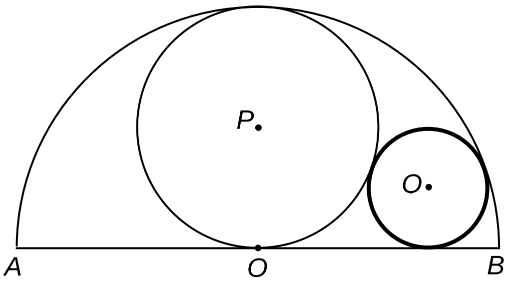
XXXII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 14 de junio de 2014

<u>NIVEL I</u> (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

En la figura adjunta puedes ver una semicircunferencia de centro O y diámetro AB, una circunferencia de centro P tangente a ella y a su diámetro AB, y una circunferencia de centro Q tangente a AB, a la semicircunferencia y a la circunferencia de centro P.
Si $OB = 2$, calcula el radio de la circunferencia de centro Q.



Problema 2.

¿Cuántos números de diez cifras, que terminan en 2014, son múltiplos de 2014?

XXXII CONCURSO “PUIG ADAM” DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.

Madrid, 14 de junio de 2014

NIVEL I (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

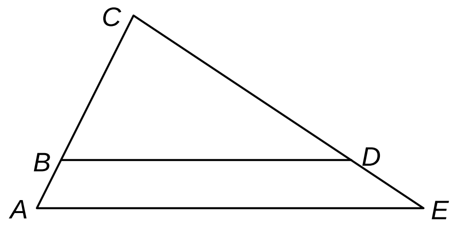
Problema 1A. (1 punto)

Escribe el número $\dfrac{3\sqrt{22}\sqrt{23}\sqrt{24}\sqrt{25}}{\sqrt{44}\sqrt{45}\sqrt{46}}$ como $\sqrt{b}$ en donde b es un número entero.

Problema 2A. (1,5 puntos)

Sea T el número b del problema anterior.

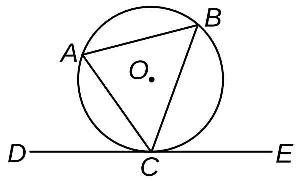
En el triángulo *ACE* de la figura, el segmento *BD* es paralelo al lado *AE*. Si $CD = T$, $DE = 10$ y el área del triángulo *ACE* es 320, calcula el área del trapecio *ABDE*.



Problema 3A. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior.

En la figura adjunta, la recta *DE* es tangente a la circunferencia de centro O en el punto C, las cuerdas *AB* y *AC* tienen igual longitud y el ángulo $B\hat{C}E = \left(\dfrac{T}{2}\right)^{o}$. Calcula el valor del ángulo $A\hat{C}B$.



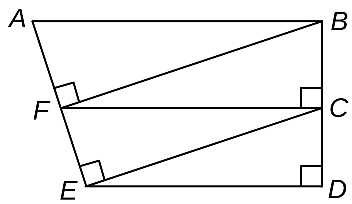
Problema 1B. (1 punto)

Calcula el valor de $\dfrac{(101^4-4)(101^4-1)}{(101^2-2)(101^2-1)} - \dfrac{(101^4-4)(101^4-1)}{(101^2-2)(101^2+1)}$.

Problema 2B. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior y n la suma de las cifras de T.

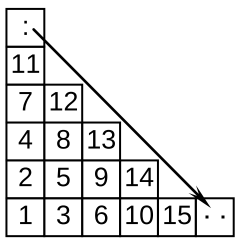
El trapecio *ABDE* está dividido en cuatro triángulos rectángulos como se muestra en la figura. Si $CD = \dfrac{n}{2}$ y $DE = 2CD$, calcula el área de dicho trapecio dando el resultado en forma de fracción irreducible.



Problema 3B. (2 puntos)

Sea $T = \dfrac{a}{b}$, irreducible, la respuesta del problema anterior y $k = a + b$.

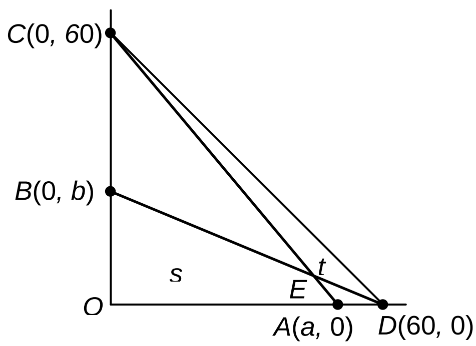
Ordenamos por diagonales los números naturales en una cuadrícula, como se muestra en la figura. Si tomamos como eje de abscisas la fila de abajo (1, 3, 6, 10,…) y como eje de ordenadas la columna de la izquierda (1, 2, 4, 7,…) diremos que, por ejemplo, las coordenadas del número 9 son (2, 1), las del 5 (1, 1) y las del número 16 serán (0, 5). ¿Cuáles serán las coordenadas del número k?



Problema 4. (5 puntos)

Sea a la respuesta del problema **3A** y b la suma de las coordenadas de la respuesta del problema **3B**.

Si llamamos “t” al área del triángulo *CED* y “s” al área del cuadrilátero *OAEB*, calcula $s - t$.



XXXII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 14 de junio de 2014

NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

Un triángulo isósceles tiene una mediana de 15 cm y una altura de 24 cm. Calcula el área de cada uno de los dos triángulos determinados con estos datos.

Problema 2.

Las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, con $b \neq c$, son los números reales r y s, y las soluciones de la ecuación $x^2 + cx + b = 0$ son los números reales r y t. Calcula $s + t$.

XXXII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.

Madrid, 14 de junio de 2014

<u>NIVEL II</u> (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)

El área de un octógono regular es $2+2\sqrt{2}$. Calcula la longitud del lado de dicho octógono.

Problema 2A. (1,5 puntos)

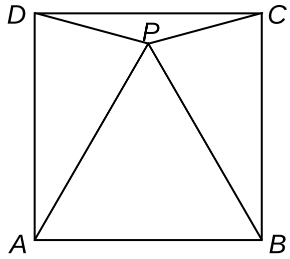
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el número de raíces reales de la ecuación $x^3+(T+1)x^2+(T+1)x+1=0$.

Problema 3A. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula $\lg_3 2\cdot\lg_8 27+\lg_3 2\cdot\lg_4 5\cdot\lg_{25} T$.

Problema 1B. (1 punto)

El número positivo x expresa la medida, en grados sexagesimales, de un ángulo. Calcula el menor número x que verifica $sen x=\cos(x^2)$.



Problema 2B. (1,5 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura se observa un cuadrado $ABCD$ y un triángulo equilátero ABP. Si el área del triángulo PBC es T, calcula la suma de las áreas de los triángulos ABP y PCD.

Problema 3B. (2 puntos)

Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el número de puntos reticulares que hay en el interior del triángulo limitado por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = T$.

Notas. 1.- Se llaman puntos reticulares a los que tienen sus coordenadas enteras.

2.- Los puntos interiores de un triángulo no pertenecen a ninguno de sus lados.

Problema 4. (5 puntos)

Sea a la respuesta del problema **3A** y s la suma de los dígitos de la respuesta del **3B**.

Desde un punto A de un río comienza a moverse una lancha a favor de la corriente con velocidad respecto de la orilla $v=\dfrac{s}{a}$ km/h. En el mismo instante un bote que se encuentra en un punto B, aguas abajo, comienza a moverse, también con velocidad constante, al encuentro de la lancha y se encuentran en un punto C situado entre A y B, tal que AC = 5·CB.

Si la lancha hubiera salido desde el punto B y el bote desde el punto A se habrían encontrado en un punto D tal que AD = DB. Calcula la velocidad de la lancha y del bote en aguas quietas.

XXXII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 14 de junio de 2014

<u>NIVEL III</u> (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

En las rectas $y = 2x$, $y = \dfrac{x}{2}$ marcamos, respectivamente, los puntos *P* y *Q* de coordenadas enteras positivas, ambas menores que 99. Calcula el número de parejas (*P,Q*) tales que los puntos *A* y *B* que dividen al segmento *PQ* en tres partes iguales tengan también sus coordenadas enteras.

Problema 2.

Encuentra, si existen, cuatro enteros positivos consecutivos cuyo producto sea el mismo que el de otros dos enteros positivos consecutivos o justifica que no existen.

XXXII CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 14 de junio de 2014

NIVEL III (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Calcula el mayor entero *n* tal que $\left[\sqrt[n]{2014}\right] > 1$. (Recuerda: $[x]$ es la parte entera de *x*.

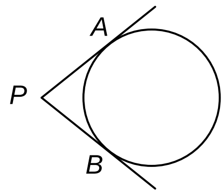
Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Obtén la mayor solución de la ecuación $(\lg_T x)^2 = \lg_T x^2$.

Problema 3A. (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior.
Si *n* es un entero con $1 \le n \le 10T$, calcula el número de valores de *n* para los que el producto $(n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$ es divisible entre 5.

Problema 1B. (1 punto)
Si $0 < x < 2\pi$, $x \neq \pi$, calcula el valor absoluto de la diferencia entre las soluciones de la ecuación $\sec x = 1 + \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \ldots$.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y $k = \dfrac{4\pi}{T}$.
Si $(a - bi)^k \cdot (a + bi)^k = 512$, calcula el valor de $a^2 + b^2$.

Problema 3B. (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior
Desde el punto *P* exterior a la circunferencia hemos trazado las tangentes *PA* y *PB* a dicha circunferencia. Si el cociente entre el mayor y el menor de los arcos *AB* es *T* + 1, obtén el cociente entre el ángulo central correspondiente al menor de dichos arcos y el ángulo $A\hat{P}B$.



Problema 4. (5 puntos)
Sea *a* la respuesta del problema **3A** y *b* la respuesta del problema **3B**.
Un trapecio tiene tres lados iguales cuyas medidas vienen expresadas con números enteros, siendo uno de ellos la base menor. Si el perímetro del trapecio es *a*(1 – *b*) y el área $k\sqrt{k}$, con *k* también entero, calcula el valor de *k*.