Problemas propuestos en el XXXIII Concurso

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

En la siguiente posible suma cada letra representa un dígito (0, 1, 2,…, 9), letras diferentes representan dígitos diferentes y ninguno de las tres números empiezan por cero. Encuéntrala o demuestra que no existe tal suma.

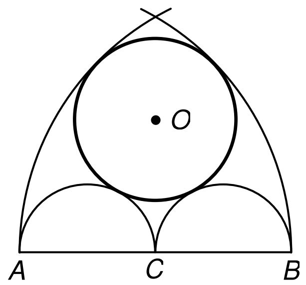
$$\begin{array}{r} \mathrm{S\ E\ V\ E\ N} \\ +\quad \underline{\mathrm{O\ N\ E}} \\ \mathrm{E\ I\ G\ H\ T} \end{array}$$

Problema 2 *(7 puntos)*

En la figura siguiente puedes observar:

- Dos semicircunferencias iguales de diámetros $AC = CB = 10$ cm.
- Una circunferencia de centro O tangente a las dos semicircunferencias anteriores y también tangente a los arcos de centros A y B y radio AB.

Calcula el radio de esta circunferencia de centro O.



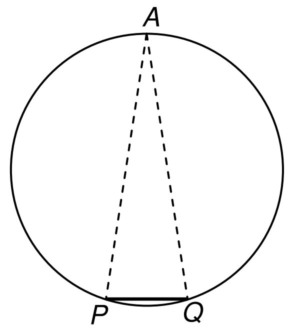
Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A *(1 punto)*

Si P, U, I, G son enteros positivos tales que $P^2 + U^2 = 20$ y $I^2 + G^2 = 10$, obtén el producto $P \cdot U \cdot I \cdot G$.

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Inscribimos en una circunferencia un polígono regular de n lados. En la figura siguiente observamos que P y Q son vértices consecutivos del polígono y A es otro vértice de dicho polígono tal que $A\hat{P}Q = A\hat{Q}P = T \cdot P\hat{A}Q$. Calcula el valor de n.



Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior.
Para sumar fracciones no siempre es la mejor forma escribirlos con el mismo denominador. Si descompones hábilmente cada una de las fracciones podrás obtener de una manera fácil la suma siguiente.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{T(T+1)}$$

Problema 1B *(1 punto)*

Calcula el mayor divisor primo de $15! - 13!$ (Nota. $6!$ es el producto $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$)

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Si el lado del octógono regular $ABCDEFGH$ es $\frac{T}{19}$, obtén el valor de $AC^2 - AD$.

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y $m = 300\cdot T$. Calcula el número de dos cifras (AB) tal que $3\cdot(BA) + (AB) = m$.

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea $\frac{a}{c}$, irreducible, la respuesta del problema **3A,** b la respuesta del problema **3B** y m la media aritmética de los enteros positivos a, b y c.

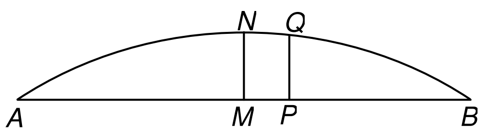
Sea S una lista de enteros positivos, no necesariamente distintos, entre los que está el número m. La media aritmética de los números de S es 39. Sin embargo, si quitamos de la lista el número m, la media aritmética de los restantes números de la lista es 37. ¿Cuál es el mayor número que puede aparecer en S?

NIVEL II (4º de E.S.O.)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

En la figura siguiente se observa un segmento circular en el que M es el punto medio de la cuerda AB. Los segmentos MN y PQ son perpendiculares a la cuerda. Si $MN = 10$, $PQ = 9$ y $PB = 27$ determina la longitud de la cuerda AB.



Problema 2 *(7 puntos)*

En cierta competición matemática por equipos, de tres componentes cada equipo, se exige que los equipos sean mixtos. Con los alumnos de 4º de ESO del "Club de Matemáticas" de mi instituto se pueden formar 25 equipos diferentes con esas características. ¿Cuántos estudiantes de 4º de ESO hay en el "Club de Matemáticas"?

Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

Lanzamos al aire una moneda equilibrada n veces. Calcula el menor valor de n para el que la probabilidad de que la moneda muestre todas las veces lo mismo, es decir, siempre cara o siempre cruz, sea menor del 10 %.

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el menor entero positivo n para que en el dominio de la función $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + n}$ haya al menos T enteros positivos.

Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el menor número real positivo x tal que $\frac{[x]}{x-[x]} = T$. (Recuerda: $[x]$ representa la parte entera de x)

Problema 1B *(1 punto)*

Los vértices del pentágono $ABCDE$ son los puntos $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(6, 6)$, $D(2, 6)$ y $E(0, 2)$. Calcula su área.

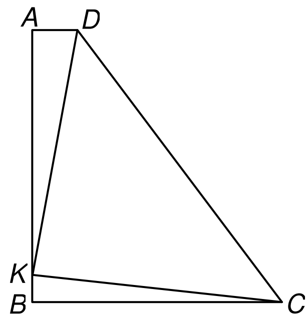
Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. La longitud de la diagonal de un rectángulo cuyas dimensiones son las soluciones de la ecuación $x^2 - 3Tx + T^2 = 0$

se puede expresar como $a\sqrt{b}$ en donde a y b son enteros positivos. Calcula el mayor valor posible de a.

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En el trapecio rectángulo $ABCD$ de la figura siguiente, el lado DC mide T cm y las bases $AD = 3$ cm y $BC = 15$ cm. Si $DK = CK$, ¿cuál es la longitud, en cm, del segmento AK?



Problema 4 *(5 puntos)*

Sean $\frac{a_1}{a_2}$ y $\frac{b_1}{b_2}$ (fracciones irreducibles) las respuestas correspondientes a los problemas **3A** y **3B**, respectivamente. En una fiesta todos se saludan entre sí una vez, excepto Pedro que se tuvo que ir antes de que llegaran algunos y no pudo saludar a todos. Si hubo en total $(a_1 + a_2 + b_1 + b_2)$ saludos, calcula el número de personas que saludaron a Pedro.

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1

Se consideran los vectores $\vec{u} = [\overrightarrow{AB}], \vec{v} = [\overrightarrow{AH}]$ y $\vec{w} = [\overrightarrow{AD}]$ determinados por cuatro de los vértices del octógono regular $ABCDEFGH$. Si escribimos el vector $\vec{w}$ como $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ para un único par (a, b) de números reales, ¿cuál es ese par?

Problema 2

Para cada entero positivo k se considera la progresión aritmética infinita S_k cuyo primer término es k y su diferencia k^2. Por ejemplo S_3 = {3, 12, 21, 30,…}. Calcula la suma de todos los k tales que 306 es un elemento de S_k.

Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

Si φ es un ángulo tal que $0º < \varphi < 180º$ y $sen16º \cdot cos286º - cos16º \cdot sen(-106º) = sen\ \varphi$, ¿cuál es el módulo del número complejo $cos\ \varphi + \mathrm{i}\, sen\ \varphi$?

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Sean x e y números reales tales que $|x+y-T|+|x-y+11|=0$. Calcula el valor de y.

Problema 3A *(2 puntos)*

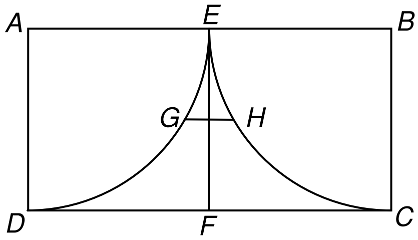
Sea T la respuesta del problema anterior. La gráfica de la función $y = f(x)$ es simétrica tanto respecto de la recta $x = 4$ como respecto del punto $(8, T)$. Si $(3, 7)$ y $(11, k)$ son puntos de la gráfica, calcula el valor de k.

Problema 1B *(1 punto)*

Dos círculos concéntricos verifican que el área del pequeño es igual al área de la corona circular que determinan. Si el radio del círculo pequeño es 1 cm, calcula la longitud de un segmento tangente al círculo pequeño cuyos extremos son puntos de la circunferencia que delimita al círculo mayor.

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En el rectángulo $ABCD$ de la figura siguiente, $AD = T$, E y F son los puntos medios de los lados AB y DC respectivamente, los arcos $\overset{\frown}{DGE}$ y $\overset{\frown}{CHE}$ tienen por centro los vértices A y B respectivamente y G y H son puntos de la mediatriz del segmento EF. Si la longitud del segmento *GH* la escribimos como $p - q\sqrt{3}$, calcula el par de enteros positivos (*p, q*).



Problema 3B *(2 puntos)*

Sea $T = (p, q)$ la respuesta del problema anterior y $r = \dfrac{p}{2q}$. Calcula la distancia más corta entre un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y un punto de la recta $3x + 4y = 12$.

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema **3A** y b la respuesta del problema **3B** y $T = a \cdot b$. Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots$ una progresión aritmética y $b_1, b_2, b_3, \ldots$ una progresión geométrica. Consideramos la sucesión $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \ldots$ donde cada $c_n = a_n + b_n$. Si $c_1 = T - 6$, $c_2 = T - 3$, $c_3 = 2T + 1$ y $c_4 = T - 5$. Calcula c_5.