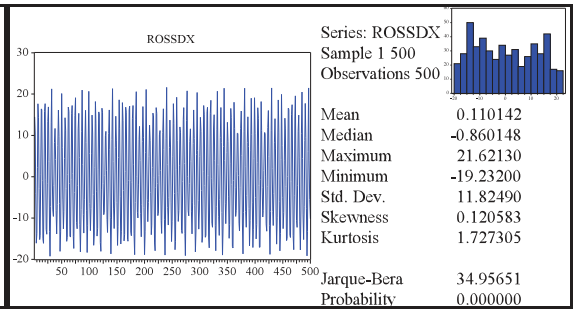


Figura 8.30

En esta tabla 8.3 se muestran los resultados del test BDS para la serie original como en su caso, para los residuos del filtro lineal aplicable –sólo la serie del proceso ARMA y las de los sistemas de Henon y de Rössler admiten la modelización lineal según el CIS–. El estadístico $W(m,r)$ –que recordemos se distribuye según una Normal(0,1) a una banda– se ha calculado en cada caso para dimensiones de inserción m=2 hasta m=10 y considerando cuatro posibles valores para r entre 0.5 y 1.5 veces la desviación típica de la serie temporal. Los resultados parecen rechazar correctamente la hipótesis de linealidad en todas las series consideradas a excepción de la serie generada por el proceso GARCH[26]. De hecho, el test BDS no es consistente frente a cualquier tipo de no-linealidad, ya que su potencia para detectar, por ejemplo, procesos GARCH es nula (Brock y Lima, 1996, p.329-330). A pesar de ello, el estadístico BDS parece detectar de manera aceptable el resto de comportamientos no-lineales –de carácter determinista o puramente aleatorio– y es por ello que es uno de los test más frecuentemente utilizado en las aplicaciones empíricas para la detección de caos en series temporales.

El test de Kaplan

Un segundo test que utilizaremos en nuestras aplicaciones para la detección de no-linealidades es el desarrollado por Kaplan (1994). Este test fue formulado originalmente para la detección de determinismo en la dinámica subyacente a una serie temporal, aunque posteriormente ha sido utilizado para contrastar –con una potencia superior a otros tests cuando se aplican sobre series temporales cortas– la hipótesis de no-linealidad –determinista o estocástica– en el proceso generador de la serie temporal (Barnett et al., 1995, 1996 y 1997).

Este test se basa en las propiedades de continuidad de la órbita descrita por un sistema dinámico determinista en el espacio de fases. Como ya se ha comentado, cuando se representa la trayectoria descrita por una serie caótica, muchos de los test tradicionales son incapaces de distinguir cuándo esa serie procede de un sistema caótico determinista y cuándo procede de un sistema puramente estocástico. Para detectar posibles pautas deterministas en la evolución de una serie temporal, las distintas herramientas desarrolladas en el capítulo 5 se fundamentan en la representación de la trayectoria como una órbita en el espacio de fases. En este sentido, el test propuesto por Kaplan trata de encontrar la presencia de una estructura determinista en la órbita descrita por un sistema en el espacio de fases, basándose en la continuidad de dicha órbita. Dicho test trata de explotar la siguiente propiedad de los sistemas deterministas. Si existe una ley determinista en la evolución de la órbita, entones si dos puntos o estados están juntos o próximos en el espacio de fases, sus respectivas imágenes resultantes de la iteración del sistema también estarán próximas; por el contrario, si el sistemas es estocástico las imágenes

[26] Estos resultados coinciden con los obtenidos por Barnett et al. (1997).

correspondientes a puntos próximos pueden estar muy alejadas en el espacio de fases ya que a partir de un mismo estado un proceso estocástico puede admitir distintas realizaciones.

Como decimos, explotando esta propiedad de los sistemas deterministas, Kaplan ha construido un estadístico relacionado con la distancia media entre dos puntos y sus respectivas imágenes. Más concretamente se considera el hecho de que si una serie procede de un sistema dinámico determinista, entonces existirá una función determinista –desconocida– $\boldsymbol{f}(\cdot)$, tal que $\boldsymbol{x}_{t+dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_t)$, donde $\boldsymbol{x}_t$ es el vector de estados en el instante t y $\boldsymbol{x}_{t+dt}$ su imagen. El test de Kaplan examina la evidencia sobre la continuidad de la función desconocida $\boldsymbol{f}(\cdot)$ proporcionada por la órbita reconstruida por el método de los retardos a partir de una serie temporal observada. En este sentido, cuando el proceso generador de la serie es determinista, entonces, si la dimensión de inserción es la adecuada, dos puntos próximos lo serán por la propia dinámica del sistema, y sus respectivas imágenes también estarán próximas –si el sistema es caótico la dependencia sensitiva hará que dichas imágenes se vayan separando a medida que se itera el sistema, pero en sistemas disipativos, éstas estarán suficientemente cerca en la primera iteración–. Es decir, si el proceso generador de la serie es determinista y si $\boldsymbol{x}_i$ y $\boldsymbol{x}_j$ son dos vectores de estado que se encuentran próximos en el espacio de fases, sus imágenes, $\boldsymbol{x}_{i+dt}$ y $\boldsymbol{x}_{j+dt}$ también estarán cercanos en el espacio de fases, ya que, ambas se obtienen por la aplicación del mismo sistema dinámico determinista $\boldsymbol{f}(\cdot)$. Por otro lado, si el proceso generador de la serie es puramente estocástico, entonces, las imágenes pueden estar muy alejadas.

El test de Kaplan se construye a partir de las denominadas distancias *delta* y *epsilon*, donde delta mide la distancia entre dos estados o puntos de la órbita reconstruida por el método de los retardos ij , $\delta_{ij}=|\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{x}_j|$, y epsilon es la distancia entre sus respectivas imágenes, $\epsilon_{ij}=|\boldsymbol{x}_{i+dt} - \boldsymbol{x}_{j+dt}|$. El valor medio de todos los valores de ϵ_{ij} para aquellos puntos ij suficientemente cercanos, $\delta_{ij}<r$, se define como $\epsilon(r)$. Entonces, para un sistema perfectamente determinista con $\boldsymbol{f}$ continua, se tendrá que $\epsilon(r)$ tiende a cero cuando r tiende a cero –en sistemas deterministas, a partir de un mismo punto, el sistema determinará también una misma imágen–. Para un sistema que no sea perfectamente determinista, por otro lado, $\epsilon(r)$ será positivo –en procesos estocásticos, a partir de un mismo estado se pueden obtener distintas realizaciones del proceso–. Así, una forma de comprobar cuándo un sistema es determinista es calculando el valor de $\epsilon(r)$ cuando r tiende a cero, ya que a diferencia de los sistemas deterministas, $\epsilon(r)$ tendrá una cota inferior estrictamente positiva si el proceso generador de la serie es estocástico.

Kaplan propone estimar $\epsilon(r)$ con $r=0$ a partir de una serie temporal a través de la regresión lineal:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}=\boldsymbol{K}+\beta\cdot\boldsymbol{\delta}_{ij}+\boldsymbol{u}_{ij} \tag{8.28}$$

para aquellos pares de puntos ij suficientemente cercanos, $\delta_{ij}<r$, y donde u_{ij} es un término de error. La constante K estimada será utilizada como estadístico

del contraste, ya que puede interpretarse como el valor medio $\epsilon(r)$ cuando $r=0$. Existen sin embargo una serie de limitaciones para utilizar este test para el contraste de la hipótesis de determinismo frente a la alternativa de procesos subyacentes puramente estocásticos. Estas limitaciones proceden del hecho de que a pesar de que cuando el sistemas generador de la serie es determinista de dinámica simple el valor esperado de K es cero, cuando el sistema es caótico determinista habrá una cota inferior mínima para el valor estimado de K que estará relacionada con la dependencia sensitiva respecto a las condiciones iniciales –los errores de medida también pueden hacer que aparezca un valor de $K>0$–.

Así para contrastar la hipótesis nula de que la serie procede de un sistema determinista habrá que estimar el estadístico K a partir de la serie original y comparar dicho valor con el correspondiente a la hipótesis alternativa de que el proceso generador de la serie de carácter puramente aleatorio. De esta forma, para aceptar la hipótesis de determinismo el valor de K estimado deberá ser estrictamente menor que el correspondiente al proceso generador estocástico bajo la hipótesis alternativa. Desafortunadamente, y debido a la multitud de posibles procesos estocásticos que pueden suponerse para la hipótesis alternativa, el test de Kaplan no se encuentra tabulado para contrastar la hipótesis de determinismo. Lo que sí resulta posible es utilizar el test de Kaplan para contrastar la hipótesis menos restrictiva de no-linealidad –determinista o estocástica–, frente a la alternativa de que el sistema generador es puramente estocástico y lineal. Para ello habrá que comparar el valor estimado del estadístico K obtenido a partir de la serie original con el valor de K que se obtendría si la serie hubiese sido generada por un proceso puramente estocástico y lineal.

Para la obtención del estadístico K bajo la hipótesis de linealidad, será necesario que el proceso lineal estocástico bajo esta hipótesis pueda haber generado la serie original con una alta verosimilitud. Kaplan utiliza la hipótesis de normalidad para generar un conjunto de series sustitutas de la serie original –series subrogadas–, generadas por sistemas estocásticos lineales generales con el mismo histograma, amplitud y función de correlación que la serie original. Con estas series subrogadas se pueden estimar los valores esperados para el estadístico K bajo la hipótesis alternativa de linealidad, y por ello, la hipótesis nula incluirá no sólo los sistemas caóticos deterministas sino también los sistemas estocásticos no lineales. Es por ello, que este test no puede utilizarse para detectar caos, sólo no-linealidad, aunque cuanto menor sea el valor estimado de K mayor el nivel de determinismo presente en la serie.

El procedimiento del test de Kaplan para contrastar la hipótesis de no-linealidad –determinista o estocástica– puede resumirse de la siguiente manera. Primero se construyen un conjunto de series subrogadas procedentes de sistemas normales lineales estocásticos generales que replican a la serie original –con el mismo histograma, amplitud y función de correlación–. Entonces se calcula el estadístico de Kaplan para estas series subrogadas –que

denominaremos *KS*– correspondientes a la hipótesis alternativa de linealidad. Los valores *KS* así obtenidos constituirán la cota superior para la posible presencia de comportamientos no-lineales. A continuación se calcula el estadístico *K* para la serie original. Si su valor es menor que el correspondiente al obtenido con las series subrogadas, entonces habrá que rechazar la hipótesis de linealidad. Si por el contrario el *K* estimado con la serie original es igual o superior al correspondiente a las series subrogadas entonces habrá que rechazar la hipótesis de no-linealidad.

La distribución de este estadístico no está tabulado. Sin embargo, Kaplan propone dos cotas máximas para el contraste de la hipótesis nulas de no-linealidad. La primera será el mínimo *KS* estimado a partir de las series subrogadas. La segunda cota máxima propuesta por Kaplan será la media geométrica de los *KS* calculados para todas las series subrogadas menos 2 o 3 veces la desviación típica de todos los KS estimados. En nuestras aplicaciones utilizamos 20 series subrogadas calculadas utilizando el anterior procedimiento propuesto por Kaplan –procesos gausianos estocásticos lineales generales con el mismo histograma, amplitud y función de correlación que la serie original–[27]. Los valores del estadístico *K* se calculan por la constante estimada en la regresión (8.28) utilizando todos aquellos pares de puntos reconstruidos por el método de los retardos para los cuales δ_{ij} es inferior a cierta proporción de la desviación típica, en particular, hemos utilizado aquellos pares para los cuales $\delta_{ij}<r=1.5\cdot\sigma_{yt}$ –siendo σ_{yt} la desviación típica de la serie original–[28]. En nuestras estimaciones utilizaremos el método de los retardos para la reconstrucción de las órbitas, y filtraremos las series originales linealmente siguiendo la metodología de los modelos ARMA en caso de que ello sea necesario.

En la tabla 8.4 mostramos los resultados del test de Kaplan para el mismo conjunto de series que las empleadas en el test BDS. Como se observa, los resultados obtenidos evidencian que el test de Kaplan es capaz de recoger la dependencia no-lineal presente en las series –una vez que éstas son filtradas por los correspondientes modelos ARMA–. Estos resultados corroboran los obtenidos por Barnett et. al. (1997), quienes muestran que este estadístico es bastante robusto incluso con series más cortas que las aquí empleadas. Nuestro resultados sólo discrepan de manera significativa respecto a los de estos autores cuando se analiza la serie procedente del proceso GARCH, ya que al igual que ocurría con el test BDS, el de Kaplan tampoco es capaz de captar la dependencia no-lineal presente en esta serie. Es por ello, que completamos estos test con el propuesto por Engle (1982) para detectar procesos ARCH.

---

[27] Para el cálculo del test de Kaplan utilizaremos los algoritmos proporcionados por el propio Kaplan (1996) para el programa Matlab.

[28] La elección del valor *r* adecuado para estimar el valor del estadístico *K* es quizás el elemento más arbitrario de la aplicación de este test, y pueden utilizarse otros criterios para su elección. En particular, Kaplan propone estimar la regresión (8.28) utilizando los 500 o 2000 pares de puntos con una menor distancia δ_{ij}.

Tabla 8.4
Test de Kaplan

		m=1	m=2	m=3	m=4	m=5
ARMA	KSmean =	1.290	1.206	1.140	1.067	1.058
	KSstd =	0.074	0.085	0.105	0.070	0.105
	KS =	1.141	1.036	0.929	0.926	0.848
	KSmin =	1.161	1.081	0.957	0.961	0.869
	Ktest =	*1.027*	*0.952*	*0.872*	*0.796*	*0.733*
RARMA	KSmean =	1.102	1.112	1.116	1.064	1.124
	KSstd =	0.010	0.041	0.047	0.079	0.126
	KS =	1.083	1.030	1.023	0.906	0.872
	KSmin =	1.075	1.009	1.033	0.925	0.916
	Ktest =	*1.132*	*1.169*	*1.196*	*1.145*	*1.152*
ARCH	KSmean =	1.438	1.442	1.451	1.468	1.436
	KSstd =	0.028	0.056	0.071	0.123	0.159
	KS =	1.381	1.331	1.310	1.223	1.119
	KSmin =	1.370	1.329	1.237	1.213	1.122
	Ktest =	*1.329*	*1.171*	*1.187*	*1.163*	*1.053*
NMA	KSmean =	1.362	1.365	1.403	1.353	1.388
	KSstd =	0.029	0.048	0.089	0.128	0.151
	KS =	1.304	1.268	1.225	1.097	1.087
	KSmin =	1.305	1.260	1.280	1.074	1.098
	Ktest =	*1.299*	*1.151*	*1.163*	*1.071*	*1.011*
GARCH	KSmean =	3.353	3.336	3.326	3.420	3.469
	KSstd =	0.055	0.147	0.209	0.317	0.360
	KS =	3.243	3.041	2.908	2.786	2.749
	KSmin =	3.253	3.016	2.827	2.711	2.943
	Ktest =	*3.330*	*3.188*	*3.131*	*2.801*	*2.874*
Henx	KSmean =	0.799	0.771	0.787	0.771	0.753
	KSstd =	0.016	0.029	0.026	0.044	0.064
	KS =	0.767	0.713	0.734	0.683	0.626
	KSmin =	0.765	0.720	0.747	0.671	0.652
	Ktest =	*0.133*	*0.035*	*0.054*	*0.064*	*0.076*
Rhenx	KSmean =	0.733	0.736	0.739	0.716	0.734
	KSstd =	0.012	0.030	0.032	0.034	0.057
	KS =	0.709	0.675	0.675	0.647	0.619
	KSmin =	0.710	0.675	0.673	0.651	0.617
	Ktest =	0.578	0.370	0.235	0.250	0.193
Log4	KSmean =	0.397	0.402	0.402	0.402	0.400
	KSstd =	0.006	0.012	0.013	0.015	0.020
	KS =	0.385	0.379	0.375	0.371	0.361
	KSmin =	0.384	0.384	0.378	0.373	0.373
	Ktest =	*0.008*	*0.013*	*0.023*	*0.021*	*0.056*
lordx	KSmean =	9.297	9.245	9.298	9.246	9.236
	KSstd =	0.161	0.333	0.376	0.760	0.704
	KS =	8.976	8.579	8.545	7.725	7.828
	KSmin =	8.994	8.624	8.404	8.296	7.951
	Ktest =	*7.862*	*6.872*	*7.323*	*7.262*	*7.957*
rossdx	KSmean =	12.272	8.652	4.545	4.646	4.556
	KSstd =	0.289	0.710	0.338	0.581	0.673
	KS =	11.695	7.232	3.869	3.484	3.209
	KSmin =	11.632	7.764	3.984	3.562	3.030
	Ktest =	*11.345*	*0.292*	*0.341*	*0.175*	*0.215*
Rrossdx	KSmean =	2.226	2.252	2.307	2.216	2.240
	KSstd =	0.044	0.084	0.156	0.181	0.257
	KS =	2.138	2.085	1.994	1.855	1.726
	KSmin =	2.143	2.103	1.945	1.927	1.806
	Ktest =	*1.890*	*1.585*	*1.765*	*1.499*	*0.942*

Tamaño muestral de las series N=500; m: dimensión de inserción; retardo para la reconstrucción τ=1;Retardo para el cálculo de la imagen dt=1;KSmean: estadístico K medio para las 20 series subrogadas; KSstd: desviación típica del estadístico K de las 20 series subrogadas; KS: Ksmean -2KSstd; Ksmin: mínimo estadístico K obtenido a partir de las 20 series subrogadas; Ktest: estadístico K para cada una de las series. La hipótesis de dependencia no-lineal se rechaza cuando Ktest>Ks o Ktest>Ksmin

El test ARCH-LM de Engle y el análisis del correlograma de cuadrado de la serie temporal.

Debido a las dificultades que presentan los anteriores test de no linealidad para discriminar entre ruidos caóticos y procesos de varianza condicional autorregresiva ARCH –Autoregressive Conditional Heteroskedasticity– así como sus distintas generalizaciones cuando se utilizan series cortas, complementaremos el análisis de la no-linealidad con el tradicional test LM para el contraste de modelos ARCH. Estos modelos introducidos por Engle (1982) describen series con periodos de alta volatilidad seguidos de periodos de baja volatilidad –persistencia en la varianza–, es decir, series heterocedásticas donde el tamaño –varianza– de los residuos en cada instante del tiempo parecen estar correlacionados con el tamaño de los residuos en periodos precedentes –grandes cambios en la serie seguidos por grandes cambios y pequeños cambios en la serie serán seguidos por otros también de pequeña magnitud–. Los procesos ARCH(p) pueden escribirse de manera genérica como (Hamilton 1994, pp.657-664):

$$e_t=\sqrt{h_t}\cdot v_t \tag{8.29}$$

con $v_t \sim$ IID N(0,1) y siendo h_t la varianza condicional del proceso:

$$h_t=\omega+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e_{t-i}^2 \tag{8.30}$$

Engle (1982, p.1000) propuso un test LM –*Lagrange multiplier*– para contrastar la hipótesis nula de que $\alpha_1=\alpha_2=...=\alpha_p=0$, que sigue una distribución $\chi^2(p)$ bajo la hipótesis nula de ausencia de dependencia ARCH.

En nuestras aplicaciones completaremos este test LM con el análisis del correlograma de e_t^2, para la cual aparecerán correlaciones significativas correspondientes a la estructura autoregresiva de su varianza condicional (Bollerslev, 1988).

Cuando la serie temporal sigue alguna de las distintas generalizaciones de estos procesos ARCH[29], cabe esperar que la aplicación del test LM sea capaz

---

[29] Estas generalizaciones incluyen, entre otras, a los procesos GARCH(p,q) introducidos por Bollerslev (1986) donde la varianza condicional del proceso se especifica ahora como:

$$h_t=\alpha_0+\sum_{i=1}^{p}\alpha_i e_{t-i}^2+\sum_{i=1}^{q}\beta_i h_{t-i}$$

Otras generalizaciones son las constituidas por los procesos TARCH –Threshold ARCH– (Glosten, Jagannathan y Runkle, 1993) para los cuales:

$$h_t=\alpha_0+\alpha_1\cdot e_{t-1}^2+I_{t-1}\cdot\alpha_2\cdot e_{t-1}^2+\beta_1 h_{t-1} \quad ; I_{t-1}=1 si\ e_{t-1}\geq 0\ ,\ I_{t-1}=0\ si\ e_{t-1}<0$$

o los procesos EGARCH –exponential GARCH– (Nelson, 1991) donde:

$$\log h_t=\alpha_0+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\left[|v_{t-i}|-E|v_{t-i}|+\beta v_{t-i}\right]$$

con $v_t \sim$ IID N(0,1).

de detectar la posible estructura autoregresiva en su varianza condicional. El mismo resultado se obtendría al analizar el correlograma del cuadrado de estos procesos.

Por otro lado, debemos recordar que los procesos caóticos deterministas presentan también una estructura no lineal, y por tanto, el análisis del correlograma del cuadrado de una serie temporal caótica y la aplicación del test LM también pueden revelar cierta dependencia autorregresiva como ya fue analizado en el apartado 4.3., por lo que en realidad este test tampoco será capaz de discriminar entre procesos no-lineales puramente estocásticos de los caótico determinista.

Tabla 8.5
Test ARCH-LM de Engle

	Estadístico F	Estadístico $n\mathrm{R}^2$
ARIMA	1325.35 (0.00)	419.64 (0.00)
RARIMA	2.09 * (0.15)	2.09 * (0.15)
ARCH	61.03 (0.00)	54.57 (0.00)
NMA	19.64 (0.00)	18.97 (0.00)
GARCH	0.42 * (0.52)	0.42 * (0.52)
henx	44.70 (0.00)	106.28 (0.00)
Rhenx	27.35 (0.00)	90.27 (0.00)
log4	2.19 * (0.14)	2.19 * (0.14)
lordx	18.25 (0.00)	17.68 (0.00)
rossdx	238.61 (0.00)	351.10 (0.00)
Rrossdx	36.68 (0.00)	34.28 (0.00)

Probabilidad de Aceptar la hipótesis nula –ausencia des estructura ARCH– entre paréntesis.

En la Tabla 8.5 se muestran el estadístico F y el estadístico $n\mathrm{R}^2$ del test ARCH-LM de Engle para el conjunto de series seleccionadas anteriormente para mostrar la potencia de los test de no-linealidad. Como se observa, sólo en tres casos –marcados con asteriscos– se puede aceptar la hipótesis nula de ausencia de autocorrelación no lineal en la varianza condicional del proceso subyacente generador del proceso –ausencia de estructura ARCH–: en la serie de residuos del modelo ARMA, en el proceso GARCH y en la ecuación logística. Así, mientras que el test de Engle recoge correctamente el paseo aleatorio gausiano del filtro ARMA, falla a la hora de detectar las no-linelidades del proceso GARCH –hasta aquí se obtienen los mismos resultados que con el test de Kaplan y el BDS– y de la aplicación logística.

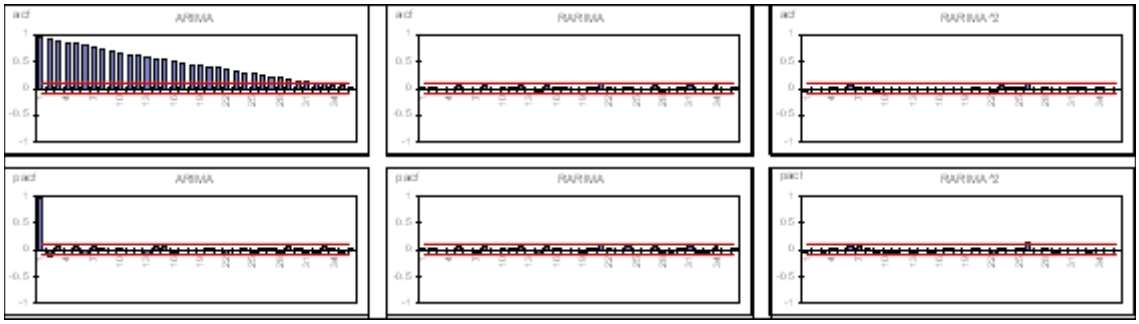


Figura 8.31

En las figuras 8.31 a 8.38 mostramos el correlograma de las series así como de sus cuadrados –en su caso de los residuos del filtro lineal aplicado–. Como se observa, este análisis del correlograma es capaz de revelar la estructura no-lineal en los procesos generadores de las respectivas series a excepción, de nuevo, del proceso GARCH –sí recoge la dependencia no-linea de la serie generada por la aplicación logística–.

Nótese igualmente, que las series para las cuales hemos aplicado un filtro lineal ARMA según el Criterio de Información de Schawrz –serie ARMA, henx y rossdx–, son precisamente aquellas en las que el correlograma de la serie original presenta algún valor para la función de autocorrelación simple o parcial significativamente distinta de cero. Igualmente, este análisis gráfico revela que con el correspondiente filtro lineal aplicado a estas series se consigue recoger toda la estructura lineal, al aparecer un correlograma plano en las series de residuos de los correspondientes modelos.

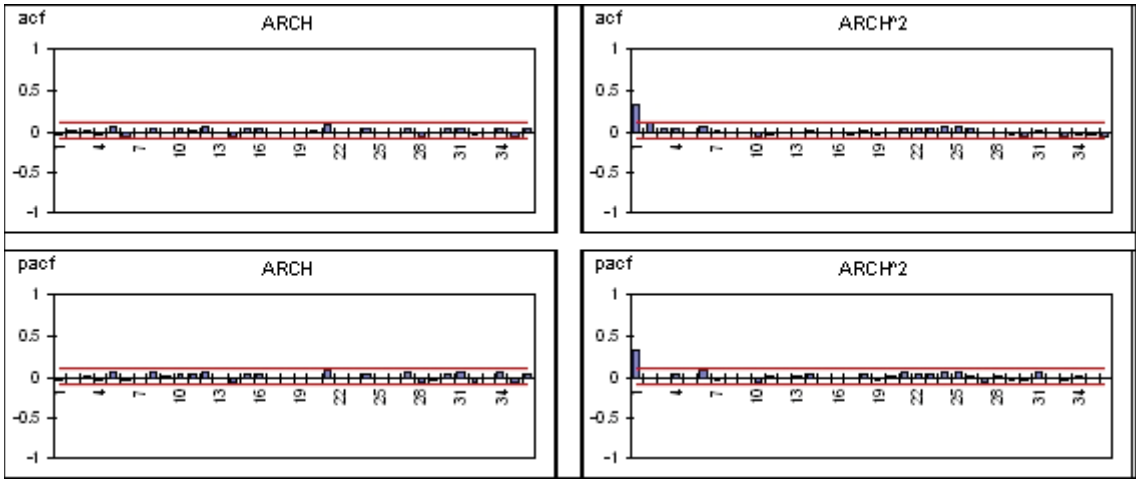


Figura 8.32

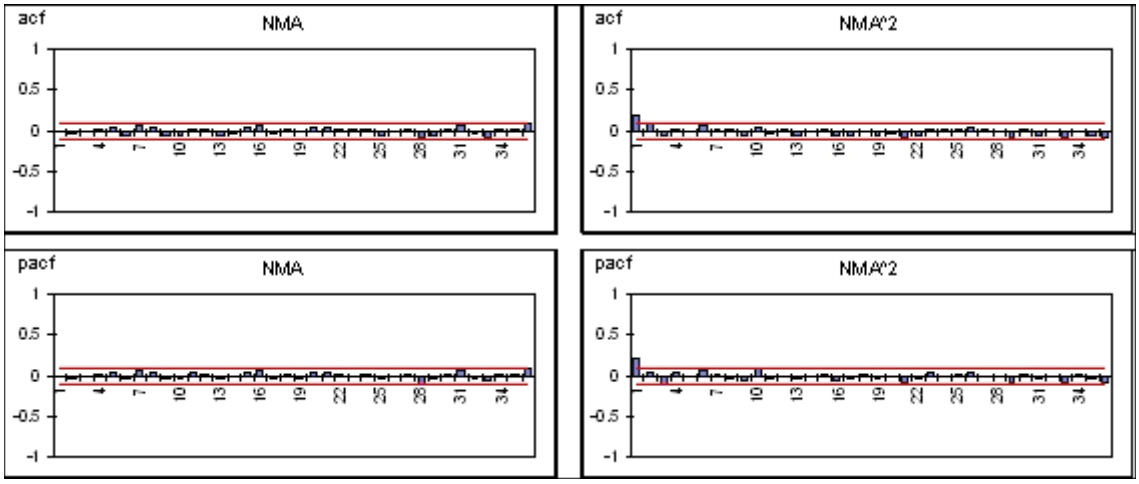


Figura 8.33

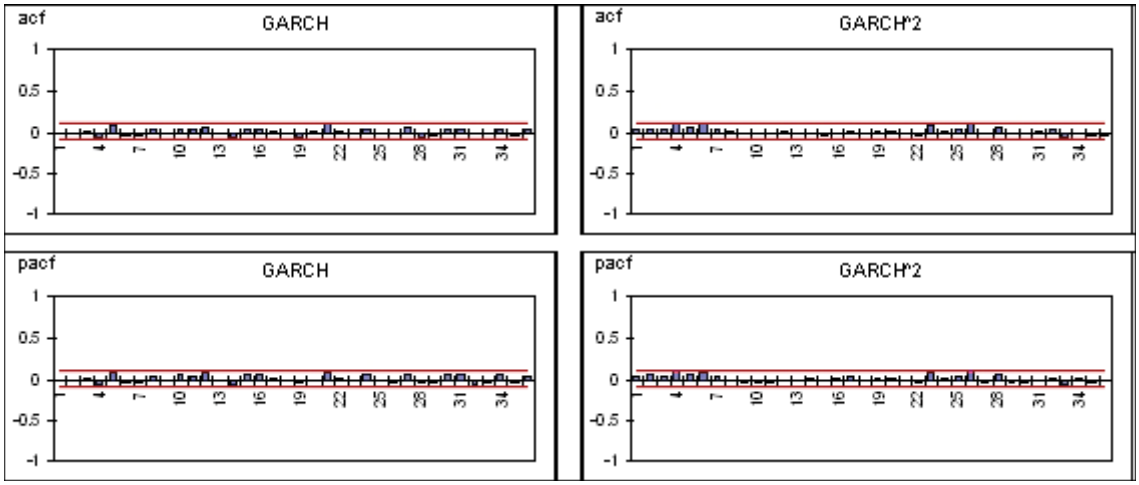


Figura 8.35

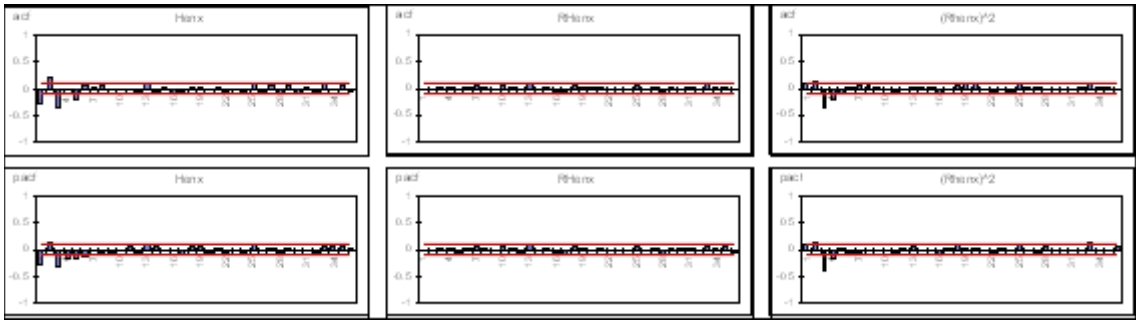


Figura 8.34

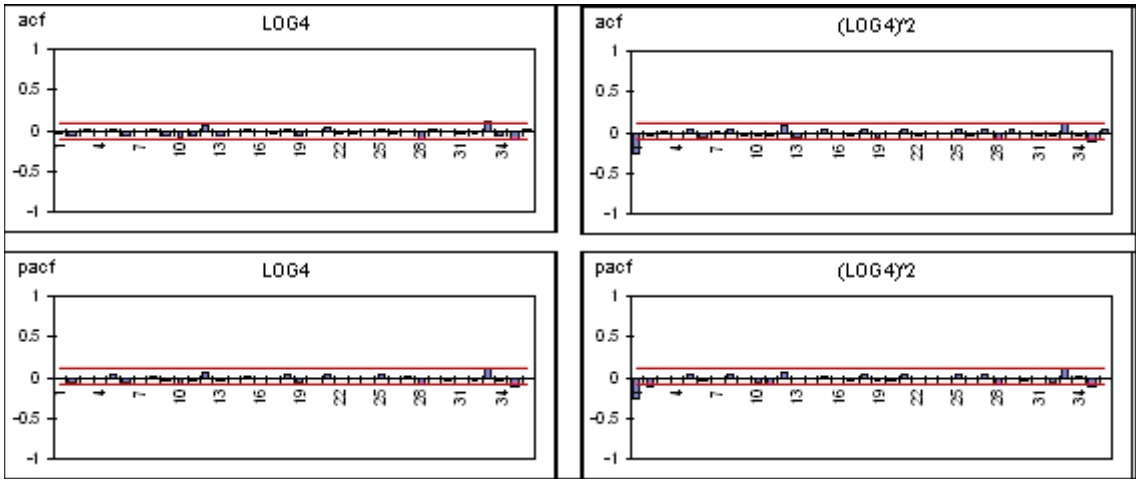


Figura 8.36

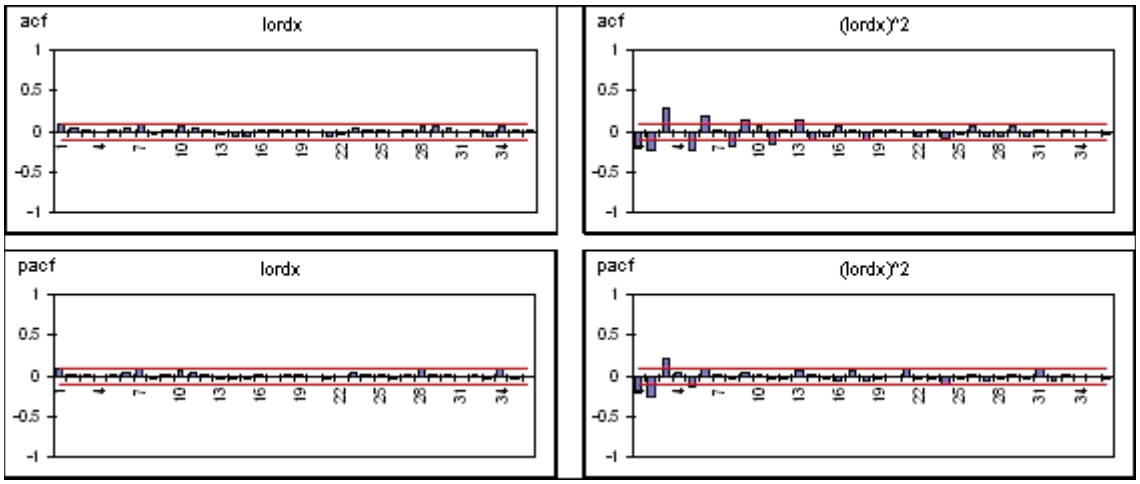


Figura 8.37

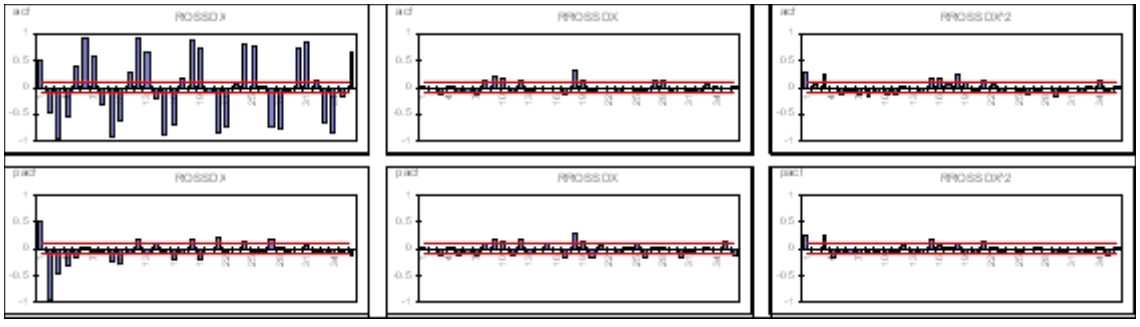


Figura 8.38

El análisis R/S como test de No-linealidad

En el capítulo 3 introdujimos el análisis R/S y el exponente de Hurst como un instrumento complementario al correlograma y el periodograma para captar cualquier tipo de dependencia lineal o no lineal así como la existencia de comportamientos cíclicos medios –memoria– en la dinámica subyacente a una serie temporal. En relación con este análisis R/S se introdujo también el test de Anis-Lloyd (1976) para contrastar la hipótesis de que el proceso sigue una distribución del tipo camino aleatorio gausiano, es decir, que constituye una sucesión de variables idéntica e independientemente distribuidas N(0, σ). Como ya comentamos, el análisis R/S y el test Anis-Lloyd puede ayudar en la detección del caos determinista en la medida de que permiten confirmar la presencia de ruidos distintos al blanco –ruido rosa persistente o ruido negro antipersistente–, y con ello la posibilidad de que la serie temporal haya sido generada por procesos caóticos donde la persistencia o antipersistencia de la serie vendrá dada por la dinámica determinista subyacente. Recordemos, sin embargo, que los sistemas en régimen caótico no son los únicos capaces de generar ruidos coloreados. Los procesos puramente estocásticos –lineales y no lineales– también pueden generan ruidos distintos al blanco cuando éstos están correlacionados en el tiempo. Es por ello que el análisis R/S y la estimación del exponente de Hurst no constituye en sí un test directo para contrastar la existencia de comportamiento caótico, aunque sí permite rechazar la hipótesis de comportamiento aleatorio del tipo ruido blanco.

El análisis R/S y el test de Anis-Lloyd pueden considerarse, por tanto, como un test para contrastar la existencia de IID en el mismo sentido que el anteriormente analizado test BDS –con la diferencia de que aquí se impone adicionalmente la hipótesis de Normalidad–. Proponemos por ello, completar los anteriores test para la detección de comportamientos no-lineales, ya sean éstos estocásticos o deterministas, con el test de Anis-Lloyd. Para ello, deberán utilizarse filtros lineales generales del tipo ARMA con los que intentar *pre-blanquear* la serie. Posteriormente, la aplicación del test de Anis-Lloyd sobre los residuos de dichos filtros lineales se utilizará, de manera análoga al test BDS, para tratar de contrastar si con este tipo de filtros se está recogiendo toda la estructura o dependencia temporal presente en la serie, o si por el contrario queda parte de dicha estructura temporal sin explicar, en cuyo caso deberá ser de carácter no-lineal. En conclusión, si mediante la aplicación de un filtro ARMA las series no presentan comportamientos significativamente distintos al ruido blanco deberemos rechazar la hipótesis de comportamiento caótico en la serie original, esto es, deberemos aceptar que la persistencia o antipersistencia de la serie viene explicada por un proceso lineal y por tanto no caótico.

En la tabla 8.6 mostramos los exponentes de Hurst estimados así como el estadístico de Anis-Lloyd para las series utilizadas anteriormente con el resto de test de no-linealidad. Recordemos que este estadístico se distribuye como una N(0,1) bajo la hipótesis nula de que los datos de la serie están IID N(0,σ).

Los resultados parecen recoger bastante bien la estructura no lineal subyacente en las series. Se acepta la hipótesis nula en el caso de los residuos del modelo ARMA, que constituyen efectivamente un verdadero camino aleatorio gausiano. Tampoco se puede rechazar, erróneamente, la hipótesis nula para el caso de la serie ARCH. Para el resto de series, con mayor o menor intensidad se rechaza hipótesis nula, detectándose la existencia de ciertas dependencias temporales –series persistentes o antipersistentes– que tendrán que ser de carácter no-lineal.

Tabla 8.6
Análisis R/S y test de Anis-Lloyd

	Exponente de Hurst	Estadístico Anis-Lloyd
ARMA	0.90	159.95
RARMA	0.58	0.07
ARCH	0.58	0.63
NMA	0.59	4.38
GARCH	0.57	-3.81
henx	0.36	-109.74
RHenx	0.62	18.72
log4	0.43	-73.15
lordx	0.66	42.92
rossdx	0.07	-255.01
Rrossdx	0.47	-53.47

El exponente de Hurst bajo la hipótesis nula IID N(0, σ) es 0.58. El estadístico Anis-Lloyd se distribuye bajo la hipótesis nula como una N(0, 1)

9.5. El test residual y el test del barajado.

Los test de no-linealidad presentados en el apartado anterior pueden ayudar a detectar comportamientos caóticos en la medida de que la no-linealidad es una condición necesaria para que un sistema dinámico pueda generar soluciones caóticas. Sin embargo, la detección de no-linealidad no implica necesariamente que el sistema subyacente generador de una serie temporal sea caótico. Existen una gran multitud de sistemas no caóticos tanto deterministas –que generan ciclos límite, movimientos toroidales cuasi-periódicos– como puramente estocásticos –procesos ARCH, GARCH, ...– que también tienen una estructura no-lineal. Es por ello que pese a que los test de no-linealidad suponen una primera etapa fundamental en el proceso de detección de caos determinista, deban completarse con la estimación de las medidas invariantes del caos analizadas en el capítulo 5 –dimensión fractal y exponenetes de Lyapunov– con las cuales sí es posible contrastar directamente la hipótesis de caos determinista.

El test Residual de Brock (1986)

Como ya se comentó en la introducción al presente capítulo existen alunas dificultades que limitan la potencia de esos test para la detección directa del caos cuando se aplican sobre las series temporales económicas. Así, además de la calidad y cantidad de datos disponibles Brock(1986) y Brock y Sayers(1985 y 1988) muestran que cuando se aplican los test para la detección del caos –exponente de Lyapunov y dimensión fractal– sobre series generadas por procesos autoregrasivos con raíces unitarias –o aproximadamente unitarias– o por procesos AR(2) lineales con raíces complejas, los resultados pueden mostrar erróneamente evidencia de comportamientos caóticos. Es por ello, que para evitar estos problemas de forma que se mejore la potencia de estos test para la detección del caos, estos autores recomiendan filtrar la serie con modelos lineales autoregresivos AR(p) con los que extraer o recoger toda la posible dependencia lineal presente en la serie antes de aplicar sobre ellas los test del caos. Brock(1986, p.180) demuestra que al ser estos modelos lineales *suaves* en el sentido apuntado por el teorema de Takens –apartado 5.1–, tanto la dimensión fractal como el espectro de exponentes de Lyapunov estimados con la serie original y con los residuos del filtro lineal autoregresivo serán idénticos cuando la serie ha sido generada efectivamente por un sistema dinámico caótico determinista. Por el contrario, si la serie procede de algún sistema lineal autoregresivo, los residuos no presentarán ninguna estructura dinámica y la aplicación de estos test rechazarán correctamente la hipótesis de caos determinista.

Fernández Rodríguez (1995, pp. 162-165) generaliza los resultados de Brock cuando su utilizan filtros lineales generales ARMA (p,q). Es decir, que los residuos generados por el ajuste de un modelo ARMA sobre la serie original pueden utilizarse para reconstruir el espacio de fases del sistema dinámico desconocido generador de la serie.

Este test residual se fundamenta en que aplicando el teorema de Takens se demuestra que la evolución temporal que siguen las *m*-historias construidas por el método de los retardos a partir de un *observable*, $\{y_t\}$, presenta una dinámica conjugada con la del sistema original cuando dicho observable es una función suave C^2 de las variables de estado del sistema subyacente desconocido $-y_t=h(\boldsymbol{x}_t)-$ y la dimensión de inserción *m* es suficientemente elevada. Es decir, que el atractor reconstruido a partir del observable presentará los mismos invariantes dinámicos que el atractor original, no dependiendo la conjugación de las dinámicas, de forma genérica, del observable concreto elegido –de la función $h(\cdot)$ concreta, de la cual sólo se exige que sea suave–. Así, cuando sobre el observable original se aplica un filtro lineal general ARMA(p,q) se seguirá respetando las condiciones impuestas por el teorema de Takens para poder reconstruir el espacio de fases original.

El test Residual propone, por tanto, comparar los resultados obtenidos al aplicar los test del caos sobre la serie original observada y sobre los residuos

generados por el filtro lineal ARMA que mejor ajuste la serie. Si el proceso generador de la serie es realmente caótico, entonces dichos resultados no deben sufrir variaciones considerables[30]. Cuando el proceso generador no sea caótico, entonces los resultados obtenidos a partir de los residuos del filtro lineal, deberán rechazarán la hipótesis de caos determinista aunque la serie original no sea capaz de hacerlo. En este caso, no podrá mejorarse mediante el uso de las técnicas del caos la explicación que sobre el comportamiento de la serie proporciona la especificación ARMA. Si adicionalmente, los test de no-linealidad no son capaces de rechazar la hipótesis de que los residuos son IID entonces habrá que aceptar que el proceso ARMA constituye el mejor modelo univariante con el que recoger la estructura del proceso desconocido generador de las serie temporal.

El test del Barajado de Scheinkman y Lebaron (1989a)

Otro método con el cual se puede mejorar la potencia de los test para la detección del caos es el test del barajado de Scheinkman y Lebaron (1989a), que, al igual que el test residual de Brock puede ayudar a detectar estimaciones espúreas en la dimensión fractal y los exponentes de Lyapunov.

Este test se basa en el barajado o mezclado aleatorio de los datos que componen la serie temporal a analizar –la serie original o los residuos de su correspondiente filtro lineal–, de forma que con dicho barajado se rompa cualquier estructura dinámica determinista –lineal o no-lineal– presente en los datos. Esto es, si en la serie analizada existiese algún tipo de estructura caótica determinista, ésta debería desaparecer al ser barajada aleatoriamente la serie, que debería a aparecer entonces como incorrelacionada.

De esta manera, el test del barajado propone estimar la dimensión de correlación y el exponente de Lyapunov sobre la serie original y sobre la serie desordenada aleatoriamente. Entonce, si la serie procede de un sistema caótico determinista la dimensión de correlación debe aumentar significativamente con el mezclado, desapareciendo, adicionalmente, cualquier exponente de Lyapunov positivo. Por otro lado, si la serie original procede de un proceso puramente estocástico –lineal o no lineal–, ni la dimensión de correlación ni el exponente deberían sufrir grandes variaciones tras su barajado.

---

[30] Pueden existir ciertas discrepancias entre los resultados obtenidos sobre la serie original y sobre la serie de residuos del filtro ARMA(p,q) aunque el sistema generador de dicha serie sea efectivamente caótico. Ello se debe, en primer lugar, a la posible coexistencia de comportamientos caóticos con otros puramente aleatorios o lineales. Adicionalmente, dichas diferencias podrán aparecer porque, como puede demostrarse, cualquier polinomio MA(q) invertible puede transformarse en otro AR(∞). Es decir, cuando en el filtro lineal se utilicen componentes MA, se estará recogiendo autocorrelaciones temporales lineales de orden infinito –dependencias a largo plazo–, reduciéndose así parte de la dependencia temporal no-lineal del proceso caótico desconocido.

A modo ilustrativo de la aplicación del test residual y el test del barajado en la tabla 8.7 mostramos los resultados de la estimación del espectro de exponentes de Lyapunov –utilizamos el algoritmo NETLE de redes neuronales artificiales– y la dimensión fractal –dimensión de Lyapunov y de correlación– del atractor de Henon –a=1.4; b=0.3– a partir de la serie temporal de la variable x de tamaño N=500.

Tabla 8.7
Test residual y del barajado

Serie	Exponentes de Lyapunov método NETLE		Dimensión de Lyapunov	Dimensión de Correlación
henx	$\lambda_1 \approx .42$ $\lambda_2 \approx -1.63$	N=498, τ=1 k=17 CIS= -19.97 (-.62)	$D_L \approx 1.26$	$D_C \approx 1.41$
Rhenx	$\lambda_1 \approx .23$ $\lambda_2 \approx -.60$	N=495, τ=1 k=5 CIS=-1.86(-.90)	$D_L \approx 1.38$	$D_C \approx 2.29$
Bhenx	$\lambda_1 \approx -8.64$ (-∞) $\lambda_2 \approx -9.85$ (-∞)	N=498, τ=1 k=1 CIS=-.58 (-.63)	$D_L \approx \infty$	$D_C \approx \infty$
BRhenx	$\lambda_1 \approx -2.61$ (-∞) $\lambda_2 \approx -2.96$ (-∞)	N=495, τ=1 k=1 CIS=-0.85 (-0.90)	$D_L \approx \infty$	$D_C \approx \infty$

henx serie original; *Rhenx*: serie de residuos de la aplicación del filtro ARMA(3,1) –seleccionado por el Criterio de información de Schwarz–; *Bhenx*: serie original barajada; *Brhenx*: serie de residuos barajada. N: tamaño de la muestra en la estimación de la red neuronal artificial, τ: retardo para la reconstrucción; k: número de nodos en la capa oculta; CIS: Criterio de información de Schwarz para la selección de k (entre paréntesis CIS para k=0).

Como puede observarse, en cuanto al test residual, aunque hay una caída en el exponente máximo de Lyapunov estimado, y un aumento en la dimensión fractal estimada –sobre todo cuando se utiliza la dimensión de correlación– el exponente de Lyapunov positivo junto a la convergencia de la dimensión de correlación –figuras 8.39 y 8.40 parecen revelar la presencia de comportamiento caótico en el proceso generador. Este resultado se ve reforzado cuando se utiliza el test de barajado, ya que en ambos casos desaparece claramente el exponente de Lyapunov positivo y desaparece la convergencia clara en la dimensión de correlación –figuras 8.41 y 8.42–, es decir, los resultados parecen evidenciar que existía una dependencia temporal en las series que ha sido destruida con el mezclado o barajado de las series.

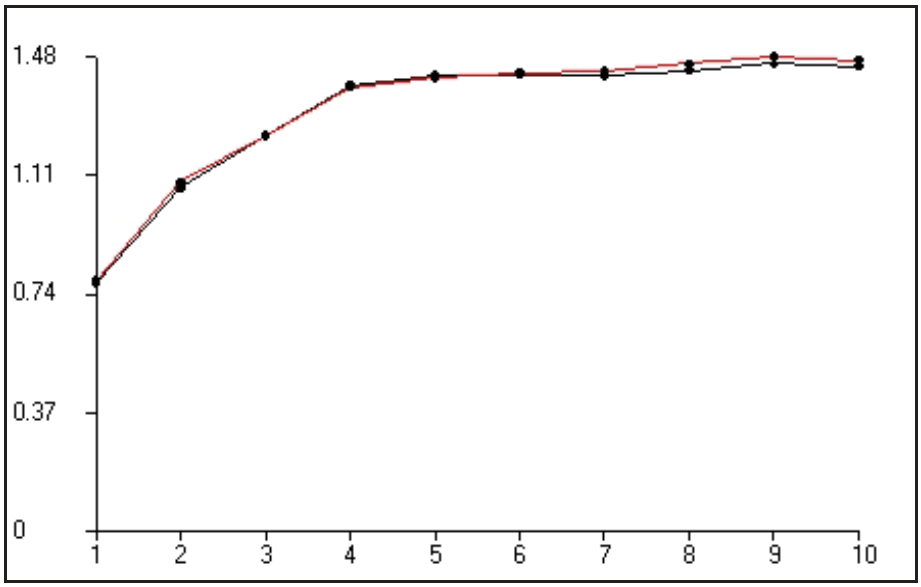


Figura 8.39 Dimensión de correlación serie *henx*.

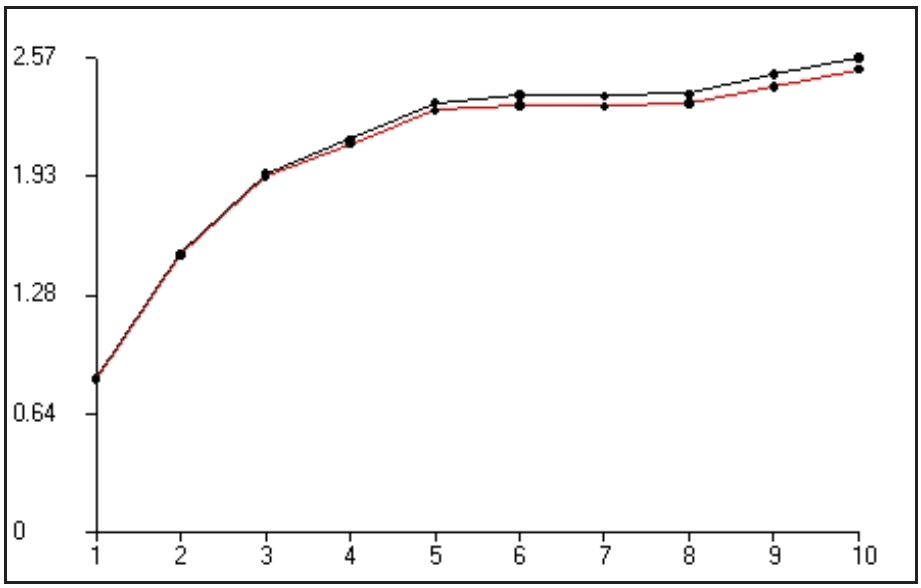


Figura 8.40 Dimensión de correlación serie de residuos *Rhenx*

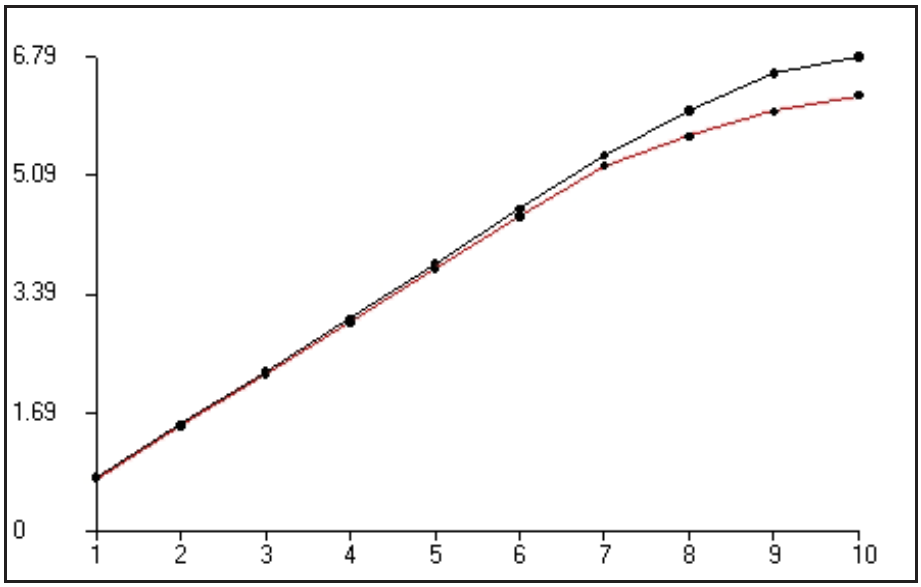


Figura 8.41. Dimesnión de correlación para la serie original barajada *–Bhenx–*

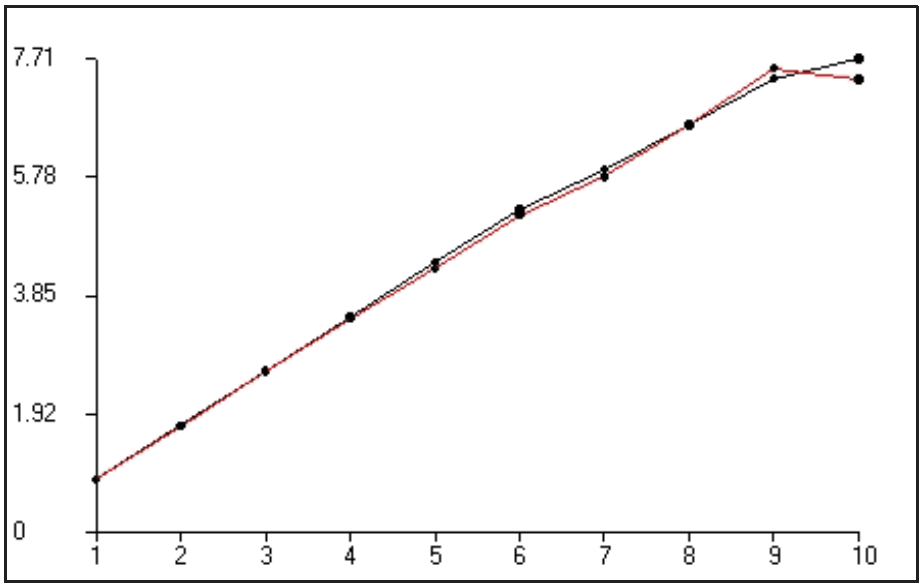


Figura 8.42 Dimensión de correlación serie barajada residuos filtro lineal *–BRhenx–*

CAPÍTULO 9

ANÁLISIS DE LAS SERIES TEMPORALES DE LA ECONOMÍA REAL ESPAÑOLA. ¿PRESENTA LA EVOLUCIÓN DE LA ECONOMÍA UN COMPORTAMIENTO CAÓTICO?

En este capítulo aplicaremos las técnicas para tratar de encontrar evidencia de comportamientos caóticos no-lineales a partir de las series económicas reales españolas. Existen en la literatura un gran número de trabajos que tratan de detectar la presencia de no-linealidades y de caos determinista a partir de series temporales económicas. A continuación destacaremos algunas de estas aportaciones[1].

Uno de los primeros trabajos para la detección de caos determinista en series macroeconómicas es el de Brock y Sayers (1985 y 1988) quienes analizan las series de la tasa de desempleo, empleo, PNB real, Inversión y producción real de la economía norteamericana –utilizan datos trimestrales desde finales de los 40 hasta mediados de los 80–, no encontrando evidencia clara de caos determinista de baja dimensión utilizando la dimensión de correlación –además las dimensiones estimadas aumentan considerablemente para los residuos resultantes de la aplicación de filtros lineales autoregresivos

[1] Para un resumen de estas aportaciones véase Frank y Stengos (1988a y 1988b); Benhabib (1992); Brock y Potter (1993); Pesaran y Potter (1993); Barnett, Kirman y Salmon (1996); y Barnett, Medio y Serletis (1997).

a las series– y el método directo de Wolf et al. (1985) para la estimación del exponente de Lyepunov dominante. Sí encuentran, por otro lado, evidencia clara de no-linealidad en las series de desempleo, empleo y producción industrial, siendo la evidencia de no-linealidad menos fuerte en la inversión, y nula para la serie del PNB real –para ello utilizan el test BDS sobre las series originales y pre-filtradas con modelos lineales autoregresivos–.

Posteriormente, Frank y Stengos (1988a), replicaron el estudio de Brock y Sayer(1985) para la economía canadiense, no encontrando una evidencia tan fuerte de no-linealidad –no utilizan el test BDS– y rechazando la hipótesis de caos de baja dimensión basándose en la dimensión de correlación –sin estimar exponentes de Lyapunov– en las series agregadas de PNB, Consumo privado, Gasto público e Inversión –la mayoría de estas series son trimestrales desde 1947–.

Frank,Gencay y Stengos(1988), utilizan la dimensión de correlación y el máximo exponente de Lyapunov sobre las series del PNB real trimestral de las economías Alemana, Italiana Japonesa y Británica –los datos comprenden en la mayoría de las series el periodo1960 a 1985–. Los resultados que obtienen se pueden resumir en que los residuos del filtro lineal recogen bien la estructura subyacente en la series de Alemania y R.U mientras que para Italia el resultado es ambiguo y poco concluyente. El resultado que genera más controversia es el obtenido para la economía japonesa, ya que para este país se acepta la hipótesis de no-linealidad estimándose adicionalmente un exponente de Lyapunov positivo –el método utilizado por estos autores es similar al de Wolf et al. (1985)–.

Scheinkaman y LeBaron (1989b), utilizan el test BDS en la serie anual del PNB per cápita de USA para el periodo 1872 a 1986, encontrando comportamientos significativamente no-lineales. Este resultado, sin embargo, no se sostiene cuando se trata de corregir la serie analizada. En concreto, estos autores no son capaces de rechazar la hipótesis de que el modelo generador sea un modelo lineal autoregresivo AR(2) una vez que se extrae la tendencia central de crecimiento de la serie y ésta ha sido corregida por los cambios en la varianza de las innovaciones para las submuestras 1872-1946 y 1947-1986 –con intervención con variables cualitativas en la gran deperesión 1930-39 y en la segunda guerra mundial 1940-1945–.

Quizás los resultados que con mayor fuerza sostienen la hipótesis de comportamiento caótico sean los de Barnett y Chen (1988) quienes estudian diversas series de agregados monetarios aplicando la dimensión de correlación y el máximo exponente de Lyapunov. Ramnsey, Sayers y Rothman (1990) cuestionan estos resultados, ya que según estos autores la estimación de la dimensión de correlación utilizada por Barnett y Chen se encuentra sesgada a la baja. Tras la corrección necesaria para estimar de forma robusta la dimensión de correlación, estos autores encuentran que la evidencia de baja dimensionlidad parece menor.

Por otra parte DeCoster y Mitchell(1991) confirman los resultados de Barnett y Chen(1988), mientras que Barnett y Hinich (1993) aplicando sobre las series de M_1 y M_2 utilizadas por Barnett y Chen el test bi-espectral encuentran de nuevo evidencia de no-linealidad.

El trabajo de Barnett y Chen(1988) es retomado por Barnett et al. (1995), quienes utilizando distintos tests –entre ellos el test BDS y el test de Kaplan– encuentran de nuevo evidencia a favor de no-linealidad en estas series monetarias, y utilizando el algoritmo LENS estiman un exponente positivo para los agregados monetarios M_2 y M_3.

Entre el resto de aportaciones que se centran en la búsqueda de comportamientos no-lineales utilizando métodos alternativos a los considerados en el capítulo 8, podemos citar las siguientes: Ashley y Patterson (1989) quienes usando técnicas biespectrales han encontrado resultados a favor de la no-linelidad en datos mensuales de la producción industrial estadounidense (1947-1985) corroborando los resultados de Brock y Sayers (1986); posteriormente (Ashley y Patterson, 1999) estos autores encuentran también evidencia de no-linealidades en la serie de PIB real estado unidense (1953-1993) utilizando un mayor número de test de no linealidad utilizan ; Chen(1996) encuentra evidencia de ciclos deterministas persistentes en las series reales del ciclo económico estadounidense con ruidos coloreados rechazando la hipótesis de linealidad; Neftçi (1984 y 1986) y McNevin y Neftçi (1992) que encuentran comportamientos cíclicos asimétricos no-lineales para series largas de la economía USA 1890-1981; Rothman (1996), encuentra evidencia fuerte de no-linealidad en 19 de las 24 series examinadas para la producción, precios, inversión y oferta monetaria de Australia, Canada, Italia, Suecia, Reino Unido y los USA; y Teräsvirta y Anderson (1992), que estudian las series de producción industrial encontrando comportamientos no-lineales para un gran número de los países estudiados, encontrando incluso evidencia débil de comportamiento caótico para las economías de USA, Canadá y Japón.

En resumen, pese a las deficiencias de las series reales utilizadas, algunas series como las de producción industrial en USA o la serie del PNB Japonés presentan una clara evidencia de comportamientos no-lineales, aunque en general la evidencia de comportamientos caóticos, en el mejor de los casos, es muy débil, aunque tampoco existe una evidencia fuerte que permita afirmar que las series económicas son totalmente incompatibles que la hipótesis de caos determinista bajo dimensional (Brock y Hommes, 1997, p.3)[2]. Nos enfrentamos, por tanto, al hecho apuntado ya por Day (1992) y que Brock y

[2] Reflejamos aquí únicamente los trabajos que se centran en el análisis de series temporales macroeconómicas. Existe un mayor número de aportaciones que se centran en series monetarias y financieras. Un resumen de estos trabajos puede encontrarse en LeBaron (1991, 1994), Frank y Stengos (1988b), Brock y Lima (1996) y Malliaris y Stein (1999). En general, estos trabajos encuentran una evidencia más fuerte de comportamientos no-lineales que aquellos otros que se centran en series macroeconómicas, aunque la evidencia favor de comportamiento caótico determinista en las series financieras resulta también débil.

Hommes denominan *la paradoja modelo-datos del caos*, en el sentido de que aunque es difícil detectar comportamientos caóticos a partir de las series económicas y financieras, resulta muy fácil construir modelos económicos de equilibrio que bajo supuestos con plausibilidad creciente con el número de dimensiones del sistema, muestran una dinámica caótica compleja.

En este capítulo aplicaremos las distintas técnicas y metodología analizadas en los capítulos 4, 5 y 8 para tratar de encontrar evidencia de comportamientos caóticos no-lineales en las series económicas reales españolas. Podemos adelantar que los resultados obtenidos resultan poco concluyentes respecto a la existencia de caos determinista –aunque se obtienen exponentes de Lyapunov positivos para las series trimestrales del PIB y Valor Añadido, estas estimaciones no pueden considerarse definitivas–, aunque sí se obtiene una evidencia clara a favor de la hipótesis de no-linealidad en la mayoría de series temporales analizadas.

Este resultado podría utilizarse, por tanto, para reforzar la hipótesis estocástica del enfoque del ciclo exógeno y rechazar la hipótesis de caos determinista. Sin embargo, estos resultados sobre la detección del caos determinista no deben tomarse como concluyentes.

Como ya tuvimos ocasión de analizar en el anterior capítulo 8, las limitaciones a la que nos enfrentamos a la hora de contrastar la hipótesis de comportamientos caóticos en la evolución de las series temporales económicas se encuentran, fundamentalmente, en la calidad y cantidad de los datos disponibles –la mayoría de las técnicas propuestas para detectar la posible presencia de comportamientos caóticos necesitan de series largas y limpias de culaquier tipo de ruido puramente aleatorio–.

Así, además de por las propias limitaciones de los distintos test propuestos en la literatura, la escasa evidencia a favor del caos determinista quedaría explicada por las propias características de las series temporales disponibles para la economía real española –serie cortas, agregadas y obtenidas, en muchos casos, a partir de extrapolaciones lineales–.

Para evitar estas limitaciones la mayoría de test para encontrar evidencia de no-linealidades y comportamientos caóticos en las series económicas españolas han sido aplicados al estudio de series financieras, en las que algunas de esas limitaciones de las series reales desaparecen. Entre algunas de estas aportaciones podemos citar a Maravall (1983); Bajo, Fernández Rodríguez y Sosvilla(1992); González Veiga (1994); Olmeda (1995); Fernández Rodríguez (1995); Olmeda y Pérez (1995); Montoro Pons (1996); Grau (1996); y Fernández Díaz (2000).

9.1. Análisis del crecimiento en la economía española: 1850-1999.

A continuación aplicaremos las técnicas para la detección de comportamientos caóticos en las series reales de la economía española. Comenzamos analizando series que recojan la actividad económica en un rango amplio del tiempo.

Una de las limitaciones fundamentales a la hora de encontrar evidencia de comportamientos caóticos en las series reales económicas se encuentra en la calidad y cantidad de datos disponibles. En nuestra aplicación utilizaremos las series históricas estimadas por Prados (1995) para el nivel de PIB desde 1850 hasta 1963[3]. Estas series han sido enlazadas con los datos de contabilidad nacional del INE hasta 1999 utilizando la tasa de crecimiento del PIB nominal y el deflactor del PIB[4]. En las figuras 9.1 a 9.3 presentamos el nivel así como la tasa de crecimiento del PIB nominal, el real y el deflactor del PIB para el periodo 1850-1999.

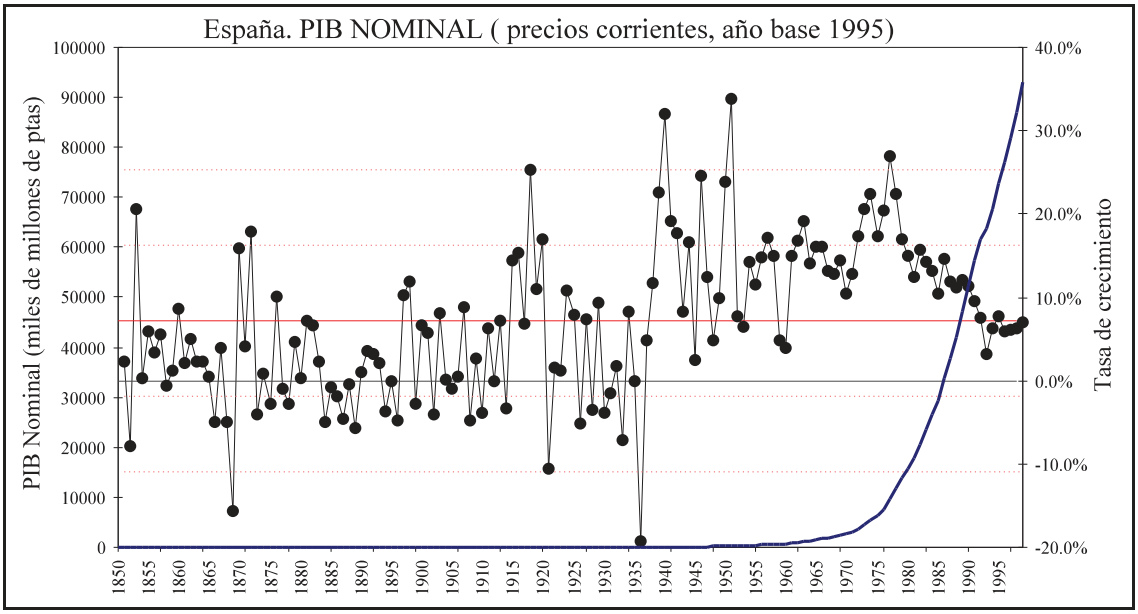


Figura 9.1

[3] Otras estimaciones alternativas pueden encontrarse en Carreras (1985) y en Prados (1995, pp. 53-61). La elección de las estimaciones de Prados se fundamenta, como decimos, en que son las que se remontan más atrás en el tiempo y en que, pese a sus limitaciones, su construcción es la más claramente detallada.

[4] El método que seguimos para enlazar las series puede generar problemas de homogeneidad cuando existe un cambio en los precios relativos entre los distintos años base. Su uso se justifica en el argumento que establece que las tasas de crecimiento calculadas para cada año base no pueden mejorase teniendo en cuenta los cambios en los precios relativos, y en el hecho de que precisamente nuestro interés no se encuentra tanto en el nivel de renta como en su tasa de crecimiento. Para un análisis de los distintos métodos para enlazar las series estimadas para diferentes años base véase Prados (1995, pp. 45-57).

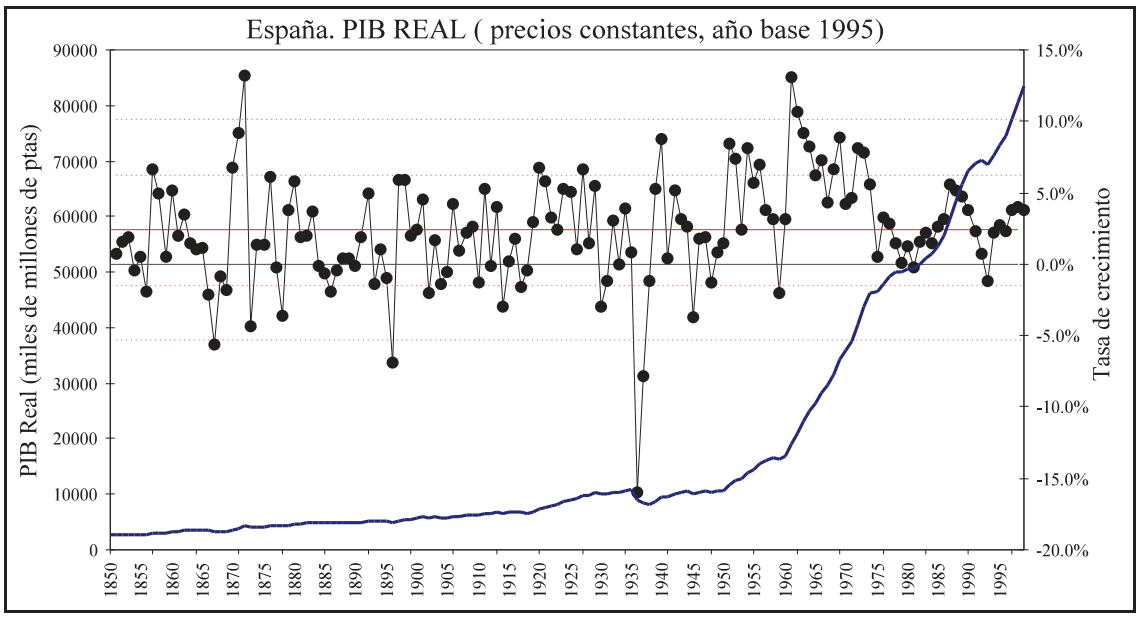


Figura 9.2

Como se observa en los gráficos tanto el nivel de actividad como el índice de precios muestran una clara tendencia positiva con oscilaciones cíclicas irregulares en su tasa de crecimiento, es decir, estas oscilaciones se presentan de manera recurrente pero con periodicidad y amplitud variable. Podemos añadir, que como ya se apuntó en el capítulo 6 se observa una clara aceleración en el ritmo de crecimiento medio a partir de la segunda mitad del siglo XX.

Una de las variables fundamentales a la hora de analizar el crecimiento económico de una economía es la renta o PIB per cápita. Para construir esta

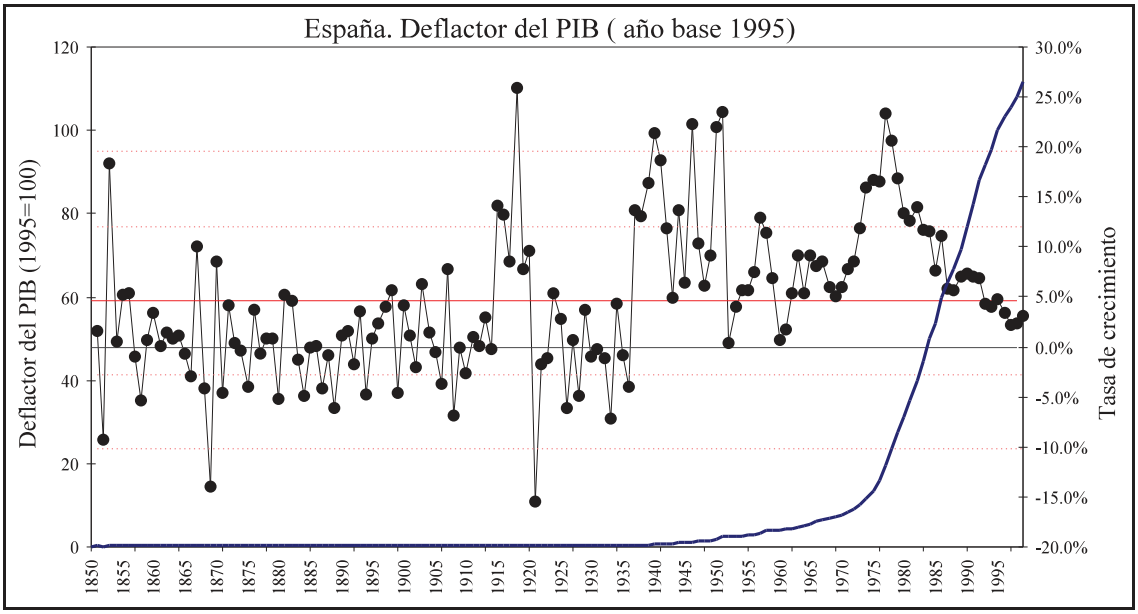


Figura 9.3

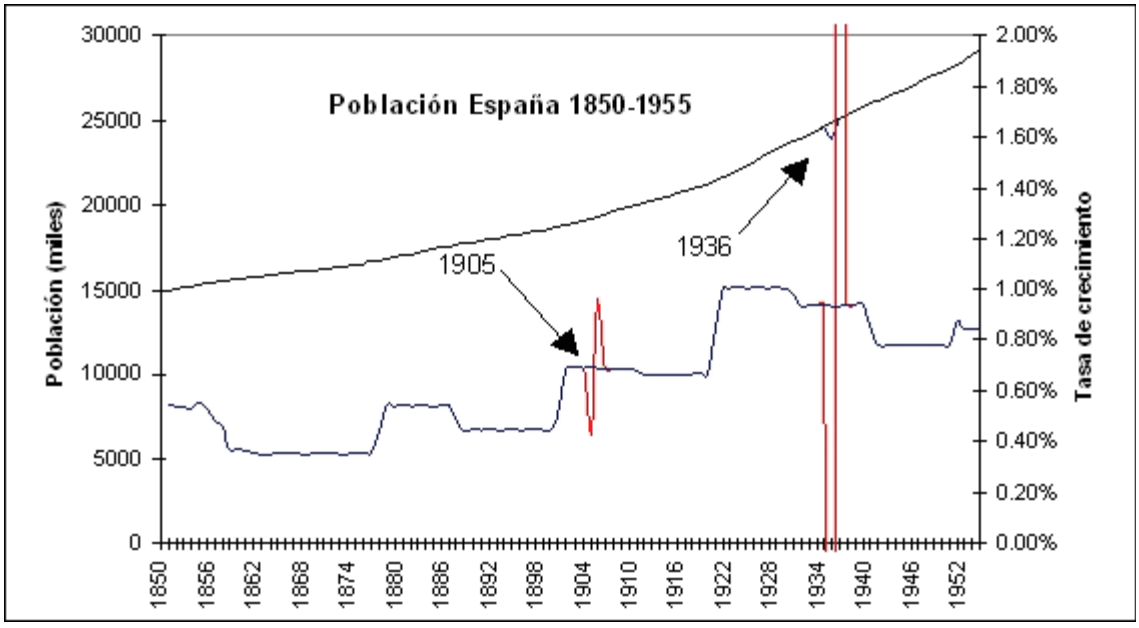


Figura 9.4

variable, además de estimaciones del PIB será necesario disponer de la serie de datos de población. En el caso español, disponemos de una serie histórica larga (1858-1955) para los datos estimados a mitad de año por Carreras (1989, cuadro 2.8, pp. 69-72)[5]. Para enlazar con las series del PIB de Prados (1995) se han utilizado las estimaciones de este mismo autor para el periodo 1850-1857. En la figura 9.4 se muestra la evolución temporal de la población así como de su tasa de crecimiento para el periodo 1850-1955. Tal y como se muestra en este gráfico, una de las principales deficiencias de esta serie es que los datos anuales han sido reconstruidos a partir de interpolaciones lineales en las tasa de crecimiento de la población entre censos, que en España han sido cada 10 años[6]. A pesar de que el método utilizado para la interpolación no parece el más adecuado –las tasas de crecimiento muestran una apariencia escalonada poco realista– decidimos no intervenir la serie y utilizar las fuentes originales para la construcción de la variable PIB real per cápita. Los resultados que se obtengan deberán tomarse, por tanto, con cierta cautela, ya que la necesidad de interpolar los datos censales puede introducir sesgos en la detección de comportamientos caóticos.

[5] Esta es la referencia que utiliza Maddison (1995, tabla A-3b). Cabe mencionar que parece haber un error tipográfico en la citada tabla en el año 1947, donde el valor de la población (29223 miles de personas) es superior al proporcionado por Carreras (27223 miles de personas).

[6] Censos: *1900*: 17802721; *1910*: 19140234; *1920*: 20482448; *1930*: 22775454; *1940*: 25113997; *1950*: 27492482; *1960*: 30069531; *1970*: 33738099; *1981*: 37742561; *1991*: 39433942; Próximo censo en *2001*. Fuente INE: *Población de Hecho, Población de los Municipios de España*. El propio INE realiza desde 1985 una Proyección y estimación intersenzal de la Población.

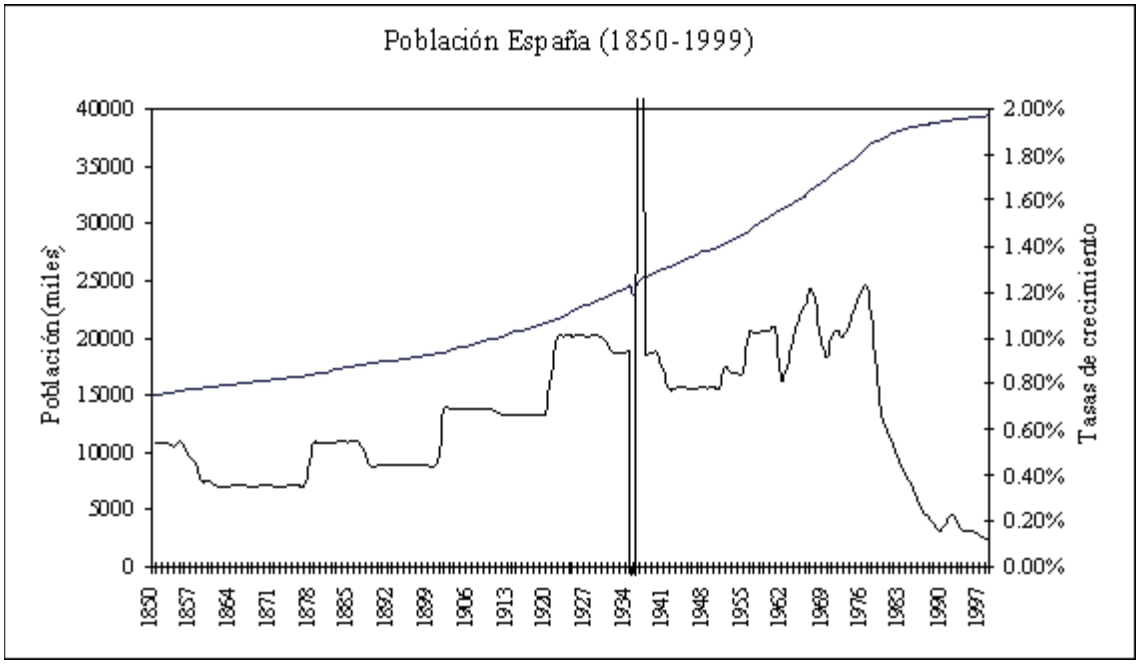


Figura 9.5

Por otra parte, en el gráfico 9.4 se observan dos datos anómalos en la tasa de crecimiento de la población, uno en 1905 y otro en 1936. Si bien en 1936 el descenso en la tasa de crecimiento de la población queda explicado por la Guerra Civil Española, no encontramos en principio explicación al dato anómalo de 1905[7]. Es por ello que para evitar alteraciones en los posteriores análisis con esta serie hemos procedido a una nueva interpolación de los datos censales sustituyendo los valores proporcionados por Carreras por nuestra propia interpolación. Así, el dato de población pasa en 1905 de 19133 a 19183, expresados ambos en términos de miles de personas.

Por lo que se refiere a los datos más recientes de población, hemos utilizado los datos proporcionados por Maddison (1995, tabla A-3b) para el periodo 1956-1970 y por el INE para el periodo 1971-1999[8]. En la figura 9.5 se observa la muestra completa para todo el periodo 1850-1999. Con esta serie de Población y la correspondiente al PIB real para el mismo periodo construimos la serie PIB real per cápita –figura 9.6– sobre la que nos centramos a partir de este momento para tratar de encontrar evidencia de comportamientos caóticos en la evolución de la economía Española.

---

[7] Si bien las manifestaciones epidémicas de cólera en 1885 y de gripe en 1918, así como posiblemente la guerra de Cuba 1898-1902 dejaron su huella en la población española no nos consta ningún hecho relevante que pudiera explicar el dato anómalo de 1905.

[8] Maddison utiliza una proyección para el periodo 1956-1960 para enlazar los datos de Carreras (1989) con los de la OCDE (Labour Statistics). Para el periodo correspondiente a 1961-1970 Maddison toma los datos de la OCDE. Existen problemas de enlace entre la serie del INE, la de Maddison y la de Carreras, que se traducen en pequeños impulsos en las tasas de crecimiento, sin que en este caso decidamos intervenir la serie.

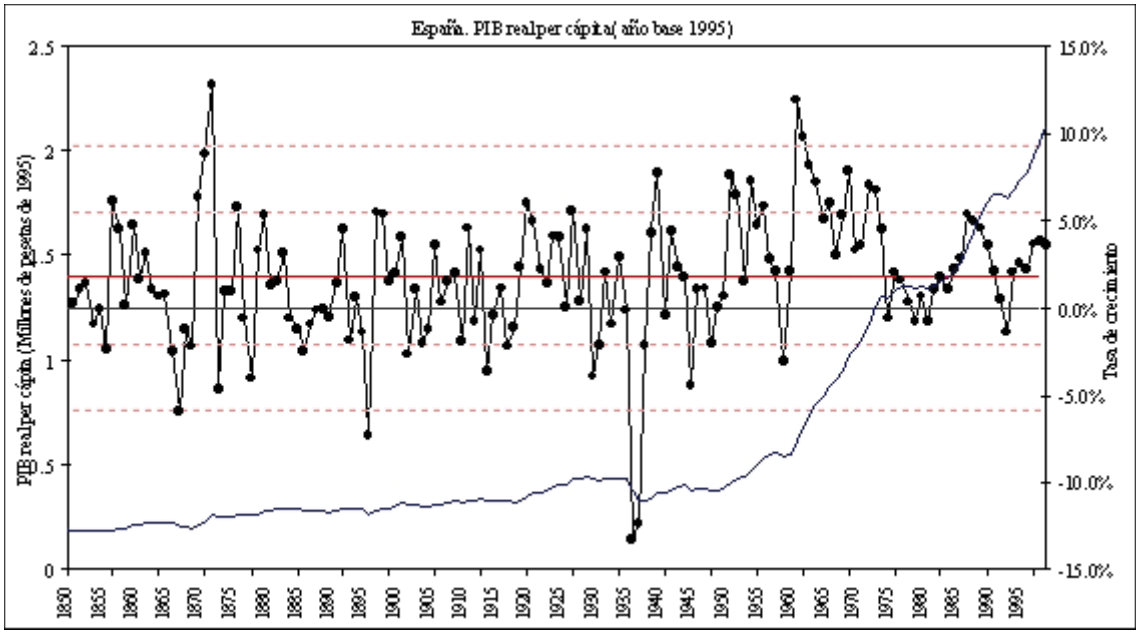


Figura 9.6

Extracción del componente cíclico y análisis de estacionariedad

El propósito que perseguimos en nuestro estudio es analizar si el crecimiento cíclico irregular observado en la serie de PIB real percápita –tabla 9.1– puede haberse debido, al menos en parte, a un proceso subyacente de dinámica caótica determinista. Antes de aplicar las técnicas introducidas en los capítulos 4 y 5, será necesario transformar la serie hasta conseguir que ésta sea estacionaria.

TABLA 9.1

Serie: ***PIBRPC***	*Producto Interior Bruto real per cápita*		
Fuente	**PIB real: 1850-1963**, Prados (1995,Tablas D1 y D4, pp. 167-170 y pp.179-182); **1964-1999**, INE (*Contabilidad Nacional*, varios años).Precios de mercado. Millones de pesetas constantes del año base 1995. Enlace utilizando tasa de crecimiento nominal. **Población:1850-1857** Prados (1995, tabla D5, pp.183-185); **1858-1955** Carreras (1989, poblacion total 1 de julio, tabla 2.8 pp 69,70,71 y 72), corregido en 1905 por interpolación entre censos 1900/1910 (INE, *población de Hecho*); **1956-1970** Maddison (1995, población total 1 de julio, tabla A-3b, pp. 108-109); **1971-1999** INE (*Proyecciones y Estimaciones Intercensales de Población)*		
Tamaño de la serie:	150 (1850:1999)	*Mediana:*	0.36320468
Máximo:	2.1179057	*Moda:*	0.32419576
Mínimo:	0.17875982	*Des. típ. de la SERIE:*	0.507
Media:	0.593	*Coeficiente de Asimetría:*	1.48944449
(Desviación típica de la media):	0.041	*Coeficiente de Apuntamiento (Kurtosis):*	0.88152411
Raiz Cuadrática Media:	0.78	*Test Jarque-Bera (Normalidad):*	60.3179 Chi^2:95%=5.99;99 %=9.21

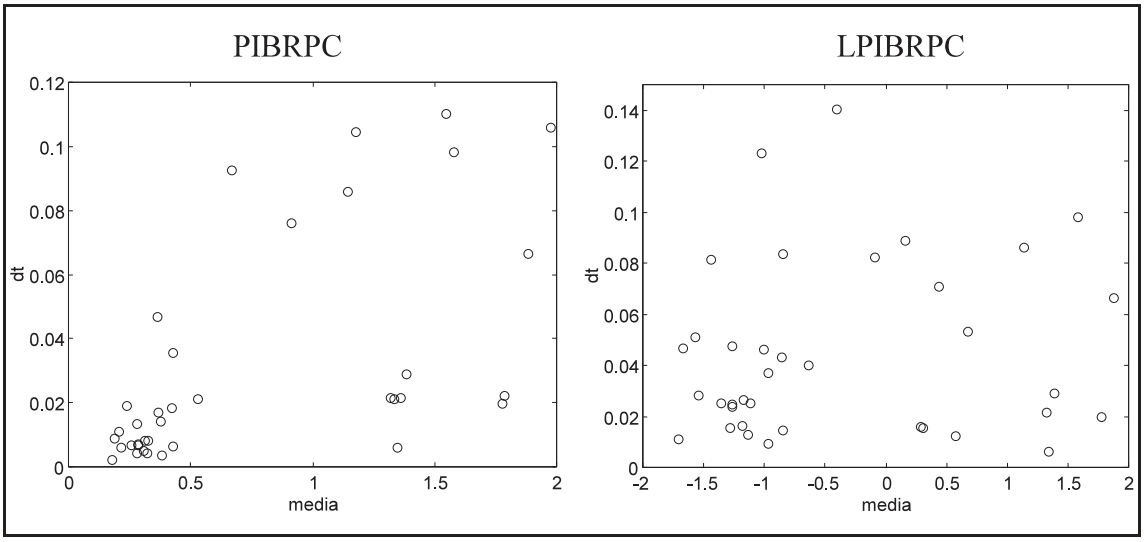


Figura 9.7. Gráfico Media-Desviación típica serie PIBRPC

Comenzamos considerando la necesidad de la transformación logarítmica. Para ello, recurrimos al gráfico media-desviación típica de la serie original y de su logaritmo neperiano –figura 9.7–, en la que se observa como la relación positiva entre la media y la desviación típica de la serie parece romperse con la transformación logarítmica. Es por ello que decidimos continuar nuestro análisis con la serie transformada logarítmicamente.

Como se observa en la figura 9.8. la serie LPIBRPC no parece estacionaria en media, es decir, presenta una clara tendencia media de crecimiento –más intensa a partir de la segunda mitad del siglo XX–. Es por ello que el siguiente paso será el de la transformación de la serie para convertirla en estacionaria.

Siguiendo con el análisis de estacionariedad, mostramos en la tabla 9.2 el test Dickey-Fuller ampliado de raíces unitarias de la serie LPIBRPC.

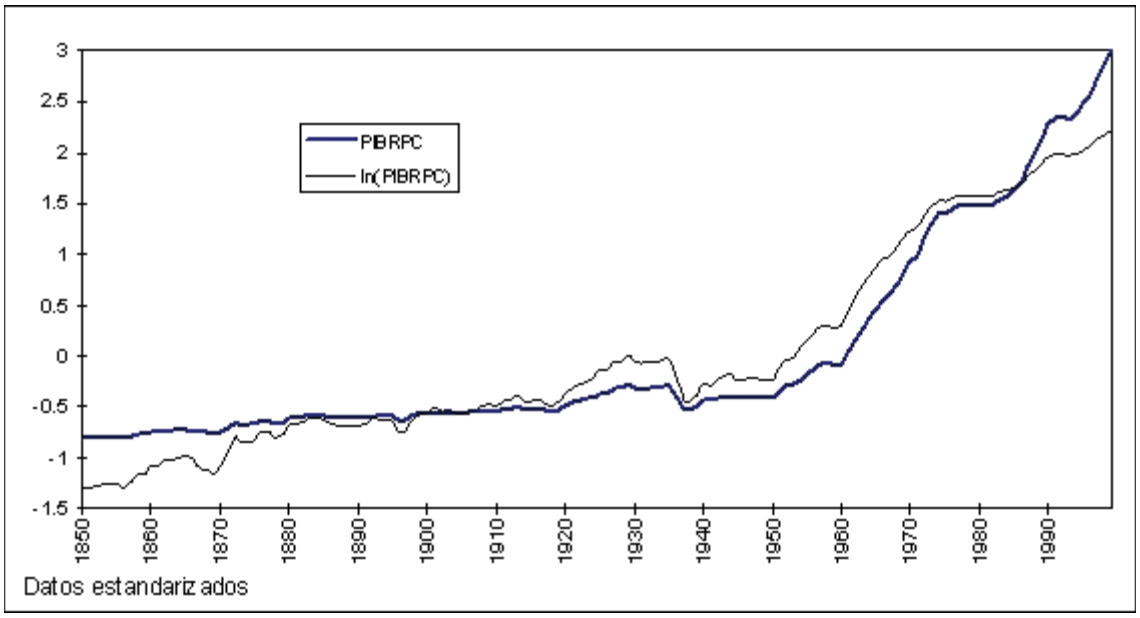


Figura 9.8

TABLA 9.2

Serie: $(1-L)^2$ LPIBRPC H0:I(3) (con tendencia lineal y término constante)	*Estadístico ADF* Valor Crítico al 1% Valor Crítico al 5% Valor Crítico al 10%	***-9.483949*** -4.0241 -3.4415 -3.1451
Serie: (1-L) LPIBRPC H0:I(2) (con tendencia lineal y término constante)	*Estadístico ADF* Valor Crítico al 1% Valor Crítico al 5% Valor Crítico al 10%	***-8.153354*** -4.0224 -3.4407 -3.1446
Serie: LPIBRPC H0:I(1) (con tendencia lineal y término constante)	*Estadístico ADF* Valor Crítico al 1% Valor Crítico al 5% Valor Crítico al 10%	***-0.84348*** -4.0224 -3.4407 -3.1446

Valores críticos tabulados por MacKinnon (1991) para la hipótesis nula de existencia de una raíz unitaria.

Los resultados muestran que la serie LPIBRPC es I(1) con una tendencia lineal de crecimiento. Recordemos en este punto el problema de la extracción del componente cíclico de la tendencia central de crecimiento analizada en el capítulo 8, en el que se discutió la hipótesis sobre la linealidad de la tendencia lineal de crecimiento. Es por ello, que en lugar de estimar y extraer dicha tendencia lineal y posteriormente diferenciar la serie para convertirla en estacionaria, decidimos extraer el el componente tendencial de crecimiento aplicando el filtro lineal de Hodrick-Prescott. El componente cíclico estacionario así obtenido CLPIBRPC –figura 9.9– será el que utilicemos seguidamente para la detección de no-linealidades y comportamientos caóticos en la economía real española.

Para hacer referencia a las distintas transformaciones de la serie, en adelante utilizaremos los siguientes prefijos: *L*, transformación logarítmica (base *e*); *T*, componente tendencial de la serie; *C*, componente cíclico de la serie; *D*, serie diferenciada; *F*, residuo del filtro lineal ARMA aplicado a la serie; y *B*, serie barajada o mezclada aleatoriamente.

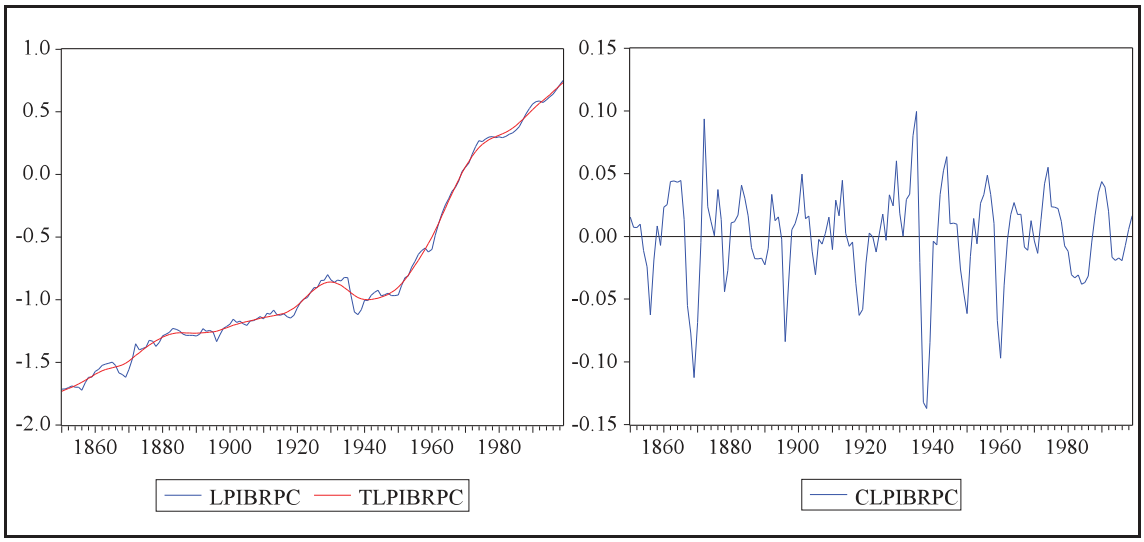


Figura 9.9 Extracción del componente tendencia y cíclico filtro HP. Serie LPIBRPC

Periodograma y correlograma de la serie CLPIBRPC.

Tratemos en primer lugar de detectar la existencia de dependencias o correlaciones lineales y periodicidades ocultas significativas en la serie CLPIBRPC. Para ello, en primer lugar, mostramos en las figuras 9.10 y 9.11 y en la tabla 9.3 el correlograma de la serie.

Tabla 9.3

retardo	*facs*	*facp*	*Q*	*P(Q)*	*retardo*	*facs*	*facp*	*Q*	*P(Q)*
1	0.652	0.652	64.969	0	19	0.093	-0.191	192.48	0
2	0.184	-0.419	70.16	0	20	0.161	-0.012	197.01	0
3	-0.182	-0.165	75.278	0	21	0.252	0.139	208.21	0
4	-0.366	-0.117	96.209	0	22	0.275	-0.095	221.7	0
5	-0.417	-0.169	123.58	0	23	0.122	-0.233	224.37	0
6	-0.384	-0.163	146.94	0	24	-0.112	-0.116	226.66	0
7	-0.249	-0.034	156.86	0	25	-0.211	0.026	234.78	0
8	-0.077	-0.065	157.81	0	26	-0.132	0.047	237.98	0
9	0.037	-0.134	158.03	0	27	-0.046	-0.044	238.38	0
10	0.123	0.005	160.48	0	28	-0.009	-0.065	238.39	0
11	0.187	0.018	166.24	0	29	0.048	0.03	238.83	0
12	0.159	-0.126	170.42	0	30	0.035	-0.184	239.07	0
13	0.036	-0.14	170.65	0	31	0.03	0.066	239.24	0
14	-0.066	-0.017	171.38	0	32	0.026	-0.004	239.38	0
15	-0.181	-0.247	176.89	0	33	0.032	-0.057	239.57	0
16	-0.234	-0.142	186.19	0	34	0.038	0.054	239.86	0
17	-0.166	-0.003	190.91	0	35	-0.026	-0.046	239.99	0
18	-0.016	-0.056	190.96	0	36	-0.109	-0.106	242.37	0

P(Q):probabilidad de aceptar la hipótesis nula de ausencia se autocorrelación

Los resultados muestran claramente la existencia de autocorrelaciones significativas entre los datos de la serie temporal. Nuestro propósito será el de averiguar si dicha autocorrelación se corresponde con un proceso generador de dinámica caótica o si por el contrario corresponde a un proceso lineal o de dinámica simple.

Por lo que se refiere al periodograma, la figura 9.12 refleja la evolución aperiódica de la serie, con un ciclo medio de 10 años determinado por el periodo para el cual se alcanza el valor máximo del espectro de potencias de la

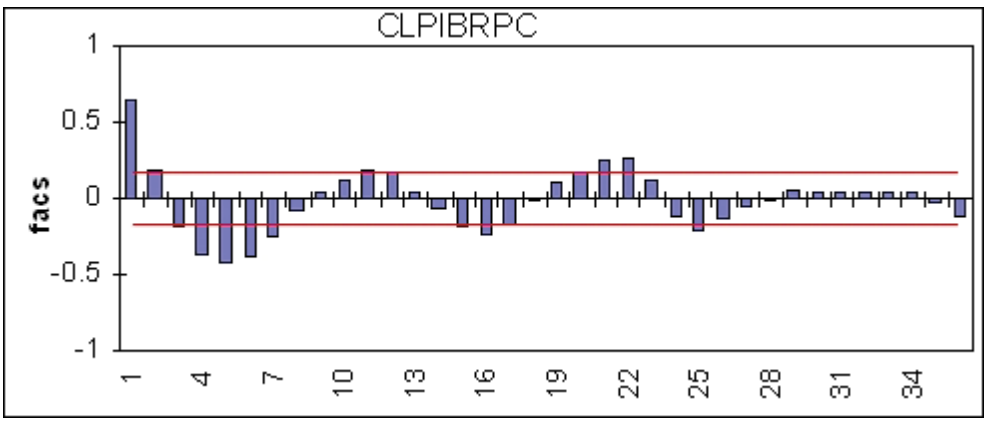


Figura 9.10 Función de autocorrelaciónsimple. Serie CLPIBRPC

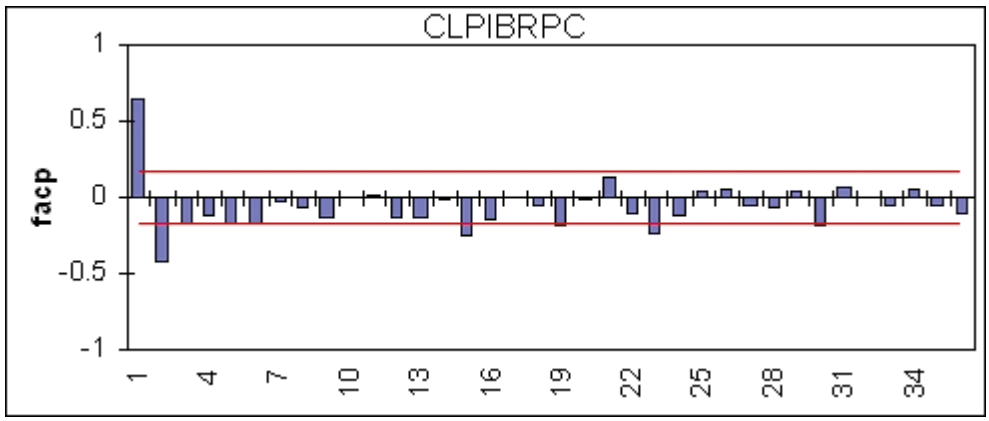


Figura 9.11 Función de autocorrelación parcial. Serie CLPIBRPC

serie. En cualquier caso, el periodograma no se corresponde con el de ningún sistema dinámico de dinámica simple de baja dimensión, por lo que dicho comportamiento aperiódico deberá reflejar la existencia de algún componente puramente estocástico, de un comportamiento caótico determinista, o bien de la superposición de ambos.

Exponente de Hurst y análisis R/S

Siguiendo con la metodología propuesta y para complementar el anterior análisis del correlograma y periodograma pasamos a estimar el exponente de Hurst de la serie CLPIBRPC, con el que es posible encontrar dependencias o correlaciones temporales en la serie ya sean de carácter lineal o no-lineal.

En la figura 9.13 mostramos el gráfico del estadístico ln(R/S) sobre los distintos periodos ln(*p*). Recordemos que la pendiente de este gráfico

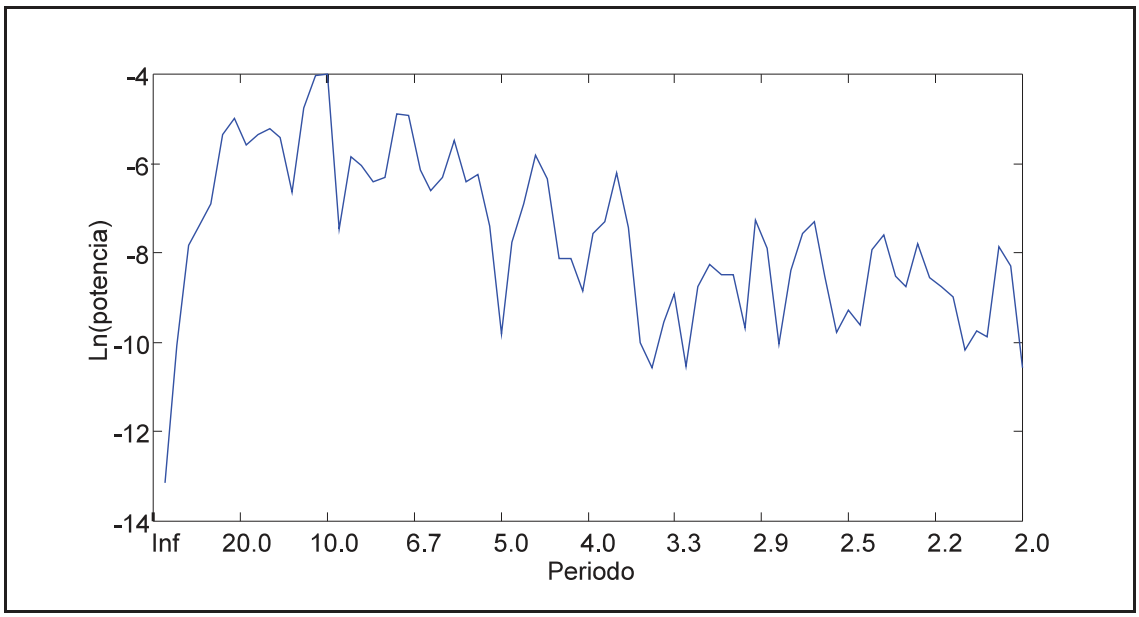


Figura 9.12. Correlograma serie CLPIBRPC

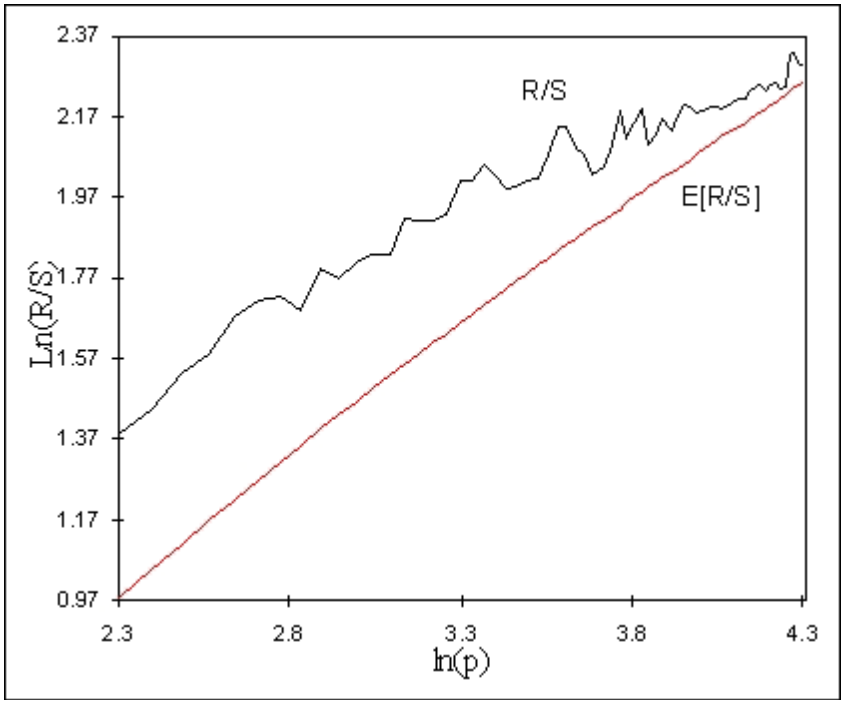


Figura 9.13 Análisis R/S. Serie CLPIBRPC

proporciona una estimación del exponente de Hurst, que en este caso resulta ser de 0.4, es decir, que la serie presenta una estructura de ruido rosa antipersistente o con correlación temporal negativa –el estadístico de Anis-Lloyd para el contraste de la hipótesis nula de ruido blanco es de -34.25–.

Por su parte el estadístico V*p* –figura 9.14– recoge de manera complementaria al periodograma las periodocidades ocultas en la serie. En este

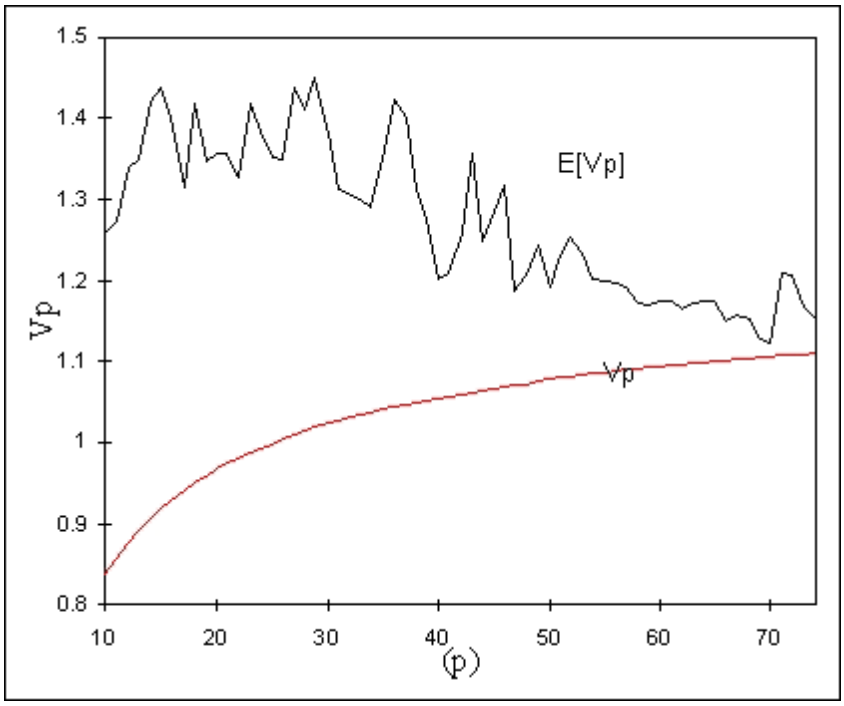


Figura 9.14 Estadístico *Vp*. Serie CLPIBRPC

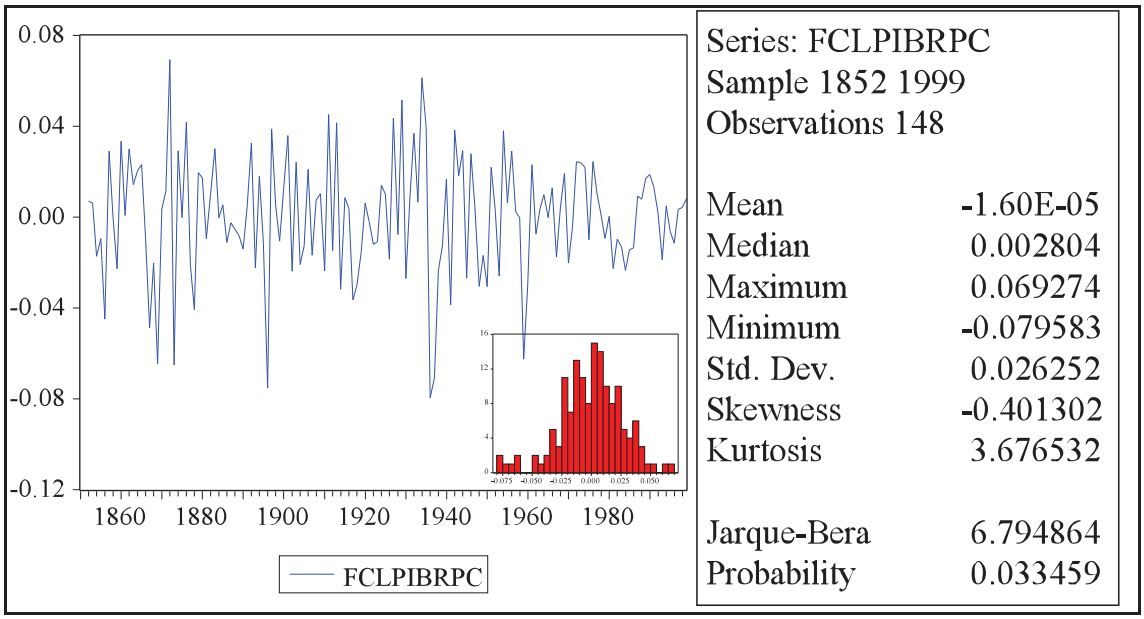


Figura 9.15. Serie de Residuos Filtro AR(2) aplicado sobre la serie CLPIBRPC

caso, se observa una significativa memoria a largo plazo en la serie, con ciclos medios de entre 35 y 45 años[9].

Filtro Lineal ARMA

Tanto el anterior análisis R/S como el del correlograma y el periodograma evidencian la existencia de una clara estructura dinámica subyacente en la serie CLPIBRPC, aunque no proporciona información sobre el carácter lineal o no-lineal, determinista o estocástico de dicho proceso generador. Para contrastar si la estructura temporal presente en la serie es de carácter no-lineal y para aplicar el test residual de Brock para la detección de caos determinista, es necesario estimar cual es el filtro lineal general ARMA que mejor ajusta a la serie. Para la determinación de dicho filtro ARMA utilizaremos el criterio de información de Schwarz. En el caso de la serie CLPIBRPC el filtro lineal estimado es un modelo AR(2) con raíces complejas:

$$\underset{(12.34)}{(1 - 0.927\ L} + \underset{(-5.61)}{0.421\ L^2)}\ LPIBRPC = e_t \qquad (9.1)$$

–estadístico *t* entre paréntesis, R^2=0.53, desviación típica residual=0.03, raíces del polinomio auroregresivo 0.46±0.45i–.

La aplicación del filtro lineal (1) sobre la serie CLPIBRPC generará, por tanto, una nueva serie de residuos que denominaremos FCLPIBRPC –figura

[9] Se observan ciclos de menor periodicidad, aunque debido al método de cálculo del estadístico R/S el ciclo más corto detectable en la serie es de 10 años. Véase el apartado 4.5 para detelles de la estimación .

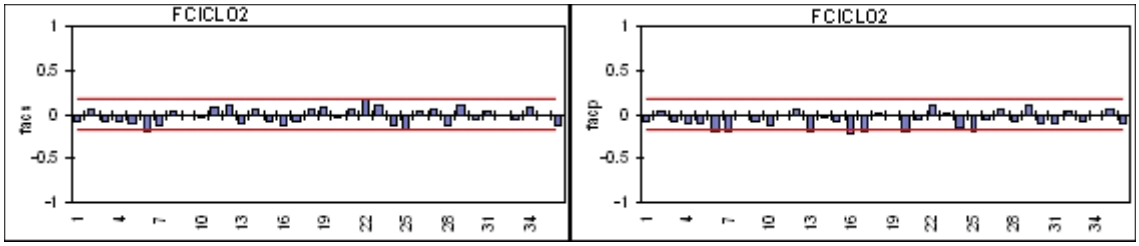


Figura 9.16 Correlograma serie FCLPIBRPC

9.15–. El análisis del correlograma de estos residuos parece indicar que el modelo lineal AR(2) recoge toda la autocorrelación lineal presente en la serie –figura 9.16–, mostrando una estructura típica de ruido blanco. En la figura 9.17 mostramos el periodograma de la serie de residuos en el que se evidencia la ausencia de periodicidades simples ocultas en el proceso generador la serie, comportamiento este compatible con el de un proceso estocástico de ruido blanco.

Tests de No-linealidad

Para contrastar si verdaderamente el filtro lineal (9.1) es capaz de recoger toda la estructura temporal presente en la serie pasamos a continuación a aplicar sobre ella los test de no-linealidad introducidos en el anterior capítulo 8.

Comenzando con el análisis R/S, la serie FLPIBRPC sigue mostrando la existencia de comportamientos antipersistenetes y una memoria a largo plazo correspondiente a un ciclo medio de entre 27 y 36 años –figuras 9.18 y 919–. El exponente de Hurst estimado es de 0.35, rechazando el estadístico de Anis-Lloyd (-40.34) la hipótesis nula de Ruido blanco gausiano.

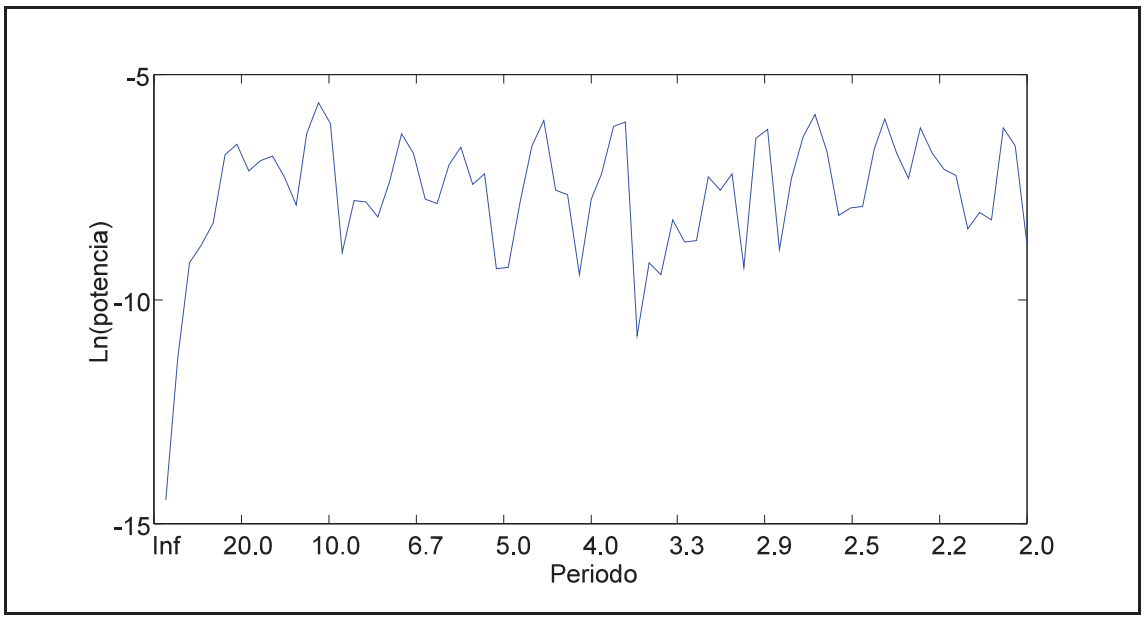


Figura 9.17 Periodograma serie FCLPIBRPC

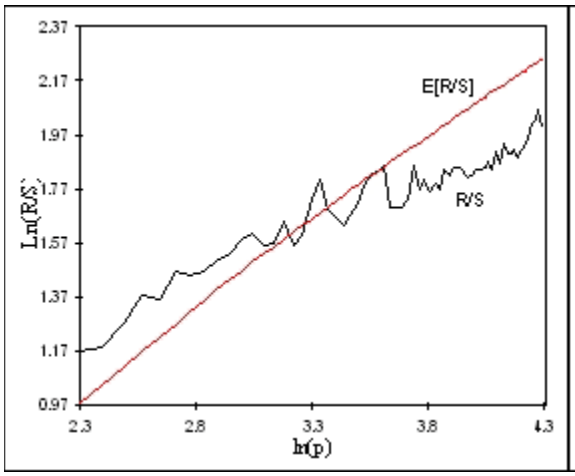


Figura 9.18 Análisis R/S. Serie FCLPIBRPC

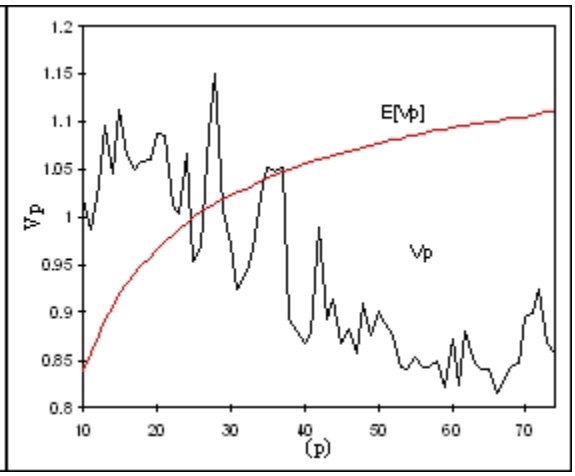


Figura 9.19 Estadístico *Vp*. Serie FCLPIBRPC

En la tabla 9.4 se muestra el estadístico BDS para la serie CLPIBRPC y para la misma serie filtrada con el modelo lineal (9.1) FCLPIBRPC. Como se observa, la hipótesis nula de IID se rechaza en la serie original, mostrándose la existencia de cierta estructura en la dinámica subyacente en esta serie. La aplicación del test BDS sobre la serie FCLPIBRPC, muestra igualmente, que dicha estructura no queda bien recogida por el filtro lineal, al menos para una dimensión de inserción igual o superior a 3. Es decir, el test BDS parece rechazar la hipótesis de linealidad.

TABLA 9.4
Estadístico BDS

	r	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	*m=10*
	0.019	8.360	7.758	8.383	10.276	15.176	21.222	35.102	60.706	101.740
	0.027	8.841	8.349	7.963	8.465	9.683	10.866	13.310	17.827	22.762
	0.039	8.322	7.908	7.269	7.331	7.682	8.107	8.867	9.500	10.057
CLPIBRPC	*0.057*	7.915	7.657	6.925	6.540	6.388	6.451	6.555	6.569	6.691
	0.013	1.393	2.212	3.341	3.373	3.341	4.876	8.605	13.628	- 1.625
	0.019	1.540	2.079	3.091	3.161	3.760	4.436	4.049	4.610	5.949
	0.027	2.156	2.057	2.547	2.815	3.473	4.178	4.677	5.250	5.725
FCLPIBRPC	*0.039*	1.950	2.007	2.312	2.490	2.981	3.324	3.513	3.542	3.629

Del mismo modo, el test de Kaplan parece indicar, al menos para la dimensión de inserción *m=3*, la existencia de comportamientos no-lineales –Tabla 9.5–. Este resultado a favor de la no-linealidad se ve corroborado también por el test LM-ARCH de Engle –Tabla 9.6– y por la aparición de valores significativamente distintos de cero cuando se analiza el correlograma del cuadrado de la serie filtrada FCLPIBRPC –figura 9.20–. Estos test, sin embargo, no son capaces de proporcionar información sobre el carácter puramente aleatorio o, al menos en parte, caótico determinista. Es decir, aunque con la aplicación de estos test se rechaza la hipótesis de linealidad, deberemos

estimar las medidas invariantes del caos introducidas en el capítulo 5 –exponentes de Lyapunov y dimensión fractal– para poder detectar la presencia de comportamientos caóticos en la serie. Para ello, previamente, habrá que reconstruir el atractor correspondiente a la dinámica subyacente de las series temporales consideradas.

Tabla 9.5
Test de Kaplan

		m=1	***m=2***	***m=3***	***m=4***	***m=5***
CLPIBRPC	KSmean	0.0297	0.0276	0.0285	0.0269	0.0287
	KSstd	0.0018	0.0025	0.0041	0.0063	0.0065
	KS	0.026	0.0226	0.0204	0.0144	0.0158
	KSmin	0.0252	0.0223	0.0216	0.0181	0.0174
	KSopt	0.0276	0.0234	***0.0199***	0.023	0.0168
FCLPIBRPC	KSmean	0.0293	0.0294	0.0293	0.0297	0.0289
	KSstd	0.0011	0.0031	0.0023	0.0051	0.0055
	KS	0.0271	0.0232	0.0246	0.0196	0.0178
	KSmin	0.0265	0.0236	0.0255	0.0199	0.0164
	KSopt	0.0271	0.0251	***0.0242***	0.023	0.0197

Retardo para el cálculo de la función inversa 1 y para la reconstrucción del atractor 4 y 3 para CLPIBRPC y FCLPIBRPC respectivamente.

Tabla 9.6.
Test ARCH-LM de Engle

	Estadístico *F*	Estadístico NR^2
CLPIBRPC	42.87 (0.00)	33.64 (0.00)
FCLPIBRPC	9.67 (0.00)	9.19 (0.00)

Entre paréntesis probabilidad de aceptar la hipótesis nula de ausencia de estructura ARCH

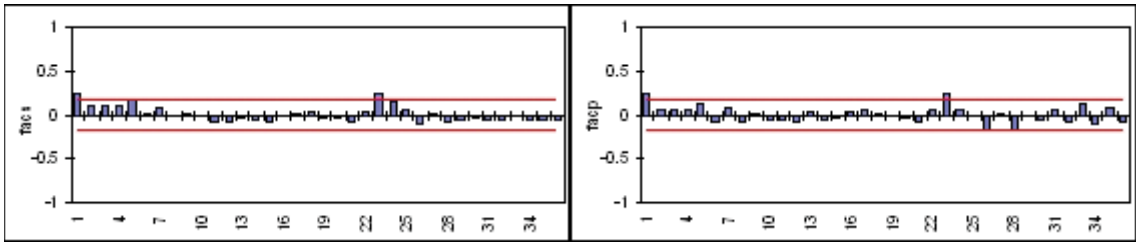


Figura 9.20 Correlograma de la serie (FCLPIBRPC)[2]

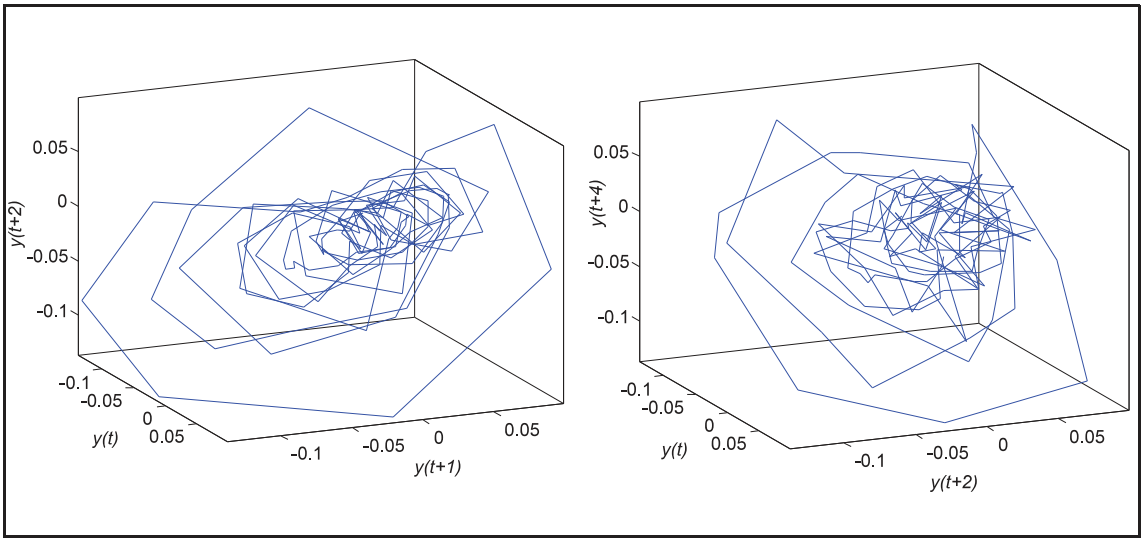


Figura 9.21 Reconstrucción del atractor. Serie CLPIBRPC, retardos τ=1 y τ=2.

Reconstrucción del atractor

Como se recordará del capítulo 5, la reconstrucción del atractor por el método de los retardos utiliza los datos de la propia serie temporal retardada para reconstruir la evolución de la órbita en el seudo espacio de fases o de inserción. Esta órbita reconstruida mantendrá las mismas propiedades de la órbita descrita por el vector de estados del sistema desconocido generador de la serie temporal en el espacio de fases original. En principio, este método de reconstrucción es válido para cualquier retardo temporal utilizado. Sin embargo, la apariencia de los atractores resultantes de la reconstrucción con distintos retardos parece diferir considerablemente –figuras 9.22 y 9.23–. De hecho, en el capítulo 5 se mostró que la utilización de este método de reconstrucción del atractor para estimar las medidas invariantes del caos requiere de la elección tanto del retardo como de la dimensión de inserción óptima o adecuada.

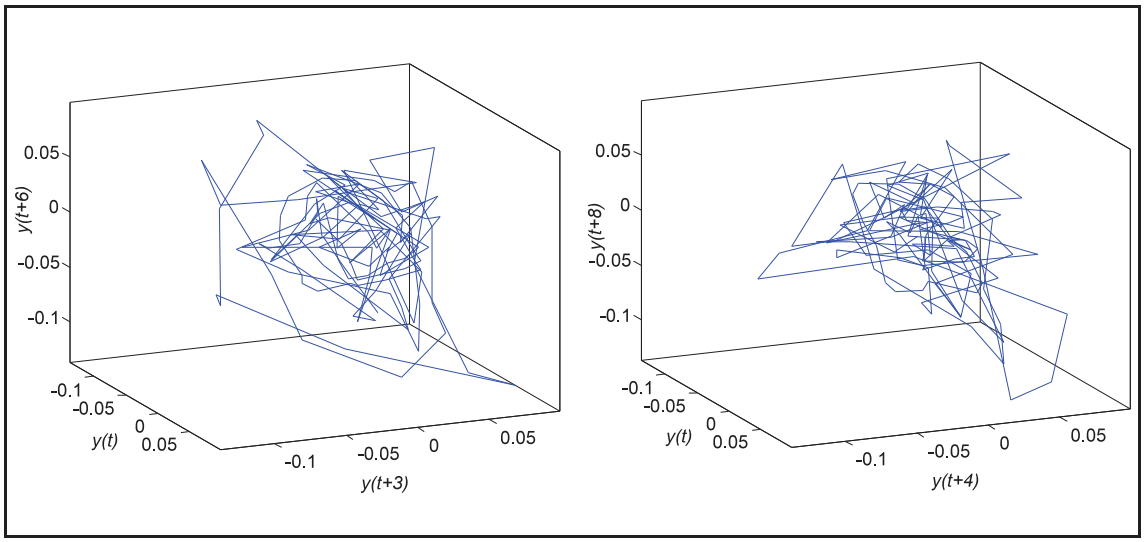


Figura 9.22 Reconstrucción del atractor. Serie CLPIBRPC, retardos τ=3 y τ=4

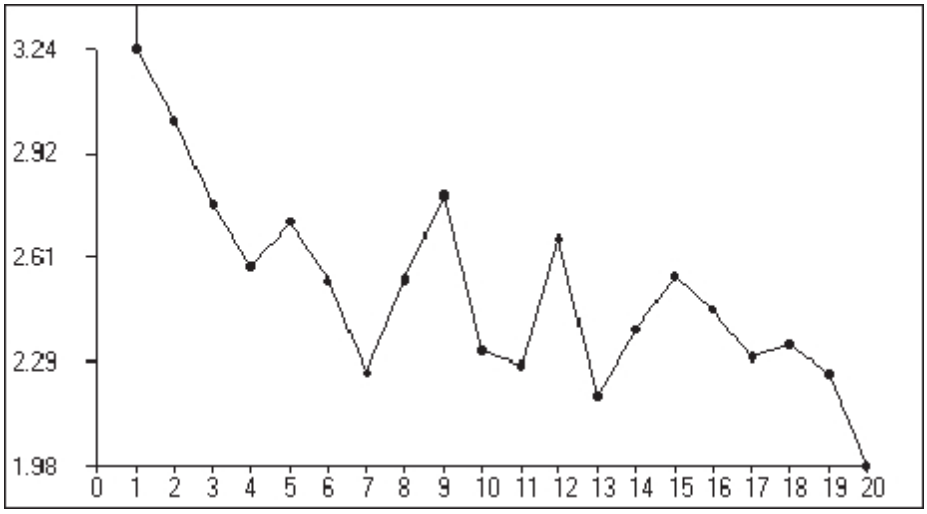


Figura 9.23. función de información mutua media serie CLPIBRPC.

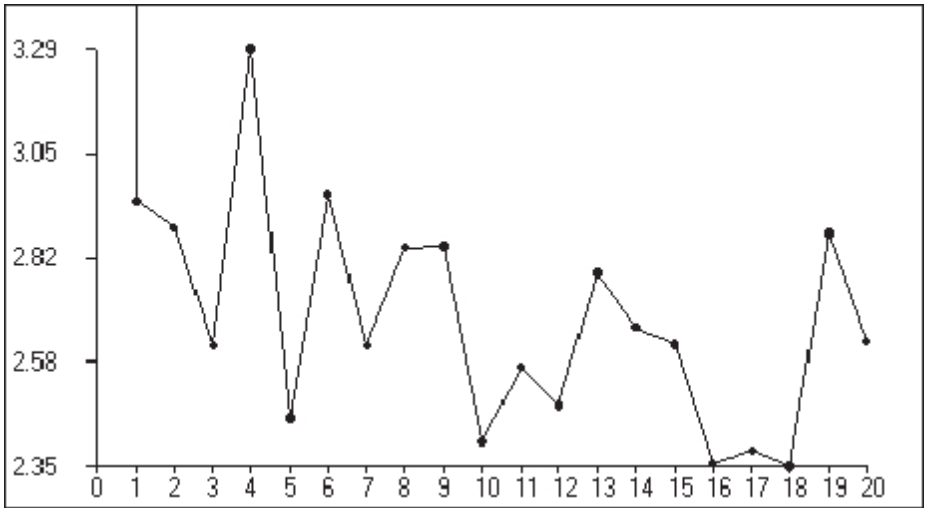


Figura 9.24 función de información mutua media serie FCLPIBRPC

Utilizaremos como criterio de elección del retardo óptimo para la reconstrucción del atractor el primer mínimo de la función de información mutua media. En la figura 9.23 y 9.24 mostramos dicha función para las series CLPIBRPC y FCLPIBRPC con lo que el retardo óptimo elegido de τ=4 y τ=3 respectivamente[10].

En cuanto a la elección de la dimensión de inserción óptima, utilizaremos el criterio de los falsos vecinos. Los resultados para ambas series –tabla 9.7– parecen mostrar que para la dimensión de inserción *m*=3 desaparecen los

[10] Mostramos también los resultados de la reconstrucción de la serie de residuos FCLPIBRPC ya que éstos han sido utilizados en la aplicación del test de Kaplan y el test de Brock. La función de información mutua media proporciona también información del periodo medio de la serie temporal, en este caso entre 9 y 4 años respectivamente, resultado este que corrobora el obtenido por el análisis del correlograma –figuras 9.11 y 9.17–.

puntos falsamente próximos o vecinos de la órbita reconstruida por el método de los retardos, es decir, que para esta dimensión de inserción se consigue desplegar completamente la órbita descrita por la dinámica subyacente a la serie temporal. Nótese que es esta también la dimensión de inserción para la que el test de Kaplan evidencia la existencia de comportamientos no-lineales y también la dimensión de inserción a partir de la cual el test BDS rechaza la hipótesis de independencia temporal en la serie. Este resultado parece mostrar evidencia de que el proceso generador de la serie es bajo dimensional y por tanto aparentemente determinista, aunque dicho resultado deberá ser corroborado con la estimación de la dimensión fractal.

Tabla 9.7
Porcentaje de falsos vecinos

	CLPIBRPC τ=4	FCLPIBRPC τ=3
m=1	4.60%	4.21%
m=2	0.23%	0.20%
m=3	0%	0%
m=4	0%	0%
m=5	0%	0%

τ: retardo para la reconstrucción del atractor

Dimensión fractal

Para estimar la dimensión fractal correspondientes al atractor reconstruido por el método de los retardos de la serie del ciclo económico español utilizaremos la dimensión de correlación y la dimensión de información. Recordemos, que estas medidas pueden presentar fuertes sesgos cuando las series temporales utilizadas son cortas y se encuentran perturbadas por ruidos puramente aleatorios. Es por ello, que las dimensiones estimadas con la serie CLPIBRPC deberán tomarse con cierta cautela. En cualquier caso haremos uso del test residual de Brock y del barajado para contrastar la consistencia de dichas estimaciones –véase apartado 8.5–.

En la figura 9.25 mostramos el gráfico de la integral de correlación sobre el radio de las 20 bolas utilizada para su cálculo, ambas variables expresadas en términos logarítmicos, para las dimensiones de inserción m=1, 2, ...,10 –para el cálculo de la integral de correlación hemos utilizado el retardo óptimo de reconstrucción determinado por el primer mínimo de la función de información mutua media, el radio de las bolas está comprendido entre 0.5 y 1.5 veces la desviación típica de la serie, y el cálculo de la integral de correlación ha sido corregido utilizando datos de la serie alejados en más de 5 años, el periodo

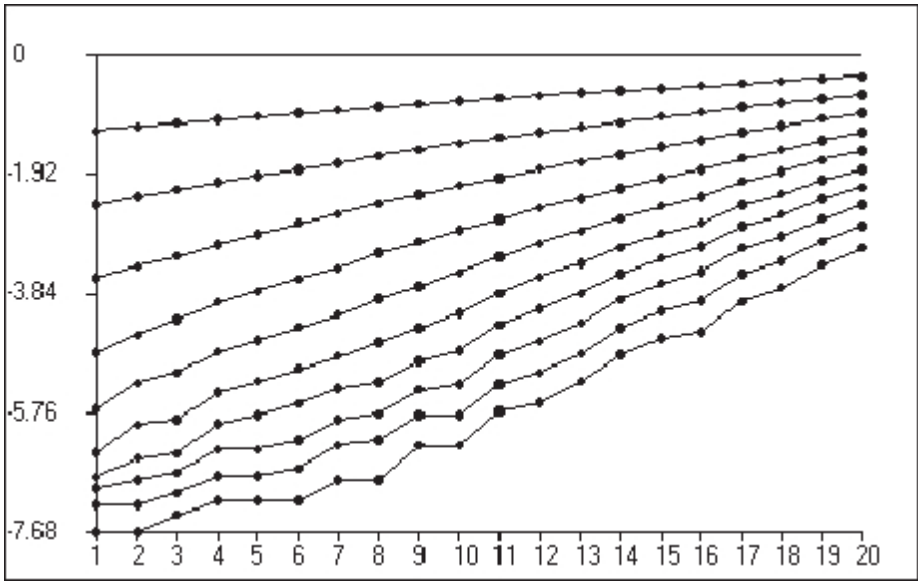


Figura 9.25. Integral de correlación. Serie CLPIBRPC.

medio del ciclo, según expusimos en el apartado 5.6–. La dimensión de correlación para cada valor de *m* vendrá determinada por la pendiente de dicha gráfica, por lo que en el gráfico 9.26 mostramos dos estimaciones de la dimensión de correlación –calculadas por la regresión de mínimos cuadrados y por la media de la variación puntual en negro y rojo respectivamente– para cada dimensión de inserción *m*. Como puede observarse, la dimensión fractal estimada parece saturarse en el valor $D_C \approx 4.3$ a partir de la dimensión de inserción *m*=7, lo que refleja la presencia de algún proceso determinista en la dinámica subyacente a la serie temporal CLPIBRPC.

En las figuras 9.27 y 9.28 mostramos los resultados de la estimación de la integral y la dimensión de correlación para la serie filtrada por el modelo linal AR(2) –serie– FCLPIBRPC. Con ello, y aplicando el teorema del test residual de Brock tratamos de comprobar si la dinámica determinista se corresponde

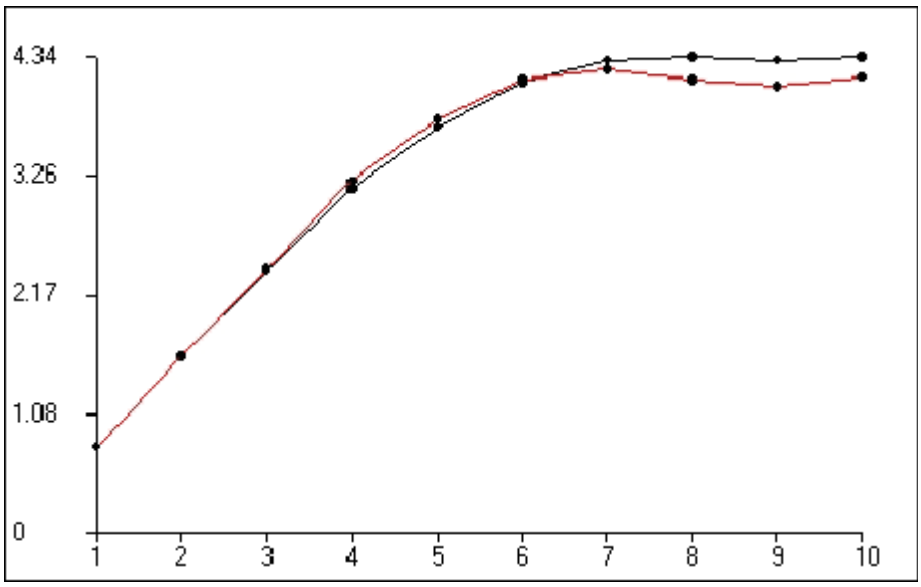


Figura 9.26 *Dc* vs. *m*. CLPIBRPC. (MCO –negro–, variación media –rojo–)

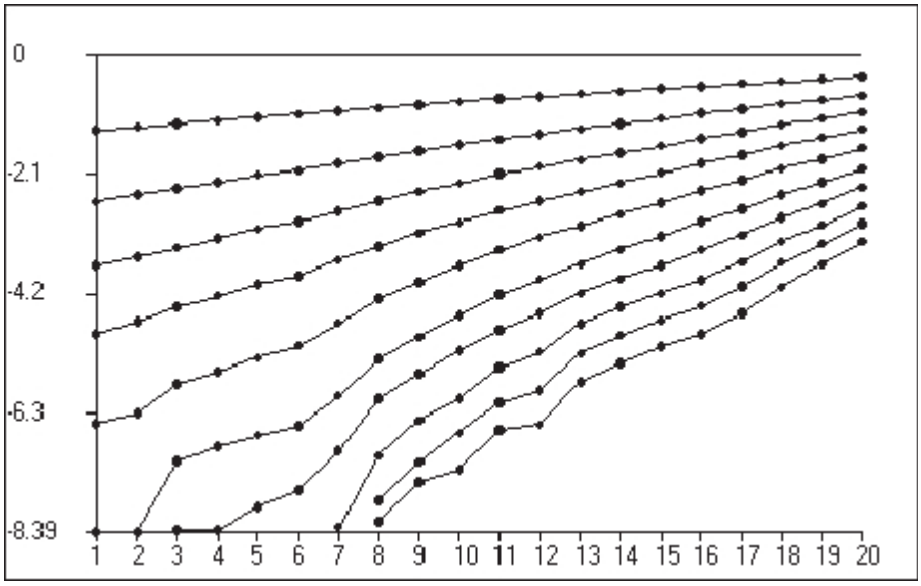


Figura 9.27 Integral de correlación. Serie FCLPIBRPC

con un proceso realmente no-lineal –y posiblemente caótico– o si por el contrario la estructura determinista detectada en la serie CLPIBRPC es de carácter lineal. Como puede observarse, la convergencia de la dimensión de correlación se satura ahora en valores más elevados $-D_C \approx 6.5$ para m=7–. Ello implica que el filtro lineal está capando buena parte de la estructura determinista presente en la serie. En cualquier caso, la saturación de nuevo de la dimensión de correlación a partir de la dimensión de inserción *m*=7 parece indicar que persiste cierta dependencia temporal en la seri filtrada, que por tanto debe ser de carácter no-lineal [11].

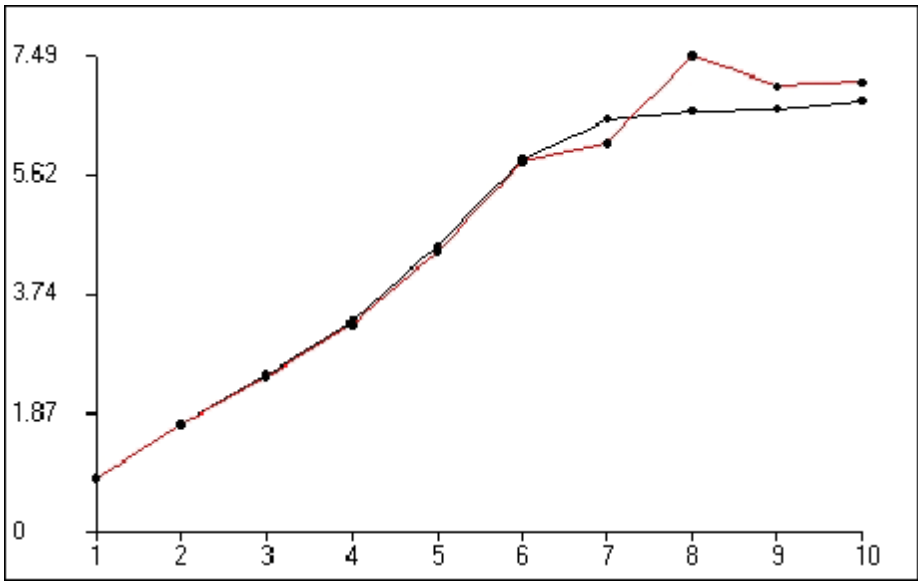


Figura 9.28 *Dc* vs. *m*. FCLPIBRPC. (MCO –negro–, variación media –rojo–)

[11] La saturación no es tan clara si se aproxima la dimensión de correlación por la media de la tasa de variación puntual debido a que en *m*=7 los primeros valores de la integral de correlación se mantienen constantes.

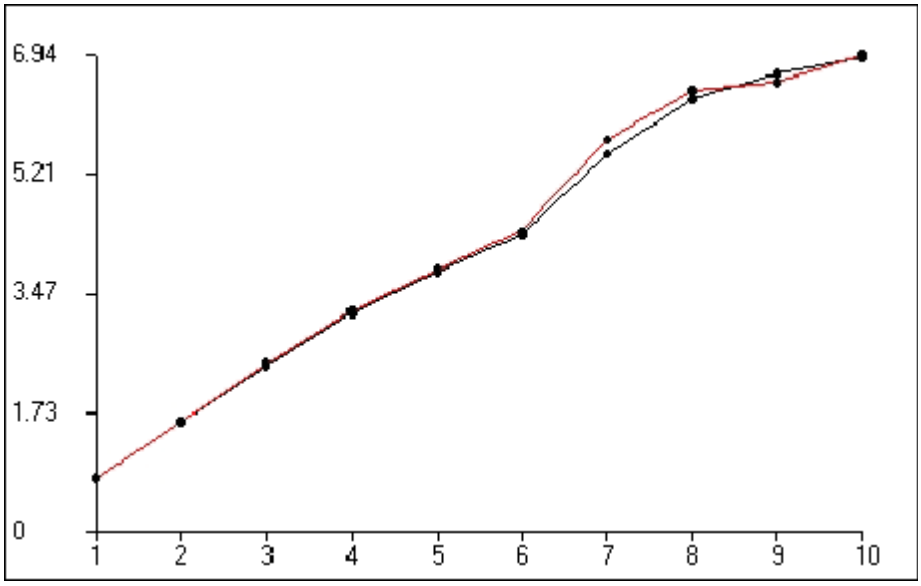


Figura 9.29 *Dc* vs. *m*. BCLPIBRPC. (MCO –negro–, variación media –rojo–)

Este resultado confirma los anteriores obtenidos con los test de no-linealidad, auque recordemos que el tamaño y la calidad de la serie que estamos analizando no permiten asegurar que los resultados obtenidos con el análisis de la integral de correlación sean suficientemente robustos.

La aplicación del test del barajado de Scheinkman y LeBaron confirma la presencia de una estructura dinámica determinista en la serie CLPBRPC que ha desaparecido con el mezclado de la serie –figura 9.29–, lo que se refleja un aumento sin saturación de la D_C con *m*. Cuando se aplica la técnica del barajado sobre el filtro lineal FCLPIBRPC –figura 9.30– las dimensiones de correlación estimadas muestran igualmente que la estructura determinista que aún quedaba presente en la serie una vez aplicado el filtro lineal ha quedado rota con el barajado.

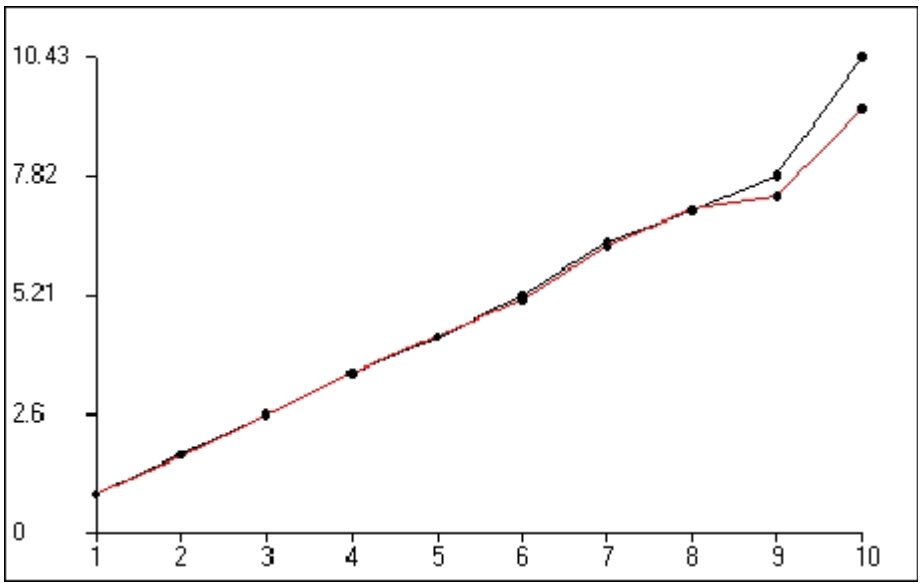


Figura 9.30 *Dc* vs. *m*. BFCLPIBRPC. (MCO –negro–, variación media –rojo–)

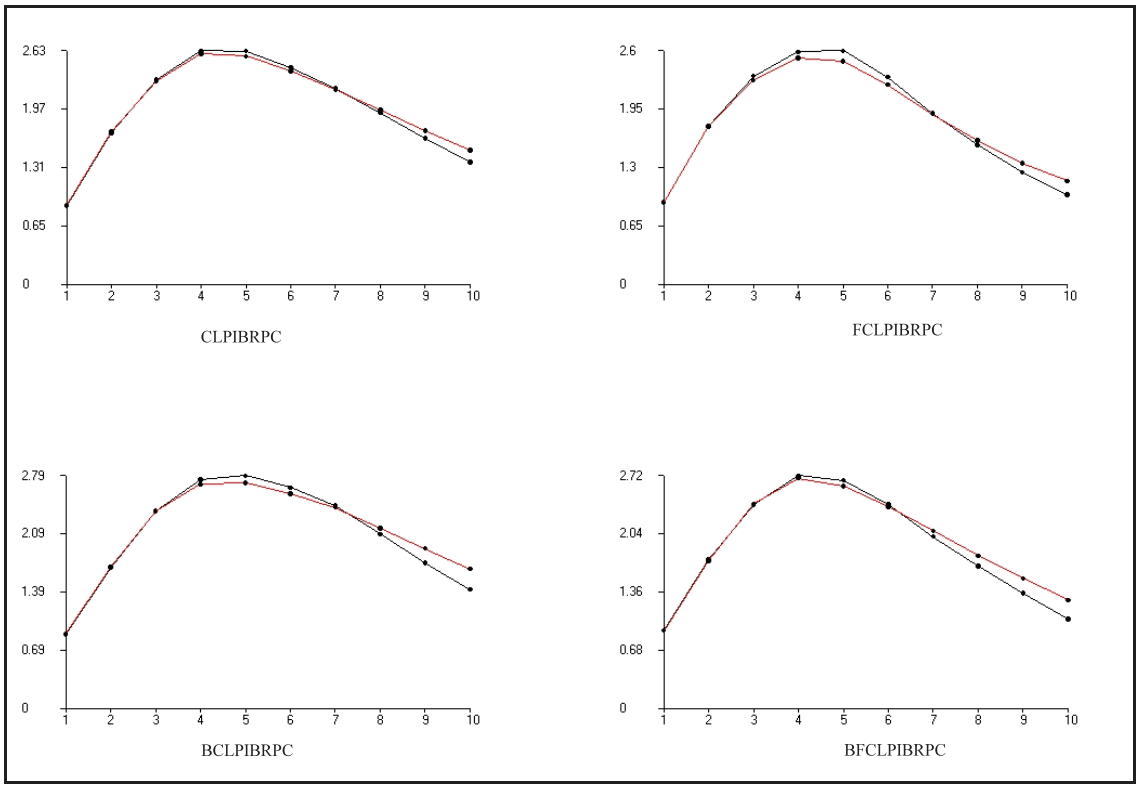


Figura 9.31 *DI* vs. *m*. (MCO –negro–, variación media –rojo–)

Podemos concluir, por tanto, que la estimación de la dimensión de correlación parece evidenciar la presencia significativa de una estructura determinista en la serie CLPIBRPC. Por otro lado, este análisis, no es capaz de discernir cuando dicho proceso se corresponde con uno de dinámica simple lineal y cuando es, por el contrario de dinámica caótica compleja.

Recordemos que los resultados obtenidos por los test de no-linealidad y por el test residual y del barajado parecen indicar que la estructura subyacente en la serie es de carácter no-lineal. Es por ello, que necesitaremos completar nuestro análisis con la estimación de los exponentes de Lyapunov, único test directo para la detección de comportamientos no-lineales y caóticos.

Antes de ello, presentamos los resultados obtenidos de la estimación de la dimensión de información. En este caso, los problemas derivados de la cantidad y la calidad de los datos parecen agravarse respecto a la estimación de la dimensión de correlación. Como se observa en las figura 9.31 la dimensión de información estimada cae rápidamente a partir de la dimensión de inserción 4, tanto para la serie CLPIBRPC como para su filtro lineal FCLPIBRPC, sin que el test de barajado permita evidenciar la existencia de estructuras deterministas a partir de este análisis.

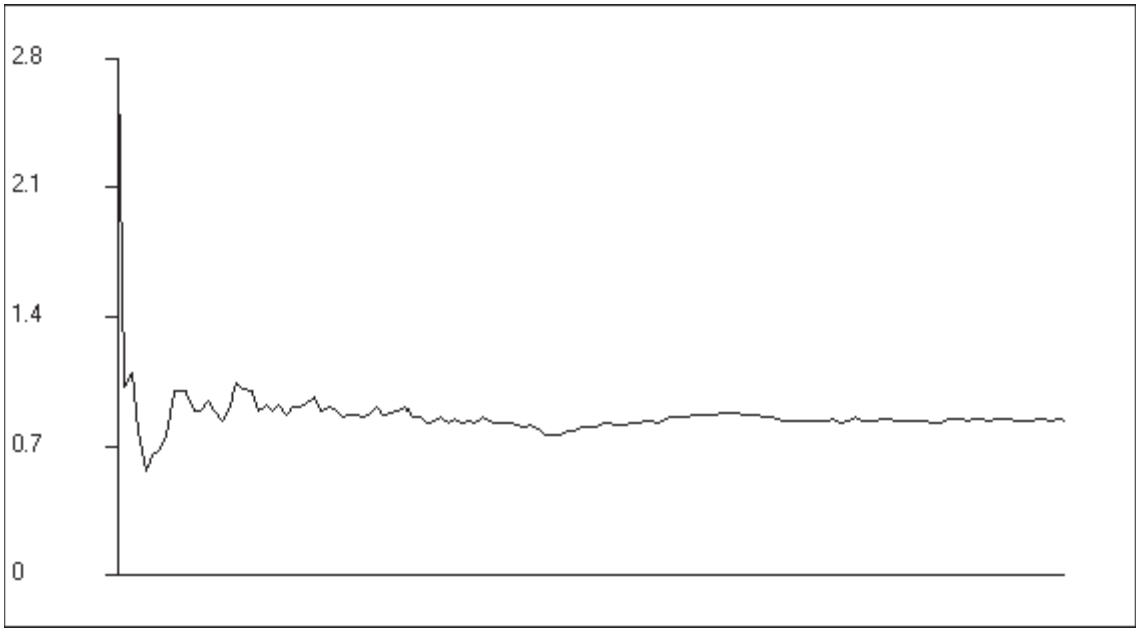


Figura 9.32. Exponente de Lyapunov dominante serie CLPIBRPC –base log10–. Método de Wolf

Exponentes de Lyapunov

A continuación procederemos a la estimación de los exponentes de Lyapunov de la dinámica subyacente en el crecimiento económico de la economía española. La estimación del espectro de exponentes de Lyapunov puede utilizarse como un método suficiente para detectar la posible existencia de comportamiento caótico en un sistema dinámico –cuando alguno de ellos resulte positivo–.

Utilizaremos el método directo de Wolf et al. (1985) y los algoritmos de estimación indirecta Lenns y el Netle. Estos algoritmos serán aplicados sobre la serie CLPIBRPC y, utilizando el test residual de Brock, sobre la serie FCLPIBRPC.

En las figuras 9.32 y 9.33 se muestra el exponente dominante estimado utilizando el algoritmo de Wolf, en el que se observa una convergencia hacia $\lambda \approx 0.59$ y $\lambda \approx 0.69$ –expresados en logaritmos neperianos– para las series CLPIBRPC y FCLPIBRPC respectivamente. A pesar del signo positivo estimado, recordemos que este algoritmo es muy sensible a la presencia de perturbaciones puramente aleatorias en la serie temporal –la presencia de componentes aleatorios sesga al alza los exponentes estimados ya que este algoritmo parte del supuesto de que existe un exponente positivo, y por tanto, cualquier inestabilidad, ya sea caótica determinista o puramente estocástica, presente en la serie quedará reflejada en el exponente positivo estimado–.

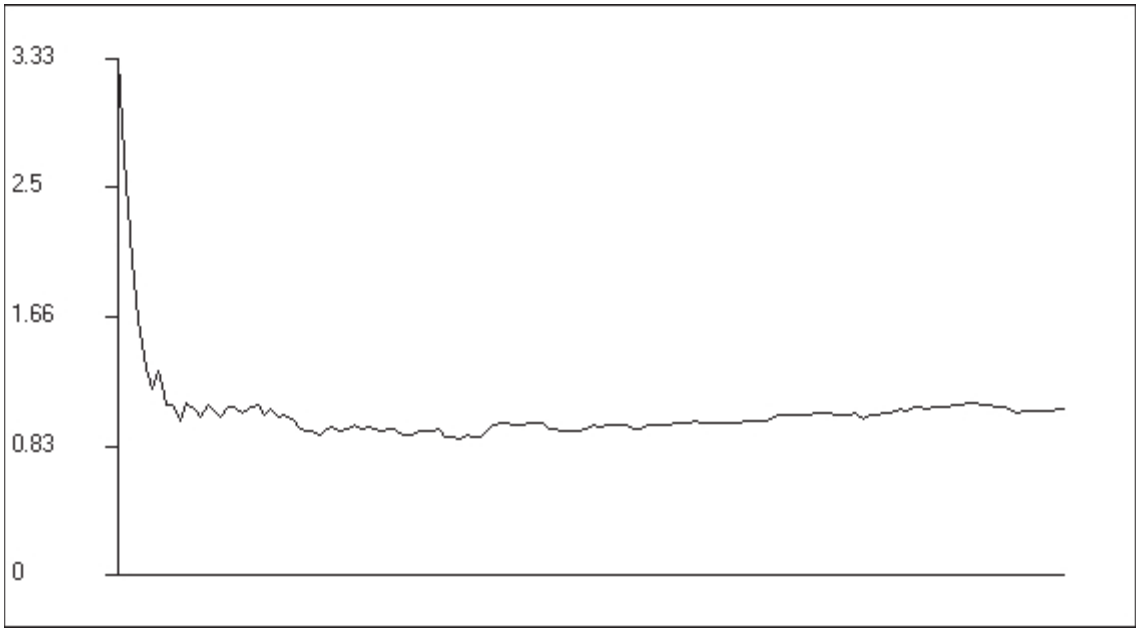


Figura 9.33 Exponente de Lyapunov dominante serie FCLPIBRPC –base log10–. Método de Wolf

En este sentido nos parece más robusta la estimación de los exponentes de Lyapunov por los algoritmos que utilizan modelos de redes neuronales artificiales. En la tabla 9.8 y 9.9 mostramos los exponentes de Lyapunov estimados por los algoritmos Lenns –Lyapunov Exponent of Noisy nonlinear Systems, Ellner et al. (1992)– y Netle –Networks Lyapunov Exponents, Kuan, Liu y Gencay (1997)– (véase capítulo 5). Estos algoritmos son más potentes que el método directo de Wolf cuando la serie temporal analizada es corta y presenta errores puramente aleatorios de baja escala. Estos métodos utilizan modelos de redes neuronales artificiales para ajustar o aproximar la dependencia temporal –lineal o no-lineal– presente en la serie y a partir dicho modelo estimar el exponente de Lyapunov dominante o el espectro completo de exponentes de Lyapunov según hablemos de el algoritmo Lenns o Netle respectivamente (véase apartado 5.5).

Tabla 9.8
Exponente de Lyapunov Dominante. Algoritmo Lenns

SERIE	N	τ	*m*	*k*	ERR	CIS	λ
CLPIBRPC	141	3	3	3	0.49301	-0.0085 (-6.4788)	0.06
FCLPIBRPC	123	5	5	2	0.69868	0.3065 (-7.3579)	0.117

N: tamaño de la serie ajustado por los retardos incluidos en el modelo; τ: retardo para la reconstrucción; m: dimensión de inserción; k numero de unidades de la capa oculta; ERR: Error estándar de la regresión; CIS: Criterio de información de Schwarz –entre paréntesis CIS para k=0–; λ Exponente de Lyapunov estimado –expresado en logaritmos neperianos–.

Tabla 9.9
Espectro de Lyapunov. Algoritmo Netle

SERIE	N	τ	*m*	*k*	ERR	CIS	Espectro
CLPIBRPC	148	1	2	1	0.00110	-7.1906 (-6.5038)	λ1≈-0.435 λ2≈ -0.522
	138	4	3	2	0.00095	-6.5622 (-6.4625)	λ1≈-0.719 λ2≈ -0.980 λ3≈-1.859
FCLPIBRPC	147	1	1	1	0.00069	-7.1489 (-7.2465)	λ1≈-2.805 (-∞)
	139	3	3	1	0.00066	-7.1070 (-7.2390)	λ1≈-0.742 (-∞) λ2≈ -0.736 (-∞) λ3≈-1.449 (-∞)

N: tamaño de la serie ajustado por los retardos incluidos en el modelo; τ: retardo para la reconstrucción; m: dimensión de inserción; k numero de unidades de la capa oculta; ERR: Error estándar de la regresión; CIS: Criterio de información de Schwarz –entre paréntesis CIS para k=0–; λ Exponente de Lyapunov estimado –expresado en logaritmos neperianos–.

Los resultados obtenidos por estos métodos parecen contradecirse, ya que el exponente de Lyapunov dominante estimado por el algoritmo Lenns resulta positivo, mientras que todo el espectro de exponente estimados por el algoritmo Netle resultan negativos. Debemos, sin embargo, apuntar, que si utilizamos el criterio de información de Schwarz, las mejores estimaciones son las que se obtienen con el algoritmo Netle, por lo que deberemos concluir que no existe una evidencia directa de comportamientos caóticos en las series analizadas. Es más, el uso del test residual refleja que la estructura determinista presente en la serie CLPIBRPC queda suficientemente bien recogida por el filtro lineal AR(2), ya que el análisis de la serie FCLPIBRPC no parece indicar la presencia de ninguna estructura determinista en la dinámica subyacente a estas series.

Podemos concluir, por tanto, que en lo que se refiere a la serie CLPIBRPC los test de no-linealidad reflejan una evidencia clara a favor de comportamientos no-lineales; la dimensión fractal parece indicar que nos encontramos ante un proceso generador de baja dimensión; y el análisis de los exponentes de Lyapunov parecen indicar que esa no-linealidad podría corresponderse con la de un sistema dinámico en régimen de comportamiento caótico determinista, al menos por uno de los dos métodos utilizados para su estimación.

Como ya hemos apuntado, estos resultados no deben considerarse como definitivos, ya que la calidad y la cantidad de datos limita la potencia de los test utilizados para la detección de comportamientos no-lineales y caótico determinista. Es por ello, que en el próximo apartado utilizaremos otros indicadores del nivel de actividad de la economía Española para completar el análisis de la serie CLPIBRPC.

9.2. Análisis del crecimiento de la economía española durante la segunda mitad del siglo XX: series trimestrales y mensuales.

En este apartado vamos a proceder al análisis de un conjunto de series temporales con periodicidad mensual y trimestral referidos a la segunda mitad del siglo XX que pueden considerarse con generalidad como indicadores macroeconómicos del nivel de actividad de la economía española –tabla 9.10–. En particular utilizaremos series de producción –PIBT, VABAGR, VABISC, VABC y VABS– e inversión –FBCFBE y FBCFC– procedentes de la Contabilidad Nacional[12]; desempleo –PARO–; indicadores generales del ritmo de actividad económica –IPIGRAL, IPIBE, CGA, CAC, CEE, NCPBI y NCPC–. Completamos el análisis estudiando también series de precios –IPC–, tipos de interés –MIBOR– y agregados monetarios amplios[13] –ALP, M3–.

TABLA 9.10

SERIES TEMPORALES DE LA ECONOMÍA ESPAÑOLA		
SERIE	**Tamaño Muestral**	**Descripción y Fuente**
PIBT	TRIMESTRAL 1970-I:1998-IV *N*=116	*Producto Interior Bruto.* Precios de mercado. Miles de millones de ptas constantes de 1986 –medias trimestrales–. Contabilidad Nacional Trimestral. INE
VABAGR	TRIMESTRAL 1970-I:1998-IV *N*=116	*Valor Añadido Bruto Agricultura, Pesca y Silvicultura.* Miles de millones de ptas constantes de 1986 –medias trimestrales– Contabilidad Nacional Trimestral, VAB por sectores de Actividad. INE
VABISC	TRIMESTRAL 1970-I:1998-IV *N*=116	*Valor Añadido Bruto Industria Sin Construcción.* Miles de millones de ptas constantes de 1986 –medias trimestrales– Contabilidad Nacional Trimestral, VAB por sectores de Actividad. INE
VABC	TRIMESTRAL 1970-I:1998-IV *N*=116	*Valor Añadido Bruto Construcción.* Miles de millones de ptas constantes de 1986 –medias trimestrales– Contabilidad Nacional Trimestral, VAB por sectores de Actividad. INE
VABS	TRIMESTRAL 1970-I:1998-IV *N*=116	*Valor Añadido Bruto Servicios.* Miles de millones de ptas constantes de 1986 –medias trimestrales– Contabilidad Nacional Trimestral, VAB por sectores de Actividad. INE

[12] Debido al cambio en la metodología utilizada en la elaboración de las series de Contabilidad Nacional, no se disponen en el momento de cerrar nuestro trabajo las series históricas actualizadas en la nueva base. Es por ello, que utilizaremos los datos disponibles en base 1986 hasta el año 1998.

[13] Las series utilizadas finalizan en 1998, ya que a partir de 1999 España ha pasado a formar parte de la Unión Monetaria y Europea, refiriéndose a partir de entonces los agregados monetarios disponibles para toda la zona EURO.

FBCFBE	TRIMESTRAL 1970-I:1998-IV *N*=116	*Formación Bruta de Capital Fijo. Bienes de Equipo*. Precios de mercado. Miles de millones de ptas constantes de 1986 Contabilidad Nacional Trimestral. Agregados de la Demanda INE
FBCFC	TRIMESTRAL 1970-I:1998-IV *N*=116	*Formación Bruta de Capital Fijo. Construcción.* Precios de mercado. Miles de millones de ptas constantes de 1986 Contabilidad Nacional Trimestral. Agregados de la Demanda INE
PARO	MENSUAL 1964-01:1999-12 N=432	*Paro registrado Total.* Miles de Personas. INEM. Estadísticas de Empleo.
IPIGRAL	MENSUAL 1975-01:1999-12 N=300	*Indice de Producción Industrial. Total General.* Instituto Nacional de Estadística. Año base 1990=100. Serie enlazada retrospectivamente con las tasas de variación interanual estimadas por la Subdirección General de Previsión y Coyuntura (SGPC)
IPIBE	MENSUAL 1975-01:1999-12 N=300	*Indice de Producción Industrial. Bienes de Equipo*. Instituto Nacional de Estadística. Año base 1990=100. Serie enlazada retrospectivamente con las tasas de variación interanual estimadas por la Subdirección General de Previsión y Coyuntura (SGPC)
CGA	MENSUAL 1945-01:1999-12 N=660	*Consumo Gasolinas Automoción*. Miles de toneladas métricas. Asociación Española de Operadores de Productos Petrolíferos e Instituo Nacional de Hidrocarburos.
CAC	MENSUAL 1964-01:1999-12 N=432	*Consumo Aparente de Cemento.* Miles de toneladas. Total Ventas - Exportaciones + Importaciones. Asociación de Fabricantes de Cemento de España (OFICEMEN)
CEE	MENSUAL 1958-01:1999-12 N=504	*Consumo energía Eléctrica*. Millones de KWH. Consumo energía eléctrica medido a las salidas de las centrales. Red Eléctrica (REE) y Unidad Eláctrica S.A. (UNESA).
NCPBI	MENSUAL 1963-09:1999-12 N=436	*Nivel de Cartera de Pedidos. Bienes de Inversión*. Encuesta de Coyuntura Industrial del Ministerio de Industria y Energía. Diferencia entre los porcentajes de respuesta *elevado* (+1) y *débil* (-1).
NCPC	MENSUAL 1966-02:1999-12 N=407	*Nivel de Cartera de Pedidos. Total Sector Construcción*. Encuesta de Coyuntura Industrial del Ministerio de Industria y Energía. Nivel de contratación respecto a la media del trimestre anterior. Diferencia entre los porcentajes de respuesta *elevado* (+1) y *débil* (-1).
IPC	MENSUAL 1954-03:1999-12 N=550	*Indice de Precios al Consumo. Indice General* Instituto Nacional de Estadística. Año base 1992=100
ALP	MENSUAL 1967-02:1998-12 N=383	*Activos Líquidos en manos del Público* Miles de Millones. Banco de España.
M3	MENSUAL 1967-02:1998-12 N=383	*Disponibilidades Líquidas* Miles de Millones. Banco de España.
MIBOR	MENSUAL 1974-01:1999-12 N=312	*Tipo de interes depósito a un día Mercado Interbancario de Madrid* Banco de España

Siguiendo la metodología propuesta anteriormente, utilizaremos estas series para la detección de no-linealidades y caos determinista. Es por ello que tras analizar el correlograma y el periodograma de cada una de ellas en la búsqueda de dependencias temporales y periodicidades ocultas, aplicaremos sobre ellas los test de no-linealidad del capítulo 8 –test BDS, de Kaplan, de Engle y R/S– y los s algoritmos Lenns y Netle analizados en el capítulo 5 para la estimación de los exponentes de Lyapunov correspondientes al proceso generador desconocido de las series temporales consideradas.

Extracción del componente cíclico y análisis de la estacionariedad

Recordemos que antes de aplicar los test de no-linealidad, y para poder reconstruir el atractor asociado estas series temporales, es necesario, como paso previo, analizar la estacionariedad de cada una de ellas.

La mayoría de series consideradas presentan una tendencia positiva de crecimiento, esto es, no son estacionarias en media. Como consecuencia de ello y para evitar problemas de heterocedasticidad, hemos transformado las series logarítmicamente y por el filtro Hodrick-Prescott para convertirlas en estacionarias –sólo las series NCPBI, NCPC y MIBOR parecen estacionarias y por ello no han sido transformadas–.

En las figuras figuras 9.34 a 9.52 representamos la evolución temporal de cada una de las series así como de se componente tendencial y cíclico que en su caso será el utilizado para la detección de comportamientos caóticos deterministas.

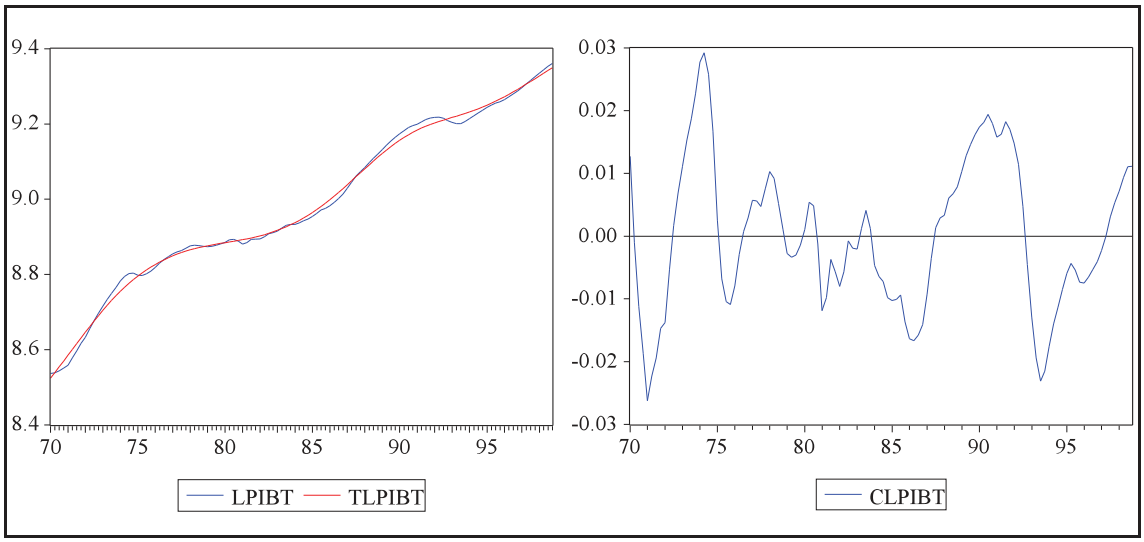


Figura 9.34

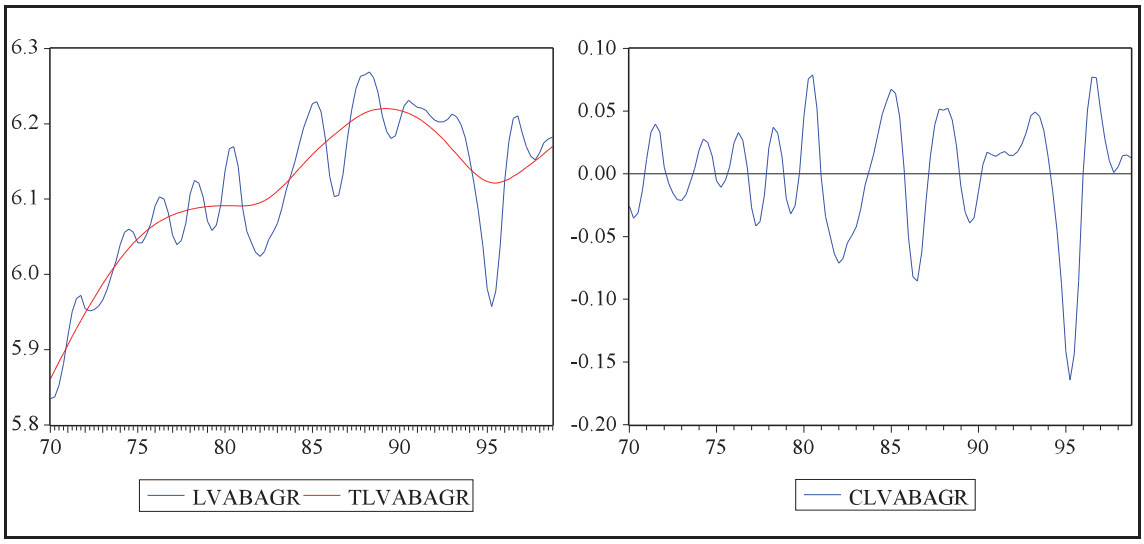


Figura 9.35

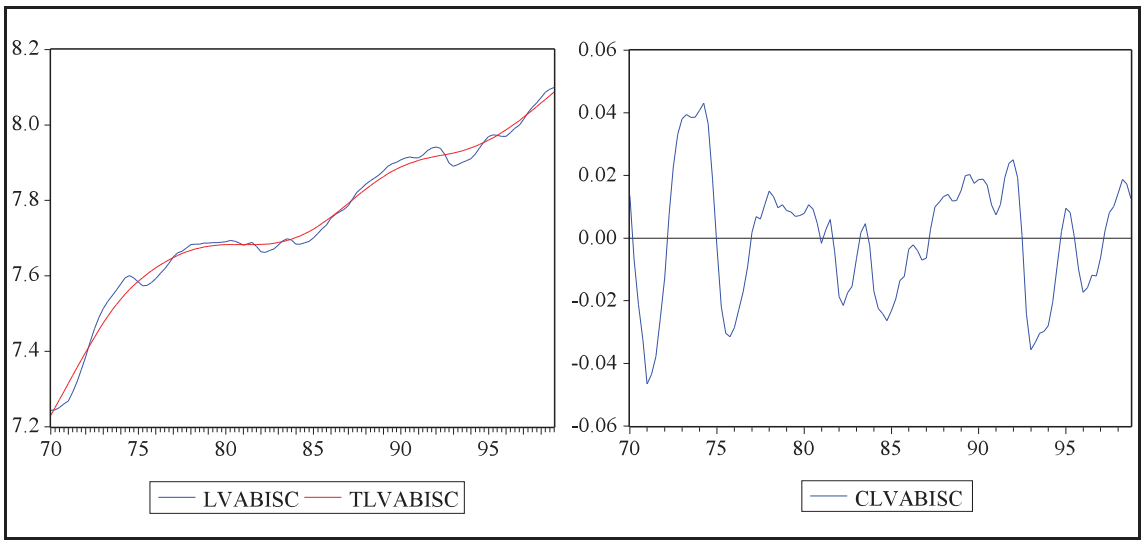


Figura 9.36

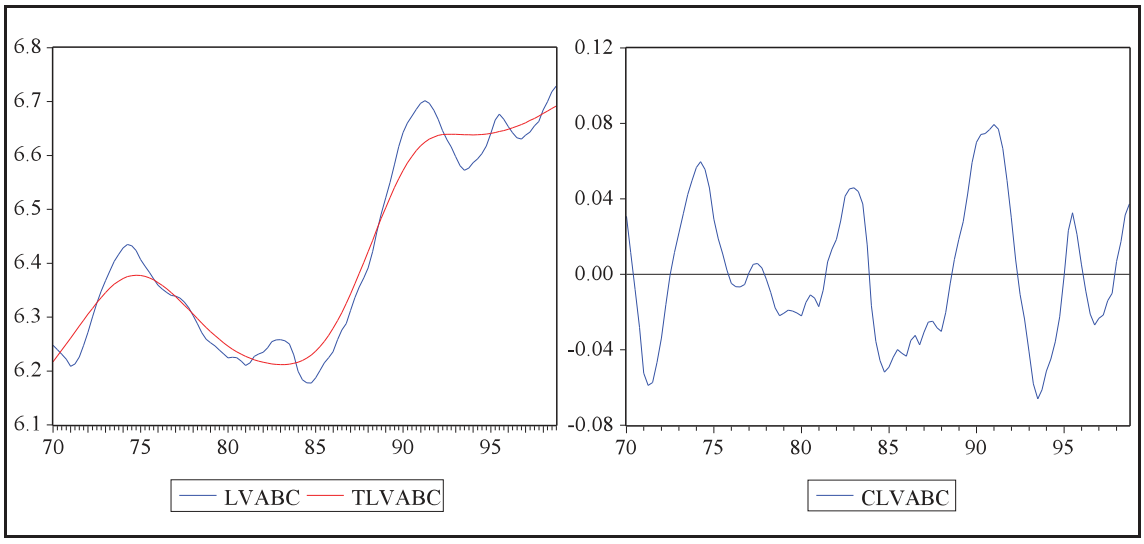


Figura 9.37

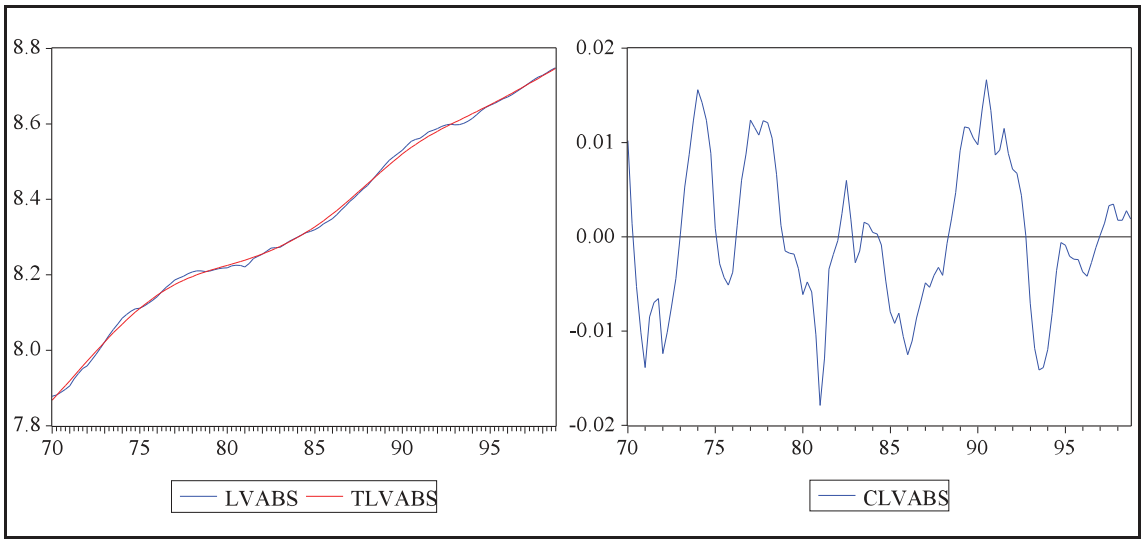


Figura 9.38

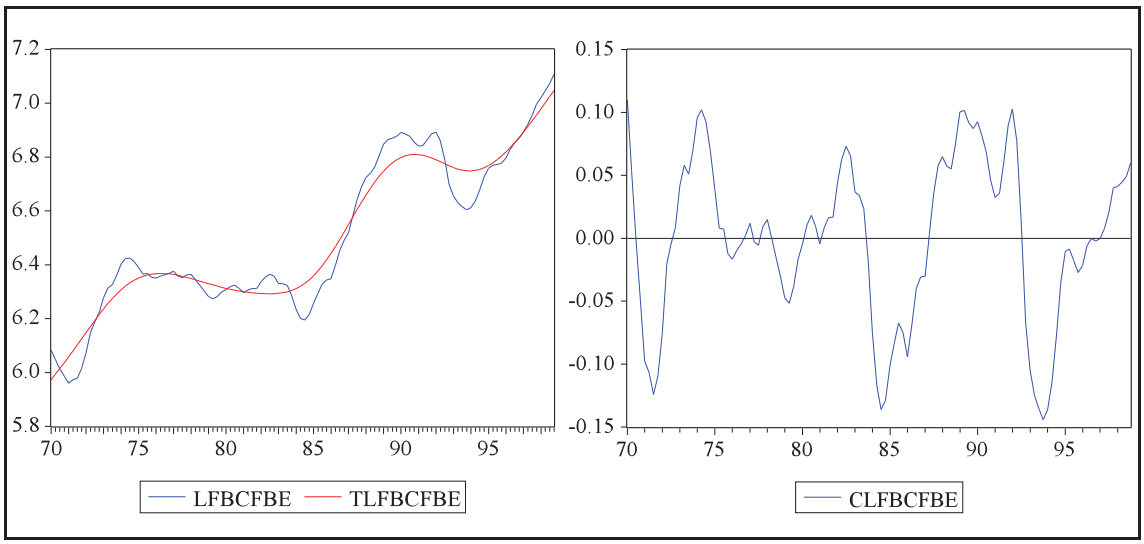


Figura 9.39

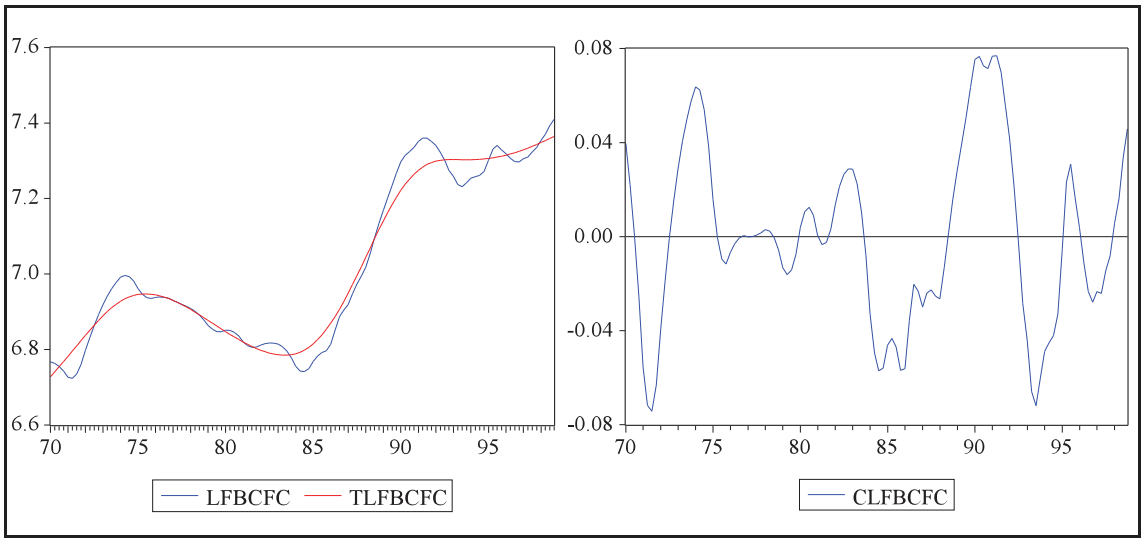


Figura 9.40

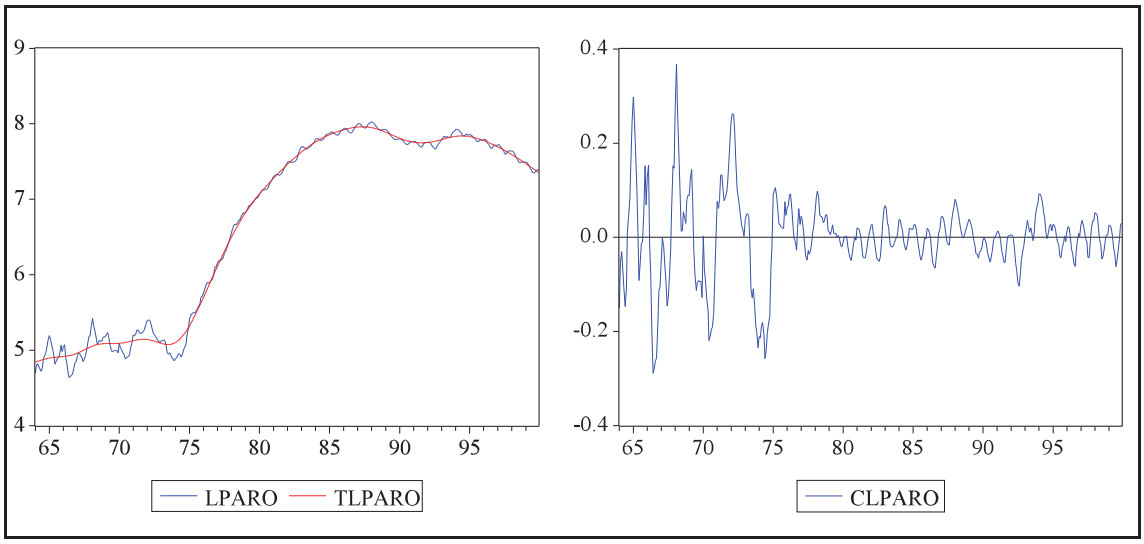


Figura 9.41

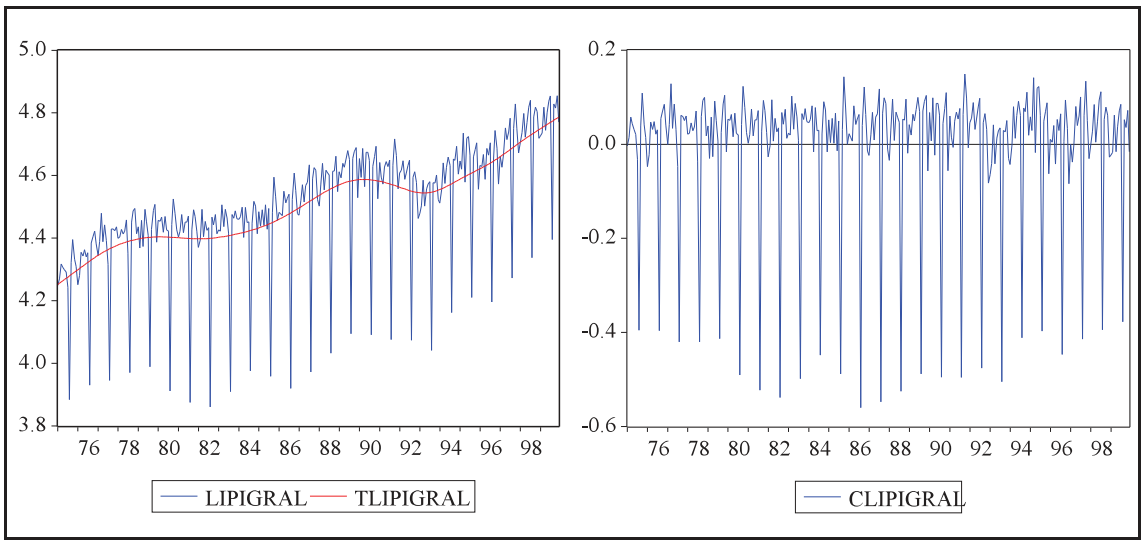


Figura 9.42

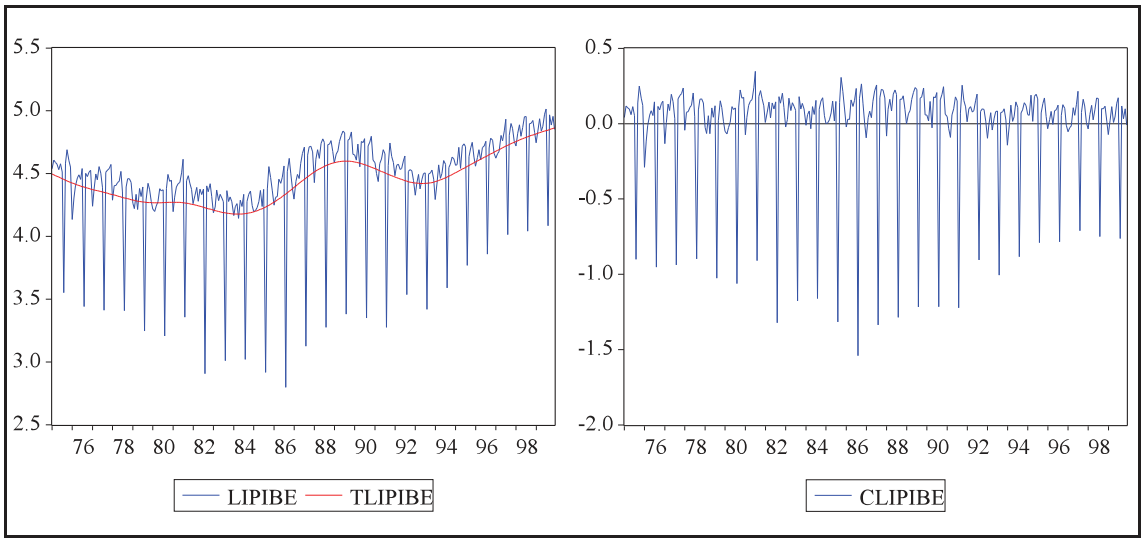


Figura 9.43

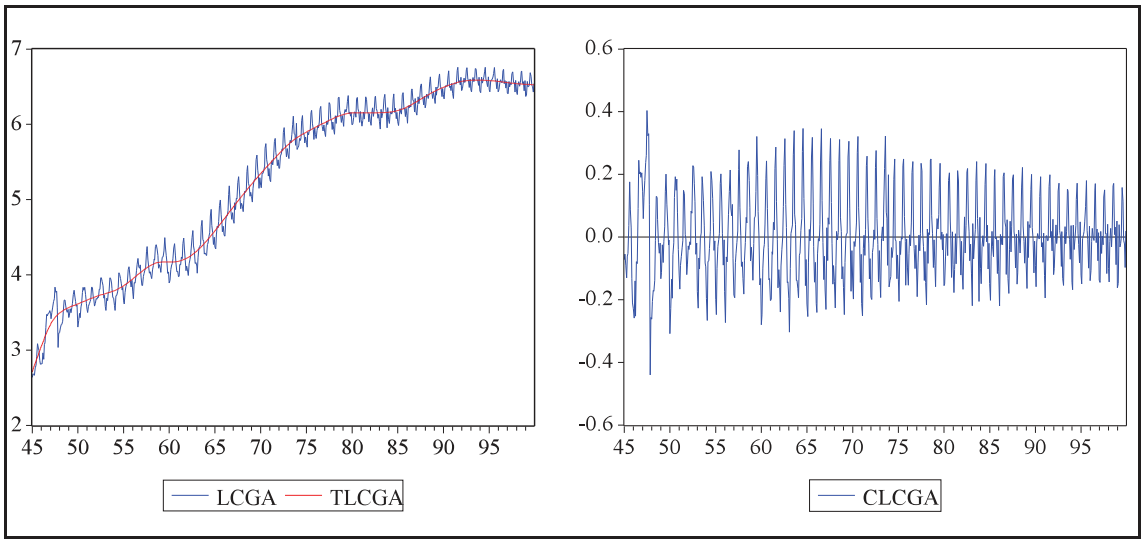


Figura 9.44

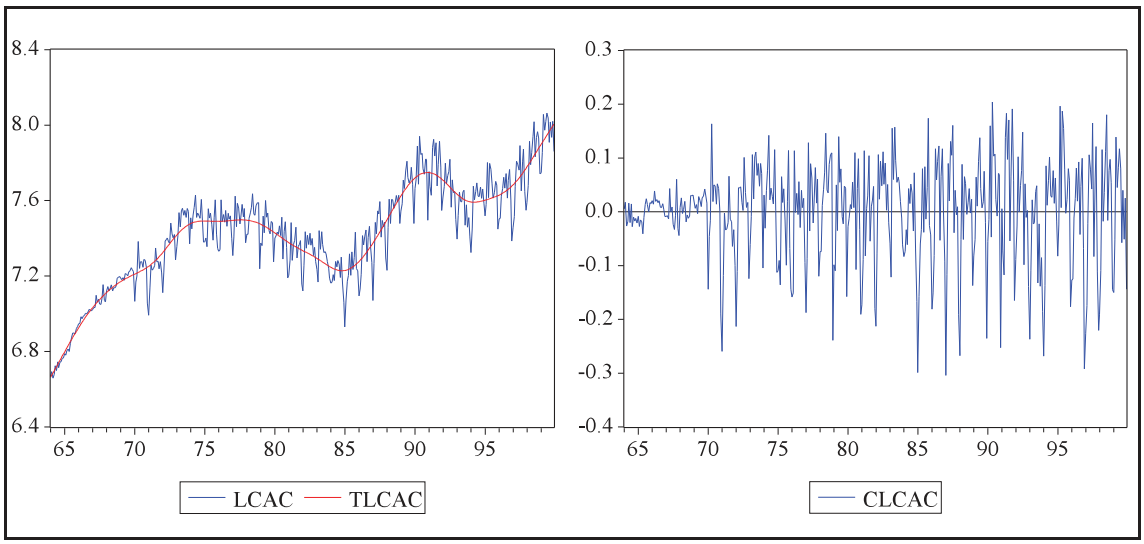


Figura 9.45

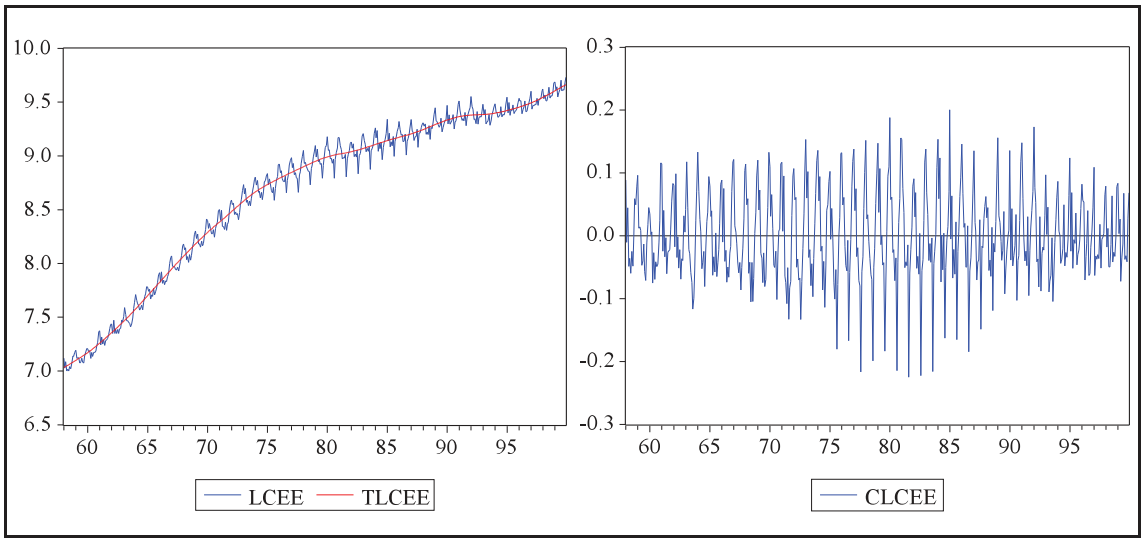


Figura 9.46

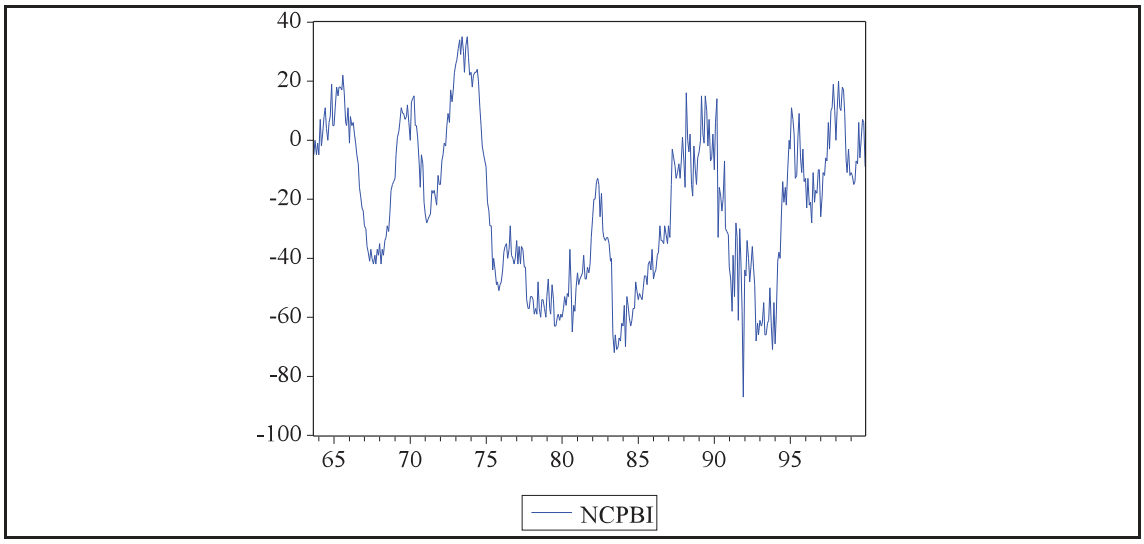


Figura 9.47

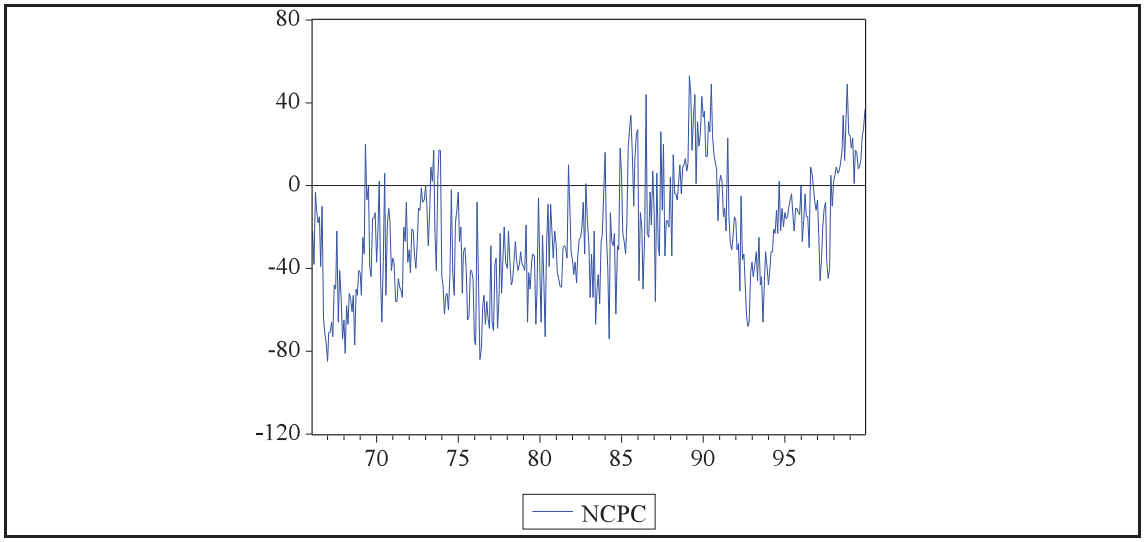


Figura 9.48

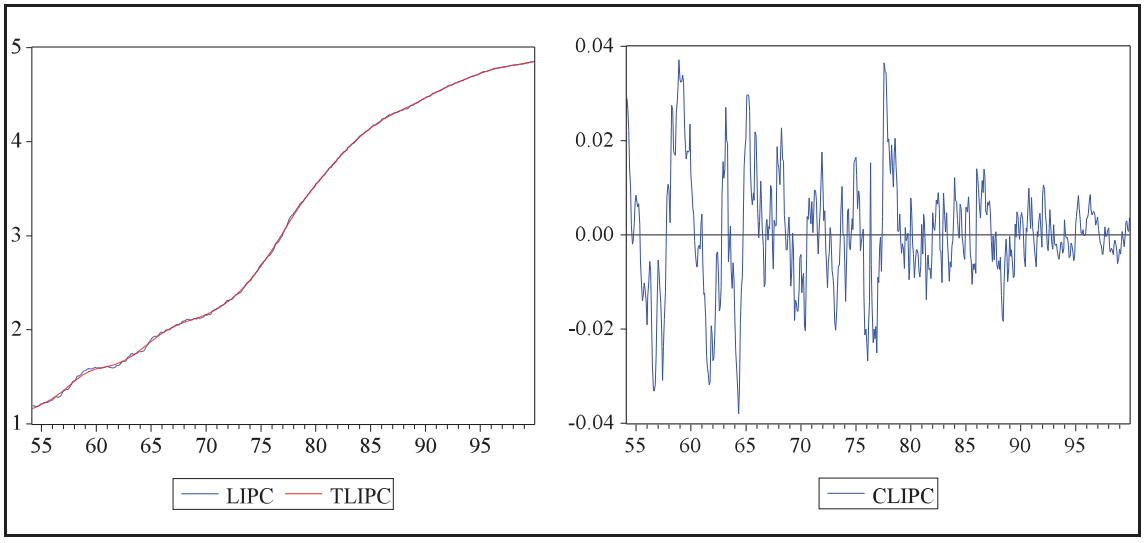


Figura 9.49

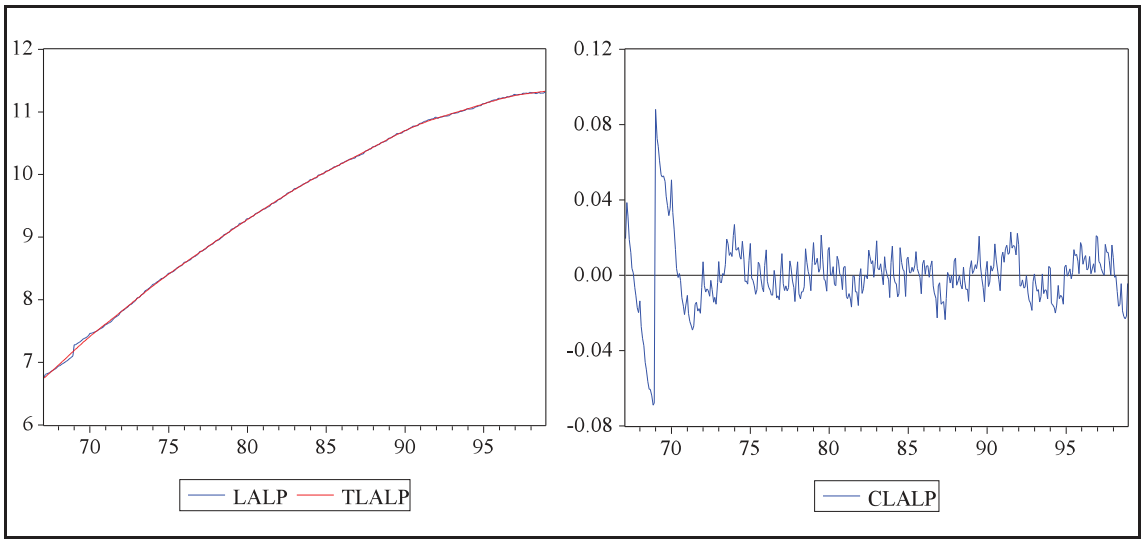


Figura 9.50

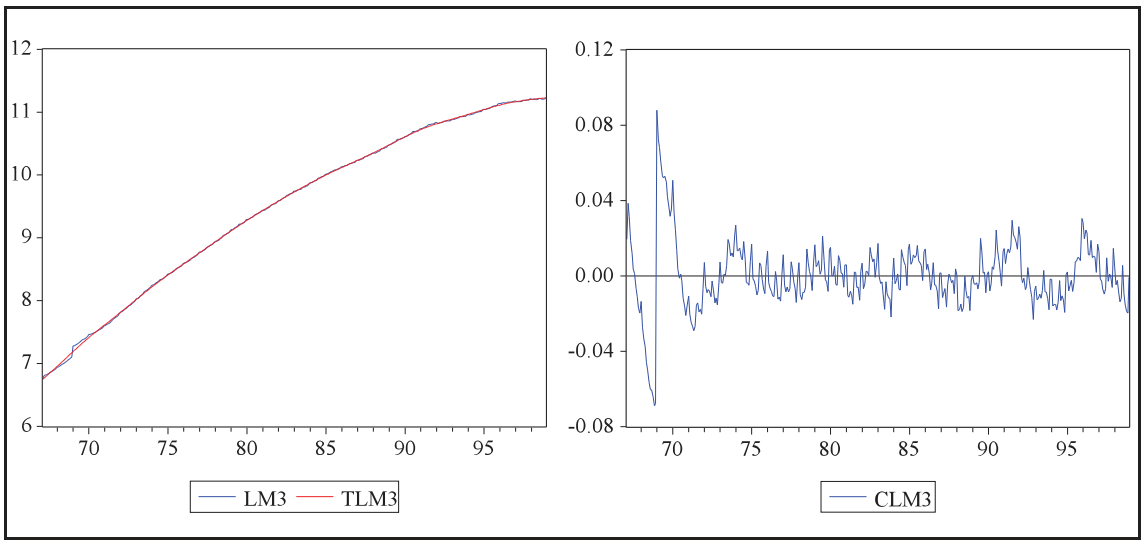


Figura 9.51

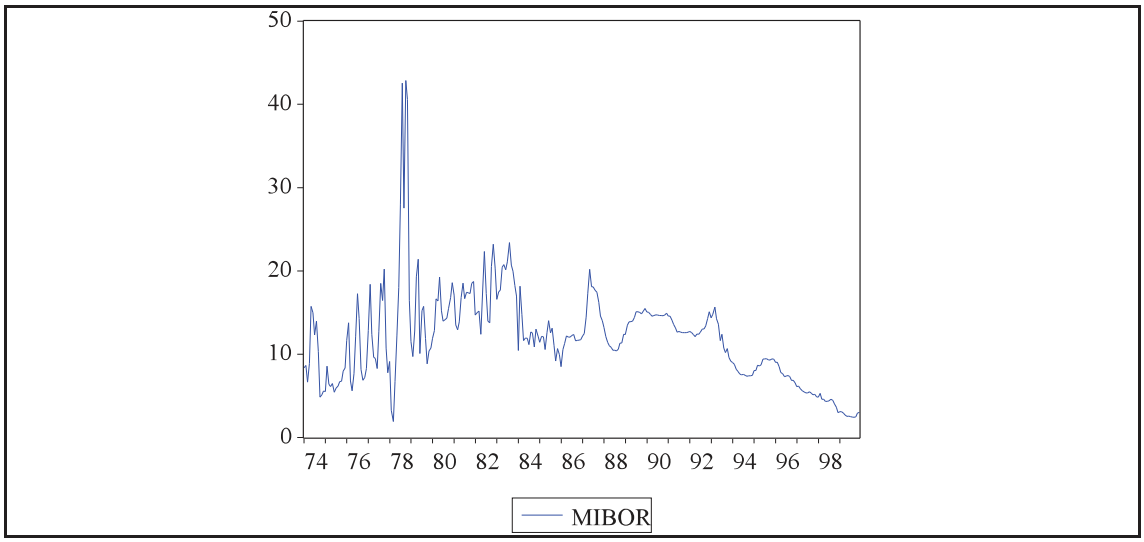


Figura 9.52

TABLA 9.11

CONTRASTE DE INTEGRABILIDAD ESTACIONAL TRIMESTRAL

SERIE	$\pi 1=0$	$\pi 2=0$	$\pi 3=0$	$\pi 4=0$	$\pi 3=\pi 4=0$	Filtro
CLPIBT	-3.99	-8.47	0.01*	-8.53	36.42	$(1+L+L^2+L^3)$
CLVABAGR	-6.12	-7.75	2.05*	-10.89	70.85	$(1+L+L^2+L^3)$
CLVABISC	-4.32	-9.02	1.63*	-8.62	41.45	$(1+L+L^2+L^3)$
CLVABC	-4.64	-9.52	1.50*	-8.22	36.99	$(1+L+L^2+L^3)$
CLVABS	-3.78	-8.02	-1.64*	-7.98	34.95	$(1+L+L^2+L^3)$
CLFBCFBE	-3.86	-9.38	0.70*	-8.06	32.23	$(1+L+L^2+L^3)$
CLFBCF	-4.10	-10.23	2.92*	-8.07	44.37	$(1+L+L^2+L^3)$

Estadístico *t* de significación individual y estadístico *F* significación conjunta –*no significativo–.

El análisis de la estacionariedad ha sido completado con los contrastes de integrabilidad estacional introducidos en el capítulo 8. Al trabajar con series con periodicidad muestral trimestral y mensual, debemos tener en cuenta también la posible no estacionariedad estacional. En las tablas 9.11 y 9.12 mostramos los resultados de estos contrastes así como la transformación que será aplicada a cada serie temporal.

TABLA 9.12

CONTRASTE DE INTEGRABILIDAD ESTACIONAL MENSUAL

SERIE	$\pi_1=0$	$\pi_2=0$	$\pi_3=\pi_4=0$	$\pi_5=\pi_6=0$	$\pi_7=\pi_8=0$	$\pi_9=\pi_{10}=0$	$\pi_{11}=\pi_{12}=0$	Filtro
CLPARO	-7.99	-2.64*	41.86	0.43*	30.07	31.04	59.53	$(1+L)(1+3^{1/2}L+L^2)$
CLIPIGRAL	-5.60	0.12*	0.31*	0.50*	0.46*	0.18*	0.38*	S(L)
CLIPIBE	-3.77	-0.09*	0.11*	0.45*	0.81*	0.44*	0.14*	S(L)
CLCGA	-7.90	-4.89	53.74	36.68	73.73	90.60	42.65	-
CLCAC	-7.14	-1.01*	18.17	26.70	22.86	16.12	2.14*	$(1+L)(1+L+L^2)$
CLCEE	-6.88	-1.50*	12.03	8.37	9.90	12.51	3.67*	$(1+L)(1+L+L^2)$
NCPBI	-2.91*	-3.55	43.33	7.85	70.63	28.53	52.71	$(1-L)$
NCPC	-1.55*	-4.31	46.05	11.00	51.04	21.27	39.03	$(1-L)$
CLIPC	-7.81	-2.93	42.43	6.56	37.56	41.29	52.00	-
CLALP	-5.95	-3.45	26.88	10.01	35.63	14.93	30.07	-
CLM3	-5.81	-3.47	25.48	9.65	36.00	14.46	28.49	-
MIBOR	-3.62	-3.67	68.57	1.23*	36.17	22.98	33.24	$(1-3^{1/2}L+L^2)$

Estadístico *t* de significación individual y estadístico *F* significación conjunta –*no significativo–. $S(L)=(1+L+L^2+L^3+L^4+L^5+L^6+L^7+L^8+L^9+L^{10}+L^{11})$

Análisis del Periodograma y Correlograma

Una vez que hemos transformado las series para que éstas resulten estacionarias, y que el análisis de su evolución temporal revela un comportamiento oscilatorio irregular compatible con la hipótesis de caos determinista, seguimos la metodología propuesta en los capítulos 4, 5 y 8 analizando a continuación el periodograma y el correlograma de las series consideradas.

En las figuras 9.53 a 9.62 se muestra el correlograma de las series transformadas. Como se observa en estos gráficos, las series se encuentran significativamente autocorrelacionadas, indicando la existencia de cierta estructura determinista en la dinámica subyacente de cada una de estas series.

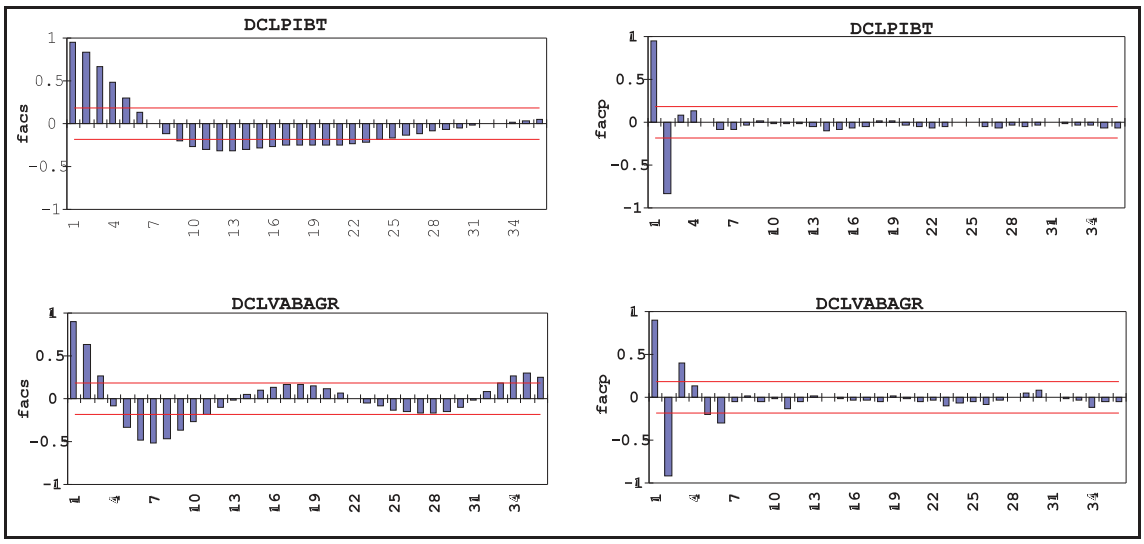


Figura 9.53

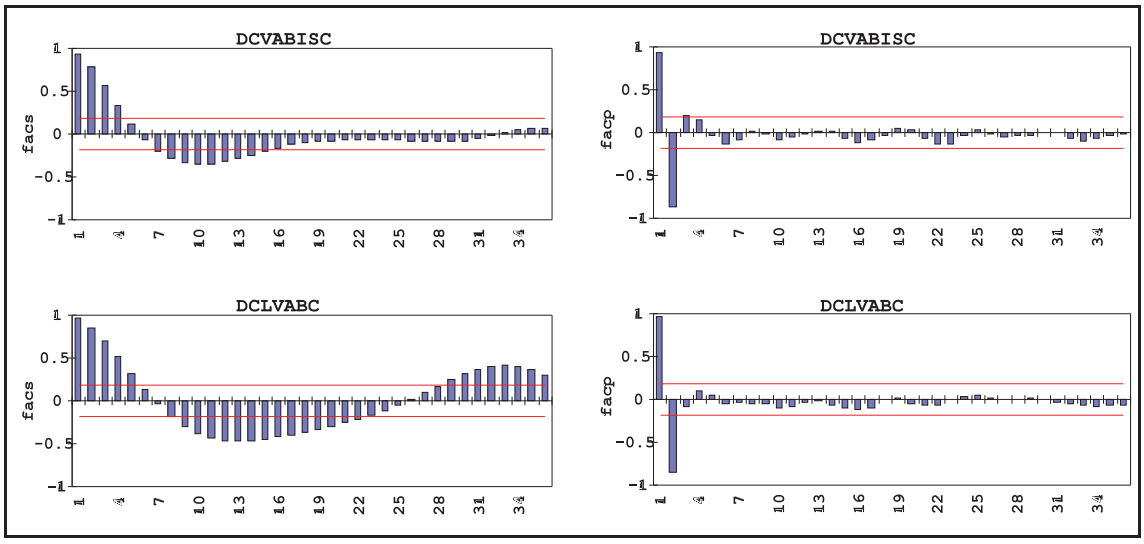


Figura 9.54

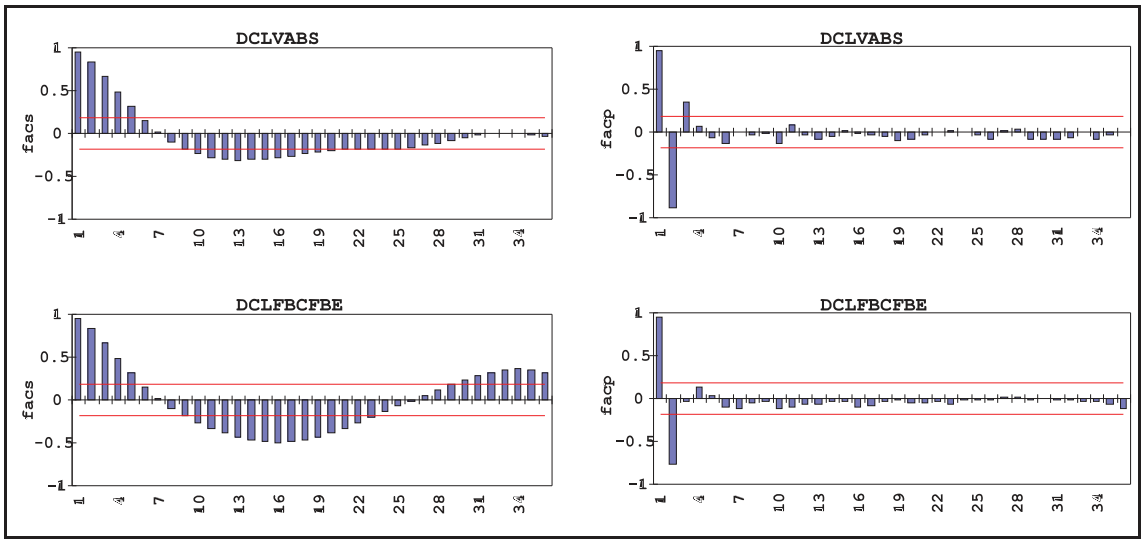


Figura 9.55

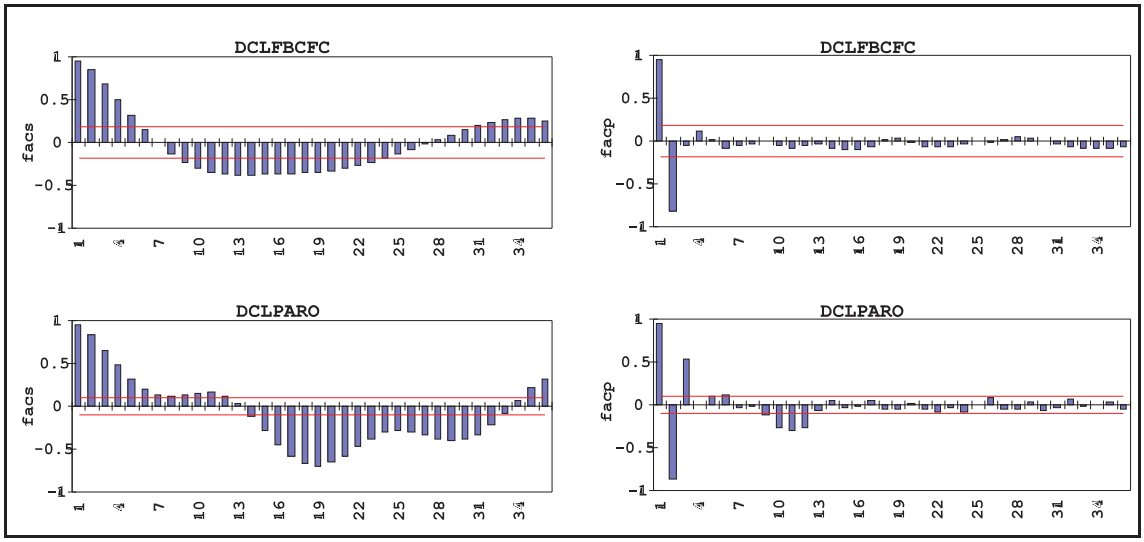


Figura 9.56

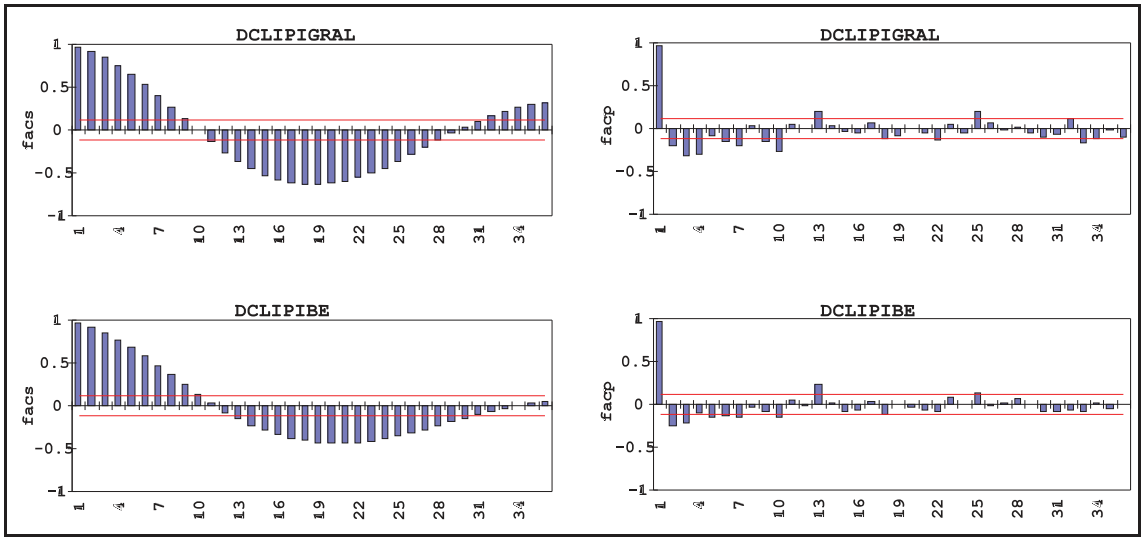


Figura 9.57

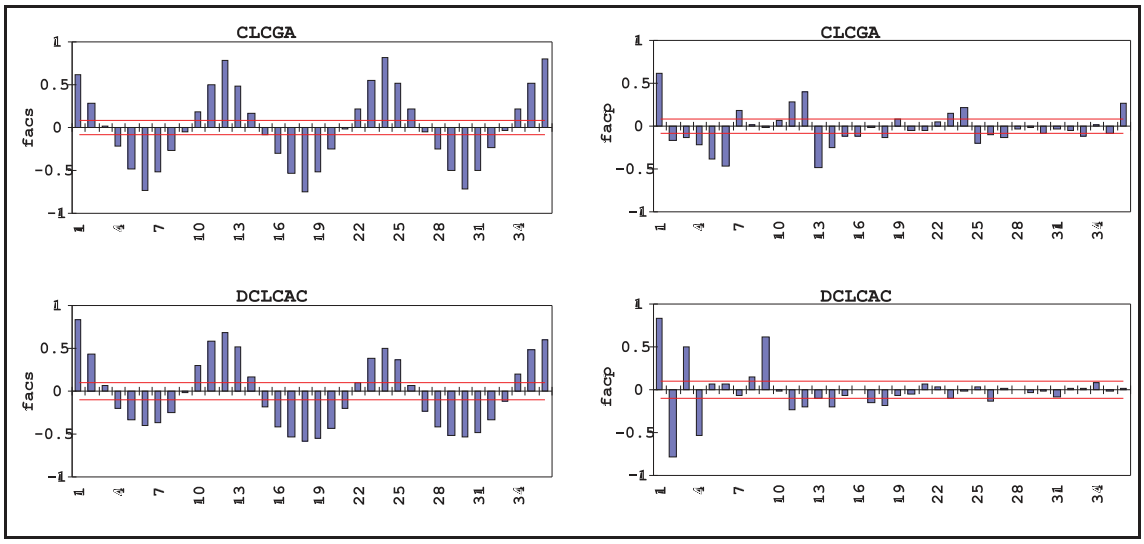


Figura 9.58

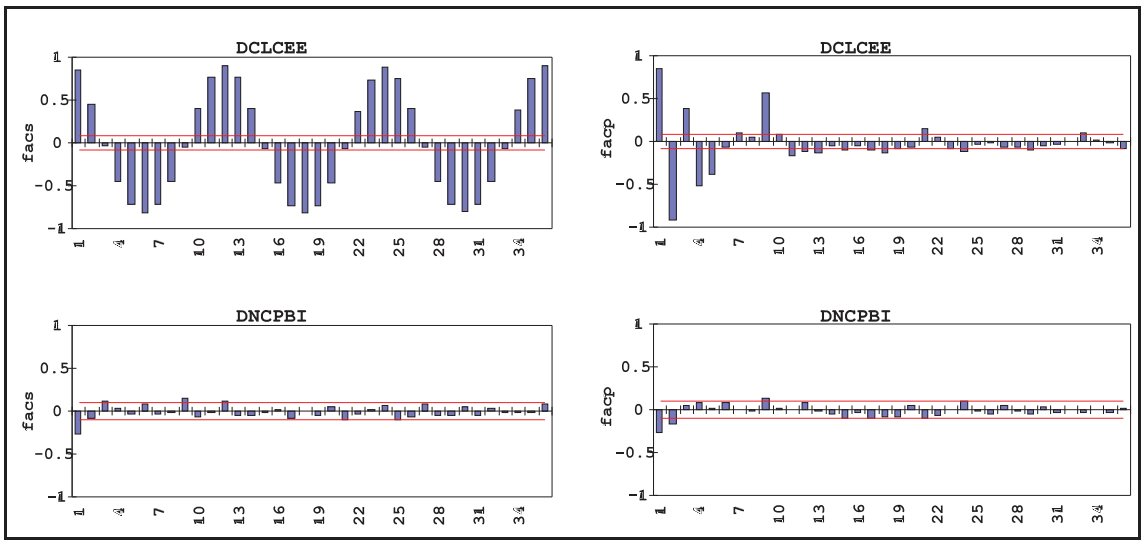


Figura 9.59

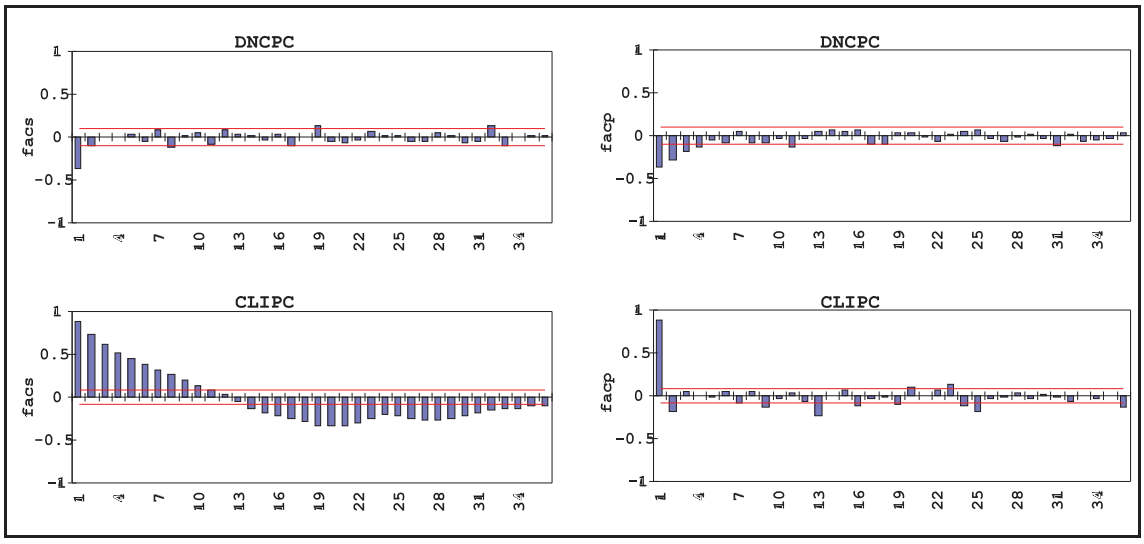


Figura 9.60

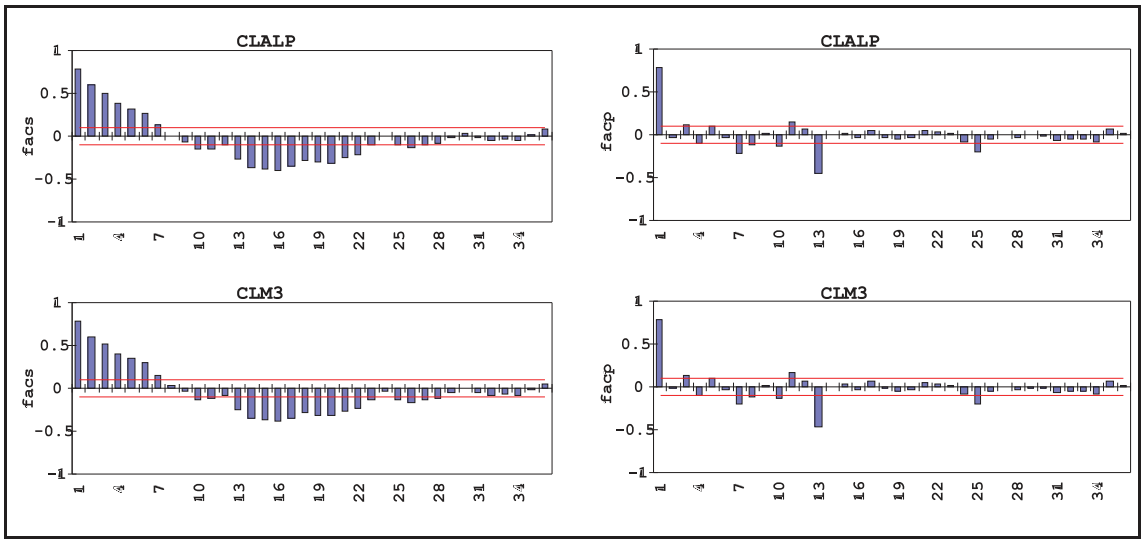


Figura 9.61

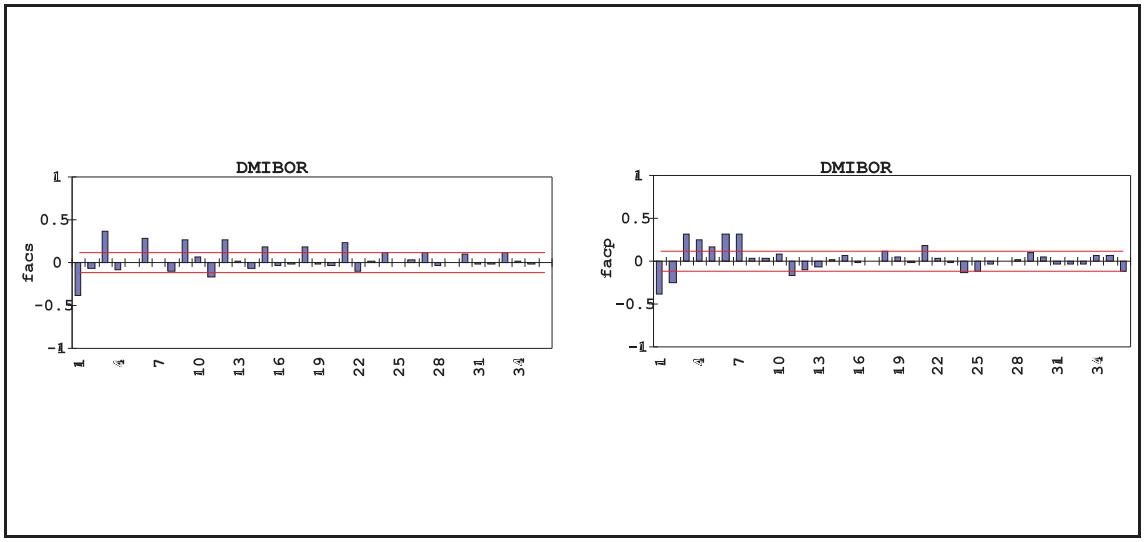


Figura 9.62

El análisis del periodograma, por su parte –tabla 9.13 y figuras 9.63- 9.72–, revela que el comportamiento oscilatorio de las series temporales no se corresponde con el de ningún sistema de dinámica simple determinista de baja dimensión. Esto es, que el proceso generador de estas series, cuyo correlograma muestra la existencia significativa de cierta dependencia temporal, debe de presentar algún componente puramente estocástico, o bien un comportamiento caótico determinista, o bien la superposición de ambas posibilidades. La incapacidad del análisis de la evolución temporal, el correlograma y el periodograma para discriminar entre cada una de estas posibilidades, requiere la utilización de las herramientas y análisis introducidos en los capítulos 5 y 8. A continuación aplicaremos dichas técnicas a las series temporales aquí consideradas con el propósito de detectar la posible presencia de estructuras no-lineales y comportamientos caóticos en el proceso generador desconocido de las mismas.

TABLA 9.13

ANÁLISIS ESPECTRAL Y FRECUENCIA MEDIA DOMINANTE

SERIE	*T*	*N*	*P*	SERIE	*T*	*N*	*P*	SERIE	*T*	*N*	*P*
DCLPIBT	4	113	14.1	*DCLPARO*	12	429	4.0	*DNCPC*	12	406	0.3
DCLVABAGR	4	113	4.0	*DCLIPIGRAL*	12	289	2.7	*CLIPC*	12	550	3.1
DCLVABISC	4	113	9.1	*DCLIPIBE*	12	289	8.0	*CLALP*	12	383	0.5
DCLVABC	4	113	7.1	*CLCGA*	12	660	1.0	*CLM3*	12	383	5.3
DCLVABS	4	113	7.1	DCL*CAC*	12	431	1.0	*DMIBOR*	12	310	25.8
DCLFBCFBE	4	113	7.1	*DCLCEE*	12	501	1.0				
DCLFBCFC	4	113	9.4	*DNCPBI*	12	435	0.3				

T:Periodicidad muestral; *N*: Tamaño Muestral; *P*: Periodo medio dominante en años calculado como el periodo correspondiente a la máxima densidad espectral de potencia estimada. Para la estimación del periodograma se ha utilizado la ventana *Hanning*

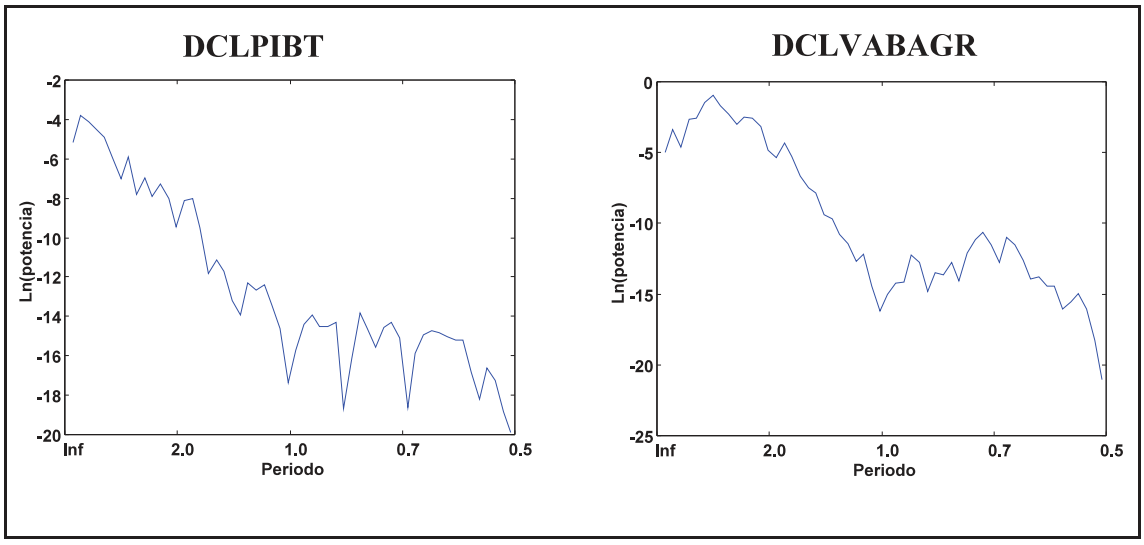


Figura 9.63

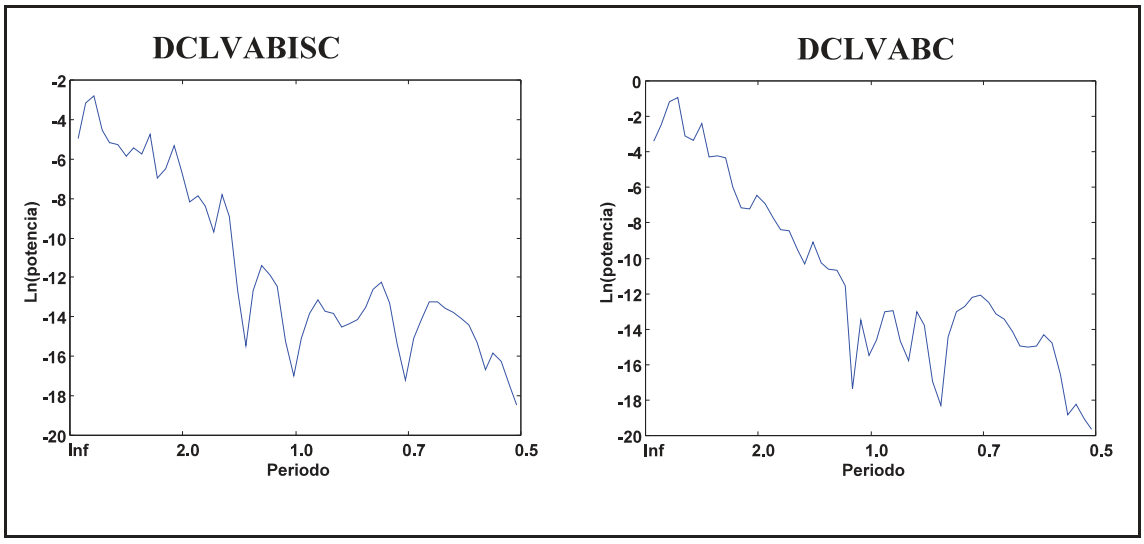


Figura 9.64

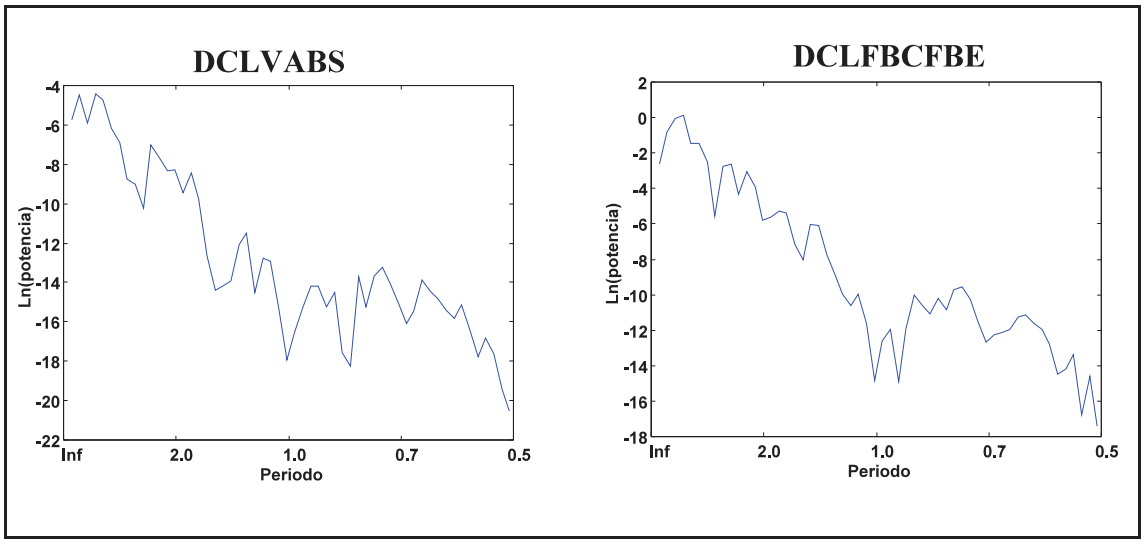


Figura 9.65

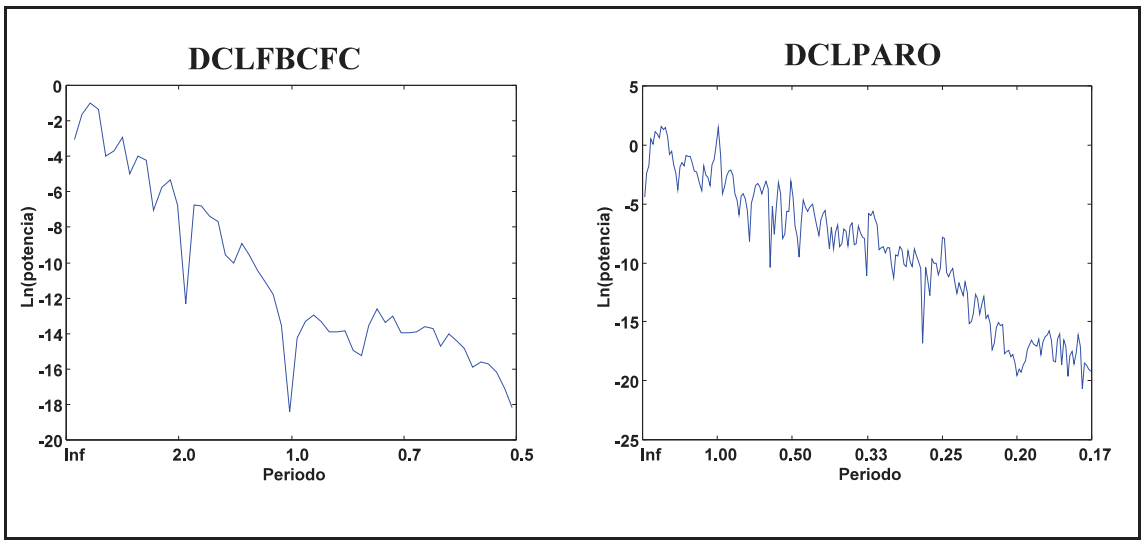


Figura 9.66

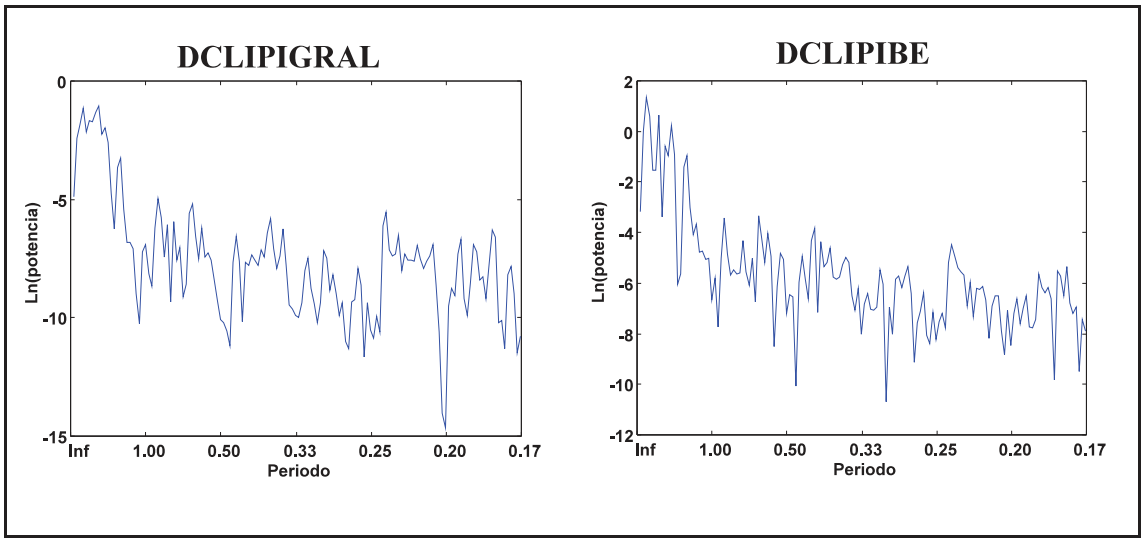


Figura 9.67

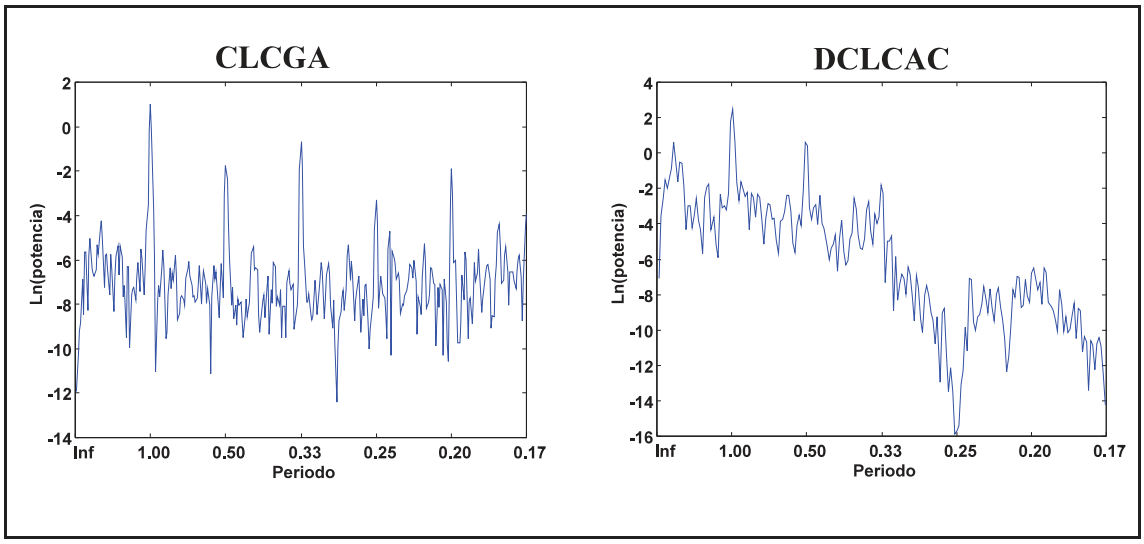


Figura 9.68

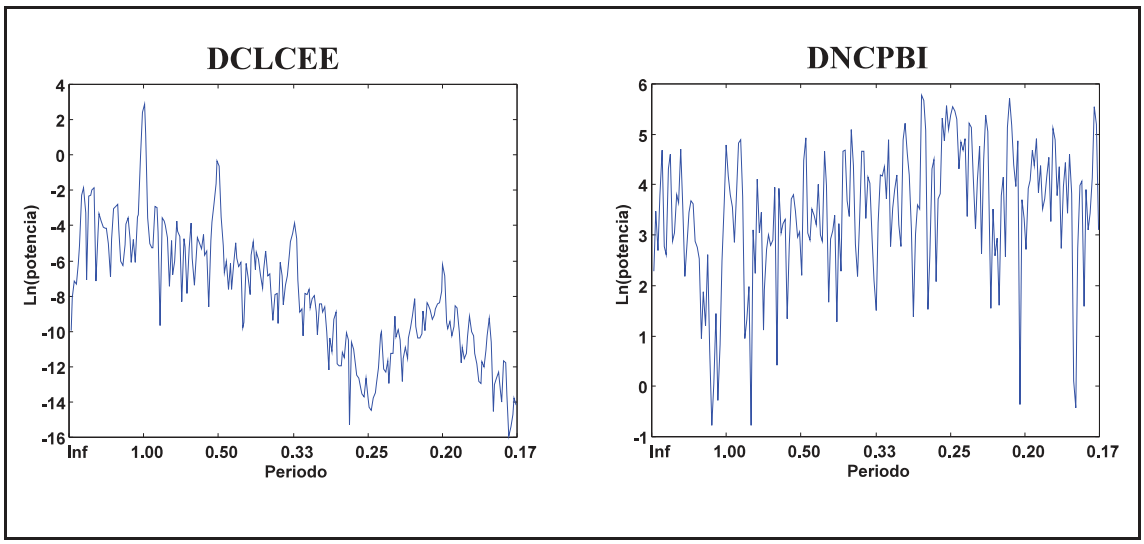


Figura 9.69

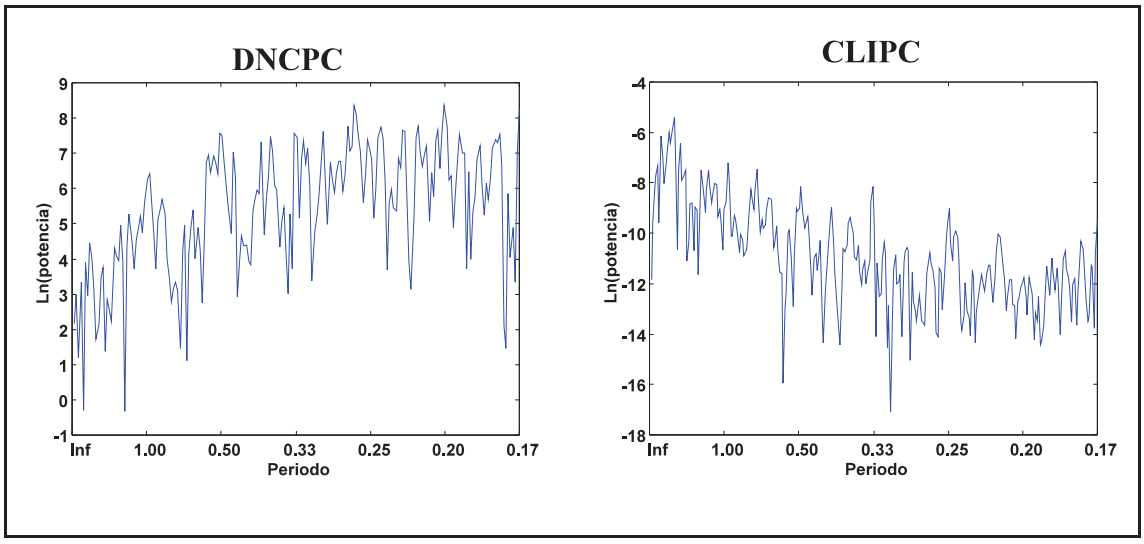


Figura 9.70

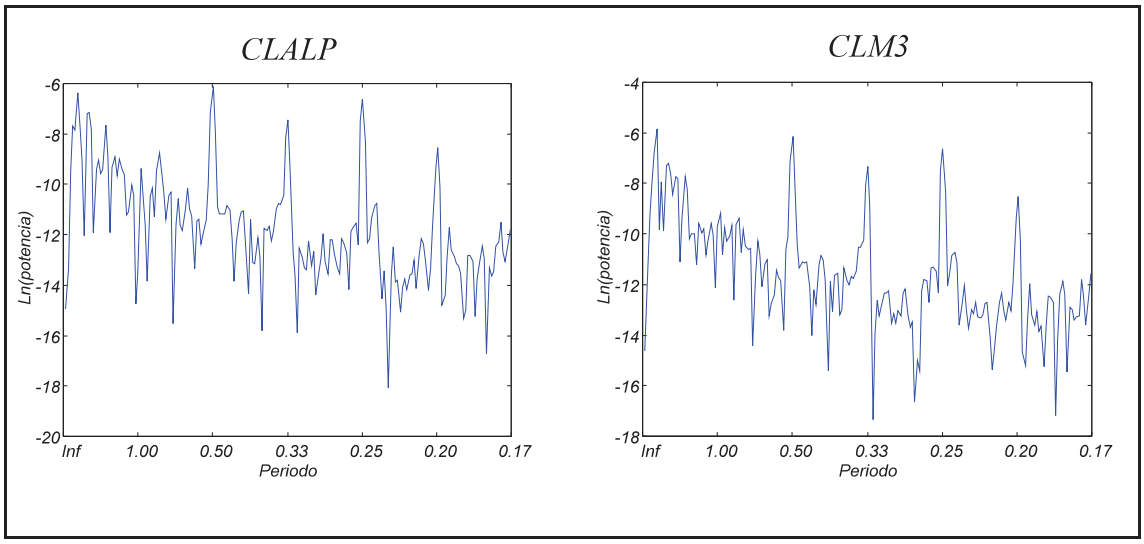


Figura 9.71

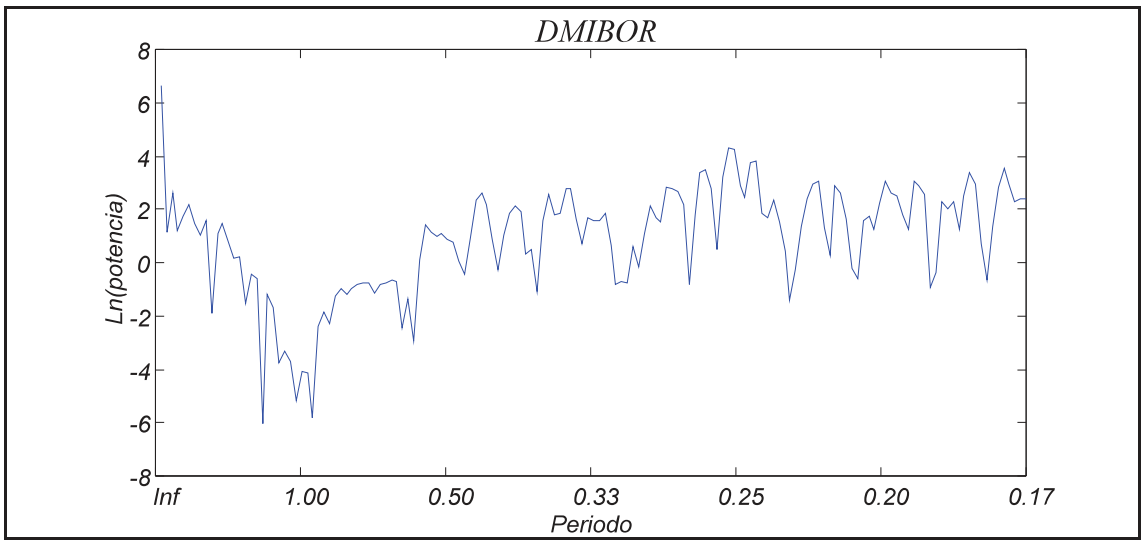


Figura 9.72

Filtro Lineal ARMA

Para detectar el carácter lineal o no-lineal de la dependencia temporal, revelada en el correlograma de las series temporales, y como paso previo para poder utilizar los contrastes de no linealidad y el test residual de Brock para la detección de comportamientos caóticos, es necesario estimar el filtro lineal ARMA(p,q)(P,Q) que mejor ajuste a cada una de las series:

$$\left(\sum_{i=0}^{p} L^{i}\right)\left(\sum_{j=0}^{P} L^{Tj}\right) y_t = \left(\sum_{k=0}^{q} L^{i}\right)\left(\sum_{s=0}^{Q} L^{Ti}\right) a_t \qquad (9.2)$$

donde a_t es un ruido blanco, T es la periodicidad muestral –T=4 para las series

trimestrales y T=12 para las mensuales–y p, P, q y Q son los órdenes de los polinomios autoregresivo regular autoregresivo estacional, media móvil regular y media móvil estacional respectivamente.

En la tabla 9.14 mostramos los órdenes de los filtros aplicados a cada una de las series. El criterio de elección de los órdenes de los polinomios autoregresivos y de media móvil ha sido, en primer lugar, la significatividad de los parámetros estimados, y en segundo el criterio de Información de Schwarz.

TABLA 9.14

FILTROS LINEALES. SERIES TEMPORALES TRIMESTRALES Y MENSUALES

SERIE	T	N	CIS*	ORDEN (p,q)(P,Q)	CIS	EER	Serie de Residuos	N
DCLPIBT	4	113	-6.228535	(4,0)(1,1)	-12.0893	0.002137	*FDCLPIBT*	105
DCLVABAGR	4	113	-3.715419	(4,0)(1,1)	-9.561694	0.007564	*FDCLVABAGR*	105
DCLVABISC	4	113	-5.234658	(4,0)(0,1)	-11.00912	0.00374	*FDCLVABISC*	109
DCLVABC	4	113	-3.982190	(4,0)(0,1)	-10.49579	0.004834	*FDCLVABC*	109
DCLVABS	4	113	-7.065507	(4,0)(0,1)	-12.15506	0.002109	*FDCLVABS*	109
DCLFBCFBE	4	113	-2.860470	(4,0)(0,1)	-8.457935	0.013392	*FDCLFBCFBE*	109
DCLFBCFC	4	113	-3.922216	(4,0)(0,1)	-8.457935	0.013392	*FDCLFBCFC*	109
DCLPARO	12	429	-0.982986	(3,4)(2,0)	-7.442622	0.022889	*FDCLPARO*	402
DCLIPIGRAL	12	289	-3.786998	(5,3)(2,0)	-6.872283	0.029497	*FDCLIPIGRAL*	260
DCLIPIBE	12	289	-2.201274	(2,1)(0,1)	-5.267805	0.069507	*FDCLIPIBE*	287
CLCGA	12	660	-4.044960	(4,0)(0,1)	-6.112319	0.04587	*FDCLCGA*	634
DCL*CAC*	12	431	-1.948138	(2,3)(1,3)	-5.597386	0.058342	*FDCLCAC*	410
DCLCEE	12	501	-2.300325	(6,2)(2,1)	-6.76355	0.032181	*FDCLCEE*	471
DNCPBI	12	435	4.2699386	(0,1)(0,0)	4.188754	8.073156	*FDNCPBI*	435
DNCPC	12	406	6.1711091	(0,2)(1,0)	5.88798	18.63532	*FDNCPC*	394
CLIPC	12	550	-8.814087	(1,1)(1,1)	-10.5196	0.005095	*FCLIPC*	537
CLALP	12	383	-8.105218	(2,0)(2,3)	-10.75681	0.0044	*FCLALP*	357
CLM3	12	383	-8.060996	(3,2)(2,2)	-10.69329	0.00448	*FCLM3*	356
DMIBOR	12	310	3.267611	(2,3)(1,0)	2.212127	2.859781	*FDMIBOR*	296

T: periodicidad muestral; N: tamaño muestral; CIS: Criterio de Información de Schawrz–*: para la serie original–; EER: Error estándar de la regresión.

Test de No-linealidad

Para detectar el carácter lineal o no-lineal de la dependencia temporal presente en las series aplicaremos a continuación los test de no-linealidad introducidos en el capítulo 8. Comenzamos mostrando en las figuras 9.73 a 9.91 el correlograma de los residuos correspondientes a cada uno de los filtros ARMA, es decir, de las series filtradas por el modelo lineal ARMA correspondiente, así como el correlograma de las series al cuadrado. Como puede observarse en estos gráficos, en general, los modelos lineales ARMA parecen recoger toda la estructura determinista revelada en el correlograma lineal de las series originales ya que los nuevos correlogramas de los resuduos de esos filtros lineales y de sus cuadrados no parece recoger ninguna autocorrelación significativa. Sólo en el caso de la serie de desempleo y el tipo de interés –y posiblemente también en la serie NCPBI de opiniones empresariales– parece haber una evidencia clara de que el filtro lineal aplicado no es capaz de recoger toda la estructura determinista subyacente en las series.

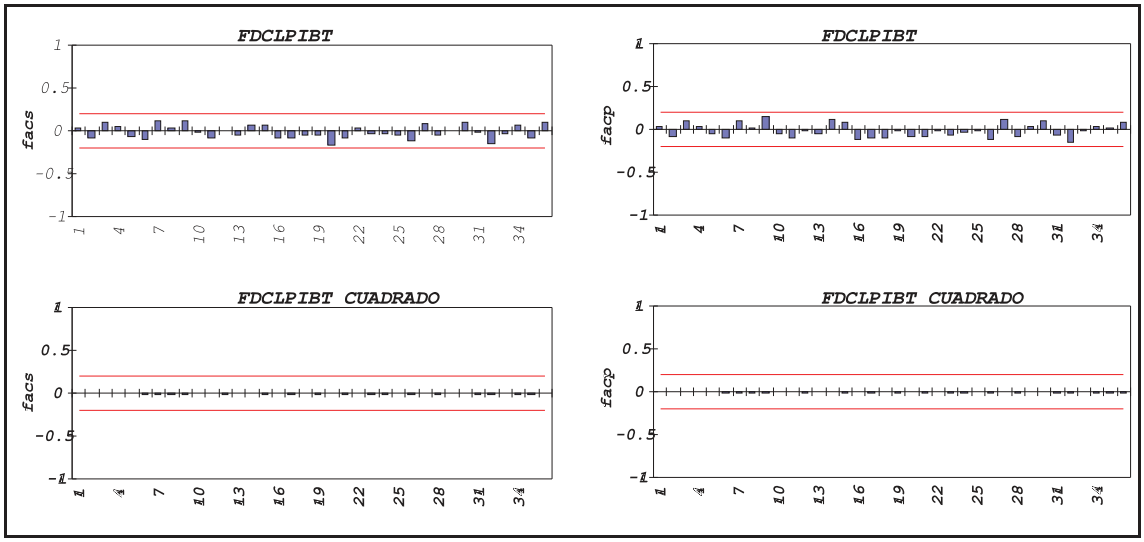


Figura 9.73

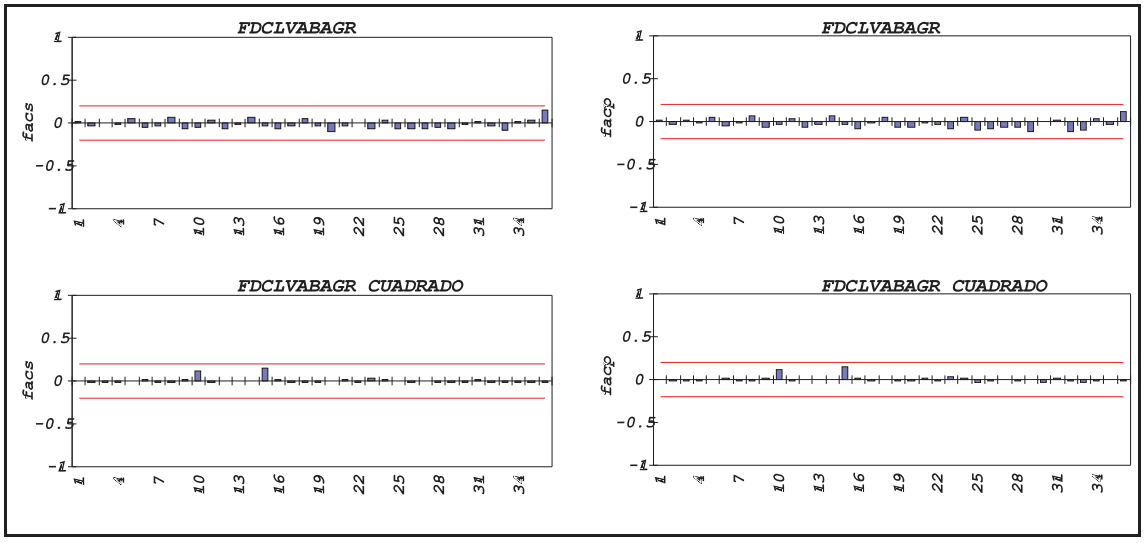


Figura 9.74

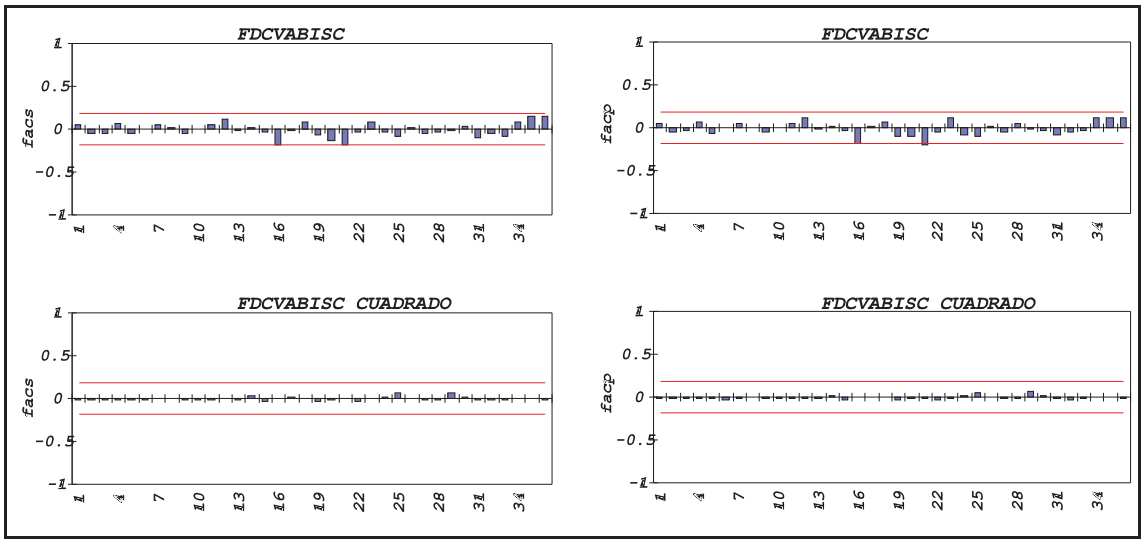


Figura 9.75

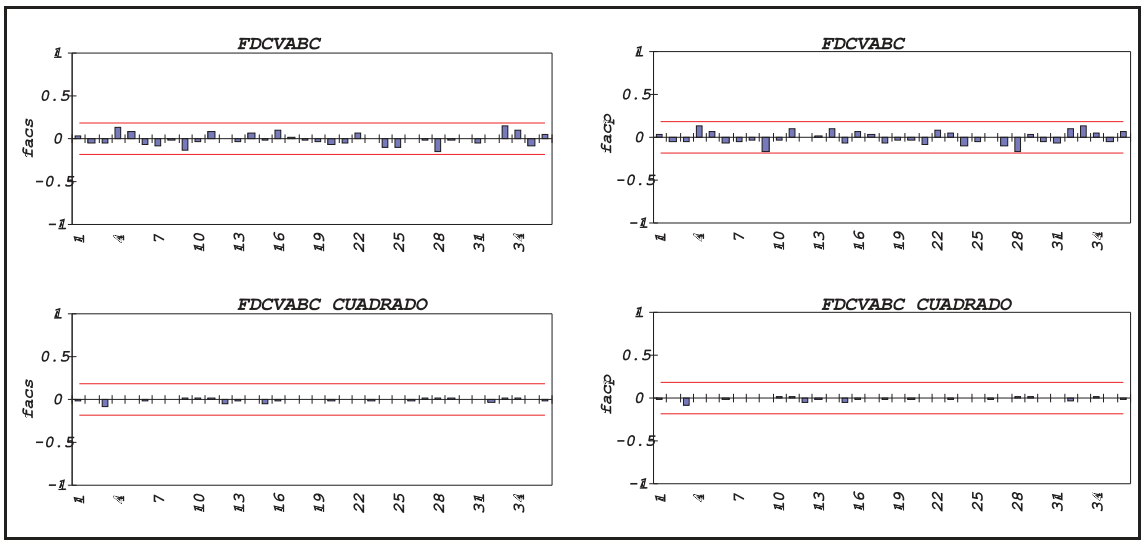


Figura 9.76

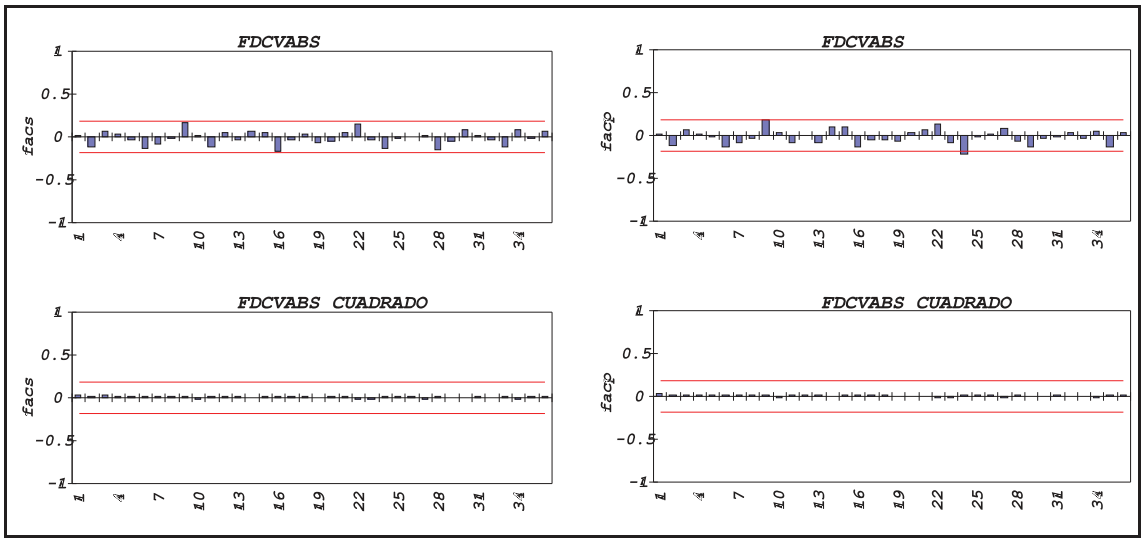


Figura 9.77

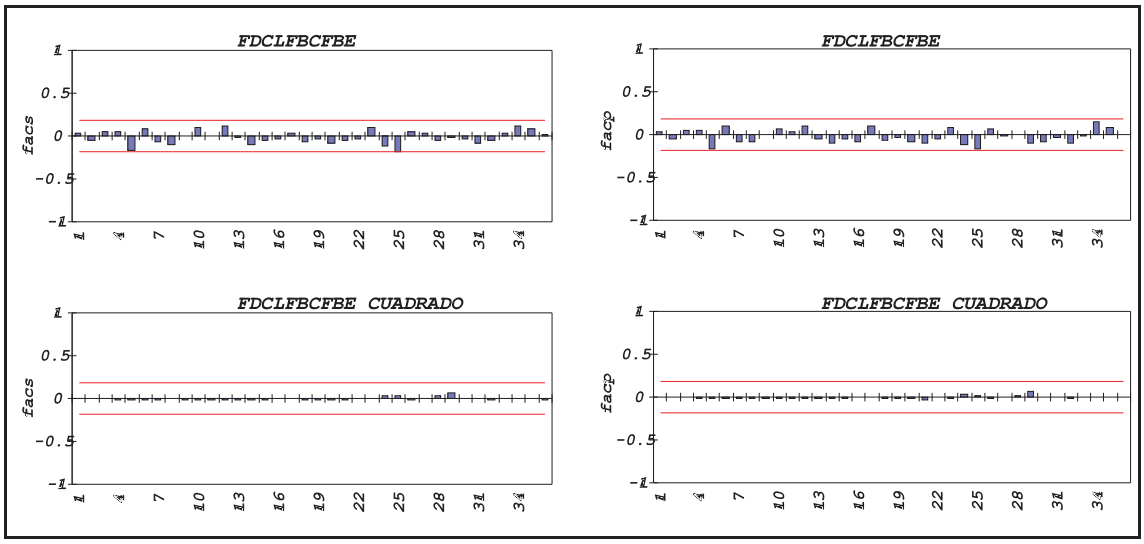


Figura 9.78

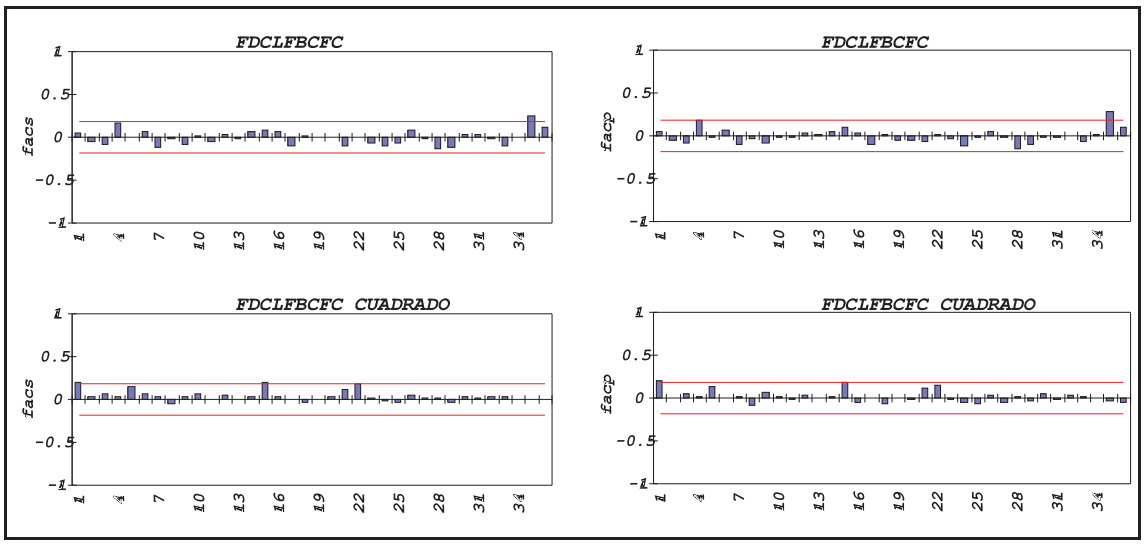


Figura 9.79

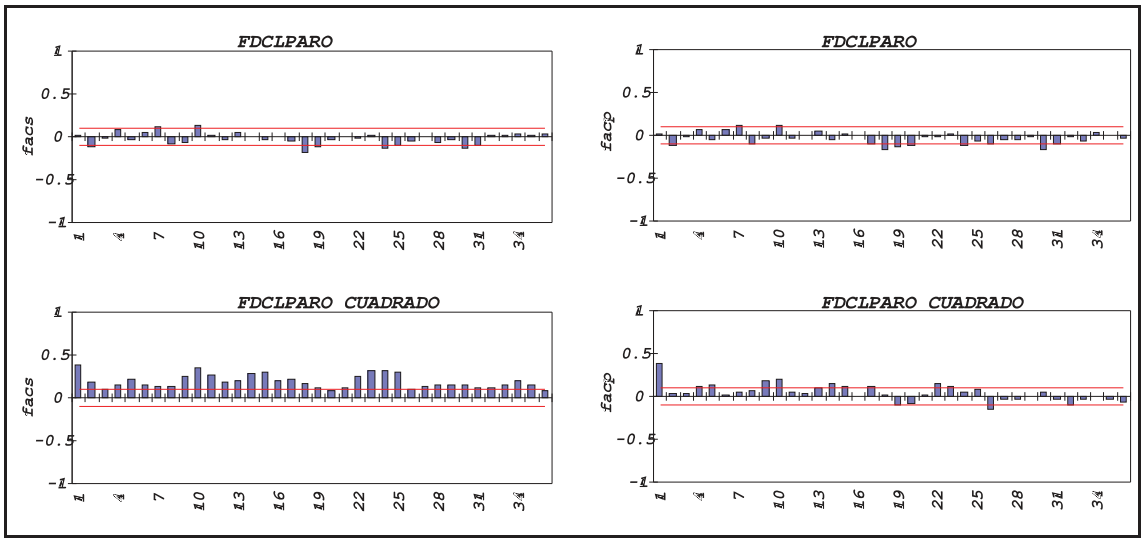


Figura 9.80

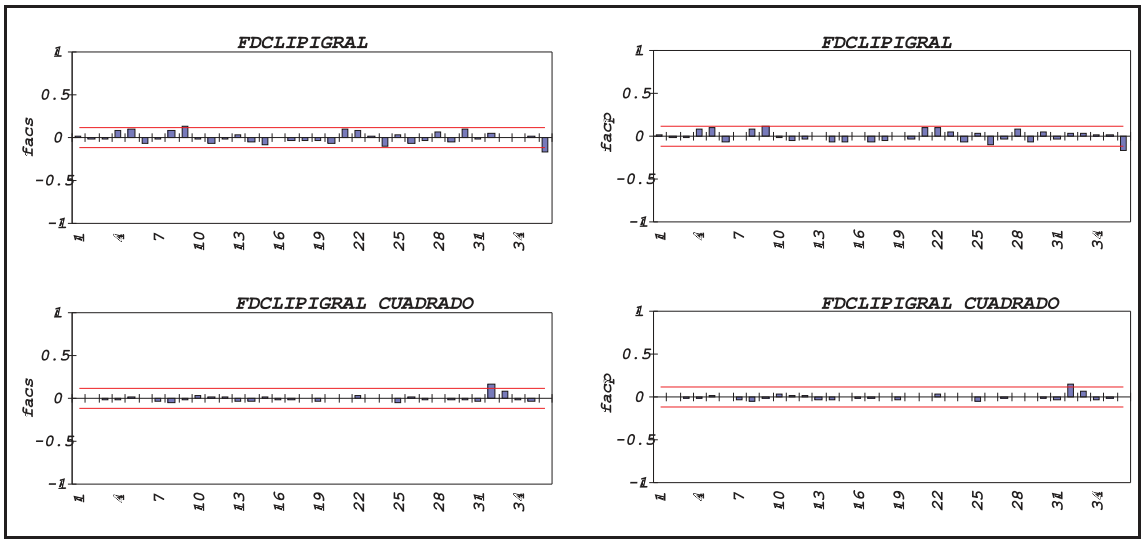


Figura 9.81

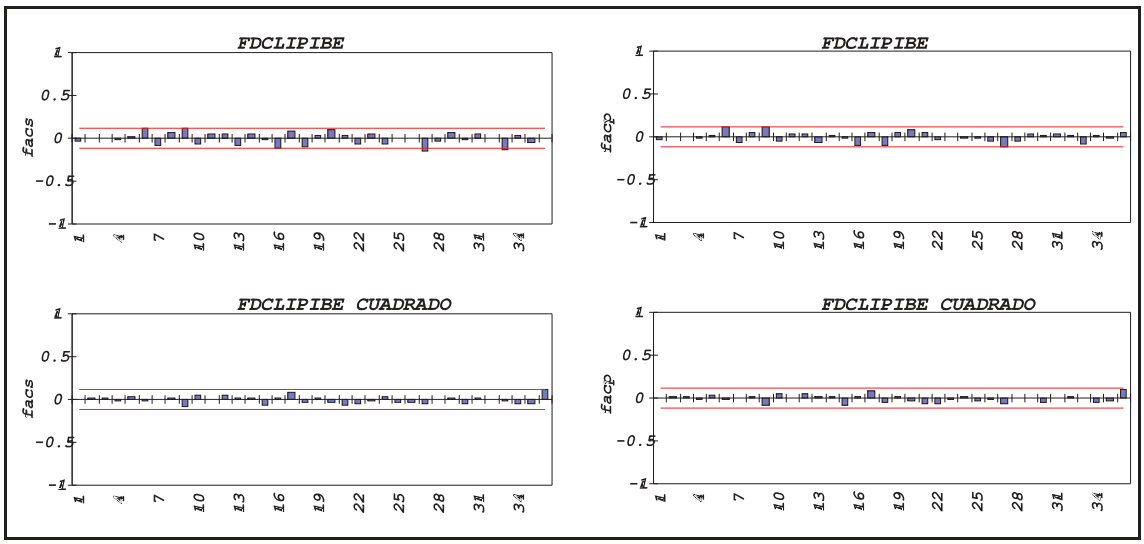


Figura 9.82

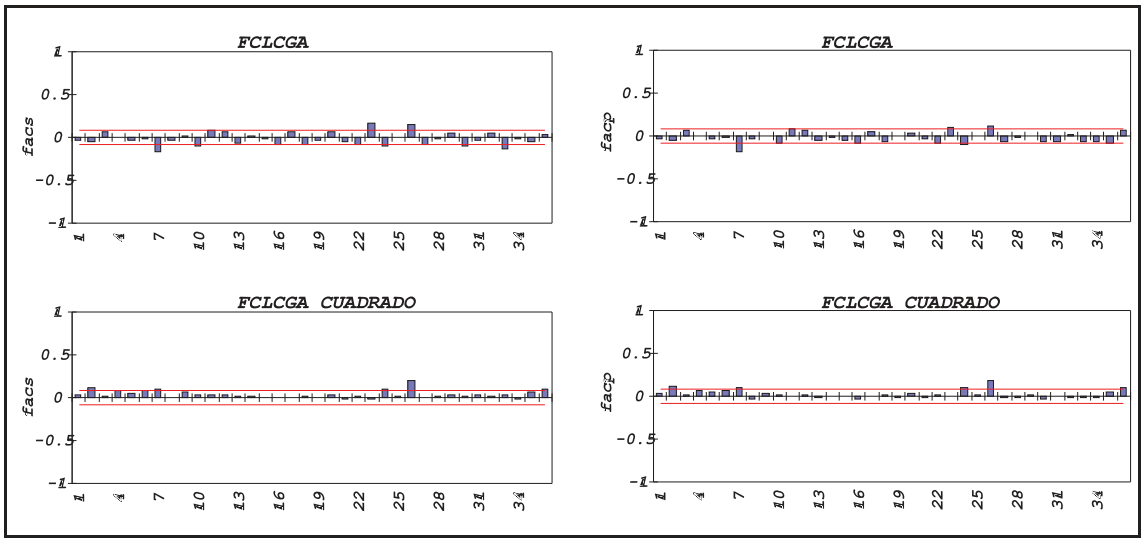


Figura 9.83

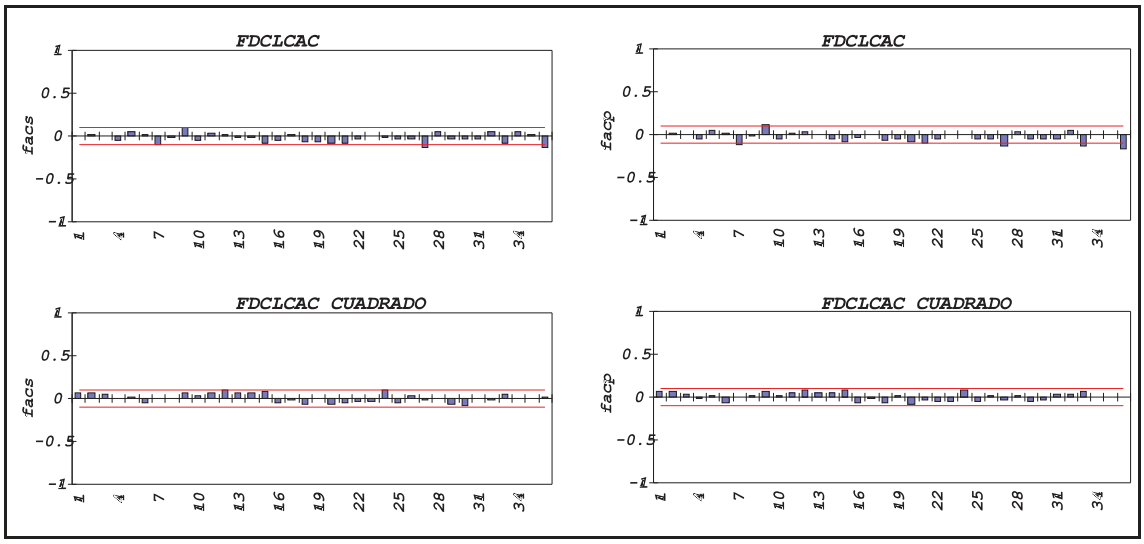


Figura 9.84

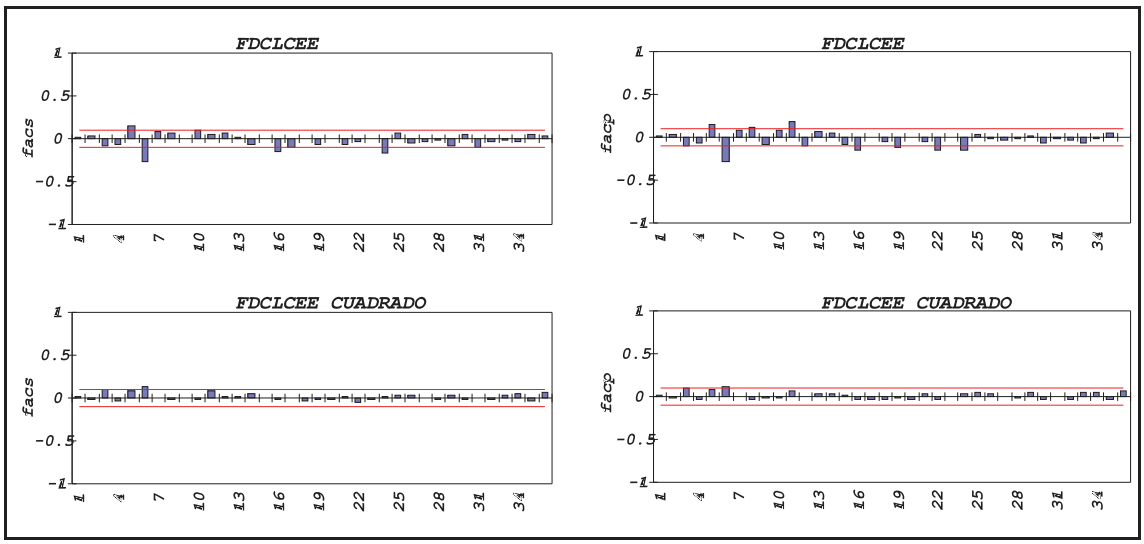


Figura 9.85

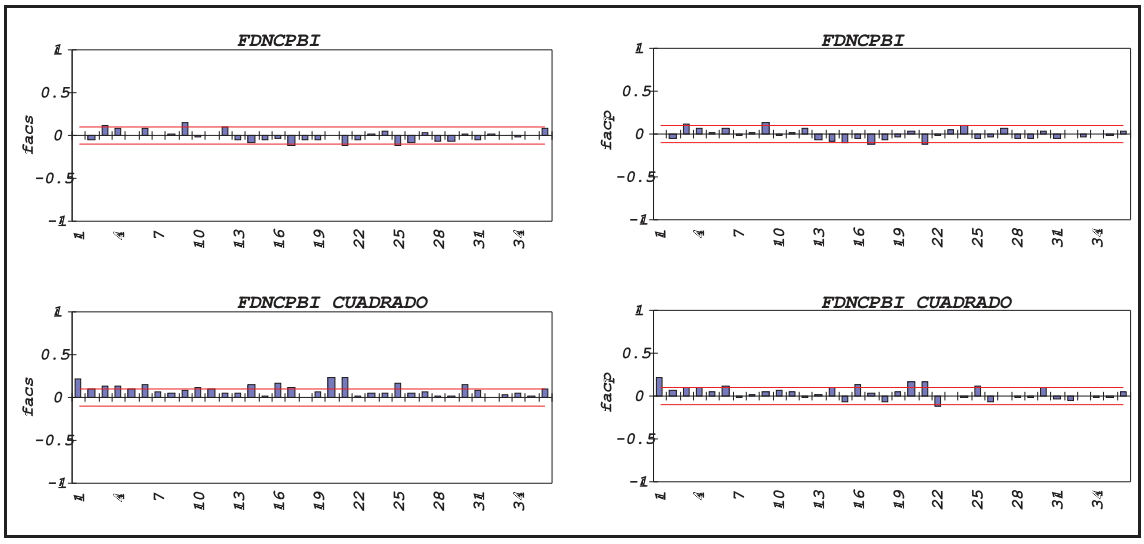


Figura 9.86

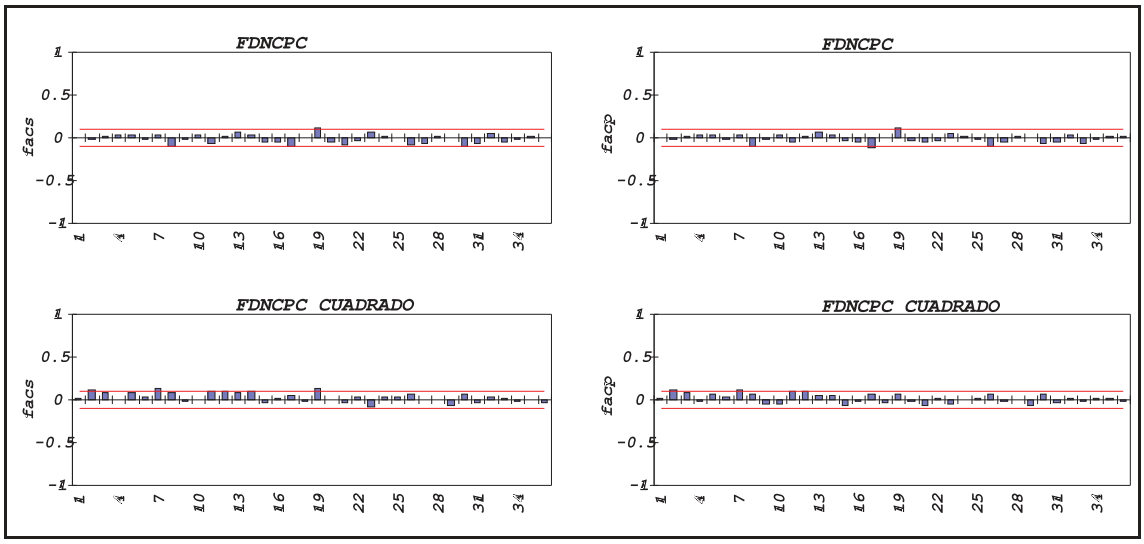


Figura 9.87

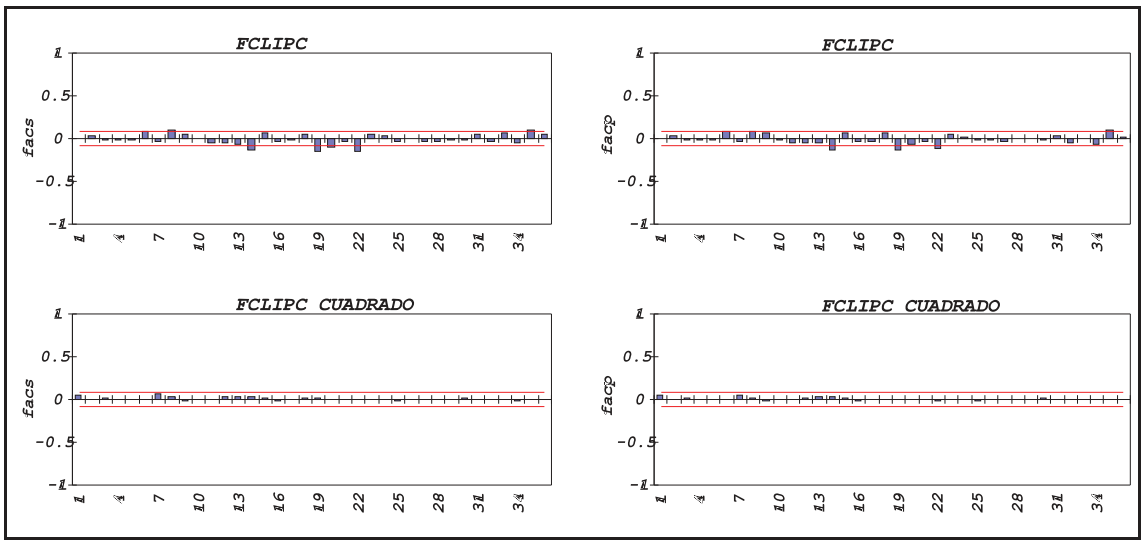


Figura 9.88

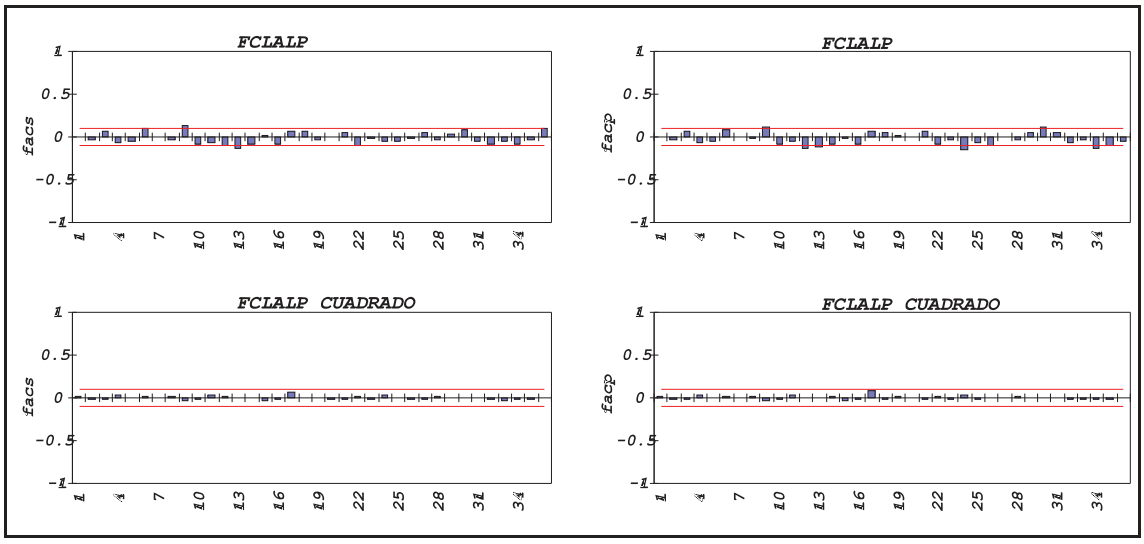


Figura 9.89

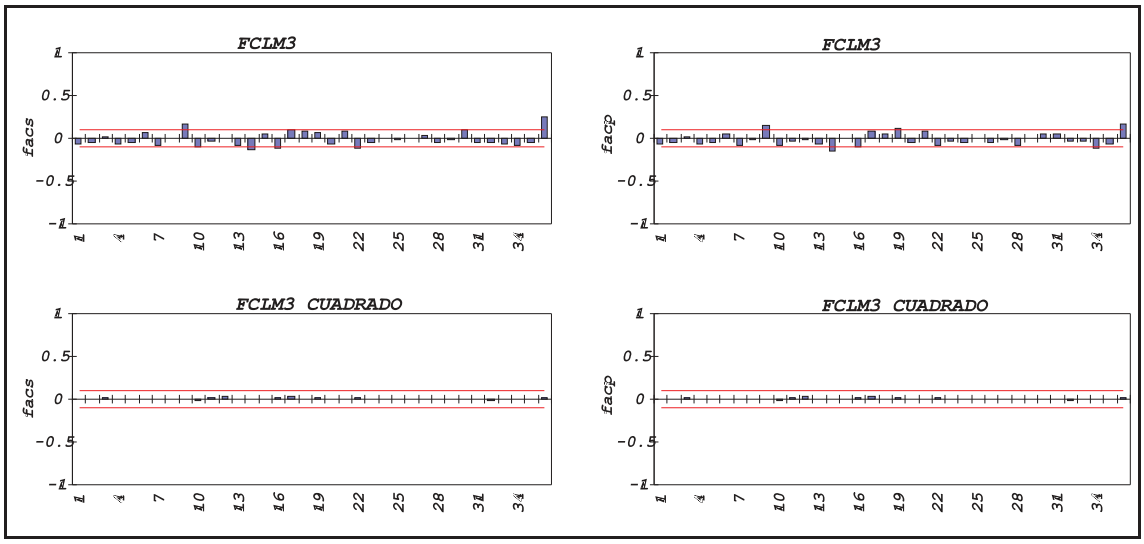


Figura 9.90

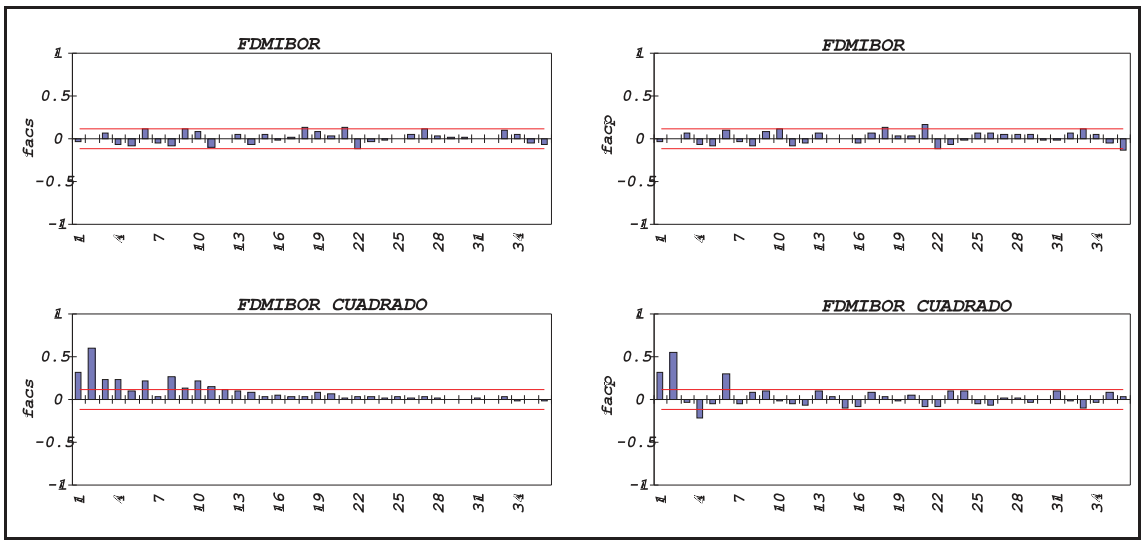


Figura 9.91

Recordemos, que análisis del correlograma sólo es capaz de recoger autocorrelaciones lineales. Es por ello, que pasamos a continuación a aplicar los test ARCH-LM de Engle, el BDS, el de Kaplan y el análisis R/S para detectar la posible presencia de autocorrelaciones ocultas en las series filtradas linealmente, en cuyo caso, la dependencia dinámica , determinista o estocástica, deberá ser necesariamente de carácter no-lineal..

En la tabla 9.15 se muestran los resultados de la aplicación del test de Engle para detectar estructuras ARCH en la serie temporal. La aplicación de este test sobre los residuos del filtro lineal ARMA correspondiente, revela que en 5 de las series consideradas debe rechazarse la hipótesis de ausencia de estructura ARCH –series PIBT, PARO, CCPBI, IPC y MIBOR–.

TABLA 9.15
Test ARCH-LM de Engle

SERIE	*F*	NR^2	SERIE	*F*	NR^2	SERIE	*F*	NR^2
FDCLPIBT	-0.004*	-0.001*	*FDCLPARO*	72.3241*	61.5329*	*FDNCPBI*	21.047*	20.162*
FDCLVABAGR	0.42754	0.4341	*FDCLIPIGRAL*	0.36915	0.37149	*FDNCPC*	0.213412	0.214387
FDCVABISC	0.03103	0.03161	*FDCLIPIBE*	0.00608	0.00612	*FCLIPC*	44.1606*	40.9403*
FDCVABC	6.38578	6.13657	*FCLCGA*	0.62302	0.624379	*FCLALP*	2.216156	2.214811
FDCLVABS	4.63393	4.5236	*FDCLCAC*	1.7913	1.7922	*FCLM3*	2.51769	2.514024
FDCLFBCFBE	2.76803	2.74849	*FDCLCEE*	0.382953	0.384275	*FDMIBOR*	88.688*	111.34*
FDCLFBCFC	5.94756	5.73783						

* Se rechaza al 99% de la hipótesis nula de ausencia de estructura ARCH

En la tabla 9.16 mostramos los resultados de la aplicación del test BDS sobre la series filtradas por los respectivos modelos ARMA. Este estadístico puede utilizarse para el contraste de la hipóteisis nula de independencia –véase capítulo 8–. Como se desprende de la tabla, para las series de valor añadido bruto en el sector de la construcción –VABC–; inversión en construcción–FBCFC–; desempleo –PARO–; consumo de gasolina –CGA–; consumo de energía eléctrica –CEE– opiniones empresariales –NCPBE y NCPC–; precios –IPC–;y, tipos de interés –MIBOR–, puede rechazarse la hipótesis nula de ruido blanco. Es decir, que para estas series el filtro lineal aplicado no parece recoger toda la estructura dinámica presente en los datos, por lo que se abre la posibilidad de que dicha estructura desconocida sea de carácter no-lineal. Para el resto de series consideradas o bien los resultados no son del todo concluyentes –series PIBT, VABAGR, FBCFBE, IPIBE, CAC– o bien no permiten rechazar que los filtros lineales aplicados constituyan un verdadero ruido blanco – VABISC, VABS, IPIGRAL, ALP y M3–.

TABLA 9.16
Test BDS

	r	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	*m=10*
FDCLPIBT	*0.104%*	-1.180	-0.649	0.443	2.583	2.210	2.178	-1.649	-1.295	-1.038
	0.149%	-0.401	0.194	1.238	2.137	2.237	2.640	3.911	4.611	5.753
	0.215%	0.339	1.040	1.647	2.222	2.763	2.991	3.381	3.537	3.639
	0.311%	0.657	1.575	1.665	1.967	2.072	2.006	1.918	1.752	1.690
FDCLVABAGR	*0.367%*	0.436	0.641	0.598	2.956	4.209	9.824	20.076	44.417	91.434
	0.529%	0.260	0.160	0.247	0.750	1.904	2.487	3.602	4.074	5.556
	0.764%	0.094	-0.260	-0.893	-0.663	-0.471	-0.308	-0.008	0.376	0.615
	1.101%	0.009	-0.344	-0.982	-1.137	-1.120	-1.096	-0.990	-0.836	-0.740
FDCVABISC	*0.183%*	-0.827	-0.710	0.606	0.696	-2.173	-2.762	-2.122	-1.673	-1.347
	0.263%	-0.192	0.049	0.393	0.411	-0.363	-1.848	-2.488	-1.984	-1.615
	0.380%	-0.620	0.099	0.288	0.479	0.396	0.356	-0.043	0.194	-0.410
	0.548%	-0.266	0.165	0.021	0.402	0.638	0.788	0.603	0.430	0.532

	0.236%	5.735	6.874	7.961	8.897	10.774	19.383	23.090	35.179	-1.367
	0.341%	5.341	5.442	4.899	4.868	5.061	4.282	4.192	7.630	14.205
	0.491%	3.507	4.807	5.228	5.193	4.942	4.935	5.590	6.625	7.693
FDCLVABC	*0.708%*	3.151	3.836	4.278	4.309	4.439	4.671	4.616	4.649	4.805
	0.103%	-0.002	-0.198	-0.688	-0.981	-2.044	-2.320	-1.777	-1.397	-1.121
	0.148%	1.032	0.735	0.758	0.139	-0.640	-1.624	-1.632	-1.813	-1.474
	0.214%	1.342	1.677	1.950	1.976	1.711	1.577	1.568	1.720	1.439
FDCLVABS	*0.309%*	1.304	1.788	2.022	2.128	2.110	1.948	1.820	1.869	1.726
	0.653%	3.580	2.982	2.397	1.306	0.744	-3.905	-3.012	-2.386	-1.930
	0.942%	2.313	2.917	2.761	1.989	1.576	-0.916	-3.751	-3.007	-2.461
	1.359%	1.806	2.197	2.065	1.632	1.459	1.445	1.183	1.778	2.011
FDCLBCFBE	*1.960%*	2.034	2.379	2.454	2.387	2.409	2.448	2.568	2.855	3.122
	0.273%	2.551	4.895	6.090	9.764	16.897	29.246	51.602	90.119	106.981
	0.394%	3.809	6.428	8.165	10.710	15.259	20.466	28.369	37.387	47.944
	0.569%	3.366	5.620	7.041	8.631	10.686	12.508	15.069	17.875	22.232
FDCLFBCFC	*0.820%*	2.766	4.100	4.558	5.009	5.668	6.239	6.860	7.445	8.240
	1.131%	12.236	15.396	19.287	23.609	30.268	40.606	58.415	86.114	126.240
	1.632%	12.115	14.816	17.603	20.752	25.284	31.478	40.915	53.733	71.115
	2.353%	11.619	13.751	15.653	17.646	20.262	23.660	28.092	33.515	40.194
FDCLPARO	*3.394%*	9.673	11.393	12.675	13.788	15.116	16.564	18.118	19.948	22.003
	1.446%	-0.298	0.172	-0.035	1.348	2.508	2.450	7.436	12.801	20.489
	2.086%	0.143	0.429	0.633	0.901	1.065	0.503	0.555	-1.073	-0.851
	3.008%	0.539	0.662	0.927	0.903	0.785	0.744	0.501	0.293	0.150
FDCLPIGRAL	*4.338%*	0.673	0.811	0.862	0.803	0.969	1.184	1.212	1.118	1.218
	3.449%	-1.425	-1.100	0.599	0.664	2.039	2.756	8.953	17.554	11.693
	4.974%	-1.096	-1.261	-0.032	0.446	0.617	1.279	2.348	4.558	8.894
	7.174%	-0.943	-1.124	-0.396	-0.349	0.000	0.604	1.267	1.892	2.423
FDCLIPIBE	*10.347%*	-1.011	-1.034	-0.470	-0.320	-0.118	0.187	0.471	0.805	0.999
	2.282%	4.374	5.866	6.842	6.671	6.727	6.271	5.404	4.221	7.286
	3.292%	3.796	5.239	6.095	6.338	6.204	5.888	5.531	5.275	5.550
	4.748%	4.033	5.201	5.951	6.332	6.276	6.078	5.977	5.887	6.075
FCLCGA	*6.847%*	4.165	5.625	6.293	6.616	6.570	6.468	6.391	6.297	6.425
	2.892%	-0.925	-0.438	-0.103	1.129	3.717	10.368	18.386	29.213	43.310
	4.171%	-0.760	-0.505	-0.150	0.501	1.855	3.757	5.384	7.974	10.750
	6.016%	-0.710	-0.452	-0.035	0.394	1.309	2.156	2.857	3.820	4.626
FDCLCAC	*8.676%*	-0.475	-0.269	0.019	0.207	0.661	0.921	1.061	1.224	1.442
	0.158	66.786	113.498	193.009	341.240	655.029	1372.443	3027.088	6897.832	16304.84
	0.228	64.631	88.380	127.821	191.110	300.888	506.491	890.506	1606.696	2985.311
	0.329	60.309	64.581	80.973	103.123	136.036	186.551	263.956	378.676	551.615
FDCLCEE	*0.475*	47.015	43.195	45.940	51.413	58.356	67.597	79.197	92.942	109.503
	4.032	4.863	7.165	8.444	8.809	9.575	9.991	11.077	7.414	1.315
	5.815	4.605	6.810	8.100	8.494	9.000	9.708	10.831	11.998	13.085
	8.387	4.340	6.375	7.397	7.838	8.195	8.859	9.454	10.057	10.765
FDNCPBI	*12.096*	4.367	5.758	6.360	6.674	6.900	7.221	7.426	7.704	8.020

FDNCPC	*9.274*	2.307	4.187	4.866	4.900	4.114	3.629	0.669	-2.954	-2.414
	13.375	2.103	3.743	4.239	4.714	4.590	4.528	4.416	5.823	6.339
	19.291	1.890	3.014	3.330	3.460	3.527	3.998	4.619	5.238	5.807
	27.822	1.061	2.084	2.524	2.644	2.765	3.079	3.576	4.127	4.639
FCLIPC	*0.254%*	3.610	6.761	10.684	16.299	26.321	41.134	67.752	116.874	215.794
	0.366%	3.396	5.631	8.079	11.608	16.998	23.966	34.680	52.532	81.211
	0.528%	3.193	4.417	5.708	7.275	9.188	11.118	13.997	18.067	23.532
	0.761%	3.367	3.668	4.161	4.925	5.714	6.371	7.304	8.303	9.382
FCLALP	*0.218%*	0.604	-0.329	-0.204	-1.893	-0.590	0.116	-0.879	1.598	-3.011
	0.314%	0.835	0.318	0.621	0.601	0.721	1.012	1.034	-0.164	-1.821
	0.453%	0.945	0.416	0.158	0.398	0.584	1.086	1.328	1.133	1.001
	0.653%	0.837	0.597	0.149	0.104	0.286	0.789	1.174	1.324	1.362
FCLM3	*0.221%*	0.182	-0.019	-0.814	-2.914	-3.720	-3.385	-2.353	-3.335	-2.735
	0.319%	0.872	0.612	0.281	-0.277	-0.165	0.654	0.762	0.312	-0.861
	0.460%	1.151	0.833	0.569	0.500	0.435	0.581	0.571	0.453	0.639
	0.663%	1.377	0.918	0.608	0.522	0.509	0.653	0.725	0.685	0.835
FDMIBOR	*1.413*	11.574	16.444	22.962	33.077	48.649	72.779	110.376	171.228	270.970
	2.038	10.493	13.574	16.610	20.281	25.522	32.105	40.852	52.772	69.548
	2.939	8.864	11.132	12.991	14.683	16.802	19.273	22.116	25.454	29.827
	4.239	6.419	8.386	9.307	10.146	10.921	11.914	12.794	13.634	14.709

Estadístico BDS para el contraste de la hipótesis nula IID para valores de *r* entre 0.5 y 1.5 veces la desviación típica de las series temporales. El estadístico BDS se distribuye como una N(0,1) a una cola.

El análisis R/S puede utilizarse junto al test de Anis-Lloyd para contrastar la hipótesis nula de que las series filtradas constituyen un ruido blanco gausiano. Los resultados de este test se muestran en la tabla 9.17. rechazándose la hipótesis nula al 99% para todas las series a excepción de la serie PIBT y FBCFBE.

TABLA 9.17
Análisis R/S

SERIE	*H*	*A-LL*	SERIE	*H*	*A-LL*	SERIE	*H*	*A-LL*
FDCLPIBT	0.653	1.118	*FDCLPARO*	0.428	-63.183	*FDNCPBI*	0.594	4.731
FDCLVABAGR	0.619	-2.470	*FDCLIPIGRAL*	0.793	49.883	*FDNCPC*	0.511	-29.604
FDCVABISC	0.594	-5.144	*FDCLIPIBE*	0.682	24.243	*FCLIPC*	0.461	-61.942
FDCVABC	0.593	-5.205	*FCLCGA*	0.520	-32.860	*FCLALP*	0.460	-46.384
FDCLVABS	0.560	-8.806	*FDCLCAC*	0.433	-62.301	*FCLM3*	0.424	-59.059
FDCLFBCFBE	0.627	-1.556	*FDCLCEE*	0.232	-173.637	*FDMIBOR*	0.664	20.012
FDCLFBCFC	0.595	-5.000						

H :exponente de Hurst Estimado; *A-LL*: estadístico Anis Lloyd para la contrastación de la hipótesis nula de Ruido blanco gausiano –*A-LL*~N(0,1)–.

TABLA 9.18.
test de Kaplan

SERIE		*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*
	KS mean	0.0023	0.0024	0.0022	0.0023	0.0025
	KSstd	0.0001	0.0003	0.0003	0.0006	0.0008
	KS	0.0021	0.0017	0.0017	0.0011	0.0010
	Ksmin	0.0021	0.0017	0.0015	0.0012	0.0012
FDCLPIBT τ=2	*Ktest*	***0.0020****	***0.0016****	***0.0014****	***0.0009****	***0.0008****
	KS mean	0.0082	0.0081	0.0084	0.009	0.0086
	KSstd	0.0006	0.0012	0.0014	0.0018	0.0021
	KS	0.0070	0.0057	0.0057	0.0054	0.0043
	Ksmin	0.0071	0.0057	0.0061	0.0047	0.0040
FDCLVABAG τ=1	*Ktest*	0.0077	0.0081	0.0091	0.0072	***0.0039****
	KS mean	0.0041	0.0042	0.0044	0.0043	0.0045
	KSstd	0.0002	0.0004	0.0004	0.0005	0.0013
	KS	0.0037	0.0034	0.0037	0.0032	0.002
	Ksmin	0.0037	0.0034	0.0037	0.0033	0.0021
FDCLVABIS τ=1	*Ktest*	0.0042	0.0039	***0.0036****	0.0036	0.0042
	KS mean	0.0055	0.0055	0.0055	0.0052	0.0048
	KSstd	0.0002	0.0005	0.0006	0.001	0.0011
	KS	0.0051	0.0045	0.0043	0.0032	0.0025
	Ksmin	0.0051	0.0046	0.0043	0.0036	0.0024
FDCLVABC τ=2	*Ktest*	***0.0047****	***0.0041****	***0.0029****	***0.0024****	0.0028
	KS mean	0.0023	0.0023	0.0022	0.0025	0.0024
	KSstd	0.0001	0.0003	0.0003	0.0004	0.0004
	KS	0.0021	0.0017	0.0016	0.0016	0.0016
	Ksmin	0.0021	0.0018	0.0017	0.0018	0.0018
FDCLVABS τ=1	*Ktest*	0.0022	0.0021	0.0019	0.0019	***0.0009****
	KS mean	0.0152	0.0155	0.0154	0.0153	0.015
	KSstd	0.0007	0.001	0.0015	0.0019	0.0029
	KS	0.0138	0.0135	0.0125	0.0116	0.0095
	Ksmin	0.0139	0.0136	0.0129	0.0106	0.0094
FDCLFBCFBE τ=1	*Ktest*	0.0145	***0.0127****	***0.0120****	0.0130	0.0114
	KS mean	0.0061	0.0060	0.0063	0.0062	0.0059
	KSstd	0.0003	0.0006	0.0007	0.0011	0.0018
	KS	0.0054	0.0048	0.0049	0.0040	0.0023
	Ksmin	0.0056	0.0050	0.0052	0.0045	0.0023
FDCLFBCFC τ=3	*Ktest*	***0.0054****	***0.0040****	***0.0037****	***0.0030****	0.0025
	KS mean	0.0225	0.0228	0.0229	0.0219	0.0228
	KSstd	0.0003	0.0015	0.0026	0.0027	0.0049
	KS	0.0218	0.0198	0.0177	0.0165	0.0130
	Ksmin	0.0219	0.0204	0.0173	0.0172	0.0157
FDCLPARO τ=3	*Ktest*	***0.0175****	***0.0104****	***0.0058****	***0.0047****	***0.0039****
	KS mean	0.0326	0.0327	0.0338	0.033	0.034
	KSstd	0.001	0.0016	0.0019	0.0038	0.0043
	KS	0.0306	0.0295	0.0300	0.0254	0.0253
	Ksmin	0.0301	0.0304	0.0306	0.0282	0.0253
FDCLIPIGRAL τ=1	*Ktest*	0.0325	0.0305	***0.0287****	0.0294	0.0342

	KS mean	0.0748	0.0777	0.0767	0.0765	0.0791
	KSstd	0.002	0.0035	0.0066	0.0072	0.0162
	KS	0.0707	0.0706	0.0636	0.0621	0.0467
FDCLIPIBE	*Ksmin*	0.0705	0.0717	0.0616	0.0628	0.0460
τ=1	*Ktest*	0.0762	0.0792	0.0749	0.0714	0.0646
	KS mean	0.0473	0.0469	0.047	0.0482	0.0482
	KSstd	0.0008	0.002	0.0037	0.0041	0.0057
	KS	0.0456	0.0429	0.0397	0.04	0.0368
FCLCGA	*Ksmin*	0.0457	0.042	0.0406	0.0407	0.0375
τ=1	*Ktest*	***0.0448****	***0.0355****	***0.0332****	***0.0333****	***0.0341****
	KS mean	0.0641	0.0646	0.0646	0.068	0.0624
	KSstd	0.0009	0.0025	0.0044	0.0066	0.0095
	KS	0.0623	0.0595	0.0558	0.0548	0.0434
FDCLCAC	*Ksmin*	0.0623	0.0588	0.0519	0.0568	0.0443
τ=1	*Ktest*	0.0645	0.0659	0.0670	0.0577	***0.0428****
	KS mean	3.58%	0.0356	0.0356	0.0368	0.0347
	KSstd	0.0006	0.0014	0.003	0.0036	0.0035
	KS	0.0346	0.0327	0.0295	0.0297	0.0278
FDCLCEE	*Ksmin*	0.0342	0.0327	0.0296	0.0296	0.0279
τ=2	*Ktest*	0.0353	0.0341	0.0341	0.0333	0.0366
	KS mean	8.6959	8.7153	8.4191	8.7537	8.6539
	KSstd	0.1631	0.4546	0.6287	0.8303	0.9641
	KS	8.3698	7.8062	7.1617	7.0931	6.7256
FDNCPBI	*Ksmin*	8.321	7.6057	7.1792	6.7388	6.9539
τ=2	*Ktest*	***8.0071****	***6.9332****	***6.3707****	***5.3589****	***5.8261****
	KS mean	20.7814	20.9361	20.7557	20.9009	20.9715
	KSstd	0.4596	1.367	1.1158	2.2988	2.2002
	KS	19.8621	18.2021	18.5242	16.3032	16.5712
FDNCPC	*Ksmin*	19.8874	18.3962	18.8044	15.9328	17.4094
τ=2	*Ktest*	20.1431	19.7205	***17.9232****	***15.1157****	***14.0669****
	KS mean	0.0055	0.0054	0.0056	0.0054	0.0055
	KSstd	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0005
	KS	0.0053	0.005	0.0049	0.0043	0.0044
FCLIPC	*Ksmin*	0.0052	0.0052	0.005	0.0042	0.0045
τ=1	*Ktest*	***0.0052****	***0.0048****	***0.0039****	***0.0028****	***0.0014****
	KS mean	0.0049	0.0049	0.0049	0.0049	0.0049
	KSstd	0.0001	0.0002	0.0004	0.0006	0.0007
	KS	0.0047	0.0045	0.0041	0.0038	0.0035
FCLALP	*Ksmin*	0.0048	0.0043	0.0040	0.0038	0.0037
τ=1	*Ktest*	***0.0046****	0.0046	0.0047	0.0043	0.0040
	KS mean	0.0050	0.0049	0.0052	0.0052	0.0052
	KSstd	0.0001	0.0002	0.0002	0.0004	0.0005
	KS	0.0049	0.0045	0.0047	0.0045	0.0042
FCLMB	*Ksmin*	0.0049	0.0045	0.0048	0.0043	0.0044
τ=1	*Ktest*	***0.0048****	0.0047	0.0050	0.0052	0.0050
	KS mean	2.5056	2.3912	2.5396	2.6966	2.388
	KSstd	0.1006	0.1737	0.3889	0.4543	0.3609
	KS	2.3044	2.0439	1.7617	1.788	1.6662
FDMIBOR	*Ksmin*	2.3072	2.1132	1.8712	1.6032	1.7099
τ=1	*Ktest*	***1.7114****	***0.5666****	***0.0628****	***-0.0428****	***-0.0885****

m: dimensión de inserción; τ retardo para la reconstrucción;Retardo para el cálculo de la imagen dt=1;KSmean: estadístico K medio para las 20 series subrogadas; KSstd: desviación típica del estadístico K de las 20 series subrogadas; KS: Ksmean -2KSstd; Ksmin: mínimo estadístico K obtenido a partir de las 20 series subrogadas; Ktest: estadístico K para cada una de las series. La hipótesis de dependencia no-lineal se rechaza cuando Ktest>Ks o Ktest>Ksmin

*: se rechaza la hipótesis de linealidad

Terminamos el análisis de la no-linealidad con el test de Kaplan –tabla 9.18–. Según los resultados se observa que la hipótesis de linealidad debe rechazarse para todas las series consideradas a excepción de la serie DCLIPIBE y DCLCEE, si bien en algunas series la hipótesis de linealidad sólo puede rechazarse para alguna dimensión de inmersión particular –quizás indicativa de la dimensión de inserción adecuada para la reconstrucción del atractor–.

A modo de resumen indicamos en la tabla 9.19 los resultados obtenidos para cada serie y cada test de no-linealidad.

TABLA 9.19
RESUMEN TEST DE NO-LINEALIDAD

SERIE	acf^2	*Engle*	*BDS*	*R/S*	*Kaplan*
DCLPIBT	L	NL	NL	L	NL
DCLVABAGR	L	L	NL	NL	NL
DCLVABISC	L	L	L	NL	NL
DCLVABC	L	L	NL	NL	NL
DCLVABS	L	L	L	NL	NL
DCLFBCFBE	L	L	NL	L	NL
DCLFBCFC	NL	L	NL	NL	NL
DCLPARO	NL	NL	NL	NL	NL
DCLIPIGRAL	L	L	L	NL	NL
DCLIPIBE	L	L	NL	NL	L
CLCGA	NL	L	NL	NL	NL
DCLCAC	L	L	NL	NL	NL
DCLCEE	L	L	NL	NL	L
DNCPBI	NL	NL	NL	NL	NL
DNCPC	NL	L	NL	NL	NL
CLIPC	L	NL	NL	NL	NL
CLALP	L	L	L	NL	NL
CLM3	L	L	L	NL	NL
DMIBOR	NL	NL	NL	NL	NL

L:el proceso generador de la serie lineal; NL: el proceso generador de la serie no-lineal

A continuación y para revelar el posible carácter caótico determinista de los procesos no-lineales detectados en estas series, procederemos a la estimación de los correspondientes exponentes de Lyapunov. Para ello será necesario que previamente, reconstruyamos los atractores asociados a cada una de las series.

La reconstrucción del atractor

Para la reconstrucción del atractor por el método de los retardos utilizaremos el primer mínimo de la función de información mutua media y la desaparición de falsos vecinos para la elección del retardo de reconstrucción y la dimensión de inmersión adecuada –figuras 9.92-9.96 y tabla 9.20–. En las figuras 9.97-9.105 representamos el atractor reconstruido, a partir de los cuales procederemos a la estimación de los exponentes de Lyapunov.

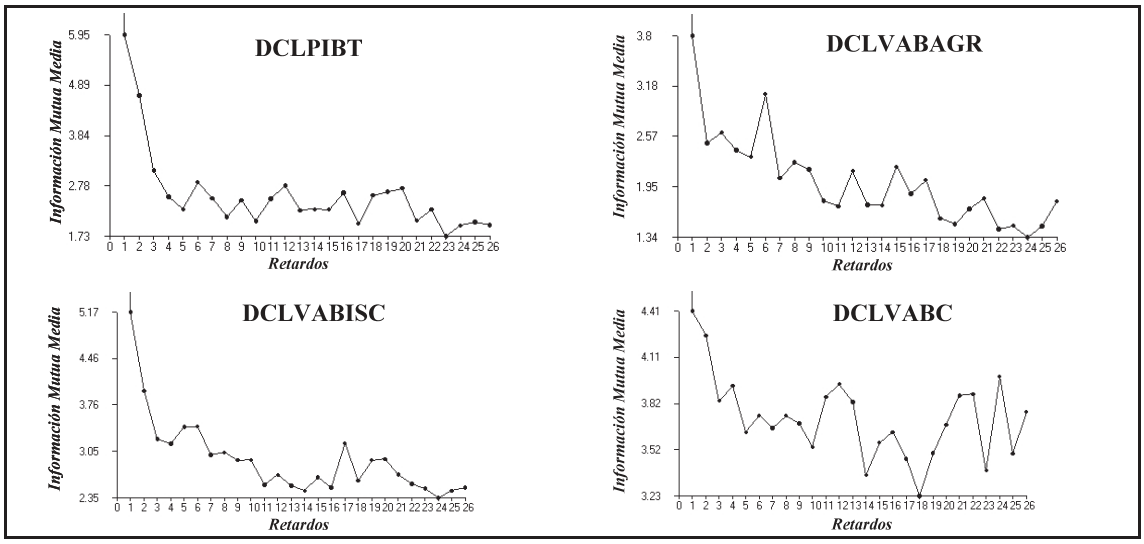


Figura 9.92

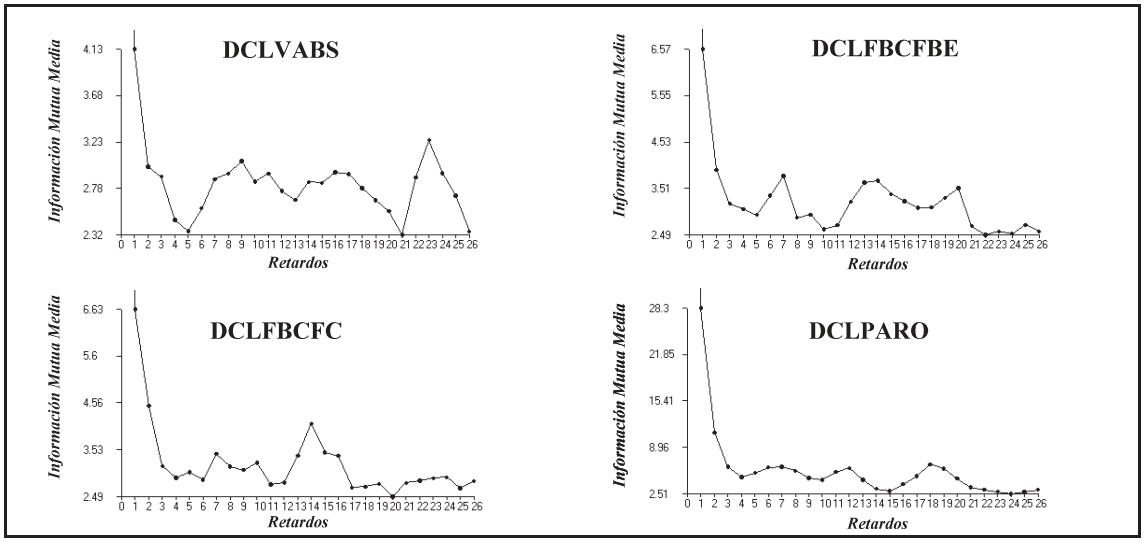


Figura 9.93

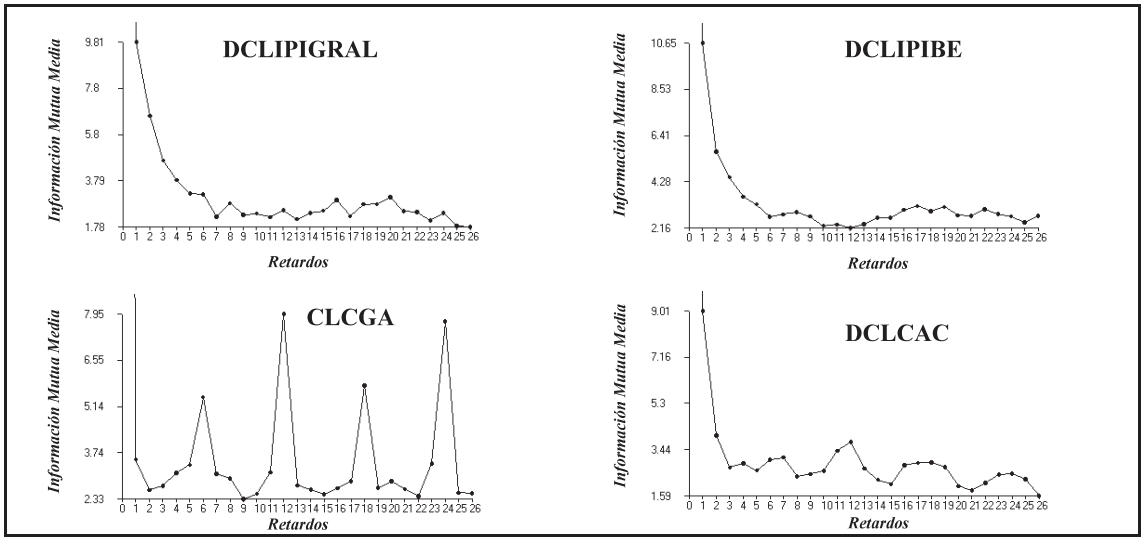
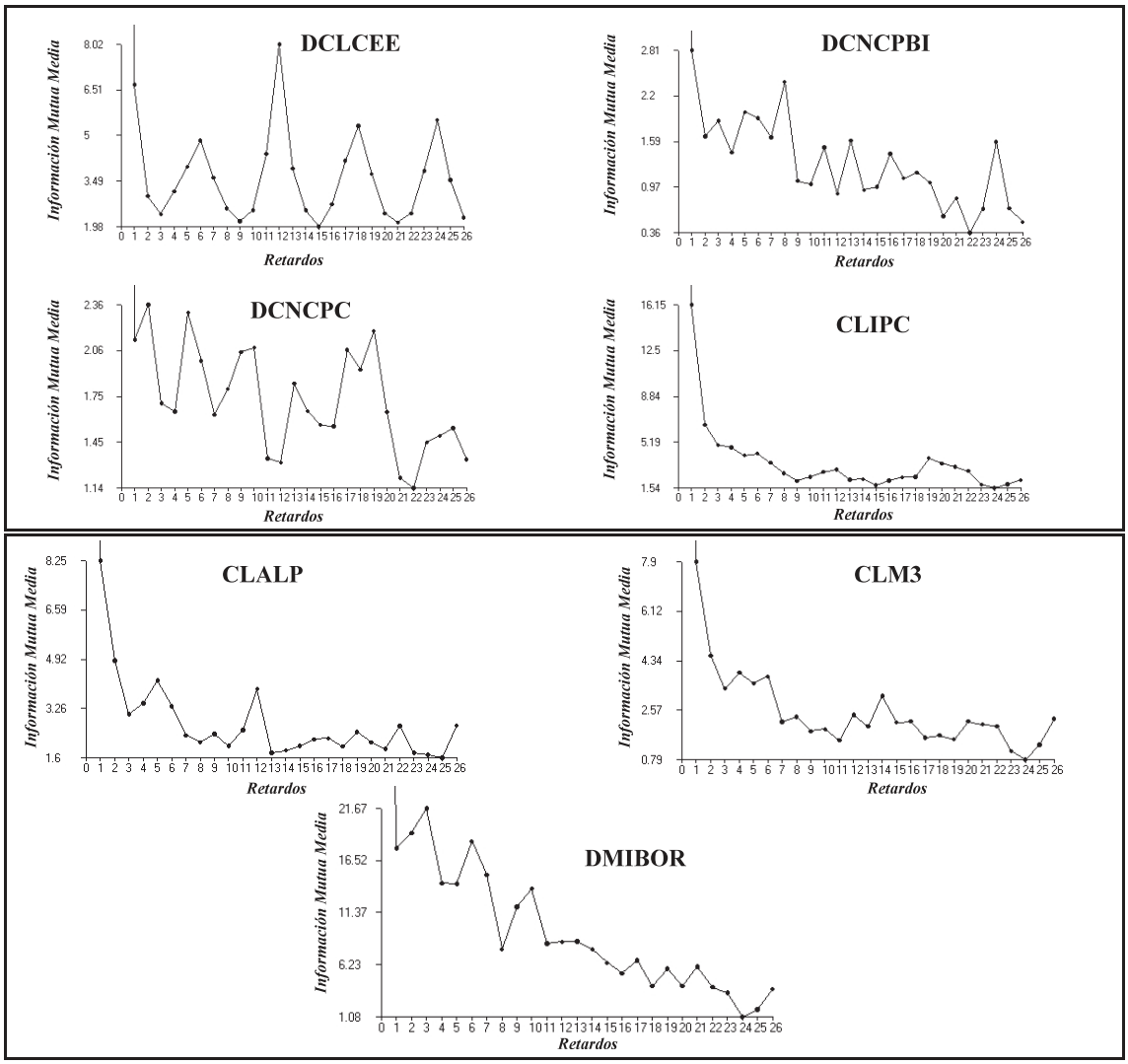


Figura 9.94



Figuras 9.95 y 9.96

TABLA 9.20

	Retardo óptimo	Falsos Vecinos *m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*
DCLPIBT	5	3.565%	0.114%	***0.000%***	0.000%	0.000%
DCLVABAGR	2	3.522%	0.102%	***0.000%***	0.000%	0.000%
DCLVABISC	4	3.075%	0.165%	***0.000%***	0.000%	0.000%
DCLVABC	3	2.869%	0.053%	***0.000%***	0.000%	0.000%
DCLVABS	5	4.188%	0.095%	***0.000%***	0.000%	0.000%
DCLFBCFBE	5	3.773%	0.114%	***0.000%***	0.000%	0.000%
DCLFBCFC	4	3.500%	0.055%	***0.000%***	0.000%	0.000%
DCLPARO	4	3.669%	0.158%	0.007%	*0.000%*	0.000%
DCLIPIGRAL	7	3.783%	0.085%	0.003%	*0.000%*	0.000%
DCLIPIBE	6	3.446%	0.058%	***0.000%***	0.000%	0.000%
CLCGA	2	4.866%	0.230%	0.002%	***0.000%***	0.000%
DCLCAC	3	4.742%	0.273%	0.028%	***0.000%***	0.000%
DCLCEE	3	4.504%	0.066%	0.006%	***0.000%***	0.000%
DNCPBI	2	4.932%	0.271%	0.012%	***0.000%***	0.000%
DNCPC	1	4.018%	0.198%	0.009%	***0.000%***	0.000%
CLIPC	9	3.879%	0.171%	0.004%	***0.000%***	0.000%
CLALP	3	3.226%	0.111%	0.006%	***0.000%***	0.000%
CLM3	3	3.220%	0.157%	0.003%	***0.000%***	0.000%
DMIBOR	1	3.787%	0.161%	0.006%	***0.000%***	0.000%

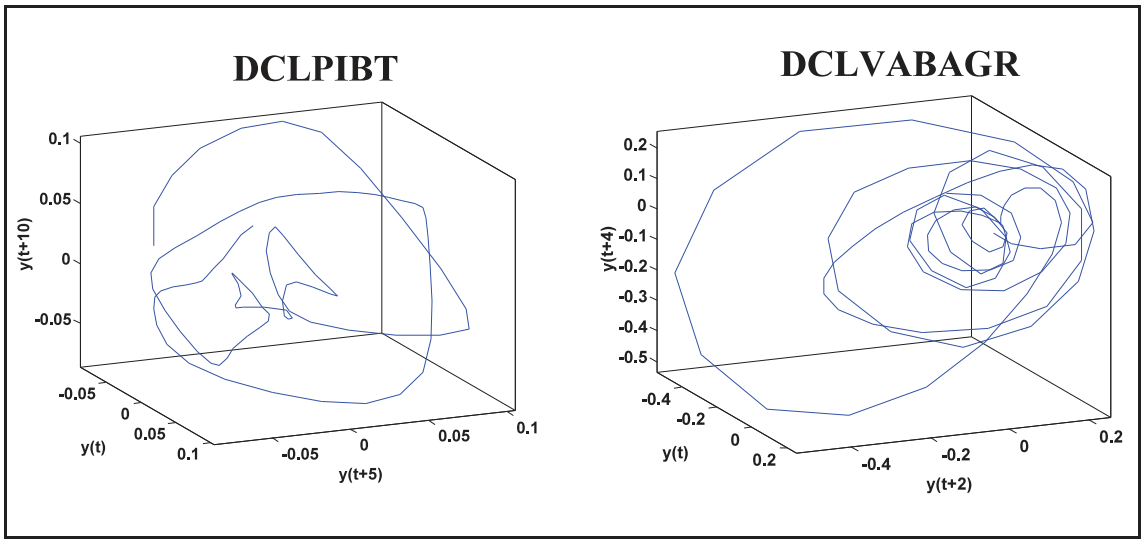


Figura 9.97

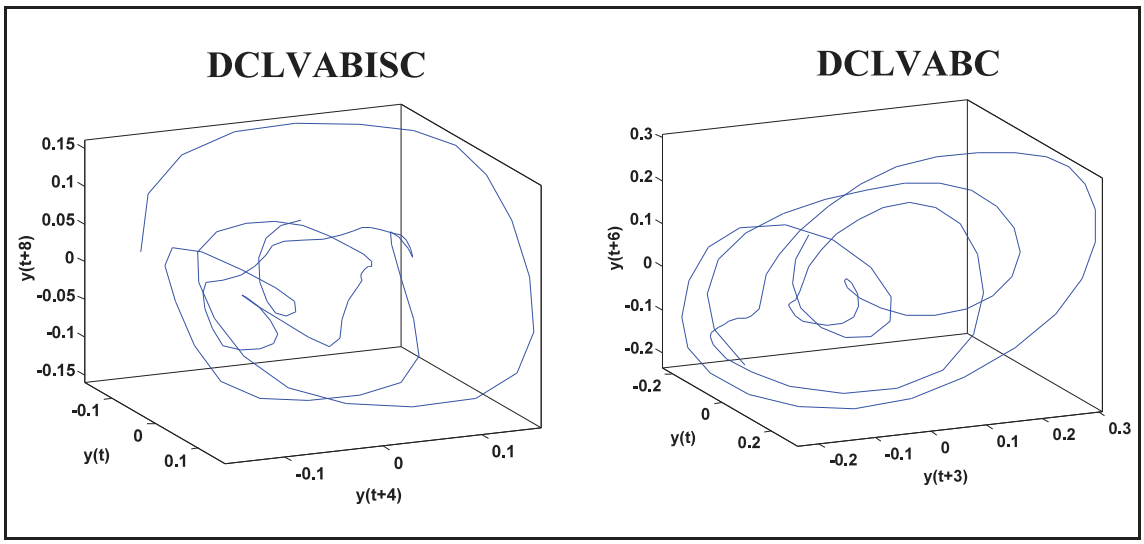


Figura 9.98

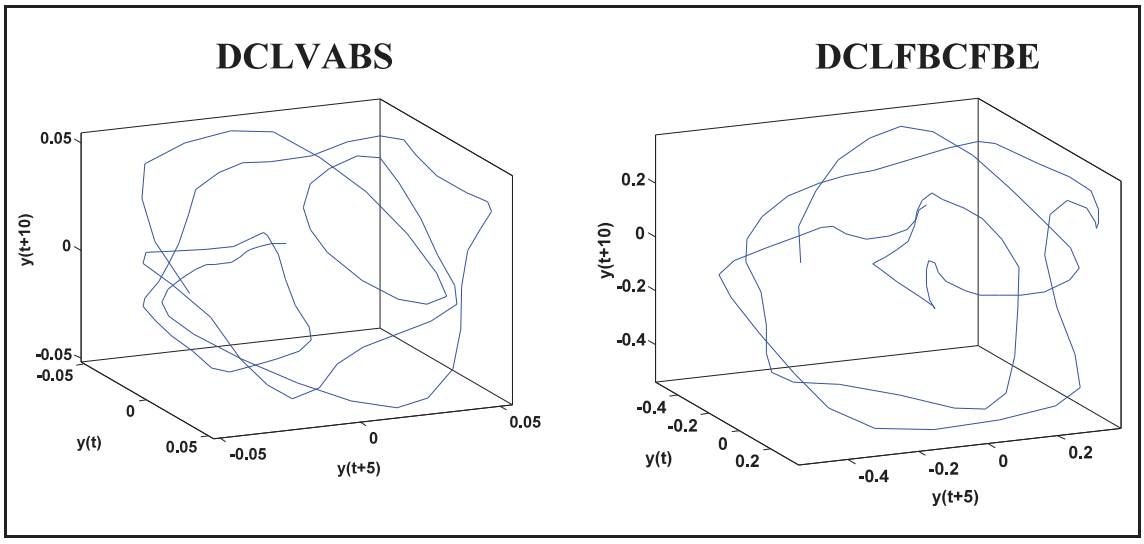


Figura 9.99

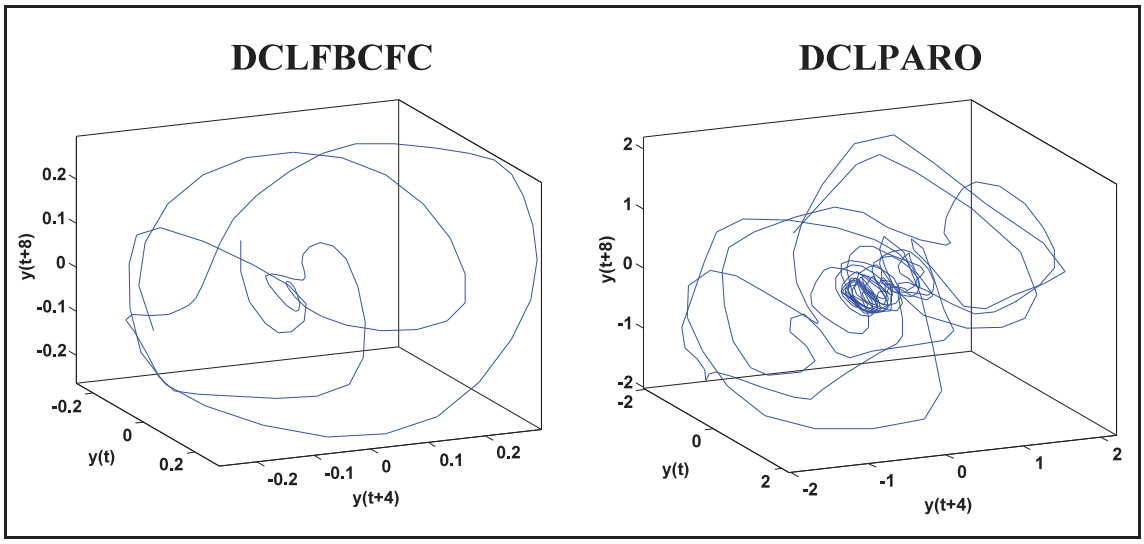


Figura 9.100

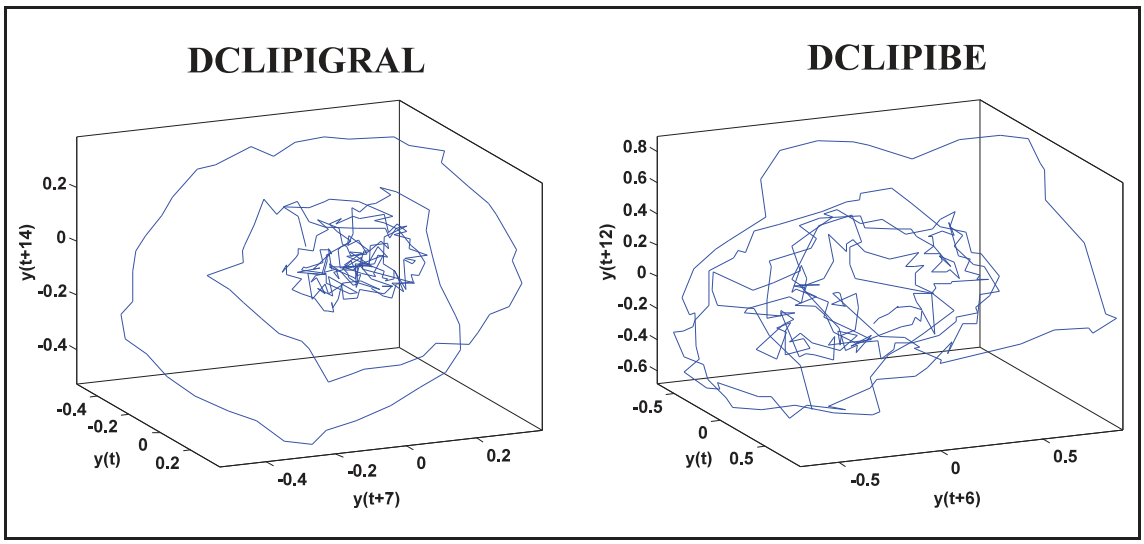


Figura 9.101

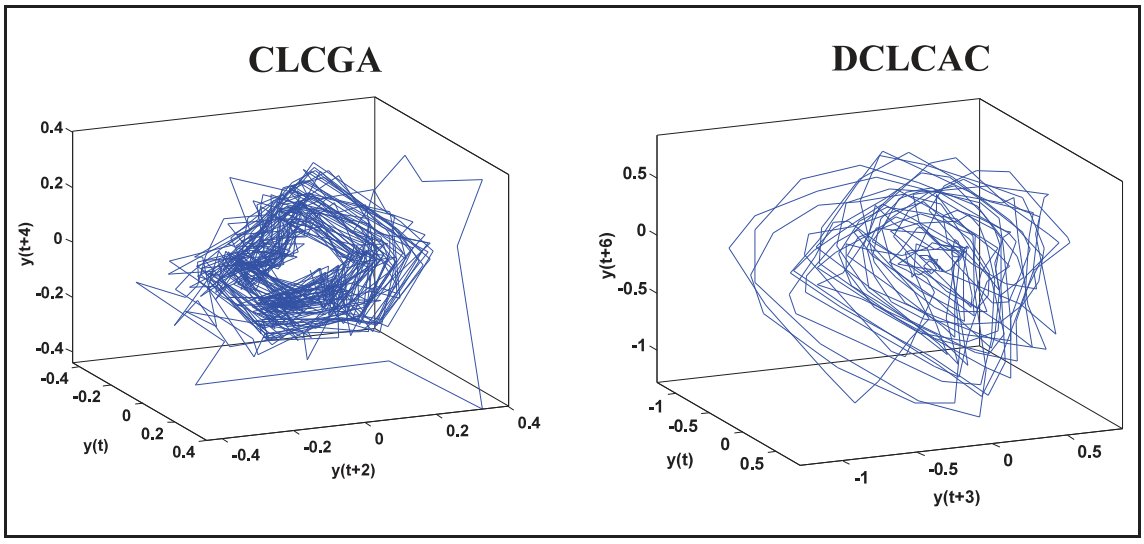


Figura 9.102

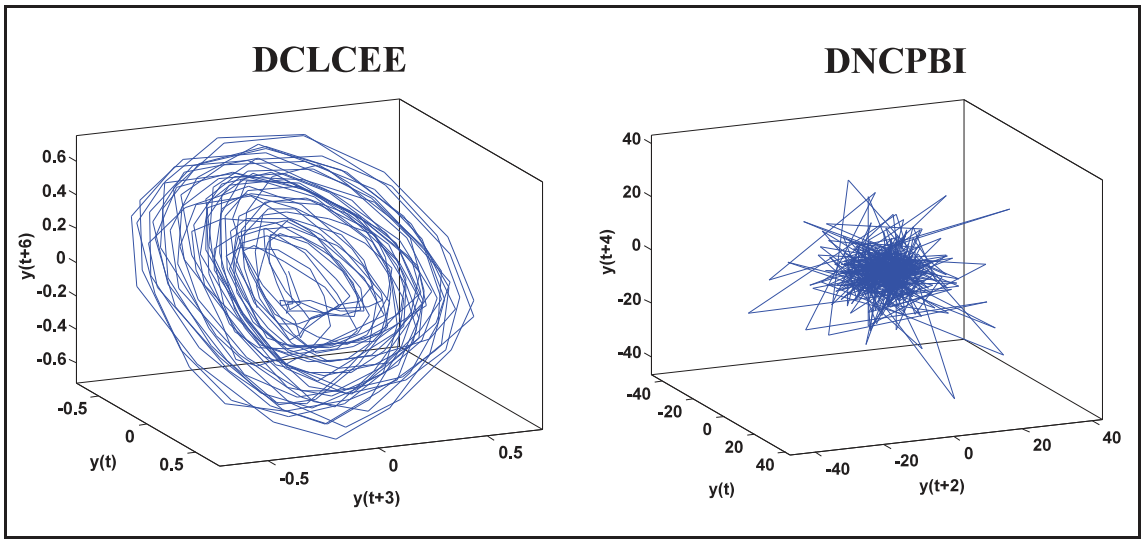


Figura 9.103

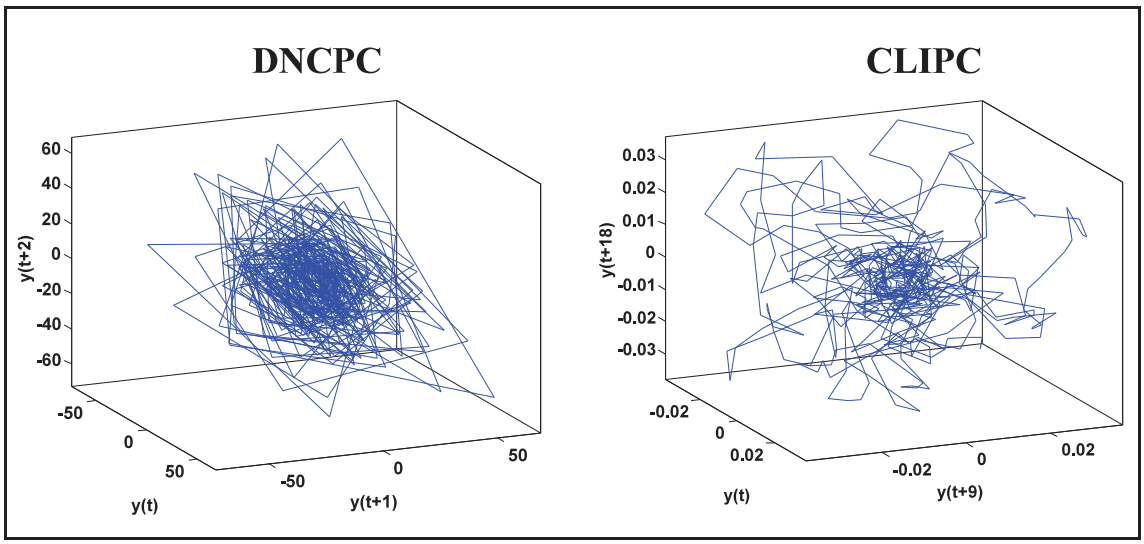


Figura 9.104

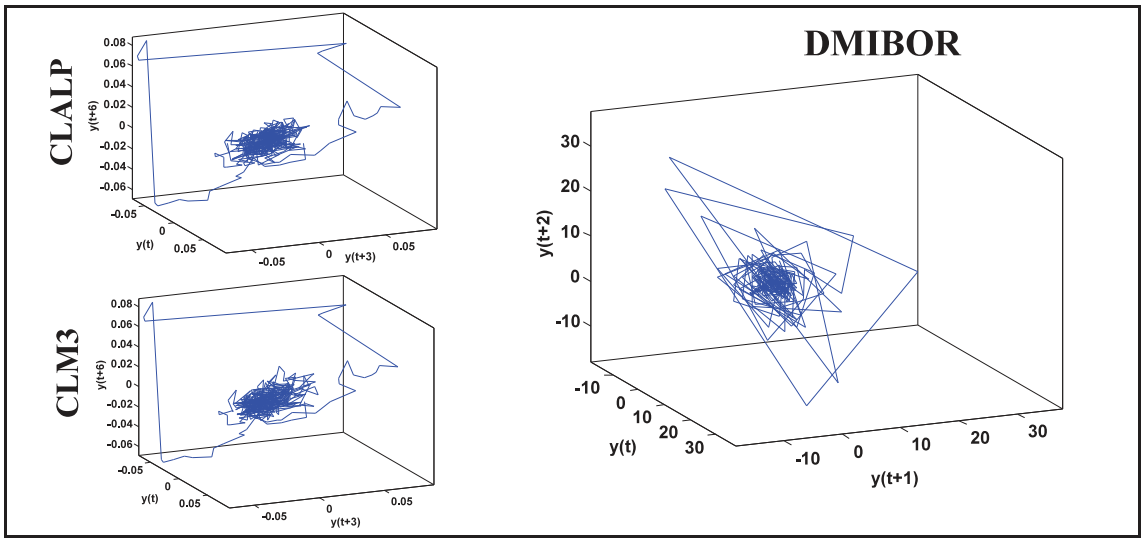


Figura 9.105

Exponentes de Lyapunov

Terminamos el análisis de las series temporales estimando los exponentes de Lyapunov asociados a cada una de ellas. Para ello utilizaremos los algoritmo Lenns –Lyapunov Exponent of Noisy nonlinear Systems, Ellner et al. (1992)– y Netle –Networks Lyapunov Exponents, Kuan, Liu y Gencay (1997)– (véase capítulo 5).

En la tabla 9.21 se muestra la estimación del exponente de Lyapunov dominante obtenido utilizando el algoritmo Lenns. Utilizamos el criterio de información de Schwarz para la elección del retardo de reconstrucción, dimensión de inserción y número de unidades en la capa oculta de la red neuronal con la que se intenta recoger la estructura dinámica determinista presente en la serie. Como puede observarse, para las series trimestrales de PIB, valor añadido bruto e Inversión –DCLPIBT, DCLVABAGR, DCLVABISC, DCLVABC, DCLVABS, DCLFBCFBE y DCLFBCFC– no puede rechazarse la hipótesis de comportamiento caótico –ya que el exponente de Lyapunov dominante estimado es positivo–. El mismo resultado se obtiene para las series mensuales de consumo de gasolina, opiniones empresariales sobre bienes de inversión, los agregados monetarios y el tipo de interés –CLCGA, DNCPBI, CLALP, CLM3 y DMIBOR–. El resto de series rechazan la hipótesis de caos determinista al estimarse un exponente negativo.

Tabla 9.21
Exponente de Lyapunov Dominante. Algoritmo LENNS
Series Originales

	τ	*m*	*k*	*EER*	*CIS*	λ
DCLPIBT	5	6	4	0.01109	-2.0812	0.039
DCLVABAGR	1	8	1	0.04869	-1.2695	0.013
DCLVABISC	4	8	3	0.02084	-1.5113	0.035
DCLVABC	5	8	3	0.01035	-2.2109	0.051
DCLVABS	6	6	4	0.02106	-1.4401	0.112
DCLFBCFBE	5	8	3	0.0207	-1.518	0.089
DCLFBCFC	4	8	3	0.01428	-1.8895	0.139
DCLPARO	1	8	2	0.03873	-1.6538	-0.026
DCLIPIGRAL	6	2	1	0.21389	-0.0674	-0.023
DCLIPIBE	6	2	1	0.21591	-0.0579	-0.041
CLCGA	1	3	8	0.40661	0.8169	0.214
DCLCAC	1	8	3	0.18475	-0.0066	-0.007
DCLCEE	1	7	2	0.11993	-0.5641	-0.007
DNCPBI	7	6	2	0.81941	1.3621	0.06
DNCPC	1	4	1	0.85557	1.3259	-0.391
CLIPC	9	5	1	0.49428	0.7724	-0.018
CLALP	1	8	4	0.36443	0.8015	0.032
CLM3	1	8	5	0.33581	0.8153	0.157
DMIBOR	1	7	7	0.20349	0.5971	0.174

τ: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de nodos en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; λ: exponente de Lyapunov dominante

TABLA 9.22
Exponente de Lyapunov Dominante. Algoritmo LENNS
Test residual de Brock (Filtro Lineal)

	τ	*m*	*k*	*EER*	*CIS*	λ
FDCLPIBT	1	6	2	0.57185	1.4259	0.595
FDCLVABAGR	6	8	2	0.47982	1.3836	0.332
FDCLVABISC	5	8	2	0.50846	1.4092	0.228
FDCLVABC	2	4	2	0.70672	1.4845	0.055
FDCLVABS	6	4	2	0.71889	1.5016	0.159
FDCLFBCFBE	1	8	2	0.52753	1.446	0.483
FDCLFBCFC	3	3	1	0.89535	1.4989	-0.818
FDCLPARO	3	5	5	0.65484	1.2906	0.067
FDCLIPIGRAL	5	3	1	0.94667	1.4386	-0.499
FDCLIPIBE	4	4	2	0.81704	1.3634	-0.113
FCLCGA	7	3	2	0.9084	1.4028	-0.113
FDCLCAC	8	7	1	0.9354	1.4412	-0.023
FDCLCEE	1	8	1	0.90755	1.4069	-0.492
FDNCPBI	1	5	2	0.8528	1.3853	-0.268
FDNCPC	6	5	2	0.88011	1.4305	-0.037
FCLIPC	3	7	2	0.84447	1.388	0.024
FCLALP	4	4	1	0.92958	1.4181	-0.418
FCLM3	4	4	1	0.92158	1.4097	-0.403
FDMIBOR	1	3	8	0.40058	1.0241	0.257

τ: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de nodos en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; λ: exponente de Lyapunov dominante

Para completar las anteriores estimaciones en la tabla 9.22 se muestran los resultados obtenidos aplicando el test residual de Brock, es decir, estimando el exponente dominante sobre las series de residuos correspondientes a los filtros lineales ARMA aplicados sobre cada una de ellas –tabla 9.14–. Los nuevos exponentes estimados revelan que la hipótesis de comportamientos caóticos sólo se pueden mantener para las series trimestrales de PIB, valor añadido, inversión en bienes de equipo y tipos de interés. Para el resto de series para las que previamente se obtenía un exponente positivo, la nueva estimación revela la ausencia de comportamientos caóticos –exponentes negativos–. Esto es, que los filtros ARMA aplicados parecen ser los causantes de la estimación espuria de los correspondientes exponentes positivos.

Terminamos el análisis de las series temporales utilizando el algoritmo Netle para estimar, de manera alternativa al anterior Lenns los exponentes de Lyapunov asociados al atractor del proceso generador de cada una de éstas (véase apartado 5.5). Este algoritmo, frente al anterior, tiene la ventaja de proporcionar estimaciones del expectro completo de exponentes de Lyapunov. Es por ello, que éstos han sido estimado a partir de cada serie utilizando el retardo óptimo según el primer mínimo de la función de información mutua media, y para dimensiones de inserción de 1 a 10. Los resultados de la estimación se muestran en la tabla 9.23

TABLA 9.23
Espectro de Exponentes de Lyapunov. Algoritmo NETLE

DCLPIBT	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	1	2	3	13	10	9	8	7	6	***4***
*SIC***	-6.26	-6.26	-6.34	-6.48	-6.45	-6.40	-6.37	-6.30	-6.24	***-6.17***
EER	1.64E-03	7.53E-04	5.61E-04	8.63E-07	2.26E-07	1.73E-07	9.81E-08	3.02E-08	2.99E-08	***4.74E-08***
SIC	-6.24	-6.79	-6.74	-10.11	-11.69	-11.69	-12.06	-13.14	-13.17	***-13.64***
	-1.175	-0.840	-0.231	0.349	0.359	0.139	0.293	0.168	0.200	***0.137***
		-1.237	-0.588	0.124	0.156	0.111	0.148	0.088	0.128	***0.040***
			-2.509	-0.145	-0.075	-0.089	0.017	0.004	-0.011	***0.014***
				-0.811	-0.311	-0.149	-0.031	-0.036	-0.069	***-0.040***
					-0.694	-0.377	-0.261	-0.145	-0.173	***-0.103***
						-0.957	-0.305	-0.139	-0.164	***-0.131***
EXPONENTES							-0.538	-0.221	-0.297	***-0.147***
								-0.688	-0.289	***-0.185***
									-0.621	***-0.289***
t=5										***-0.760***

DCLVABAGR	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	***m=9***	*m=10*
k	1	1	1	16	14	12	10	8	*7*	6
*SIC***	-3.66	-3.64	-3.63	-3.62	-3.60	-3.58	-3.56	-3.54	***-3.53***	-3.50
EER	1.49E-02	4.89E-03	4.25E-03	2.35E-05	8.03E-06	2.16E-06	7.57E-06	4.31E-06	***1.58E-06***	7.74E-06
SIC	-4.04	-5.11	-5.20	-6.36	-7.28	-8.61	-7.57	-8.53	***-9.62***	-8.21
	-0.490	-0.116	-0.115	0.480	0.507	0.261	0.408	0.235	***0.266***	0.267
		-0.125	-0.122	0.279	0.277	0.153	0.163	0.114	***0.153***	0.186
			-0.730	-0.040	0.090	0.108	0.117	0.062	***0.093***	0.126
				-0.710	-0.056	0.014	-0.001	-0.008	***-0.030***	0.076
					-0.669	-0.105	-0.069	-0.077	***-0.054***	-0.032
						-0.582	-0.239	-0.228	***-0.116***	-0.018
EXPONENTES							-1.155	-0.359	***-0.213***	-0.054
								-0.727	***-0.335***	-0.102
									-0.761	-0.276
t=2										-0.659

DCLVABISC	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	1	1	3	13	10	11	7	8	6	***6***
*SIC***	-5.26	-5.31	-5.38	-5.59	-5.65	-5.74	-5.72	-5.70	-5.68	***-5.65***
EER	4.26E-03	3.07E-03	1.27E-03	6.13E-06	1.39E-06	8.80E-08	5.91E-07	5.80E-08	2.08E-07	***2.75E-08***
SIC	-5.29	-5.57	-5.94	-8.28	-10.02	-11.76	-11.00	-12.27	-11.61	***-13.12***
	-1.135	-0.365	0.063	0.381	0.224	0.179	0.203	0.066	0.121	***0.084***
		-0.375	-0.698	0.120	0.093	0.113	0.190	0.056	0.116	***0.081***
			-1.904	-0.021	-0.017	0.054	0.064	0.002	0.073	***0.049***
				-0.440	-0.336	-0.047	0.037	-0.046	0.061	***0.023***
					-0.559	-0.299	-0.072	-0.170	0.046	***0.001***
						-0.615	-0.313	-0.254	-0.041	***-0.071***
EXPONENTES							-0.919	-0.265	-0.087	***-0.082***
								-0.606	-0.428	***-0.116***
									-0.965	***-0.328***
t=4										***-1.273***

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; exponentes de Lyapunov expresados en logaritmos neperianos

DCLVABC	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	***m=9***	*m=10*
k	1	1	14	12	9	10	9	8	***6***	6
*SIC***	-3.93	-3.96	-3.95	-3.93	-3.95	-3.99	-3.98	-3.95	***-3.92***	-3.88
EER	9.42E-03	3.40E-03	8.86E-05	2.95E-05	1.32E-05	1.60E-06	3.96E-07	3.05E-07	***3.40E-07***	3.17E-07
SIC	-4.49	-5.46	-6.16	-7.10	-8.24	-9.46	-10.71	-10.92	***-11.43***	-11.08
	-0.372	-0.144	0.584	0.605	0.365	0.264	0.299	0.180	***0.158***	0.120
		-0.150	0.048	0.127	0.224	0.198	0.084	0.012	***0.071***	0.113
			-0.778	-0.295	0.011	0.046	-0.059	0.025	***0.003***	0.023
				-0.885	-0.209	-0.074	-0.095	-0.044	***-0.036***	-0.001
					-0.778	-0.186	-0.162	-0.104	***-0.056***	-0.010
						-0.667	-0.354	-0.155	***-0.098***	-0.113
EXPONENTES							-0.973	-0.220	***-0.131***	-0.125
								-0.962	***-0.307***	-0.201
									-0.666	-0.218
t=3										-0.439

DCLVABS	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	1	1	1	9	9	10	8	6	6	***5***
*SIC***	-7.03	-7.05	-7.06	-7.09	-7.05	-7.12	-7.15	-7.09	-7.15	***-7.08***
EER	7.57E-04	6.49E-04	5.31E-04	2.71E-06	6.56E-07	8.23E-08	1.30E-07	1.09E-07	4.31E-08	***3.18E-08***
SIC	-7.01	-7.12	-7.26	-10.14	-10.98	-12.00	-11.78	-12.45	-12.80	***-13.25***
	-1.230	-0.498	-5.475	0.318	0.209	0.084	0.109	0.227	0.172	***0.141***
		-0.509	-7.003	0.121	0.105	0.071	0.116	0.111	0.154	***0.106***
			-7.959	-0.071	-0.073	-0.109	-0.019	0.006	-0.004	***0.016***
				-0.408	-0.446	-0.165	-0.089	-0.061	0.009	***-0.034***
					-0.636	-0.263	-0.186	-0.123	-0.051	***-0.066***
						-0.510	-0.269	-0.264	-0.088	***-0.072***
EXPONENTES							-0.703	-0.506	-0.228	***-0.088***
								-1.167	-0.284	***-0.120***
									-0.520	***-0.236***
t=5										***-0.772***

DCLFBCFBE	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	***m=9***	*m=10*
k	1	5	19	13	8	7	8	6	***6***	4
*SIC***	-2.84	-2.85	-2.84	-2.87	-2.81	-2.75	-2.69	-2.64	***-2.56***	-2.53
EER	4.99E-02	1.66E-02	1.05E-04	1.70E-05	2.38E-05	7.00E-06	1.48E-06	3.09E-06	***3.61E-07***	6.59E-06
SIC	-2.82	-3.15	-4.67	-7.13	-7.74	-8.83	-9.34	-9.10	***-10.68***	-8.71
	-1.141	0.059	0.924	0.314	0.200	0.158	0.283	0.100	***0.119***	0.115
		-0.407	0.112	0.118	0.147	0.155	0.097	0.091	***0.053***	0.084
			-0.542	-0.158	-0.007	-0.055	-0.036	0.003	***-0.008***	0.075
				-0.744	-0.241	-0.203	-0.009	0.001	***-0.008***	0.080
					-0.398	-0.219	-0.132	-0.080	***-0.040***	-0.011
						-0.759	-0.265	-0.083	***-0.150***	-0.041
EXPONENTES							-0.731	-0.372	***-0.126***	-0.077
								-0.482	***-0.422***	-0.157
									-0.957	-0.186
t=5										-1.210

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; exponentes de Lyapunov expresados en logaritmos neperianos

DCLFBCFC	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	1	1	14	15	13	10	7	7	6	***4***
*SIC***	-3.88	-3.93	-3.91	-3.96	-3.98	-3.93	-3.88	-3.83	-3.78	***-3.73***
EER	1.44E-02	8.49E-03	9.19E-05	1.38E-05	8.01E-07	5.82E-07	7.84E-07	2.15E-07	2.24E-07	***2.75E-07***
SIC	-4.07	-4.55	-6.05	-6.90	-9.55	-10.27	-10.71	-11.50	-11.53	***-12.23***
	-0.760	-0.337	0.842	0.865	0.490	0.365	0.417	0.051	0.071	***0.152***
		-0.354	0.065	0.285	0.300	0.200	0.177	0.009	0.061	***0.048***
			-0.365	-0.155	0.105	-0.046	0.003	-0.028	0.043	***0.011***
				-0.590	-0.004	-0.044	-0.092	-0.038	0.012	***-0.082***
					-0.886	-0.440	-0.151	-0.119	-0.009	***-0.042***
						-0.791	-0.211	-0.144	-0.043	***-0.065***
EXPONENTES							-0.904	-0.208	-0.158	***-0.108***
								-0.395	-0.235	***-0.201***
									-0.347	***-0.380***
t=4										***-0.911***

DCLPARO	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	1	10	11	11	10	9	13	17	18	***18***
*SIC***	-0.97	-0.97	-1.02	-1.04	-1.03	-1.04	-1.06	-1.16	-1.17	***-1.17***
EER	2.84E-01	1.59E-01	1.12E-01	1.93E-02	1.56E-02	1.23E-02	5.02E-03	1.61E-03	6.82E-04	***4.13E-04***
SIC	-1.20	-1.25	-1.38	-2.97	-3.12	-3.32	-3.53	-3.85	-4.27	***-4.46***
	-0.755	0.036	0.015	0.044	0.119	0.145	0.167	0.241	0.141	***0.194***
		-0.510	-0.178	-0.039	0.002	0.004	0.054	0.102	0.123	***0.097***
			-0.794	-0.173	-0.066	-0.065	-0.009	0.020	0.036	***0.046***
				-0.552	-0.163	-0.200	-0.073	-0.040	0.003	***-0.006***
					-1.027	-0.516	-0.201	-0.091	-0.053	***-0.051***
						-1.003	-0.362	-0.173	-0.091	***-0.075***
EXPONENTES							-0.710	-0.321	-0.181	***-0.125***
								-0.868	-0.350	***-0.221***
									-0.608	***-0.274***
t=4										***-0.732***

DCLIPIGRAL	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	1	2	3	6	4	3	5	20	20	***18***
*SIC***	-3.76	-3.74	-3.74	-3.72	-3.70	-3.67	-3.64	-3.62	-3.59	***-3.56***
EER	1.90E-02	7.55E-03	6.49E-03	3.31E-03	3.36E-03	3.57E-03	2.38E-03	4.10E-05	6.92E-06	***3.03E-06***
SIC	-3.88	-4.70	-4.70	-4.92	-5.06	-5.08	-4.99	-5.40	-6.58	***-7.37***
	-0.916	-0.262	-0.166	0.111	0.071	0.020	0.111	0.342	0.254	***0.352***
		-0.273	-0.176	-0.042	-0.135	-0.090	0.032	0.200	0.175	***0.227***
			-1.065	-0.276	-0.263	-0.153	-0.046	0.116	0.123	***0.132***
				-0.799	-0.414	-0.357	-0.072	0.046	0.077	***0.096***
					-1.074	-0.429	-0.132	-0.012	0.027	***0.027***
						-0.757	-0.238	-0.148	-0.031	***-0.020***
EXPONENTES							-1.050	-0.251	-0.080	***-0.088***
								-0.579	-0.174	***-0.112***
									-0.734	***-0.272***
t=7										***-0.493***

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; exponentes de Lyapunov expresados en logaritmos neperianos

DCLIPIBE	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	1	4	5	5	6	17	20	20	19	***18***
*SIC***	-2.18	-2.19	-2.19	-2.17	-2.18	-2.19	-2.17	-2.17	-2.24	***-2.28***
EER	7.23E-02	2.93E-02	2.39E-02	2.01E-02	1.28E-02	1.24E-03	1.56E-04	5.20E-05	1.87E-05	***2.88E-06***
SIC	-2.55	-3.18	-3.20	-3.25	-3.44	-3.70	-4.73	-5.29	-6.01	***-7.61***
	-0.554	0.028	0.018	0.108	0.218	0.393	0.297	0.242	0.296	***0.203***
		-0.117	-0.183	0.038	-0.017	0.111	0.171	0.161	0.183	***0.140***
			-1.008	-0.264	-0.336	-0.018	0.076	0.069	0.128	***0.103***
				-0.449	-0.591	-0.114	0.008	0.031	0.034	***0.041***
					-1.371	-0.242	-0.126	-0.070	-0.003	***0.015***
						-0.712	-0.297	-0.145	-0.103	***-0.067***
EXPONENTES							-0.729	-0.275	-0.183	***-0.119***
								-0.597	-0.276	***-0.163***
									-0.670	***-0.354***
t=6										***-0.753***

CLCGA	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	***m=8***	*m=9*	*m=10*
k	2	1	5	8	10	7	6	***5***	6	5
*SIC***	-4.03	-4.03	-4.03	-4.03	-4.03	-4.03	-4.04	***-4.04***	-4.04	-4.04
EER	1.52E-02	1.27E-02	4.19E-03	3.06E-03	2.39E-03	2.11E-03	1.95E-03	***1.87E-03***	1.62E-03	1.83E-03
SIC	-4.11	-4.32	-5.22	-5.30	-5.33	-5.59	-5.69	***-5.77***	-5.75	-5.69
	-0.938	-5.954	-0.141	-0.139	0.004	-0.027	-0.010	***-0.012***	-0.004	0.002
		-8.304	-0.277	-0.228	-0.117	-0.076	-0.049	***-0.037***	-0.016	-0.018
			-0.699	-0.431	-0.215	-0.105	-0.109	***-0.049***	-0.045	-0.063
				-0.825	-0.340	-0.157	-0.151	***-0.090***	-0.078	-0.109
					-0.687	-0.297	-0.188	***-0.137***	-0.102	-0.141
						-0.440	-0.422	***-0.178***	-0.141	-0.179
EXPONENTES							-0.592	***-0.275***	-0.217	-0.203
								-0.646	-0.388	-0.292
									-0.621	-0.386
t=2										-1.698

DCLCAC	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	***m=7***	*m=8*	*m=9*	*m=10*
k	1	3	4	3	1	1	***1***	1	1	1
*SIC***	-1.93	-1.92	-1.91	-1.91	-1.90	-1.89	***-1.89***	-1.88	-1.87	-1.87
EER	1.36E-01	1.02E-01	8.36E-02	5.38E-02	4.44E-02	4.09E-02	***3.83E-02***	3.82E-02	3.78E-02	3.74E-02
SIC	-1.94	-2.09	-2.18	-2.65	-3.00	-3.06	***-3.11***	-3.10	-3.10	-3.09
	-8.667	-0.806	-0.083	-0.154	-0.038	-0.033	***-0.040***	-0.035	-0.028	-0.022
		-1.177	-0.299	-0.295	-0.039	-0.034	***-0.042***	-0.033	-0.029	-0.021
			-0.722	-0.426	-0.058	-0.098	***-0.061***	-0.056	-0.042	-0.048
				-0.686	-0.202	-0.104	***-0.059***	-0.065	-0.056	-0.049
					-0.202	-0.121	***-0.061***	-0.067	-0.057	-0.053
						-0.886	***-0.557***	-0.409	-0.289	-0.244
EXPONENTES							***-0.557***	-0.410	-0.290	-0.246
								-1.354	-0.614	-0.349
									-0.617	-0.350
t=3										-0.633

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; exponentes de Lyapunov expresados en logaritmos neperianos

DCLCEE	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	1	3	4	1	1	1	1	1	1	***1***
*SIC***	-2.28	-2.28	-2.28	-2.28	-2.27	-2.27	-2.27	-2.26	-2.26	***-2.26***
EMS	1.00E-01	2.54E-02	2.20E-02	1.46E-02	1.17E-02	1.10E-02	9.72E-03	9.50E-03	9.04E-03	***8.77E-03***
SIC	-2.25	-3.51	-3.55	-4.14	-4.34	-4.39	-4.50	-4.51	-4.55	***-4.57***
	-15.964	-0.121	-0.094	-0.029	-0.018	-0.015	-0.012	-0.011	-0.009	***-0.010***
		-0.130	-0.188	-0.030	-0.017	-0.015	-0.013	-0.011	-0.009	***-0.010***
			-1.580	-0.107	-0.036	-0.064	-0.026	-0.017	-0.010	***-0.021***
				-0.230	-0.370	-0.179	-0.088	-0.113	-0.088	***-0.066***
					-0.380	-0.190	-0.089	-0.118	-0.090	***-0.068***
						-0.932	-0.467	-0.309	-0.194	***-0.167***
EXPONENTES							-0.467	-0.309	-0.195	***-0.168***
								-1.061	-0.483	***-0.250***
									-0.485	***-0.252***
t=3										***-0.641***

DNCPBI	***m=1***	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	*m=10*
k	***1***	1	1	1	1	1	1	1	1	1
*SIC***	***4.29***	4.29	4.29	4.29	4.29	4.30	4.30	4.30	4.30	4.30
EMS	***71.61***	70.74	71.47	71.28	71.76	70.29	72.07	71.82	70.94	70.82
SIC	***4.33***	4.33	4.35	4.37	4.39	4.38	4.42	4.43	4.44	4.45
	-20.000	-3.149	-6.441	-2.440	-4.039	-1.447	-2.657	-1.3109	-0.887	-1.976
		-5.207	-7.875	-4.387	-5.423	-2.682	-3.986	-2.2073	-1.644	-2.094
			-8.768	-5.673	-6.606	-3.517	-4.511	-2.9674	-2.145	-2.185
				-6.045	-6.779	-4.279	-5.344	-3.5177	-2.430	-2.303
					-8.491	-4.710	-5.916	-4.0715	-2.879	-2.554
						-5.103	-6.640	-4.5413	-3.384	-2.456
EXPONENTES							-8.312	-4.9970	-3.689	-2.592
								-5.7113	-4.028	-2.908
									-4.406	-3.456
t=2										-4.632

DNCPC	*m=1*	***m=2***	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	*m=10*
k	1	***1***	1	1	2	1	1	1	2	1
*SIC***	6.19	***6.18***	6.19	6.19	6.19	6.19	6.19	6.17	6.18	6.18
EMS	406.68	***376.68***	414.38	420.41	381.57	418.58	400.19	419.85	350.85	443.78
SIC	6.07	***6.01***	6.12	6.15	6.17	6.17	6.14	6.21	6.21	6.29
	-1.093	***-0.657***	-4.654	-4.397	-1.986	-2.787	-1.424	-1.771	-0.375	-1.970
		-0.666	-7.297	-6.859	-4.375	-4.683	-2.501	-3.009	-0.908	-2.020
			-8.004	-7.887	-5.691	-5.729	-3.260	-3.778	-1.404	-2.121
				-8.711	-6.582	-6.492	-3.821	-4.472	-1.777	-2.222
					-6.788	-7.155	-4.314	-4.676	-2.153	-2.374
						-8.051	-4.657	-5.113	-2.522	-2.374
EXPONENTES							-5.063	-5.527	-3.354	-2.626
								-6.776	-3.974	-2.727
									-4.454	-3.131
t=1										-3.788

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; exponentes de Lyapunov expresados en logaritmos neperianos

CLIPC	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	***m=7***	*m=8*	*m=9*	*m=10*
k	1	1	1	3	4	3	***4***	3	3	4
*SIC***	-8.82	-8.81	-8.81	-8.86	-8.88	-8.90	***-9.03***	-9.07	-9.05	-9.09
EER	1.36E-04	1.25E-04	1.23E-04	9.49E-05	8.09E-05	8.50E-05	***5.50E-05***	6.02E-05	6.20E-05	4.96E-05
SIC	-8.86	-8.93	-8.93	-9.03	-9.07	-9.06	***-9.34***	-9.32	-9.24	-9.26
	-3.146	-0.532	-0.384	-0.154	-0.117	-0.126	***-0.113***	-0.103	-0.085	-0.015
		-0.533	-0.386	-0.205	-0.158	-0.178	***-0.159***	-0.128	-0.094	-0.046
			-1.168	-0.386	-0.237	-0.210	***-0.179***	-0.149	-0.136	-0.082
				-0.689	-0.329	-0.295	***-0.239***	-0.183	-0.179	-0.112
					-0.605	-0.364	***-0.282***	-0.238	-0.197	-0.148
						-0.987	***-0.359***	-0.282	-0.220	-0.160
EXPONENTES							***-0.571***	-0.371	-0.235	-0.200
								-0.631	-0.319	-0.271
									-0.830	-0.392
t=9										-1.083

CLALP	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	*m=9*	***m=10***
k	9	4	4	3	4	2	2	3	2	***2***
*SIC***	-8.11	-8.10	-8.10	-8.10	-8.12	-8.19	-8.30	-8.51	-8.71	***-8.85***
EER	9.23E-05	8.18E-05	7.47E-05	6.39E-05	4.16E-05	5.91E-05	4.64E-05	3.91E-05	3.69E-05	***3.54E-05***
SIC	-8.85	-9.14	-9.17	-9.36	-9.62	-9.46	-9.67	-9.64	-9.83	***-9.83***
	-0.645	-0.235	-0.200	-0.187	-0.065	-0.086	-0.031	-0.036	-0.023	***-0.020***
		-1.031	-0.348	-0.288	-0.118	-0.156	-0.138	-0.143	-0.090	***-0.092***
			-0.943	-0.431	-0.183	-0.212	-0.163	-0.187	-0.089	***-0.098***
				-0.689	-0.235	-0.292	-0.254	-0.226	-0.116	***-0.109***
					-0.367	-0.310	-0.271	-0.290	-0.115	***-0.118***
						-1.342	-0.973	-0.523	-0.157	***-0.122***
EXPONENTES							-2.034	-0.649	-0.163	***-0.143***
								-0.843	-0.166	***-0.138***
									-0.164	***-0.198***
t=3										***-3.088***

CLM3	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	*m=6*	*m=7*	*m=8*	***m=9***	*m=10*
k	7	3	5	5	4	5	2	3	***2***	2
*SIC***	-8.06	-8.06	-8.05	-8.05	-8.07	-8.13	-8.24	-8.44	***-8.62***	-8.75
EER	9.87E-05	1.02E-04	7.29E-05	5.94E-05	4.17E-05	3.73E-05	4.72E-05	3.87E-05	***3.47E-05***	3.63E-05
SIC	-8.88	-8.99	-9.12	-9.24	-9.62	-9.53	-9.65	-9.65	***-9.89***	-9.81
	-0.470	-0.118	-0.223	-0.135	-0.043	-0.036	-0.013	-0.011	***-0.012***	-0.025
		-1.285	-0.354	-0.242	-0.117	-0.128	-0.129	-0.135	***-0.073***	-0.074
			-0.527	-0.351	-0.155	-0.168	-0.147	-0.182	***-0.077***	-0.080
				-0.647	-0.194	-0.209	-0.224	-0.230	***-0.086***	-0.085
					-0.249	-0.310	-0.234	-0.346	***-0.100***	-0.101
						-1.393	-1.601	-0.654	***-0.145***	-0.211
EXPONENTES							-4.165	-0.716	***-0.157***	-0.222
								-1.041	***-0.159***	-0.232
									-0.184	-0.236
t=3										-2.436

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; exponentes de Lyapunov expresados en logaritmos neperianos

DMIBOR	*m=1*	*m=2*	*m=3*	*m=4*	*m=5*	***m=6***	*m=7*	*m=8*	*m=9*	*m=10*
k	2	2	4	1	1	***2***	1	2	2	2
*SIC***	2.79	2.79	2.79	2.79	2.79	***2.79***	2.79	2.79	2.79	2.80
EER	9.22	9.82	6.95	8.68	8.65	***6.83***	7.89	7.37	6.82	6.87
SIC	2.35	2.45	2.33	2.29	2.31	***2.24***	2.25	2.39	2.36	2.40
	-5.501	-1.657	-0.043	-0.316	-0.292	***-0.082***	-0.075	-0.086	-0.018	-0.067
		-1.907	-0.221	-0.328	-0.296	***-0.107***	-0.126	-0.168	-0.110	-0.125
			-0.654	-0.454	-0.434	***-0.137***	-0.135	-0.169	-0.171	-0.152
				-0.496	-0.504	***-0.195***	-0.218	-0.218	-0.197	-0.177
					-2.143	***-0.349***	-0.214	-0.229	-0.246	-0.235
						-0.458	-0.414	-0.293	-0.287	-0.239
EXPONENTES							-0.423	-0.798	-0.332	-0.316
								-1.019	-0.352	-0.332
									-1.142	-0.693
t=1										-0.694

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; exponentes de Lyapunov expresados en logaritmos neperianos

Como se desprende de estos resultados, si determinamos la dimensión de inmersión y el número de unidades de la capa oculta de la red neuronal utilizando el criterio de información de Schwarz, para las series trimestrales de PIB, Valor Añadido e Inversión, y para las series mensuales de Paro y del Indice de Producción Industrial se obtiene un exponente de Lyapunov positivo, por lo que para estas series, no se podrá rechazar la hipótesis nula de que el proceso generador de las mismas es un sistema en régimen de comportamiento caótico determinista. Para el resto de series, se obtienen exponentes negativos, por lo que dicha hipótesis ha de ser rechazada.

En la tabla 9.24 resumimos los resultados de este test mostrando el exponente dominante y la dimensión fractal estimada –Dimensión de Lyapunov– según el criterio de Información de Schwarz. Si comparamos estos resultado con los obtenidos con el algoritmo Lenns, observamos que si bien el signo estimado del exponente dominante coincide para las series trimestrales de PIB, VAB e Inversión, existes discrepancias en cuanto a la magnitud del valor de dicho exponente, resultando en general mayores –en valor absoluto– los estimados por el algoritmo NETLE. En cuanto a las series mensuales existen mayores discrepancias entre ambos algoritmos, ya que si bien, el algoritmo Lenns estima exponentes positivos para la serie de consumo de gasolina –CLCGA– la serie de opiniones empresariales –DNCPBI– y las series de agregados monetarios y tipos de interés, el algoritmo Netle sólo estima exponentes positivos para las series de Paro y los Indices de Producción Industrial. De especial relevancia es el caso de la serie de opiniones empresariales –nivel de cartera de pedidos Bienes de Inversión DNCPBI– para la cual, el algoritmo Lenns estima comportamientos caóticos y, según el criterio de información de Schwarz, el algoritmo Netle estima un exponente $\approx -\infty$ es decir, que atribuye toda la irregularidad de esta serie a un proceso puramente aleatorio sin ninguna estructura determinista.

TABLA 9.24
Resumen Resultados algoritmo NETLE

SERIE	t	m	k	SIC **	RMS err	SIC	Exponente Dominante	DIMENSION FRACTAL
DCLPIBT	5	10	4	-6.17	4.74E-08	-13.64	0.137	5.36
DCLVABAGR	2	9	7	-3.53	1.58E-06	-9.62	0.266	7.29
DCLVABISC	4	10	6	-5.65	2.75E-08	-13.12	0.084	7.74
DCLVABC	3	9	6	-3.92	3.40E-07	-11.43	0.158	6.32
DCLVABS	5	10	5	-7.08	3.18E-08	-13.25	0.141	7.02
DCLFBCFBE	5	9	6	-2.56	3.61E-07	-10.68	0.119	5.77
DCLFBCFC	4	10	4	-3.73	2.75E-07	-12.23	0.152	6.21
DCLPARO	4	10	18	-1.17	4.13E-04	-4.46	0.194	7.36
DCLIPIGRAL	7	10	18	-3.56	3.03E-06	-7.37	0.352	9.69
DCLIPIBE	6	10	18	-2.28	2.88E-06	-7.61	0.203	8.43
CLCGA	2	8	5	-4.04	1.87E-03	-5.77	-0.012	–
DCLCAC	3	7	1	-1.89	3.83E-02	-3.11	-0.040	–
DCLCEE	3	10	1	-2.26	8.77E-03	-4.57	-0.010	–
DNCPBI	2	1	1	4.29	71.61	4.33	-20.000	∞
DNCPC	1	2	1	6.18	376.68	6.01	-0.657	–
CLIPC	9	7	4	-9.03	5.50E-05	-9.34	-0.113	–
CLALP	3	10	2	-8.85	3.54E-05	-9.83	-0.020	–
CLM3	3	9	2	-8.62	3.47E-05	-9.89	-0.012	–
DMIBOR	1	6	2	2.79	6.83E+00	2.24	-0.082	–

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; Exponente: exponente de Lyapunov dominante expresados en logaritmos neperianos; Dimensión Fractal:Dimensión de Lyapunov.

TABLA 9.24
Reconstrucción atractor series prefiltradas linealmente

	Retardo óptimo	Falsos Vecinos m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6
FDCLPIBT	2	4.2262%	0.1386%	0.0206%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDCLVABAGR	1	4.4436%	0.3427%	0.0388%	0.0198%	***0.0000%***	0.0000%
FDCLVABISC	1	4.3787%	0.2469%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%	0.0000%
FDCLVABC	2	4.1792%	0.1832%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%	0.0000%
FDCLVABS	1	3.8941%	0.1234%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%	0.0000%
FDCLFBCFBE	1	3.8768%	0.1411%	0.0359%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDCLFBCFC	3	4.2588%	0.1713%	0.0606%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDCLPARO	3	4.5365%	0.2033%	0.0104%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDCLIPIGRAL	1	4.2800%	0.2172%	0.0122%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDCLIPIBE	1	4.5050%	0.2817%	0.0124%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FCLCGA	1	4.4809%	0.2312%	0.0186%	0.0010%	0.0005%	***0.0000%***
FDCLCAC	1	4.3710%	0.2493%	0.0073%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDCLCEE	2	4.3218%	0.2151%	0.0121%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDNCPBI	2	4.1570%	0.2536%	0.0152%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDNCPC	2	4.2082%	0.2281%	0.0093%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FCLIPC	1	4.2942%	0.2590%	0.0197%	0.0021%	***0.0000%***	0.0000%
FCLALP	1	4.1858%	0.1894%	0.0080%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FCLM3	1	4.1315%	0.2289%	0.0064%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%
FDMIBOR	1	3.7819%	0.1347%	0.0047%	***0.0000%***	0.0000%	0.0000%

Para tratar de analizar la robustez de los resultados obtenidos utilizando las series originales, hemos aplicado el test de Brock para la estimación de los

exponentes de Lyapunov con este algoritmo Netle. Recordemos que este test propone estimar los exponentes de Lyapunov a través de la serie de residuos del filtro lineal ARMA aplicado a la serie original para evitar obtener exponentes falsamente positivos (véase apartado 8.5) Los retardos y la dimensión de inmersión para la reconstrucción de los atractores utilizando las series pre-filtradas con los modelos lineales ARMA se muestran en la tabla 9.24. Utilizando el retardo óptimo reseñado en dicha tabla hemos procedido a la estimación del espectro de exponentes con las series pre-filtradas linealmente. Los resultados de dicha estimación se resumen en la tabla 9.25.

TABLA 9.25
Resumen resultados algoritmo NETLE.
Test residual de Brock (Filtro Lineal)

	t	m	k	SIC **	RMS err	SIC	Exponente
FDCLPIBT	2	7	10	-12.37	4.72E-08	-12.36	0.689
FDCLVABAGR	1	9	8	-9.73	2.84E-07	-10.84	0.652
FDCLVABISC	1	10	8	-11.16	1.63E-07	-11.13	0.634
FDCLVABC	2	9	8	-10.53	1.85E-07	-11.09	0.709
FDCLVABS	1	10	8	-12.40	2.41E-08	-13.04	0.619
FDCLFBCFBE	1	10	8	-8.68	7.23E-07	-9.64	0.604
FDCLFBCFC	3	6	11	-10.26	1.54E-07	-11.27	0.810
FDCLPARO	3	10	8	-7.79	8.15E-05	-7.87	0.086
FDCLIPIGRAL	1	1	1	-7.07	8.34E-04	-7.00	-3.961
FDCLIPIBE	1	1	1	-5.33	4.69E-03	-5.28	-19.920
FCLCGA	1	7	1	-6.22	1.67E-03	-6.29	-0.364
FDCLCAC	1	1	1	-5.68	3.35E-03	-5.64	-10.513
FDCLCEE	2	3	1	-6.90	9.11E-04	-6.92	-0.459
FDNCPBI	2	1	1	4.19	64.2725	4.22	-19.546
FDNCPC	2	1	1	5.86	345.18	5.91	-19.694
FCLIPC	1	1	2	-10.55	2.48E-05	-10.52	-3.095
FCLALP	1	1	1	-10.85	1.90E-05	-10.80	-5.630
FCLM3	1	1	1	-10.83	1.95E-05	-10.78	-2.867
FDMIBOR	1	1	1	2.10	7.88588	2.14	-3.365

t: retardo para la reconstrucción; *m*: dimensión de inserción; *k*: número de unidades en la capa oculta; *EER*: Error estándar de la regresión; *CIS*: Criterio de información de Schwarz; *CIS** Criterio de información de Schwarz para k=0; Exponente: exponente de Lyapunov dominante expresados en logaritmos neperianos

De la anterior tabla se desprende que el signo positivo estimado para los exponentes de Lyapunov con las series originales sólo se mantiene , una vez que aplicado el filtro lineal, para las series trimestrales de PIB, VAB e Inversión, y para la serie mensual de Paro –nótese que la aplicación del test de Brock hace aumentar el valor de los exponentes–. Podemos concluir por tanto, que sólo para estas series puede aceptarse la hipótesis de comportamiento caótico[14].

A modo de conclusión, resumimos las propiedades estimadas sobre el

[14] Aunque no se muestran los resultados, la aplicación del test de barajado parece corroborar que los signos estimados en este test de Brock son robustos tanto cuando se utiliza el algoritmo Lenns como el Netle.

proceso generador de cada una de las series temporales consideradas en este trabajo empírico en la tabla 9.26. El carácter lineal o no-lineal se ha deducido de los resultados de la aplicación del test BDS y el test de Kaplan –entre interrogantes cuando éstos contradicen sus resultados[15]–. La hipótesis de caos determinista se contrasta en función del signo del exponente de Lyapunov dominate estimado por los algoritmos Lenns y Netle –entre interrogantes cuando éstos contradicen sus resultados[16]–.

TABLA 9.26
RESUMEN RESULTADOS

CLPIBRPC	NO-LINEAL	¿¿CAOS??
DCLPIBT	NO-LINEAL	CAOS
DCLVABAGR	NO-LINEAL	CAOS
DCLVABISC	NO-LINEAL	CAOS
DCLVABC	NO-LINEAL	CAOS
DCLVABS	NO-LINEAL	CAOS
DCLFBCFBE	NO-LINEAL	CAOS
DCLFBCFC	NO-LINEAL	CAOS
DCLPARO	NO-LINEAL	¿CAOS?
DCLIPIGRAL	¿¿NO-LINEAL??	NO CAOS
DCLIPIBE	¿¿NO-LINEAL??	NO CAOS
CLCGA	NO-LINEAL	NO CAOS
DCLCAC	NO-LINEAL	NO CAOS
DCLCEE	¿¿NO-LINEAL??	NO CAOS
DNCPBI	NO-LINEAL	NO CAOS
DNCPC	NO-LINEAL	NO CAOS
CLIPC	NO-LINEAL	NO CAOS
CLALP	¿¿NO-LINEAL??	NO CAOS
CLM3	¿¿NO-LINEAL??	NO CAOS
DMIBOR	NO-LINEAL	¿¿CAOS??

[15] En caso de contradicción y cuando los resultados a favor de la existencia de comportamientos caóticos no ofrece duda, se concluye que el proceso ha de ser necesariamente no-lineal.

[16] Siguiendo este criterio, los resultados sobre la serie de Paro parecen decantarse más a favor de la hipótesis de comportamiento caótico que de la hipótesis alternativa, ya que si bien el signo del exponente estimado por el algoritmo Lenns con la serie original es negativo, cuando se aplica el test de Brock con este algoritmo, y cuando se utiliza el algoritmo Netle, el signo obtenido resulta negativo.

CAPÍTULO 10

CONCLUSIONES

El objetivo de esta tesis es aplicar las técnicas y herramientas de la matemática del caos al estudio de la dinámica del ciclo y el crecimiento económico. Con ello, pretendemos mostrar cómo la utilización de sistemas dinámicos no lineales en régimen de comportamiento caótico para la modelización cualitativa de estos fenómenos económicos, no sólo impone menos restricciones que el análisis tradicional esencialmente lineal, sino que además permite explicar de forma endógena, a través de modelos perfectamente deterministas, el comportamiento irregular, aperiódico y escasamente predecible característico de la evolución observada de las economías reales. A continuación expondremos algunas de las conclusiones alcanzadas a lo largo de nuestro trabajo.

Sobre el análisis de los fenómenos complejos

La forma tradicional de afrontar el conocimiento científico sobre el mundo real es mediante la abstracción de algunas de sus complejidades introduciendo hipótesis simplificadoras. Cuando nos referimos, por ejemplo, a la complejidad que se deriva del elevado número de elementos que conforman el sistema o *complejidad estructural*, esto es, cuando debemos tener en cuenta que la economía es un sistema compuesto por multitud de agentes interactuando, interrelacionándose y reaccionando cada uno de ellos ante las decisiones del resto de la economía, una de las hipótesis simplificadoras más

extensamente utilizada ha sido la del *agente representativo*. Simplificaciones de este tipo han hecho posible avanzar en el conocimiento del fenómeno económico manteniendo una fundamentación microeconómica rigurosa. Cuando nos enfrentamos a la economía como un fenómeno dinámico, se añaden nuevas complejidades que dificultan el análisis económico. Nos referimos concretamente a lo que hemos venido denominando como *complejidad dinámica*, esto es, la complejidad, irregularidad y falta de orden o periodicidad que muestra la economía en su evolución temporal.

Tradicionalmente, el estudio de los fenómenos con una evolución temporal compleja, irregular y errática, se ha realizado *suponiendo* que la dinámica subyacente generadora de dicha complejidad, debía representarse a través de *procesos estocásticos*, rechazando así la hipótesis determinista –se trata al sistema como fundamentalmente determinista con equilibrios dinámicos a largo plazo del tipo punto fijo similares a los estudiados en la economía estática, aunque golpeados por perturbaciones exógenas puramente aleatorias–. Este enfoque ha venido propiciado, en parte, porque las soluciones a los sistemas deterministas, al menos hasta la aparición de los sistemas caóticos, perfectamente regulares, ordenadas y periódicas, eran incapaces de reproducir la dinámica compleja observada en los fenómenos reales –de hecho, el grado máximo de complejidad que podían describir los sistemas deterministas estaba restringido a los movimientos cuasiperiódicos–.

La matemática del *caos determinista* proporciona una explicación para la complejidad dinámica alternativa a la estocástica. Es decir, frente a los modelos estocásticos, estos modelos deterministas son capaces de explicar de manera endógena por qué la evolución de las economías modernas es tan irregular, errática, aparentemente aleatoria. Los modelos caóticos deterministas son sistemas de *baja dimensión*. Es decir, estos modelos suponen una reducción o simplificación en el número de grados de libertad, en el número de agentes o variables consideradas. Sin embargo, a pesar de que simplifican la complejidad estructural de la realidad, son capaces de explicar la complejidad dinámica sin necesidad de recurrir a variables aleatorias.

Sobre el Caos determinista

A modo de conclusión podemos resumir en tres las propiedades fundamentales que caracterizan a los sistemas caóticos deterministas:

La importancia de ser no-lineal

i) Los sistemas caóticos son procesos dinámicos no-lineales, es decir, presentan retroalimentación temporal no-lineal entre sus variables de estado con cierto desfase temporal

Como ya se ha comentado, el estudio de estos sistemas complejos se ha realizado tradicionalmente a través de modelos que incluían componentes estocásticos, es decir, considerando *sistemas lineales* en equilibrio estático sujetos a perturbaciones aleatorias. Este enfoque lineal legitima, por *el principio de la superposición*, el estudio aislado de cada uno de los elementos del sistema por separado bajo la cláusula *ceteris paribus*. Una vez comprendido el funcionamiento de cada uno de esos elementos esenciales del sistema, se podrá derivar automáticamente el comportamiento agregado del mismo, ya que éste vendrá perfectamente determinado por la superposición lineal de cada uno de ellos.

Los fenómenos de dinámica compleja son esencialmente no-lineales, esto es, rechazan la validez del principio de superposición. El todo es algo más que la mera suma de sus partes. El análisis de estos sistemas no-lineales deberá considerar explícitamente esta retroalimentación no-lineal entre el todo y cada una de sus partes. Los sistemas de caos determinista caen de lleno, por tanto, en el ámbito de los sistemas dinámicos no-lineales. Estas no-linealidades en la modelización de los fenómenos dinámicos posibilita, entre otras cuestiones, la aparición de comportamientos asintóticos cualitativamente distintos al punto fijo, entre ellos, los caóticos.

Equilibrios dinámicos y atractores extraños o caóticos

ii) Los sistemas dinámicos caóticos convergen a atractores extraños, en los que sus soluciones presentan oscilaciones acotadas de una elevada irregularidad y aperiodcidad

En el estudio de fenómenos dinámicos, el concepto de equilibrio dinámico –frente al equilibrio económico *walrasiano* o vaciado de los mercados– recoge el comportamiento asintótico a largo plazo del sistema. Estos equilibrios dinámicos serán conjuntos invariantes bajo la acción del sistema. De entre éstos, el análisis de la dinámica económica se centra en los denominados conjuntos atractores –que siempre estarán presentes en los sistemas dinámicos disipativos o que disminuyen su volumen–, esto es, en la región del espacio de fases hacia la que converge el sistema transcurrido un cierto periodo de tiempo transitorio de ajuste.

El comportamiento a largo plazo de los sistemas lineales está restringido a los puntos fijos o a situaciones explosivas. En los puntos fijos el sistema alcanza un estado estacionario en el que se mantiene –en ausencia de fuerzas exógenas– inmóvil –estático– de manera permanente. En las situaciones explosivas los valores de las variables de estado tienden a crecer o decrecer indefinidamente sin que se alcance en ningún momento ningún estado estacionario. En los sistemas dinámicos no-lineales, por el contrario, el

comportamiento asintótico o a largo plazo puede estar constituido por los puntos fijos y las soluciones explosivas, pero también por otros atractores cualitativamente diferentes a los anteriores: ciclos límite, toros cuasiperiódicos y atractores caóticos.

Haciendo uso de los distintos tipos de atractores, los sistemas dinámicos deterministas pueden clasificarse como de *dinámica simple* o de *dinámica compleja*. La sistemas de dinámica simple serán aquellos que convergen a comportamientos cíclicos regulares –puntos fijos y ciclos límites– ya que pueden caracterizarse perfectamente por un número finito de valores que se repiten de forma periódica a intervalos fijos de tiempo. En el caso de los atractores toroidales, sus trayectorias cuasi-periódicas estarán compuestas por la superposición de varios ciclos límite de periodicidad simple aunque independiente. Así, aunque su evolución presenta cierta complejidad dinámica, deben incluirse también dentro de este grupo de sistemas denominados de dinámica simple.

Por otra parte, la dinámica compleja será aquella que converge a comportamientos cíclicos irregulares y aperiódicos sin necesidad de introducir componentes estocásticos, es decir, a atractores extraños. En la estructura de estos *atractores extraños*, se encuentra en el núcleo del comportamiento irregular acotado, aparentemente aleatorio y sensible a cualquier variación, por mínima que ésta sea, en las condiciones iniciales de los sistemas caóticos deterministas.

Determinismo asintótico y dependencia a las condiciones iniciales

iii) Los modelos caóticos deterministas se caracterizan por su elevada sensibilidad ante variaciones en las condiciones iniciales

Cualquier variación, por mínima que sea, en las condiciones iniciales de las que partan dos soluciones a un mismo sistema dinámico de caos determinista, hará que las evoluciones que sigan cada una de ellas tiendan a diferenciarse la una de la otra –separarse en su comportamiento– a un ritmo exponencial con el transcurso del tiempo.

Esta propiedad de los sistemas caóticos supone que, desde el punto de vista práctico, resulte imposible realizar previsiones ajustadas sobre la evolución futura del sistema más allá del largo plazo. Como modelos deterministas, cuando el conjunto de información disponible sobre el verdadero estado del sistema es infinitamente exacto, las previsiones sobre su evolución futura serán perfectamente precisas. Sin embargo, cualquier desviación o error de medida supondrá que la evolución del sistema se vaya separando de las previsiones efectuadas a una tasa exponencial –determinismo asintótico–. Es decir, tal y

como parece revelarse del análisis coyuntural de las oscilaciones cíclicas de las economías reales, el caos determinista es capaz de explicar no sólo por qué las series temporales económicas parecen oscilar de forma recurrente pero aperiódica, sino también por qué resulta tan difícil realizar previsiones ajustadas sobre la evolución de las economías en el corto plazo –la sensibilidad a las condiciones iniciales introduce un horizonte finito de predicción–.

La capacidad de los sistemas caóticos deterministas de baja dimensión para poder explicar, al menos potencialmente, la dinámica compleja –irregular, asimétrica, aperiódica y escasamente predecible– de multitud de fenómenos y sistemas dinámicos, son suficientes, pensamos, para justificar la elaboración de una tesis doctoral como la que aquí se presenta. La aplicación del caos determinista al estudio del ciclo y el crecimiento económico requiere analizar, al menos, las situaciones en las que pueden emerger los comportamientos complejos en los modelos de dinámica económica; las repercusiones que se desprenden del caos determinista para la política económica; y la evidencia empírica sobre la posible existencia de comportamientos caóticos en las series temporales económicas.

Sobre la emergencia de complejidad dinámica en economía

En esta tesis defendemos que es posible, con la utilización de la matemática del caos, explicar con modelos estructuralmente simples comportamientos de dinámica altamente compleja. Así, tras analizar las características esenciales de los sistemas dinámicos deterministas, hemos intentado analizar como han sido éstos aplicados al estudio de la dinámica económica, en particular, al estudio del ciclo y el crecimiento económico.

La teoría del caos, o como reza el título de esta tesis la dinámica económica compleja, no constituye en sí una nueva doctrina de pensamiento económico a modo de alternativa totalmente alejada e independiente de las tradicionales neoclásica, keynesiana, monetarista, neokeynesiana, etc. Por el contrario la teoría o matemática del caos constituye simplemente un conjunto de herramientas que se encuentran a disposición de los economistas para ser utilizadas en el estudio del fenómeno económico. Los modelos de dinámica económica compleja tienen su fundamento tanto en el uso de la matemática del caos como en los supuestos de carácter económico característicos de cada escuela de pensamiento económico –la matemática del caos ayuda a la unión de las distintas doctrinas de la misma forma que lo hace el uso del cálculo diferencial por todas ellas–. Es decir, el fundamento teórico para crear modelos caóticos deterministas de dinámica económica compleja se encuentra en las distintas aportaciones de la dinámica económica tradicional. Es por ello que estos modelos de dinámica caótica deben considerarse como una generalización de las aportaciones tradicionales al estudio del ciclo y el crecimiento económico.

Es por ello que tras repasar los principales ingredientes del análisis tradicional del ciclo y el crecimiento económico –esencialmente lineal, y por ello, necesitado de la superposición de perturbaciones puramente aleatorias exógenas para explicar la irregularidad observada en la dinámica económica– hemos mostrado como estos modelos tradicionales del ciclo y el crecimiento económico pueden ser generalizados, a través de la introducción de diversas no linealidades en su formulación, para que admitan soluciones en régimen de comportamiento caótico. De pendiendo del valor que tomen los parámetros que definen a estos modelos, es posible obtener, además de equilibrios del tipo punto fijo, oscilaciones periódicas, cuasiperiódicas y caóticas. Estos modelos resultan ser, por tanto, más generales que los modelos tradicionales esencialmente lineales en los que el único atractor posible es el punto fijo. La consideración de este tipo de modelos, al aumentar el margen de posibilidades en el comportamiento teórico de fenómenos como el ciclo y el crecimiento, suponen sin duda un paso adelante en el conocimiento de la realidad económica.

A modo de conclusión, podemos señalar que *resulta relativamente sencillo generalizar los modelos tradicionales del ciclo y el crecimiento económico para, manteniendo una estricta fundamentación económica, formular modelos de dinámica económica caótica con unas exigencias de no-linealidad decrecientes con el número de dimensiones del sistema*. En los modelos caóticos analizados, pertenecientes a distintos enfoques doctrinales –neoclásicos, keynesianos, post-keynesianos, etc..–, la complejidad dinámica emerge del propio sistema. *A medida que aumenta el grado de reacción, impaciencia, adaptación, flexibilidad o respuesta de los agentes económicos ante la nueva información sobre la realidad en la que operan, aumenta también la posibilidad de que emerjan comportamientos caóticos –igualmente, cuanto mayor sea la atonía de los agentes, mayor la posibilidad de acabar atrapados en estados estacionarios (estáticos), para los cuales la aproximación lineal resulta más que satisfactoria–.*

Una de las principales críticas que se han hecho a los modelos con comportamiento caótico es la plausibilidad económica de los valores que deben tomar los parámetros de control de estos modelos para que sus soluciones describan comportamientos caóticos. Sin embargo, hay que decir que el sentido económico del valor de dichos parámetros va siendo más plausible con el número de grados de libertad de los modelos. Es decir, en muchos caos los valores que deben tomar los parámetros estructurales para que aparezcan comportamientos caóticos parecen efectivamente forzados hasta extremos poco verosímiles desde el punto de vista económico por el hecho de que se está forzando también al modelo para que tenga pocos grados de libertad. De hecho, estos modelos no se presentan tanto porque recojan correctamente la verdadera dinámica económica sino porque abren una nueva posibilidad que hay que tener presente a la hora de diseñar y analizar los modelos de dinámica

económica: con estos modelos de dinámica económica caótica se puede explicar de manera endógena algunas particularidades cualitativas observadas en la evolución de las economías reales como son su irregularidad, aperiodicidad y apariencia errática y escasamente predecible.

A modo de resumen las vias por las que pueden aparecer comportamientos caóticos pueden concretarse en las siguientes:

1 Agentes económicos que descuentan fuertemente el futuro –tienen una alta tasa de impaciencia–

2 Abandono del supuesto de mercados completos. Restricciones en la liquidez o restricciones crediticias de la economía pueden generar inestabilidades en modelos de equilibrio *walrasiano*.

3 Abandono de los supuestos de equilibrio económico e introducción de reglas no-lineales de ajuste entre oferta y demanda–función de inversión no-lineal–.

4 Retroalimentación entre las preferencias o tecnologías generadoras de externalidades positivas y negativas que introducen no-linealidades en las funciones de reacción de los agentes.

5 Mercados imperfectos y economías a escala *–progreso técnico endógeno y escalas de calidad–*.

6 Introducción de funciones cíclicas exógenas forzadas –ciclos políticos–

Sobre las implicaciones del caos determinista para la política económica

Una vez confirmada la posibilidad de que los modelos teóricos puedan exhibir comportamientos caóticos, se han analizado las implicaciones que para la política económica se desprenden del caos determinista.

En lo que se refiere a las recomendaciones de política económica para mejorar la tasa media de crecimiento tendencial, las implicaciones que se derivan de los distintos modelos analizados no varían de una forma radical respecto al enfoque tradicional. En los modelos de crecimiento caótico, el crecimiento medio potencial de la economía seguirá estando determinado por los supuestos doctrinales que en ellos se incorporen. Así, en los modelos de corte neoclásico, es el progreso tecnológico exógeno el que en última instancia va a explicar el crecimiento tendencial medio de la economía, y por lo tanto,

las recomendaciones de política para aumentar el crecimiento medio a largo plazo deben ir encaminadas a mejorar dicho progreso técnico. En el caso del modelo caótico del crecimiento endógeno de Matsuyama (1999) el crecimiento tendencial medio de la economía venía propiciado por aquellas situaciones donde existen rendimientos crecientes a escala que permiten la innovación, por lo que las medidas de política deben ir encaminadas al fomento de dichas economías a escala.

En definitiva, las propuestas básicas de la política económica para mejorar el crecimiento tendencial de la economía que se desprenden de cada enfoque doctrinal –analizadas en el capítulo 6– siguen siendo esencialmente válidas. Esta conclusión cambia radicalmente de signo cuando pasamos al terreno de la política estabilizadora o anticíclica.

En lo que se refiere a las medidas de política económica estabilizadora, la teoría tradicional que sigue el enfoque del ciclo exógeno propone el uso de políticas estabilizadoras exclusivamente en aquellas situaciones en las que la economía por sí misma es incapaz de alcanzar equilibrios pareto óptimos –información incompleta y rigideces en los mercado, externalidades y otro tipo de fallos de mercado–. En el caso de que no concurran ninguna de dichas situaciones, la teoría neoclásica del ciclo real propone que la mejor política económica es la no-política económica. El origen del ciclo se encuentra en los shoks aleatorios exógenos que de manera recurrente perturban la economía y, al quedar dichas perturbaciones fuera del control de la política económica, nada se puede hacer para tratar de mejorar dicha situación. Es más, estos ciclos exógenos son pareto óptimos, resultado del comportamiento racional y óptimo de los agentes. La política económica puede de hecho suponer una fuerza exógena adicional a la puramente aleatoria que propicie la aparición de fluctuaciones económicas.

Desde esta perspectiva neoclásica, los modelos de ciclo endógeno caótico analizados previamente siguen siendo pareto óptimos, y por tanto, no necesitados, en principio, de la intervención pública activa de carácter contra cíclica o estabilizadora –las soluciones caóticas altamente irregulares y localmente inestables son pareto óptimas en el sentido de que surgen de la condición de primer orden de maximización de la función de utilidad del agente representativo–. Esta recomendación coincide con la que se desprende del análisis tradicional lineal de las teorías neoclásicas del ciclo real exógeno. Sin embargo, existe una diferencia fundamental en el origen de estas dos recomendaciones en contra de una política económica activa. En los modelos del ciclo caótico neoclásico la no intervención se debe exclusivamente a la condición de optimalidad paretiana de dichas soluciones, pero a pesar de ello el carácter endógeno de dichas fluctuaciones sí permite la posibilidad de una política económica contracíclcica o estabilizadora activa. Nos referimos al caso en el que las oscilaciones cíclicas se consideren como algo a eliminar, algo

negativo desde el punto de vista del bienestar social. Los modelos de crecimiento cíclico caótico óptimo suponen ausencia de incertidumbre y predicción perfecta por parte de los agentes. Este es, sin embargo, un resultado que contrasta o choca fuertemente con la hipótesis de comportamiento caótico en el que, debido a la dependencia sensitiva a las condiciones iniciales, resulta imposible realizar predicciones sobre el futuro más allá del corto plazo –a menos que se tenga un conocimiento infinitamente exacto de la economía–. La hipótesis de predicción perfecta y comportamientos caóticos resultan incompatibles.

Esta incompatibilidad se mantiene también cuando se parte del supuesto de expectativas racionales, ya que esta hipótesis sobre formación de expectativas supone información perfecta sobre el comportamiento de la economía. Cuando se profundiza en esta hipótesis de expectativas racionales, se puede llegar a la conclusión de que ésta sólo puede sostenerse cuando la dinámica de la economía converge a soluciones del tipo punto fijo o ciclo límite. Es entonces cuando el sistema de aprendizaje de los individuos –y no precisamente a partir de un proceso de expectativas adaptativas– permite la formación de expectativas racionales. Esto es, sólo la dinámica simple permite el conocimiento perfecto del modelo que justifica la hipótesis de expectativas racionales en las que el error de previsión tiene un a esperanza cero. Cuando el sistema es caótico, existirá un impedimento práctico para un aprendizaje perfecto del funcionamiento de la economía, e incluso en este caso, pequeños errores de medida conducirán a grandes errores de predicción. Es por ello, que incluso en este caso de los modelos neoclásicos con expectativas racionales una política que consiga controlar y estabilizar las trayectorias caóticas puede resultar óptima o positiva desde el punto de vista del bienestar social.

A este respecto, y con independencia de lo expuesto hasta el momento, debemos reseñar que la matemática del caos impone una fuerte restricción a la eficacia de la política económica derivada de la existencia de sensibilidad a las condiciones iniciales, y no sólo por la incertidumbre que se genera en el conocimiento de los resultados exactos que tendrá la intervención pública en el futuro, sino también porque agrava el problema de los retardos de la política económica.

Otro cambio fundamental en el diseño de la política económica como consecuencia de la matemática del caos hace referencia a la posibilidad de utilizar la política coyuntural para alcanzar ciertos valores considerados como socialmente óptimos para las variables objetivo. *Con la matemática del caos, el objetivo de la política económica no debe ir encaminada tanto a controlar el valor de las variables objetivo como al comportamiento asintótico del sistema dentro del atractor*.

Los modelos de dinámica caótica muestran que los distintos regímenes de comportamiento a largo plazo aparecen cuando se modifica algún parámetro de control. En la medida en que dicho parámetro de control dependa de algún instrumento de política directamente controlable por el decisor político, existirá cierto margen de maniobra para el control del comportamiento cualitativo del sistema. Esto es, en los modelos de dinámica compleja, los ejercicios de *estática comparativa* de los modelos estáticos tradicionales como el IS-LM-BP, han de sustituirse por los de la *dinámica comparativa*, y el control de las variables objetivo de la política económica deberá realizarse mediante el control del atractor, es decir, mediante el control de su comportamiento cualitativo a largo plazo. *Las intervenciones para eliminar o reducir fluctuaciones de tipo caótico tienen que ser estructurales, ya que la estabilización no se alcanza sin modificar los valores de los parámetros estructurales que gobiernan el comportamiento asintótico del sistema*. En este sentido, la política estabilizadora o coyuntural se integra dentro de la política estructural, ya que la inestabilidad del sistema proviene de los parámetros estructurales del modelo dinámico y no del valor que tomen las variables de estado. El papel activo de la política económica no debe encaminarse ahora al control del valor de las variable objetivo sino al control de su atractor. De nuevo se observa, por tanto, como la teoría del caos no sólo permite integrar el fenómeno del ciclo y el crecimiento sino también la separación tradicional artificial entre políticas estructurales o a largo plazo y las políticas estabilizadoras o a corto plazo.

Una vez analizada la necesidad o no de acometer una política estabilizadora, la teoría o metodología de esta política debe tener en cuenta explícitamente el carácter caótico y no lineal de la dinámica económica, rechazando por tanto los enfoques reduccionista de Theil y Tinbergen e incluso la teoría del control óptimo tal y como se ha venido entendiendo tradicionalmente. De hecho, *la teoría de la política económica en el ámbito de los modelos caóticos cae de lleno en el marco de la teoría del control o anticontrol del caos –gestión del caos–, en la que a través de distintas reglas de política se persigue estabilizar los equilibrios periódicos que aunque inestables siguen existiendo en el interior de los atractores caóticos*.

La teoría del control del caos parte de la modelización de la dinámica a través de sistemas no-autónomos en el que a los campos vectoriales que lo definen incluyen fuerzas exógenas a la evolución del propio sistema que se utilizan para *controlar* su evolución. Estas fuerzas o *variables de control* representan, como decimos, una acción exógena al propio sistema en el sentido de que la evolución de éstas afecta al comportamiento del sistema sin que, en principio, se de la dependencia inversa. Las variables de control pueden actuar superponiéndose a la acción del sistema dinámico *–control aditivo–*, o sobre los propios parámetros que definen el sistema *–control paramétrico–*. Estas fuerzas exógenas son el componente fundamental de la teoría del control de los

sistemas dinámicos. Esta teoría trata de determinar cuál es la trayectoria que deberían seguir las variables de control para poder conducir la evolución de las variables de estado hacia las trayectorias deseadas o consideradas óptimas. La flexibilidad de los sistemas caóticos posibilita el uso de técnicas de control que estabilicen alguna de las infinitas órbitas periódicas presentes en un atractor extraño, mediante pequeñas perturbaciones en las variables o en los parámetros del sistema.

Sobre la detección del caos en las series temporales económicas.

Cerramos esta tesis con otra cuestión fundamental. Ya que hemos demostrado que desde el punto de vista teórico es posible explicar la aparición de evoluciones caóticas en la economía, debemos preguntarnos si de hecho existe evidencia de este comportamiento en las series temporales reales observadas. La detección de comportamientos caóticos a partir de series temporales trata, fundamentalmente, de contrastar la hipótesis de que los procesos generadores de las series temporales económicas puedan tener, al menos en parte, una explicación caótica determinista, y ello sin introducir a priori ningún supuesto sobre la forma estructural concreta del sistema generador de las series temporales.

Este tipo de análisis tendrá importantes implicaciones cuando de él se desprenda un resultado a favor de la hipótesis del caos determinista. Desde el punto de vista teórico obligará al abandono o reformulación de los diversos modelos tradicionales del ciclo y el crecimiento económico para que se de cabida a la existencia de equilibrios dinámicos en régimen de comportamiento caótico. Para la política económica supondrá abandonar el enfoque de la estática comparativa y sustituirlo por un enfoque de dinámica comparativa, donde el objetivo de la estabilización se afronte mediante el control de los distintos regímenes de comportamiento y no tanto por el valor que tome la variable en cada instante del tiempo. Desde este punto de vista de la política económica, y sobre todo porque las trayectorias caóticas pueden confundirse con procesos estocásticos puramente aleatorios, la propuesta de no-política económica de la teoría del ciclo real tradicional estaría totalmente injustificada, ya que si el ciclo irregular tuviese efectivamente un origen caótico, las intervenciones públicas activas estabilizadoras sí ejercerían un efecto positivo significativo sobre el bienestar social de las economías. En cuanto a los modelos de predicción, deberá rechazarse la utilización de modelos lineales estocásticos ya que cuando estamos ante sistemas caóticos de baja dimensión, es posible mejorar sus predicciones utilizando métodos alternativos como la predicción por analogías.

Resulta por tanto una cuestión fundamental, la de detectar si efectivamente la dinámica económica observada a partir de las series temporales presenta

alguna evidencia clara a favor del caos determinista o si por el contrario las irregularidades observadas en la evolución de la actividad económica tienen una explicación puramente aleatoria.

Nuestros resultados del análisis empírico de las series temporales de la economía española no resultan concluyentes en cuanto a la validez de la hipótesis de caos determinista de baja dimensión –aunque tampoco existe una evidencia fuerte que permita afirmar que algunas de las series económicas son totalmente incompatibles con dicha hipótesis–. En cualquier caso, teniendo en cuenta la insuficiencia de datos, la mala calidad de los mismos y la escasa potencia de los test propuestos hasta la fecha cuando las series se encuentran contaminadas por perturbaciones puramente aleatorias, estos resultados no deben considerarse como concluyentes ni definitivos. Si parece clara, por contra, la evidencia a favor de la existencia de estructuras dinámicas no lineales en la mayoría de series temporales consideradas. Ello parece indicar que, independientemente de que las técnicas para la detección de caos determinista deben seguir avanzando para poder obtener nuevos y más robustos resultados, se hace necesario recoger esas no linealidades en el estudio del fenómeno económico –el todo es más que la suma de las partes–, abandonando el enfoque tradicional esencialmente lineal, culpable, entre otras cuestiones, de la división artificial entre el ciclo y el crecimiento económico, y del recurso a factores exógenos de carácter aleatorio –y por tanto no controlables por la política económica– para explicar, en el mejor de los casos, el carácter irregular de las oscilaciones observadas en la evolución de las economías reales.

En definitiva, cuando tratamos de aplicar las técnicas de la matemática del caos al estudio del ciclo y el crecimiento económico aparece lo que Brock y Hommes (1997) denominan la paradoja *modelos-datos* del caos, en el sentido de que aunque es difícil encontrar caos en las series económicas y financieras es relativamente sencillo construir modelos teóricos de dinámica compleja. A pesar de esta insuficiencia de evidencia empírica a favor del caos determinista, la capacidad para explicar ciertos fenómenos complejos a partir de leyes o modelos relativamente sencillos, hacen de la matemática del caos un potente instrumento al que los economistas no debemos renunciar. No tratamos de afirmar que la economía se comporta de manera puramente determinista aunque caótica. Pensamos más bien que en la dinámica real coexisten, por el contrario, comportamientos estocásticos y deterministas. A pesar de esto, la matemática del caos conduce irrevocablemente a un cambio de paradigma. No nos podemos limitar ya al recurso reduccionista de los modelos lineales que necesariamente deben recurrir a factores exógenos para explicar la irregularidad. Con el caos determinista se puede explicar de manera endógena ese comportamiento errático que emerge del funcionamiento del propio modelo, sin necesidad de recurrir obligatoriamente al supuesto sobre la existencia de shocks estocásticos recurrentes.

Terminamos con unas palabras de Richard Goodwin en referencia a los modelos de dinámica compleja que recogen este punto de vista que estamos defendiendo: «...este modelo de oscilador de crecimiento caótico no es, sin duda, ni bastante complicado ni bastante realista, ni el mejor modelo de ciclo posible. Su importancia radica en la endogeneidad de su erraticidad. Sin embargo, esto no niega en modo alguno la importancia de la gran lista de perturbaciones exógenas que igualmente inducen conductas erráticas en la economía. Lo que estoy sugiriendo es únicamente que alguna formulación de esta clase para la estructura generadora central de la evolución económica es, seguramente, necesaria para enfrentarse a las realidades de la conducta económica». Goodwin (1996, p.73)

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABARBANEL, H.D.I.(1996): *Analysis of observed chaotic data*. Institute for nonlinear Science. Springer-Verlag, Nueva York.

ABBAGNANO, N. (1963): *Diccionario de Filosofía*. Fondo de Cultura Económica, México

ABRAHAM-FROIS, G (ed.)(1998): *Non-Linear Dynamics and Endogenous Cycles*. Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems, Springer, Berlin.

ABRAHAM-FROIS, G y BERREBI, E.(1995): *Instabilité, cycles, chaos*, Economica,París.

ABRAHAM-FROIS, G. LARDIC, S. y MIGNON, V.(1998): «Long-Term Memory and Chaos: a Note», en Abraham-Frois, G (ed.), *Non-Linear Dynamics and Endogenous Cycles*. Springer, Berlin, pp. 185-201.

ABRAMOVITZ, M.(1956):«Resource and Output Trends in United States Since 1870». *American Economic Review, Papers and Proceedings*, vol. 46, mayo, pp. 5-23

AGHION, P. y HOWIT, P.(1992): «A model of Growth Through Creative Destruction». *Econometrica*, Marzo, 60, 2, pp 323-351.

AGHION, P. y HOWIT, P.(1998): *Endogenous Growth Theory*. MIT Press, Cambridge.

ALCAIDE, A. y ÁLVAREZ, N. (1992): *Econometría. Modelos deterministas y estocásticos. Teoría.* Editorial Ramón Areces, Madrid

ALLIGOOD, K.T.; SAUER, T.D. y YORKE, J. A. (1997): *Chaos. An introduction to Dynamical Systems*. Springer, Nueva York.

ALONSO, A. (1999):«Redes neuronales artificiales en estadística». Anuario Jurídico y Económico Escurialense, e´poca II, no. XXXII, pp.333-358.

AMABLE, B. (1994):«Endogenous Growth Theory, Convergence and Divergence» en Silverberg y Soete: *The Economics of Growth and Technical Change. Technologies, Nations, Agents*. Edward Elgar Aldershot pp. 20-44.

ANIS, A. y LLOYD, E. (1976):«The expected values of the adjusted rescaled Hurst range of independent normal summand». Biometrika, 63, pp 111-116.

ARGANDOÑA, A; GÁMEZ, C. y MOCHÓN, F (1997): *Macroeconomía avanzada II. Fluctuaciones cíclicas y crecimiento económico*. McGraw-Hill, Madrid.

ASHLEY, R.A. y PATTERSON, D.M. (1989):«Linear versus nonlinear macroeconomies: A statistical test». *International Economic Review*, vol. 30, no. 3, pp.689-704.

ASHLEY, R.A. y PATTERSON, D.M. (1999):«Nonlinear model specification/diagnostics: Insights from a battery of nonlinearity tests». *V.P.I. Economics Department Working Paper no. E99-05*.

ATLAN, H. (1991):«L'intuition du complexe et ses théorisations» in F. Fogelman (ed):*Les théories de la Complexité*. Paris, Seuil, pp 9-42

AZARIADIS, C.(1993): *Intertemporal Macroeconomics*. Blckwell Publishers, Oxford.

BAJO, O, FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, F. y *Sosvilla*, S.(1992):«comportamiento caótico en las series del tipo de cambio peseta-dolar». Documento de trabajo no. 9208, Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad Complutense de Madrid.

BARNETT, W.A. y CHEN,P.(1988):«The aggregation-theoretic monetary aggregates are chaotic and have strange attractors: an econometric application of mathematical chaos» en. Barnett,W.A., Berndt, E.R. y White,H. (eds): *Dynamic econometric modeling*. Cambridge University Press, pp. 199-245.

BARNETT, W.A. KIRMAN, A.P. y SALMON, M. (eds.) (1996): *Nonlinear Dynamics and Economics*. Proceedings of The Tenh International Symposium in Economic Theory and Econometrics, Cambridge University Press, Cambridge.

BARNETT,W.A.; HINICH,M.J.(1993): «Has Chaos Been Discovered with Economic Data?». Day, R.H. y Chen, P. (eds.) *Nonlinear dynamics and evolutionary economics*. Oxford University Press, Oxford, pp. 254-65.

BARNETT, W.A., GALLANT, R.A.; HINICH, M.J; JUNGEILGES, A.J., KAPLAN, D.T. y JENSEN, M.J.(1995):«Robustness of nonlinearity and chaos test to measurement error, inference method, and sample size». *Journal of Economic Behavior and Organization*, vol 27, pp. 301-320

BARNETT, W.A.; GALLANT, R.A.; HINICH, M.J; JUNGEILGES, A.J.; KAPLAN, D.T. y JENSEN, M.J.(1996):«An experimental design to campare tests of nonlinearity and chaos». En Barnett, W.A.; Kirman, A.P. y Salmon, M. (eds.)Nonlinear Dynamics and Economics. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 163-190.

BARNETT, W.A.; GALLANT, R.A.; HINICH, M.J; JUNGEILGES, A.J.; KAPLAN, D.T. y JENSEN, M.J.(1997):«A Singled Blind Controlled Competition Among test for nonlinearity and chaos. *Journal of econometrics*, vol. 77, pp.297-302.

BARNETT, W.A., MEDIO, A. y SERLETIS, A. (1997): *Nonlinear and Complex dynamics in Economics*. EconWPA working paper no. ewp-em/9709001.

BARRO, R.J. (1990): «Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth». *Journal of Political Economy*, 98, 5 parte II, S103-S125

BARRO, R.J. y SALA-I-MARTIN, X. (1995): *Economic Growth*. McGraw-Hill, Nueva York.

BAUMOL,W.J. y BENHABIB, J.(1989):« Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Applications». *Journal of Economic Perspectives*; 3(1), pp. 77-105.

BENHABIB, J. (ed.)(1992): *Cycles and Chaos in Economic Equilibrium*, Princeton University Press, Princeton

BENHABIB, J. y DAY,R.H.,(1981): «Rational Choice and Erratic Behavior», *Review of Economic Studies*, XLVII, julio, pp. 459-471.

BENHABIB, J. y DAY, R.H. (1982):« A Characterization of Erratic Dynamics in the Overlapping Generations Model». *Journal of Economic Dynamics and Control*, 4, febrero, 1982, pp. 37-55.

BENHABIB, J. y NISHIMURA, K. (1985): «Competitive Equilibrium Cycles». *Journal of Economic Theory*, 35, pp. 284-306

BENHABIB, J. y LAROQUE, G.(1988):«On Competitive Cycles in Productive Economics». Journal of Economic Theory, 45, pp. 145-170

BERGMAN, M. (1996):«International evidence on the sources of macroeconomic fluctuations». *European Economic Review*, 40 pp 1237-1258

BLANCHARD, O.J. y FISCHER, S. (1998): *Lectures on Macroeconomics*. MIT Press, Cambridge

BLANCHARD, P., DEVANEY, R.L. y HALL, G.R. (1998): *Ecuaciones diferenciales*. International Themson Editores, México.

BLAUG, M.(1997):*Economic theory in retrospect*. 5ª edición. Cambridge University Press, Cambridge.

BOLDRIN, M. y MONTRUCCHIO, L. (1986): «On th Indeterminacy of Capital Accumulation Paths». Journal of Economic Theroy 40, pp 26-39.

BOLDRIN, M. y DENECKERE, R. (1990): «Sources of Complex Dynamics in Two-Sector Growth Models». Journal of Economics Dynamics & Control, 14, pp. 627-653.

BOLDRIN, M. y WOODFORD, M. (1990):«Equilibrium Models Displaying Endogenous Fluctuations and Chaos: A Survey». *Journal of Monetary Economics*; 25 (2), March 1990, pp.189-222.

BOLLERSLEV, J. (1986): «Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity». *Journal of Econometrics*, 31, pp.307-327.

BOLLERSLEV, J. (1988): «On the Correlation Structure for the Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process», *Journal of Time Series Analysis*, 9, pp. 121-131.

BOX, G.E.P. y JENKINS, G.M. (1970): *Time Series Analysis: Forecasting and Control*. Holden Day, San Francisco.

BROCK, W.A. (1986): «Distinguishing Random and Deterministic Systems: Abridged Version». *Journal of Economic Theory*, 40, pp.188-169.

BROCK, W. A. y SAYERS, C.L. (1985): «Is the business cycle characterized by deterministic chaos?». Mimeo. *Department of Economics, University of Wisconsin-Madison*, Madison.

BROCK, W.A, DECHERT, W.D. y SCHEINKMAM, J.A. (1987): «A test of independence based on the correlation dimension». *SSRI Working Paper No. 8702. Department of Economics.*

BROCK, W. A. y C. L. SAYERS (1988): «Is the business cycle characterized by deterministic chaos?». *Journal of Monetary Economics*, 22,71-90

BROCK, W.A. y MALLIARIS, A.G. (1989): *Differential equations, stability and chaos in dynamic economics*, North-Holland, Amsterdam.

BROCK, W.A. y POTTER, S.M.(1993): «Nonlinear Time Series and Macroeconometrics» en Maddala, G.S., Rao, C.R. y Vinod, H.D. (eds): *Handbook of Statistics*, vol 11, 1993, Elsevier Science Publisher.

BROCK, W.A. y BAEK, E.G. (1991): «Some theory of statistical inference for nonlinear science». *Review of Economic Studies*, 58, 697-716

BROCK, W.A. y DECHERT, W.D.(1991):«Nonlinear Dynamical Systems: Instability and Chaos in Economics». En Hildenbrand, W. y Sonnenschein, H. (eds.): Handbook of Mathematical Economics, vol. 4, North Holland, Amsterdam.

BROCK, W. A. ; HSIEH, D. y LEBARON, B. (1991): *Nonlinear Dynamics, Chaos and Instability. Statistical Theory and Economic Evidence*. MIT Press, Cmabridge.

BROCK, W.A; DECHERT, W.D. y SCHEINKMAM, J.A., LEBARON, B. (1996): «A test for independence based on the correlation dimension». *Econometric Review*, 15(3), pp 197-235.

BROCK, W.A. y de LIMA, P.J.F. (1996): «Nonlinear Time Series, Complexity theory and Finance».en Maddala, G.S. y Rao, C.R.: Handbook of statistics 14: Statistical methods in finanace. North-Holland, Amsterdam, pp. 317-361.

BROCK, W.A. y HOMMES, C.H. (1997): *Models of complexity in Economics and Finance*. SSRI working Paper, no. 9706. Social Systems Research Institute, University of Wiscoconsin-Madison.

BROWN, C. (1995):*Chaos and Catastrophe Theories*. Sage University Papers series on Quantitative Applications in the Social Sciencies, 07-107. Thousand Oaks, California:Sage.

BUCHER, J.R. (1997): «Search for Low-Dimensional Chaos in Observational Data» *CNLS, Nonlinear Science xxx e-Print Archives, julio, chao-dyn/9707012*

BULLARD, J. y BUTLER, A.(1993): «Nonlinearity and Chaos in Economic Models: Implications for Policy Decisions». *Economic Journal*, 103(419), pp. 849-867.

CABO, G. (1997):«Integración de Contabilidad Nacional anual e indicadores: metodologías de trimestralización y una alternativa». *Documento de Trabajo no. 9709, junio 1997, Instituto Complutense de Análisis Económico*. Universidad Complutense.

CARRERA,C. y MORÁN, M. (1993): «General Dynamics in Overlapping Generations Models». Documento de Trabajo no. 9311 Instituto Complutense de Análisis Económico. Universidad Complutense de Madrid.

CARRERAS, A. (coord.) (1989): *Estadísticas Históricas de España: siglos XIX-XX*. Fundación Banco Exterior, colección investigaciones, Madrid.

CASS, D.(1965): «Optimom Growth in al Aggregative Model of Capital Accumulation». *Review of Economic Studies*, 32, pp. 233-240.

CHEN, P. (1993): «Searching for Chaos: A challenge to Econometric Practice and Nonlinear Tests», en Day, R.H. y Chen, P. (eds): Nonlinear dynamics,...., pp.217-253.

CHEN, P. (1996): «Trends, shocks, persistent cycles in evolving economy: Business-cycle measurement in time-frequency representation» en Barnett, W.A.; Kirman, A.P. y Salmon, M. (eds.) *Nonlinear Dynamics and Economics*. Cambridge University Press Cambridge., pp. 307-331.

CHENG, L.K. y DINOPOULOS, E.(1992):«Schumpeterian Growth and International Business Cycles», American Economic Review, Papers and Proceedings 82, 409-414.

CHIANG, A.C. (1992): *Elements of Dynamic Optimization*. McGraw-Hill, Nueva York.

CHIARELLA, Carl (1990): *The Elements of a Nonlinear Theory of Economic Dynamics.*. Springer-Verlag.

COHEN, A. y PROCACCIA, I. (1984):«On computing the Kolmogorov entropy from the time signal of dissipative and conservative dynamical systems». Physical Review A, vol. 31, pp.1872

COMMON, M.(1996): Environmental & Resource Economics. An introduction. Longman, Harlow

DANA, R. y MALGRANGE, P.(1984), «The Dynamics of a Discrete Version of a Growth Cycle Model», en Ancot, J.(ed), *Analyzing the Structure of Econometric Models*, The Hague, 1984.

DAY, R.H.(1982):«Irregular Growth Cycles». The American Economic Review, vol 72, no 3, pp. 406-414

DAY, R.H. (1983):«The emergence of chaos from classical Economic Growth». The Quarterly Journal of Economics, 54, pp. 201-213.

DAY, R.H. (1992): «Complex Economic Dynamics: Obvious in History, Generic in Theory, Elusive in Data». *Journal of Applied Econometrics*; 7(0), Suppl. Dec. 1992, pages S9-S23.

DAY, R.H. (1993):«Nonlinear Dynamics and Evolutionary Economics», en Day, R.H. y Chen, P. (eds): *Nonlinear dynamics and evolutionary economics*. Oxford University Press. Oxford, pp. 18-41.

DAY, R. H. (1994): *Complex Economics Dynamics.Volume I: An Introduction to Dynamical Systems and Market Mechanisms*.. The MIT Press, Cambridge.

DAY, R.H. (1999): *Complex Economic Dynamics Volume II: An Introduction to Macroeconomic Dynamics*. MITPress, Cambridge.

DAY, R.H., y SHAFER, W.(1985): «Keynesian Chaos» en *Journal of Macroeconomics*, 7, 1985, pp. 277-295.

DAY, R.H y WALTER, J.L. (1988):«Economic growth in the very long run: on multiple-phase interaction of population, technology and social infraestructure» en Barnett, W.A.;Gewekw, J. y Shell, K. (eds.): *Economic Complexity: Chaos, Bubbles and Nonlinearity*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 253-289.

DAY, R.H. y PIANIGIANI, G. (1991):«Statistical dynamics and economics». Journal of Economic Behavior and Organization 16, pp.37-83.

DAY, R.H. y CHEN, P. (eds)(1993): *Nonlinear dynamics and evolutionary economics*. Oxford University Press. Oxford

DECHERT, W. (1984): «Does optimal growth produce chaos? A theorem on monotonicity» Zeitschrift für Nationalökonomie, vol. 44, pp. 57-61.

DECHERT, W.D. (ed.)(1996): *Chaos theory in economics. Methods, models and evidence*. Elgar Reference Collection. International Library of Critical Writings in Economics, no. 66. Cheltenham, U.K.: Elgar.

DECHERT, W.D., SPROTT, J.C. y ALBERS, D.J. (1999): «On the probability of chaos in large dynamical systems: A Monte Carlo study». Jouernal of Economic Dynamics & Control, no. 23, pp. 1197-1206.

DECOSTER, G.P. y MITCHELL, D.W.(1991):«Nonlinear Monetary Dynamics». Journal of Business Economic Statistics, vol. 9, pp. 455-462.

DENECKERE, R. y PELIKAN, S.(1986):«Competitive Chaos», *Journal of Economic Theory*, 40, pp. 13-25

DEVANEY, R.L. (1989): *An Introduction to chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley Publishing Company. Second Edition

DIAMOND, P.A. (1965): «National Debt in a Neoclassical Growth Model». *American Economic Review*, 55, 5, pp. 1126-1150.

DICKEY, D.A. y FULLER, W.(1979): «Distribution of the estimators for Autoregressive Time Series with a Unit Root». Journal of American Statistical Association, 74, pp.427-431.

DICKEY, D.A. y FULLER, W.(1981): «Likelihood Ratio Statistics for Autoregressive Time Series with a Unit Root». Econometrica, 49, pp. 1057-1072.

DOLADO, JJ, SEBASTIÁN, M. y VALLÉS, J. (1993): «Cyclical patterns of the sapnis economy». Investigaciones Económicas, vol. XVII, no. 3, pp. 445-473.

DOMAR, E.D (1946): «Capital expansion, rate of growth and employment». *Econometrica*, 14, pp. 137-147.

DOMAR, E.D. (1947): «Expansion and Employment». *American Economic Review*, 37, pp. 34-35.

DORE, M.H.I.(1993): *The macroeconomic of business cycles*. Blackwell, Oxford.

ECKMANN, J.P. and D. RUELLE (1985): «Ergodic theory of chaos and strange attractors». *Reviews of Modern Physics*, Vol. 57,no. 3, Part I, July 1985, pp. 617-656

ECKMANN, J.P.; OLIFFSON, S.; RUELLE, D. y CILIBERTO, S. (1986):«Liapunov exponents from time series». Physical Review A, vol. 34, no. 6, pp.4971-4979.

EDWARDS, Ch y PENNEY, D.E.(1986):*Ecuaciones diferenciales elementales con aplicaciones*. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., Méjico.

ELLNER, S ; NYCHKA, D.W. and GALLANT, A.R. (1992):«LENNS, a program to estimate the dominant Lyapunov exponent of noisy nonlinear systems from time series data». *Institute of Statistics Mimeo Series # 2235 (BMA series #39)*, Statistics Department, North Carolina State University.

ENGLE, R.F (1982):«Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflations». *Econometrica*, 50, pp. 987-1008.

ESCOHOTADO, A. (1999): *Caos y Orden*. Espasa Calpe, Madrid

FEENY, B.F. y LIANG, J.W. (1997):« Phase-Space Reconstructions and Stick-Slip», Nonlinear Dynamics, 13, pp. 39-57.

FERNÁNDEZ DÍAZ, A.(1994): *La economía de la complejidad. Economía dinámica caótica*. McGraw-Hill,, Madrid.

FERNÁNDEZ DÍAZ, A.(1995a): *Determinismo y complejidad en la ciencia económica*. Departamento de Política Económica, mimeografiado, Universidad Complutense de Madrid.

FERNÁNDEZ DÍAZ, A. (1995b):«Ciclos endógenos, caos y crecimiento económico», en Fernández Díaz, A. (coord.): *Crecimiento Económico y Empleo*.Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.

FERNÁNDEZ DÍAZ, A.(2000): *Dinámica Caótica en Economía, Teoría y Aplicaciones*. McGraw-Hill, Madrid.

FERNÁNDEZ DÍAZ, A.; ALONSO GONZÁLEZ, A. y GRAU CARLES, P. (1994):«Caos y mercado de capitales: Una introducción». *Cuadernos de economía aplicada*, Centro de Estudios Universitarios Ramón Areces, Madrid.

FERNÁNDEZ DÍAZ, A. y GALINDO, M.A. (1995): *Política de Desarrollo y de Asignación de los Recursos*. Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

FERNÁNDEZ DÍAZ, A.; PAREJO GÁMIR, J.A. y RODRÍGUEZ SÁIZ, L. (1999): *Política Económica*. McGraw-Hill, Madrid.

FERNÁNDEZ DÍAZ, A. y ESCOT, L. (1999): «Ciclo y Crecimiento Económico: una reconsideración», en Fernández Díaz, A (dir.): *Fundamentos y papel actual de la política económica*, McGraw-Hill, Madrid, pp.171-235.

FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, F. (1995): *El problema de la Predicción en Series Temporales: Aplicaciones del Caos Determinista*. Tesis Doctoral, Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, F. y MARTÍN GONZÁLEZ, J. (1995): «Distinción entre caos y azar en series ruidosas mediante predicciones locales baricéntricas». Estadística española, vol. 37, no. 139, pp. 287-304

FOULQUIÉ, P. (1966): *Diccionario del lenguaje filosófico*. Editorial Labor, Barcelona.

FRAILE, V. (1991): *Ecuaciones Diferenciales. Métodos de Integración y Cálculo Numérico*. Segunda Edición, Tebar Flores, Madrid.

FRANK, M.Z. y STENGOS, T. (1988a):«Some evidence concernig macroeconomic chaos». *Journal of Monetary Economics*, vol. 22 , pp 423, 438..

FRANK, M.Z. y STENGOS, T.(1988b):«Chaotic Dynamics in Economic Time.Series». *Journal of Economic Surveys*, vol. 2., no. 2, pp 103-133.

FRANK, M.; GENCAY, R. y STENGOS, T. (1988) :«International Chaos?». *European Economic Review*, 32, pp. 1569- 1584.

FRANSES, P.H. (1990): «Testing for Seasonal Unit Roots in Monthly Data», *Econometric Institute Report no. 9032A*, Erasmus University, Rotterdam.

FRASER, M.A. y SWINNEY, H. (1986): «Independent coordinates for strange attractors from mutual information», *Physical Review* A, 33, pp. 1134-1140.

FRISCH, R. (1933): «Propagation and Impulse Problems in Dynamic Economics» en Economic Essays in Honor of Gustav Cassel. Allen y Unwin, Londres, pp. 171-205.

GALINDO, M.A. (1995): *Los bloques Económicos. Una guía básica de la economía mundial*. Esic Editorial, Madrid.

GALINDO, M.A. y MALGESINI, G. (1994): *Crecimiento Económico. Principales teorías desde Keynes*. McGraw-Hill, Madrid

GALINDO, M.A. y ESCOT, L (1998): «Los efectos del Capital Público en el crecimiento económico» *Revista de Hacienda Pública Española,* no. 144, 1/1998, pp. 47-61.

GANDOLFO, G (1997): *Economic Dynamics*. Study edition, Springer Verlag, Berlín.

GENCAY, R. and W. D. DECHERT (1992): «An algorithm for the n Lyapunov exponents of an n-dimensional unknown dynamical system», *Physica D*, 59, 142-157.

GENCAY, R. and W. D. DECHERT (1993): «Lyapunov exponents as a nonparametric diagnostic for stability analysis», en Pesaran y Potter (eds.) Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics, John Wiley & Sons, pp. 33-52 *Physica D*, 59, 142-157.

GHATAK, S.(1995):*Introduction to Development Economics*. 3ª edición, Routledge, Londres.

GILMORE, C.G. (1993):«A new test for chaos». Journal os Economic Behavior and Organization, vol. 22, pp. 209-237.

GLEICK, J. (1994): *Caos. La Creación de una ciencia*. Seix Barral, Barcelona.

GLOSTEN, L. R.; JAGANATHAN, R. y RUNKLE, D. (1993):«Relationship between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks». *Journal of Finance*, 48, pp. 1779-1801.

GONZÁLEZ VEIGA, M.C (1994).:*Teoría del Caos y Mercados Financieros*. Tesis Doctoral, Universidad de Oviedo

GONZÁLEZ VEIGA, M.C. (1995):«La Teoría del Caos. Nuevas Perspectivas en la modelización económica». *Documento de Trabajo 88/95*, Facultad de CC.EE. y EE. Universidad de Oviedo.

GOODWIN, R.M. (1951):«The non-linear accelerator and the persistence of business cycles», *Econometrica*, 19, , pp 1-17.

GOODWIN, R.M. (1955):«A model of cyclical growth» en Erik Lundberg (ed.) The Business Cycle in the Post-War World» Macmillan, londres.

GOODWIN, R.M. (1982): *Essays in Economic Dynamics*. Macmillan, London

GOODWIN, R.M. (1990): *Chaotic Economic Dynamics*. Clarendom Press, Oxford.

GOODWIN, R.M. (1992): *Chaotic Economic Dynamics*. Clarendom Press, Oxford.

GOODWIN, R.M. (1995):«La estabilización mediante un parámetro de control dinámico» en Fernández Díaz, A (coord.) *Crecimiento Económico y Empleo*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madird. pp.29-37

GRANDMONT, J.M. (1985): «On Endogenous Business Cycles», en *Econometrica*, 53, 1985, pp. 1071-1100.

GRANDMONT, J.M. (ed)(1987): *Nonlinear Economic Dynamic*. Academic Press, Nueva York

GRANGER, C.W.J. y TERÄSVIRTA, T. (1992): *Modelling Nonlinear Economic Relationships.*. Oxford Universiyt Press

GRASBERGER, P. y PROCCACIA, I. (1983a): «Measuring the strangeness of strange attractors». *Physica*, 9D, pp.189-208

GRASBERGER, P. y PROCCACIA, I. (1983b): «Estimation of the Kolmogorov entropy form a chaotic signal». *Physical Review A*, vol. 28, no. 4 pp.2591-2593

GRAU, P.(1996): *Economía Dinámica Caótica:Una aplicación al Mercado de capitales Español*. Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid.

GRAU, P.(2000): «Empirical evidence of Long Range Correlations in Stock Returns», *Physica A (en prensa)*

GROSSMAN, G. y HELPMAN, E.(1990):«Comparative Advantage and Long-Run Growth», *American Economic Review*, 80 (4), septiembre, pp 796-815.

GROSSMAN, G. y HELPMAN, E. (1991): *Innovation and Growth in the World Economy*. MIT Press, Cambridge.

GUARDA, P. y SALMON, M. (1996): «Detection of nonlinearity in foreign-exchange data», en Barnett W.A., Kirman, A.P. y Salmon, M. (eds) Nonlinear Dynamics and Economics, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 77-111.

GUZMÁN, M., MARTÍN, M.A.; MORÁN,M. y REYES, M.(1993): *Estructuras Fractales y sus aplicaciones*. Editorial Labor Matemáticas, Barcelona

HALL, N (ed.) (1991): *Exploring Chaos. A guide to the New Science of Disorder*. W.W. Norton & Company

HAMILTON, J.D. (1994): *Time Series Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey

HARROD, R.F.(1939): «An Essay in Dynamic Theory». *Economic Journal*, 49 (Julio) pp. 14-33.

HARROD, R.F (1948): *Towards a Dynamic Economics*. MacMillan.

PESARAN, H.M. y POTTER, S. M. (1993): *Nonlinear dynamics, Chaos and Econometrics.*. John Wiley & Sons

HAUBRICH, J. y LO ,A. W.(1989):« The Sources and Nature of Long-Term Memory in the Business Cycle». *National Bureau of Economic Research Working Paper 2951.*

HERBERT,D., KOPEL M. y FEICHTINGER G. (1997): «Complex solutions of nonconcave dynamic optimization models» Economic Theory, 9, pp. 427-439.

HICKS, J.R. (1950): *A contribution to the Theory of the Trade Cycle*, Oxford, 1950.

HINICH, M.J. (1982):«Testing for Gaussianity and linearity of a stationary time series». Journal of time series analysis, vol. 3 no. 3, pp-169-176.

HODRICK, R.J. y PRESCOTT, E.C. (1981):«Post-war US business cycles: an empirical investigation». *Discussion Paper no. 451*, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh

HSIEH, D. A. (1991): «Chaos and nonlinear dynamics: application to financial markets». *Journal of finance*, 46(5), pp.1839-1877

HURST, H.E. (1955): «Methods of using long-term storage in reservoirs». *Procedings of the Institution of Civil Engineers* Part I, pp. 519-577.

HURST, H.E. (1951): «Long-term storage capacity of reservoirs». *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, 116, pp. 770-808.

HYLLEBERG, S.; ENGLE, R.F.; GRANGER, C.W.J. y YOO, B.S. (1990):«Seasonal Integration and Cointegration», *Journal of Econometrics* 44, pp. 215-238.

JADITZ, T., SAYERS, C.L.(1992): «Is Chaos Generic in Economic Data?». *Bureau of Labor Statistics Working Paper no. 234*, September 1992.

JADITZ,T. y SAYERS, C.L.(1996): «Searching for nonlinearity in mean and variance» en Barnett W.A., Kirman, A.P. y Salmon, M. (eds) Nonlinear Dynamics and Economics, Cambridge University Press, Cambridge, pp. 201-218.

JONES, H. (1988): *Introducción a las teorías modernas del crecimiento económico*. Antoni Bosch Editor, Barcelona.

JONES, L.E. y MANUELLI, R.E. (1994):«Teoría del crecimiento endógeno: una introducción». *Cuadernos económicos de ICE*, no. 58, 1994/3, pp. 3-22.

JULLIEN, B.(1988):«Competitive Business Cycles in an Overlapping Generations Economy with Productive Investment». Journal of Economic Theory, 46, pp. 45-65.

JUNGEILGES, J.A. (1996):«Operational characteristics of White's test for neglected nonlinearities». Barnett, W.A.; Kirman, A.P. y Salmon, M. (eds.) *Nonlinear Dynamics and Economics*. Cambridge University Press Cambridge., pp. 219-265.

KALDOR, N.(1940):«A model of the trade cycle», Economic Journal, 50, pp 78-92

KALDOR, N.(1956): «Alternative Theories of distribution». *Review of Economic Studies*, 23, 2 .

KALDOR, N. (1957): «A model of Economic Growth». *Economic Journal*, LXVII 268, Diciembre. Recogido también en Jonh E. King: *Economic Growth in Theory and Practice*, The International Library of Critical Writngs in Economics, 38. Edward Elgar Publishing, 1994.

KALECKI, M. (1977): *Teoría de la dinámica economica*. Fondo de Cultura Económica, Méjico D.F.

KAPLAN, D.T. (1994): Exceptional Events as evidence for Determinism. Physica D, 73, pp.38-48.

KELSEY, D. (1988): *The Economics of Chaos or The Chaos of Economics.*. Oxford University Press.

KENNNEL, M.B.; BROWN, R. y ABARBANEL H.D.I. (1992): «Determining minimum embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction». Physical Review A, 45, pp. 3403-3411.

KOOPMANS, T.C.(1965): «On the Concept of Optimal Economic Growth» en *The Econometric Approach to Development Planning*. North Holland, Amsterdam..

KRUGMAN, P. (1996): *La organización espontánea de la economía(the self-organizing economy)*. Antoni Bosch editor, Barcelona.

KUAN, C.M. y LIU, T. (1995):«Forecasting exchange rates using feedforward and recurrent networks» *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 10, 347-364.

KUAN, C.M., LIU, T. y GENCAY, R. (1997): «NETLE 3.01, Feedforward neural networks and Lyapunov exponents estimation». *Ball State University*.

KUGIUMTZIS, D.; LILLEKJENDLIE, B. y CHRISTOPHERSEN, N (1994):«Chaotic time series Part I: Estimation of invariant properties in state space». University of Oslo, Norway. Nonlinear Science xxx e-Print Archives no. *chao-dyn/9401004 v3*.

KYDLAND, F.E. y PRESCOTT, E.C. (1982):«Time to build and aggregate fluctuations», Econometrica, 50, pp. 1345-1370.

LEBARON(1991): Econometría no lineal del caos: Resultados empíricos. Cuadernos econóicos de ICE, n0. 47, 1991/1, pp.37-62.

LEBARON(1994): Chaos and nonlinear Forecastibility in Economics and Finance. Mimeo Departament of Economics, University of Winconsin-Madison. Madison

LI, T. y YORKE, J.A. (1975) «Period Three Implies Chaos», en *American Mathematical Monthly*, 82, p. 985-992.

LIU,T., GRANGER,C.W.J. y HELLER,W.P.(1992): «Using the Correlation Exponent to Decide whether an Economic Series is Chaotic». *Journal of Applied Econometrics*; 7(0), Suppl. Dec. 1992, pp. S25-39.

LO, A.W. (1991):«Long term memory in stock market prices». *Econometrica*, 59, pp. 1279-1313

LONG, J.B. y PLOSSER, C.I. (1983): «Real business cycles». Journal of Political Economy, 91, pp. 39-69.

LÓPEZ CACHERO, M. (1988): *Fundamentos y Métodos de Estadística*, Pirámide, Madrid.

LORENZ, E.N .(1963): «Deterministic nonperiodic Flows». *Journal of Atmospheric Science*, no.20, pp 130-141.

LORENZ, E.N. (1995): *La esencia del Caos. Un campo del conocimiento que se ha convertido en parte importante del mundo que nos rodea*. Editorial Debate, Madrid.

LORENZ, H.W. (1993): *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion.*. Springer-Verlag.

LUCAS, R.E. (1975):«An equilibrium model of the business cycle» en Lucas, R.E. *Studies in Business Cycle Theory*. Blackwell, Oxford, 1981.

LUCAS, R.E. (1988): «On the Mechanics of Economic Development». *Journal of Monetary Economics*, Julio, 22, 1 pp 3-42 .

LUENBERGER, D.G.(1979): *Introduction to Dynamic Systems. Theory, Models and Applications.* John Wiley and Sons, Nueva York.

MACKINNON, J. (1991):«Critical values for cointegration tests», en Engle, R. y Granger, C.W.J. (editores): *Long-Run Economic Relationships*. Oxford University Press.

MADDALA, G.S. y KIM, I.M. (1998): *Unit Roots, Cointegration, and Structural Change*.Cambridge University Press, Cambridge.

MADDISON, A(1995): *Monitaring the World Economy 1820-1992*. OCDE, París

MAJUMDAR, M., MITRA, T. y NISHIMURA K. (eds) (2000): *Optimization and Chaos*. Springer, Berlin.

MALLIARIS, A.G. y STEIN, J.L.(1999): Methodological issues in asset pricing: Random walk or chaotic dynamics. Journal of Banking & Finance, 23, pp. 1605-1635.

MANDELBROT, B.(1977): *Fractals: Form, Chance, and Dimension*.W. H. Freeman & Co.

MANDELBROT, B.B y VAN NESS, J.W. (1968):«Fractional Brownian motions, fractional noises and applications». *SIAM Review*, vol.10, no.4, pp.422-437.

MANDELBROT, B.B. (1997):*La Geometría Fractal de la Naturaleza*. Metatemas 49, Tusquests Editores, Barcelona (Traducido del original: The Fractal Geometry of Nature, W. H. Freeman & Co. 1977), pp.538-539, 354.

MANKIW, N.G. y ROMER, D (eds.)(1991a):*New Keynesian Economics, volume 1: Imperfect Competition and Sticky Prices*. MIT Press, Cambridge.

MANKIW, N.G. y ROMER, D (eds.)(1991b):*New Keynesian Economics, volume 2: Coordination Failures and Real Rigidities*. MIT Press, Cambridge.

MARAVALL, A. (1983): An application of nonlinear Time series Forecasting», Journal of Business and Economic Statistics, 1 (1), pp. 66-74.

MARTÍN, M.A.; MORÁN, M. y REYES, M (1995):*Iniciación al Caos. Sistemas Dinámicos*. Ed Síntesis, Madrid

MATSUYAMA, K.(1991):«Endogenous Price Fluctuations in an Optimizing model of a Monetary Economy». *Econometrica*, vol. 59, no. 6, pp 1617-1631.

MATSUYAMA, K. (1999): «growing through cycles». *Econometrica*, vol. 67, no.2, pp. 335-347.

MAY, R.M.(1976): «Simple mathematical models with very complicated dynamics». *Nature* 26, pp. 459-467

MCCAFFREY, D.F., ELLNER, S., GALLANT, A.R. y NYCHKA, D.W. (1992): «Estimating the Lyapunov Exponent of a Chaotic System with Nonparametric Regression». *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 87, no. 419, pp. 682-695.

MCNEVIN, B. y NEFTÇI, S. (1992):«Some evidence on the Non-linearity of Economic Time Series: 1890-1981», en Benhabib, J(ed.): *Cycles and Chaos in Economic equilibrium*, prenticeton Univerity Press , pp.429-444.

MEDIO, A. (1992): *ChaoticDynamics. Theory and Applications to Economics.*. Cambridge University Press.

MEDIO, A. y NEGRONI, G. (1996):« Chaotic dynamics in overlapping generations models with production» en Barnett, W.A.; Kirman, A.P. y Salmon, M. (eds.): nonlinear dynamics and economics. Cambridge University Press, Cambbridge, pp.3-44.

MITRA, T. (1998): «On the relationship btween discounitng and complicated behavior in dynamic optimization models». Journal of Economic Behavior & Organization, vol. 33, pp. 421-434.

MIZRACH, B.(1993):«Multivariate nearest-neighbour forecasts of EMS exchange rates». *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Econometrics*, 1993, pp.143-155.

MONTERO LORENZO, J.M. (1996):«El idioma de un nuevo paradigma financiero», *Bolsa de Madrid*, no.42, Marzo, pp. 4-14.

MONTORO PONS, J.D.(1996): *Simulación y Detección de Caos en Series Macroeconómicas*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia

MONTRUCCHIO, L. (1992):«Dynamical Systems that Solve Continuous-Time concave Optimization Problems: Anything Goes», en Benhabib, J (ed): Cycles and Chaos in Economic Equilibrium. Princeton University Press, Princeton, pp. 277-288.

MULLINEUX, A.; DICKINSON, D.G. y PENG, W. (1993): *Business Cycles. Theory and Evidence*, Blacwell, Oxford.

NEFTÇI, S.N (1984): Are economic time series asymetric over the business cycle. Journal of Political Economy, 92, pp. 307-328.

NEFTÇI, S. N. (1986): «Testing Non-Linearity in Business Cycles».en Semmler, Willi (ed): *Competition, Instability and Nonlinear Cycles*. pp 324-340Springer-Verlag

NIETO de ALBA, U. (1998): *Historia del tiempo en economía, predicción, caos y complejidad*. McGraw-Hill, Madrid

NISHIMURA, K. y YANO, M. (1995): «Nonlinear dynamics and chaos in optimal growth: an example». *Econometrica*, vol. 63, no. 4, pp. 981-1001.

NISHIMURA, K. y SORGER, G. (1996): «Optimal Cycles and Chaos: A Survey». Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, Abril, 1(1), pp. 11-28.

NISHIMURA, K. y SORGER, G. (1996):«Optimal cycles and chaos:a survey». Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, abril, 1 (1), pp 11-28.

NOVALES, A. (1988): *Econometría*. McGraw-Hill, Madrid

NOVALES, A. y SEBASTIÁN, C.(1999): *Análisis Macroeconómico II*, Marcial Pons, Madrid.

NYCHKA, D.W.; ELLNER, S.; MCCAFFREY, D. y GALLANT, A.R. (1992): «Finding chaos in noisy systems». Journal of the Royal Statistical Society, serie B, no. 54, pp.399-426.

ØKSENDAL, B. (1998): Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications. Quinta edición, Springer-Verlag, Berlín.

OLMEDA, Y. y PEREZ, J. (1995):«Non-linear Dynamics and Chaos in The Spanish Stock Market».*Investigaciones Económicas*, vol XIX(2), mayo, pp 217-248.

OLMEDA, J.I. (1995): *Modelos no Lineales en Finanzas*. Tesis Doctoral. Universidad de Alcalá

OLMEDO, E., VELASCO, F. y ALBA, J.M. (2000):«Dynamic Study of political-economic cycles» en Ortega, J.A., Gasca, R.M. y Toro, M. (Eds), *Current trends in Quantitative Reasoning and Applications*, ARCA

PAREJO GAMIR, J.A., CALVO BERNARDINO, A. y PAUL GUTIERREZ, J. (1995): *La política económica de reformas estructurales*. Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.

PASINETTI, L.(1978): *Crecimiento económico y distribución de la renta*. Alianza Editorial, Madrid.

PEITGEN, H-O; JÜRGENS, H y SAUPE, D. (1993):*Chaos and Fractals. New Frontiers of Science* . Springer-Verlag, New York, pp. 491-496.

PEÑA, D. (1986): Estadística. Modelos y Métodos. Alianza Universidad Textos, Madrid.

PERAL, I. (1995): Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales. Addison-Wesley/Universidad autónoma de Madrid, Wilmington.

PESARAN, H y POTTER S.M. (eds)(1993) : *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*, John Wiley &Sons, Nueva York.

PETERS, E. E.(1991): *Chaos and Order in the Capital Markets: a New View of Cycles, Prices, and market volatility*. Jonh Wiley & Sons, INC.Nueva York

PETERS, E.E.(1994): *Fractal Market Analysis. Applying Chaos Theory to Investment and Economics*. Jonh Wiley & Sons, INC.

PLAZA, S.(1997): *Los bloques comerciales en la economía mundial*. Editorial Síntesis, Madrid

POHJOLA, M. (1981): «Stable, Cyclic and Chaotic Growth» en *Zeitschrift für Nationaleökonomie*, 41, 1981, pp. 27-28.

POTTER, S.M. (1999):«Nonlinear Time Series Modelling: An introduction». Journal of Economic Surveys, vol. 13, no. 5, pp. 505-528.

PRADOS DE LA ESCOSURA, L(1995): Spain's Gross Domestic Product, 1850-1993: Quantitative Conjetures. Working Papers no. 95-05. Universidad Carlos III de Madrid

PRIGOGINE, I. (1997): *El fin de las certidumbres*. Santillana, S.A. Taurus, Madrid.

PRIGOGINE, I. (1997): *Las leyes del caos*. Crítica, Barcelona.

PUU, T. (1991): *Nonlinear Economic Dynamics*. Springer-Verlag, Berlín.

RAMSEY, F.P. (1928):«A Mathematical Theory of Saving». *Economic Journal*, 38. Pp.543-559. Reimpreso en Stiglitz, J.E. y Uzawa, H. (1969): *Readings in the Modern Theory of Economic Growth*. MIT Press, Cambridge

RAMSEY, J.B. y YUAN, H.J. (1989):«Bias and Error bars in dimension calculations and their evaluation in some simple models». Physics Letters A, vol. 134, no. 5 pp. 287-297

RAMSEY, J.B.; SAYERS, C.L. y ROTHMAN, P. (1990):«The statistical Properties of dimension calculations using small data sets: Some Economic applications». International Economic Review, vol 31, no 4, pp.991-1020.

REBELO, S.(1991): «Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth». *Journal of Political Economy* 99, 3 pp 500-521.

REICHLIN, P.(1986):«Endogenous fluctuations in a two-sector overlapping generations economy». reimpreso en Benhabib,J.,(ed). *Cycles and chaos in economic equilibrium*. Princeton University Press, Princeton, 1992, pp. 158-179.

REISS, J. (1999): *Nonlinear Dynamics Toolbox*, v0.9. Applied Chaos Lab.

ROBINSON, J.(1973): *Ensayos sobre la teoría del crecimiento económico*. Fondo de Cultura Económica, Méjico D.F.

ROMER, P. (1986): «Increasing Returns and Long-Run Growth». *Journal of Political Economy*, 94, Octubre, pp 1002-1037.

ROMER, P. (1990a):«Rendimientos crecientes y nuevos desarrollos en la teoría del crecimiento». *Cuadernos económicos de ICE*, no. 46, 1990/3, pp 279-305

ROMER, P. (1990b): «Endogenous technological change». *Journal of Political Economy*, 98, Octubre,, pp 71-102

ROMER, D.(1996): *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill, Nueva York.

ROSSER, J. B. Jr (1999): «On the Complexities of Complex Economic Dynamics». *Journal of Economic Perspectives*, vol. 13, no.4, pp. 169-192

RÖSSLER, O. (1976): «An equation for continuous chaos». Phys. Lett. A 57:397

ROTHMAN, P. (1996): International evidence of business-cycle nonlinearity. En Barnett et al, pp.333-341

RUELLE, D (1992): *Chaotic Evolution and Strange Attractors. The statistical analysis of time series for deterministic nonlinear systems*. Cambridge University Press, Cambridge.

RUELLE, D (1993): *Azar y Caos*. Alianza Editorial, Madrid.

SABATER, F. (1999): *Las preguntas de la vida*. Ed. Ariel, Barcelona

SALA-I-MARTIN, X. (1994): *Apuntes de crecimiento económico*. Antoni Bosch Editor, Barcelona.

SAMUELSON, P.A.(1939): «Interaction betwenn the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration». *Review of Economic Statistics*, 21, mayo, pp. 75-78

SAMUELSON, P.A.(1958): «An Exact Consumption-Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money». *Journal of Political Economy*, 66, 6 , pp. 467-482.

SANO, M. y SAWADA, Y. (1985):«Measurement of the Lyapunov Spectrum from a Chaotic Time Series». Physical Review Letters, vol. 55, no. 10, pp.1082-1085.

SASAKURA, K. (1995): «Political economic chaos?». Journal of Economic Behavior and Organization, vol. 27, pp. 213-221.

SCHEINKMAN, J.A. (1990): Nonlinearitiea in Economic Dynamics. Economic Journal 100, Suplement, pp 33-48.

SCHEINKMAN, J.A. y LEBARON, B. (1989a):«Nonlinear Dynamics and Stock Returns»: Journal of Business, no.62, pp. 311-338.

SCHEINKAMAN, J.A. y LEBARON, B. (1989b):«Nonlinear Dynamics and GNP data». En Barnett, W., Geweke, J. y Schell, K. (eds.) *Chaos, Complexity, Sunspots and Bubbles*, Cambridge University Press..

SCHUMPETER, J.A. (1927):«The explanation of the business cycle», Economica, 1927.

SCHUMPETER, J.A.(1976): *Teoría del desenvolvimiento económico. Una investigación sobre ganancias, capital, crédito, interés y ciclo económico*. Fondo de Cultura Económica, Méjico D.F. (primera edición en 1912)

SEBASTIÁN, C. (1997): *Las fluctuaciones de la economía española (1971-1996). Un ensayo en la teoría de los ciclos*. Marcial Pons, Madrid

SEGERSTROM, P.S., ANANT, T.C.A. y DINOPOULOS, E.(1990):«A Schumpeterian Model of the Product Life Cycles», *America Economic Review*, 80, 1077-1091.

SERLETIS, A. (1996):« Is There Chaos in Economic Time Series?». Canadian Journal of Economics, vol 29, no. 0, Special. Issue Part 1, April 1996, pp. S210-12.

SHONE, R. (1997): *Economic Dynamics. Phase diagrams and their economic application*. Cambridge University Press, Cambridge.

SLUTSKY, E. (1937): «The Summation of Random Causes as the Source of Ciclic Processes». *Econometrica*, 5, pp. 105-146.

SMALE, S. (1967): «Differentiable Dynamical Systems». *Bulletin of the American Mathematical Society*, 73, pp 747-817.

SMITH, L.A. (1988):«Intrinsic limits on dimension calculations». Physics Letters A, vol. 133, pp. 283-288.

SMITH, R.L. (1992a): «Estimating dimensión in noisy chaotic time series». *Journal of Royal Statistical Society* B, 54,329-352.

SMITH, R.L. (1992b): «Optimal estimation of fractal dimensión», en M. Casdagli y S. Eubank (eds.): *Nonlinear Modeling and Forecasting.SFI Studies in the Science of complexity*, Prooceding, Vol.12. Addison - Wesley

SOLÉ, R.V. y MANRUBIA, S.C. (1996): *Orden y Caos en sistemas complejos*. Edicions Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona

SOLOW, R.M.(1956) : «A Contribution to the Theory of Economic Growth». *Quarterly Journal of Economics*, 70, 1 pp 65-94.

SOLOW, R.M. (1957):«Technical Change and the Aggregate Production Funtion». *Review of Economics and Statistics*, vol. 39, Agosto, pp. 312-320

SORGER, G. (1990): «On the optimality of Given Feedback Controls». Journal of Optimization Theory and Applications, no. 65, pp.321-329.

SORGER, G (1992):« On the minimum rate of impatience for complicated optimal growth paths». Journal of Economic Theory, 12, pp.11-30.

SORGER, G. (1995):«Chaotic Ramsey Equilibrium». *International Journal of Bifurcations and Chaos*, vol, 5, pp.373380

SOSVILLA, S., ANDRADA, J. y FERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, F(1999):«Rendimiento del análisis técnico en mercados cambiarios e intervención de los bancos centrales». Información Comercial Española, no. 782, noviembre-diciembre, pp. 109-116.

STEWART, I.(1991): *¿Juega Dios a los dados?. La nueva matemática del caos*. Editorial Crítica, Barcelona.

STOKEY, N.(1991) : «Human Capital, Product Quality, and Growth». *Quarterly Journal of Economics*, Mayo, 106 pp 587-615.

SURIÑACH, J, ARTÍS, M., LÓPEZ, E. y SANSÓ, A. (1995): *Análisis económico regional. Nociones básicas de la teoría de la cointegración.*. Antoni Bosch Editor, Barcelona.

SWAN, T.W. (1956): «Economic Growth and Capital Acumulation». *Economic Record*, 32 pp 334-361.

TAKENS, F. (1981): Detecting strange attractors in trubulence. En Raud, D.A. y Young, L.S. (Eds.) *Lectures Notes in Mathematics* no. 898. Springer-Verlag, Nueva York.

TAKENS, F.(1985): Distinguishing deterministic and random systems. En Borenblatt, G., Iooss, G. y Joseph, D. (Eds.) Nonlinear Dynamics and Trubulence. Pitman, Borton, pp. 315-333.

TAYLOR, J.B. (1993): *Macroeconomic Policy in a World Economy from Econometric Design to Practical Operation*. W. Norton, Nueva York

TERÄSVIRTA, T.(1994): «Contrastes de linealidad y modelización de series temporales no lineales». *Cuadernos Económicos de ICE*, no 56, 1994/1

TERÄSVIRTA,T y ANDERSON, H..M..(1992): Characterizing Nonlinearities in Business Cycles Using Smooth Transition Autoregressive Models. Journal-of-Applied-Econometrics; 7(0), Suppl. Dec. 1992, pp S119-36.

THIRLWALL, A.P.(1994):*Growth and Development with special reference to developing economies*. 5ª edición MacMillan, Londres.

TONG, H. (1990): *Non-linear Time Series: A dynamical Approach*. Oxford University Press, Oxford.

UZAWA, H. (1962).«On a two-sector model of economic growth», Review of Economic Studies, 1962, pp. 40-47

UZAWA, H. (1963).«On a two-sector model of economic growth II», Review of Economic Studies, 1963, pp.105-118

WALDROP, M.M (1992): *Complexity, the emerging science at the edge of order and chaos*. Simon & Schuster, Nueva York.

WEGNER, T y Tyler, B. (1995): *El mundo de los fractales*. Anaya Multimedia, Madrid

WHITE, H. (1989): «An additional hidden unit test for neglected nonlinearity in multilayer feedforward networks», Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks, Washington DC, Vol.2 IEEE Press, Nueva York, pp. 451-455

WOLF, A.;SWIFT, J.B.; SWINNEY, H.L. and VASTANO, J.A. (1985): «Determining Lyapunov Exponents From a Time Series». *Physica D*, 16, pp. 285-317.

WOODFORD, M. (1986):«Stationary Sunspot equilibria in a Finance Constrained Economy», Journal os Economic Theory, no. 40, pp. 128-137.

WOODFORD, M. (1989):« Imperfect Financial Intermediation and Complex Dynamics» en Barnett, W.A.;Gewekw, J. y Shell, K. (eds.): *Economic Complexity: Chaos, Bubbles and Nonlinearity*. Cambridge University Press, Cambridge, pp. 309-334.

YOUNG, A.(1991): «Learning by Doing and The Dynamic Effects of International Trade». *Quarterly Journal of Economics*, 106, 2 pp 369-405.

ZHANG, J. (1999):«Environmental sustainability, nonlinear dynamics and chaos». Economic Theory, 14, pp. 489-500.

ZILL, D.G.(1988):*Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones*. 2ª edición. Grupo editorial Iberoamericana,Méjico.