XXXI CONCURSO “PUIG ADAM” DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

<u>NIVEL I</u> (3º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

La suma de dos números naturales es 371 y el cociente entre su mínimo común múltiplo y su máximo común divisores 430. ¿Cuáles son esos números?

Problema 2.

En un triángulo rectángulo el radio de la circunferencia inscrita es de 2,8 cm y el radio de la circunferencia circunscrita es de 9,1 cm. Calcula el perímetro del triángulo.

XXXI CONCURSO “PUIG ADAM” DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

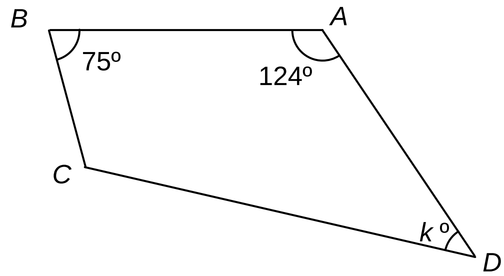
Facultad de Matemáticas U.C.M.

Madrid, 8 de junio de 2013

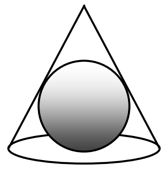
NIVEL I (3º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
¿Cuál es el mayor número de seis cifras, representado por *ELEVEN*, en el que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales cifras iguales, que verifica que es múltiplo de 11?

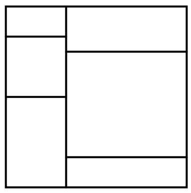
Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *k* la suma de las cifras de *T*.
En el cuadrilátero *ABCD* de la figura, que no está a escala, *AB* = *AC*, $\hat{A} = 124º$, $\hat{B} = 75º$ y $\hat{D} = kº$.
¿Cuánto mide el ángulo $B\hat{D}C$?



Problema 3A. (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. Una esfera de *T* cm de radio está inscrita (perfectamente ajustada) en un cono cuya generatriz es igual al diámetro de su base. ¿Cuál es, en cm, la altura del cono?



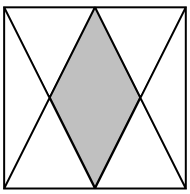
Problema 1B. (1 punto)
Dividimos un cuadrado en seis rectángulos como se indica en la figura. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 120 cm, ¿cuál es. en cm^2, el área del cuadrado?

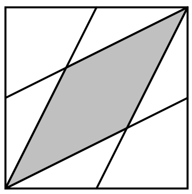


Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior y *n* la suma de las cifras de *T*. El número de cinco cifras 24X8Y es divisible por 4, 5 y *n*. ¿Cuál es la suma de las cifras X e Y?

Problema 3B. (2 puntos)
Sea *T* la respuesta del problema anterior. El cuadrilátero *PQRS* está inscrito en una circunferencia de tal manera que *PR* es un diámetro. Si las longitudes de *PQ, QR* y *RS* son 60, 25 y 13·*T*, ¿cuál es la longitud del lado *SP*?

Problema 4. (5 puntos)
Sean *a* y *b* las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente. La figura muestra dos rombos sombreados inscritos en cuadrados iguales de lado *a* – *b*. Cada uno de ellos se han formado mediante segmentos de extremos un vértice del cuadrado y el punto medio de uno de los lados. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de dichos rombos?





XXXI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

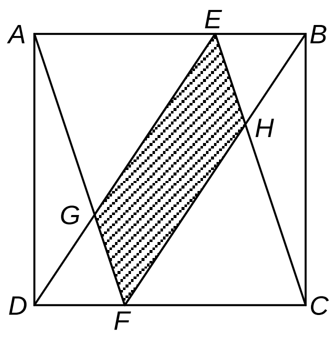
<u>NIVEL II</u> (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

Al escribir una a continuación de otra las edades de Alicia y Bruno resulta un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si hiciéramos lo mismo, en ese orden, dentro de 31 años resultaría un número también de cuatro cifras y también cuadrado perfecto.
¿Cuáles son las edades actuales de Alicia y de Bruno?

Problema 2.

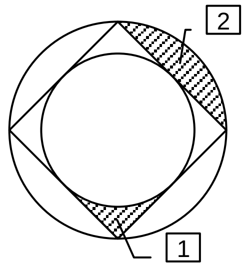
En el cuadrado *ABCD* de la figura $AE = 2 \cdot EB$ y $FC = 2 \cdot DF$. ¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo *EGFH* y el área del cuadrado *ABCD*?



XXXI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

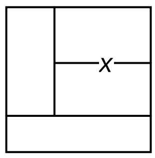
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

<u>NIVEL II</u> (4º de E.S.O.) Segunda parte (1 hora 30 minutos)



Problema 1A. (1 punto)
Calcula el cociente entre el área de la región $\boxed{1}$ y el área de la región $\boxed{2}$.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior, que en la forma más simplificada es
$T = \dfrac{a-\pi}{2\pi - b}$ con a y b enteros.



La figura, que no está a escala, muestra un cuadrado de lado $\dfrac{a}{b}$ dividido en cuatro rectángulos de igual área. Calcula la longitud del segmento marcado con x.

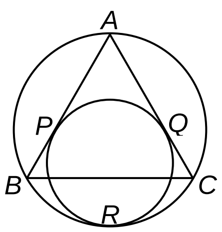
Problema 3A. (2 puntos)
Sea $T = \dfrac{c}{d}$ la respuesta del problema anterior expresada en forma de fracción irreducible y $n = 2(c+d)$. En una clase de 4º de ESO hay n chicas. Si seleccionamos al azar dos estudiantes de esa clase la probabilidad de que ambos sean chicas es 0,15. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

Problema 1B. (1 punto)
¿Cuántas soluciones enteras tiene la inecuación $\left| |x| - 2013 \right| < 5$?

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula cuántos números de cuatro cifras verifican que la suma de los cuadrados de sus cifras es T.

Problema 3B. (2 puntos)
La respuesta del problema anterior es un número T de dos dígitos, p y q. En el triángulo ABC la mediana que parte de A es perpendicular a la mediana que parte de B. Si las longitudes de los lados AC y BC son $p+q$ y $p\cdot q$, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado AB?

Problema 4. (5 puntos)
Sean a y b las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente y sea $x = a \cdot b^2$. En una circunferencia hay inscrito un triángulo equilátero ABC. Una segunda circunferencia es tangente interior a la primera en R y tangente a AB y AC en P y Q respectivamente.
Si $BC = x$ calcula PQ.

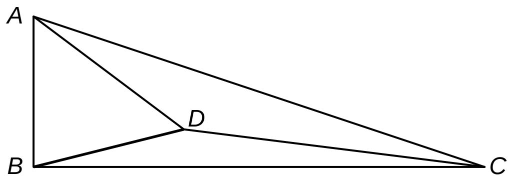


XXXI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS
Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

NIVEL III (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1.

En el interior del triángulo rectángulo *ABC*, con ángulo recto en *B*, tomamos un punto *D* tal que el área del triángulo *ABD* es la tercera parte del área del triángulo original y el área del triángulo *BDC* es la cuarta parte del área del triángulo original. Si las distancias de *D* a los vértices *A* y *C* son, respectivamente, 3 y 4 cm, calcula la distancia de *D* al vértice *B*.



Problema 2.

Encuentra todos los enteros positivos que escritos en notación usual (base 10) son una unidad mayor que la suma de los cuadrados de sus cifras.

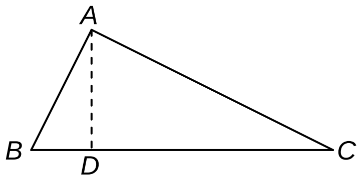
XXXI CONCURSO "PUIG ADAM" DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Facultad de Matemáticas U.C.M.
Madrid, 8 de junio de 2013

NIVEL III (1º de Bachillerato) Segunda parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1A. (1 punto)
Calcula el menor primo p tal que (p – 1) es la diferencia de los cuadrados de dos múltiplos de 4, ambos positivos.

Problema 2A. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior y k la suma de los dígitos de T.
En el triángulo rectángulo ABC de la figura AD es perpendicular a BC. Si el área del triángulo ABD es 1 y el área del triángulo ADC es k, calcula $tg^2\hat{B}$.



Problema 3A. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Calcula el mayor entero positivo n para el que $n^2 - Tn + 6$ resulta ser un número primo.

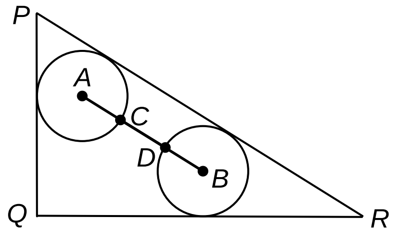
Problema 1B. (1 punto)
Calcula el valor de T si $\lg_2 4$, $\lg_{\sqrt{2}} 8$, $\lg_3 9^{T-1}$ están en progresión geométrica.

Problema 2B. (1,5 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Calcula el número de valores enteros de x que verifican el sistema de inecuaciones $x^2 > x + 6$, $|x| < T^2$.

Problema 3B. (2 puntos)
Sea T la respuesta del problema anterior.
Una enorme cesta de frutas tiene un gran número de naranjas, peras, manzanas y limones, más de 10000 de cualquiera de ellas. Calcula el menor valor de k para que cualquier elección de k de piezas de frutas tenga al menos una de las siguientes características:

- Que haya al menos 1001 naranjas
- Que haya al menos 2013 peras
- Que haya al menos 219 manzanas
- Que haya al menos T limones.

Problema 4. (5 puntos)
Sea a la respuesta del problema **3A** y b la suma de los dígitos del problema **3B**.
En el triángulo rectángulo PQR de la figura, en el que $PQ = \frac{b}{2}$ y $QR = 2a$, dibujamos dos circunferencias iguales, de centros A y B, cada una de ellas tangente a un cateto y a la hipotenusa. Si las intersecciones de las circunferencias con el segmento AB dividen a éste en tres partes iguales, $AC = CD = DB$, calcula el radio de las circunferencias.



NIVEL I

RESPUESTAS

Problema 1.
La suma de dos números naturales es 371 y el cociente entre su mínimo común múltiplo y su máximo común divisores 430. ¿Cuáles son esos números?

Sean los números p y q. Si designamos con m al mínimo común múltiplo y con M al máximo común divisor, tenemos:

$$p + q = 371 \quad \text{y} \quad \frac{m}{M} = 430 = 2\cdot 5\cdot 43$$

Por lo tanto m y M han de ser de la forma:

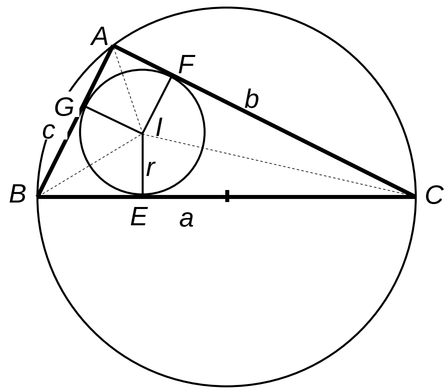
$$m = 2^{x+1}\cdot 5^{y+1}\cdot 43^{z+1}\cdot k \qquad M = 2^{x}\cdot 5^{y}\cdot 43^{z}\cdot k$$

Los factores 2, 5 y 43 han de serlo de alguno de los números buscados. Nos fijamos en el mayor de ellos, 43, y como $43^2 > 371$ tenemos que únicamente uno de los dos números tendrá el factor 43.
Sea por ejemplo $p = 43\cdot h$, h = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8, pues $43\cdot 9 > 371$.
Si $h = 8 = 2^3$ o $h = 4 = 2^2$, p sería par y también lo sería q, lo que no puede ser pues la suma es impar.
Probando con los valores h = 1, 2, 3, 5, 6, 7 obtenemos:

$$h = 1 \Rightarrow p = 43,\ q = 328,\ \ h = 2 \Rightarrow p = 86,\ q = 285,\ \ h = 3 \Rightarrow p = 129,\ q = 242,$$
$$h = 5 \Rightarrow p = 215,\ q = 156,\ \ h = 6 \Rightarrow p = 258,\ q = 113,\ \ h = 7 \Rightarrow p = 301,\ q = 70$$

Por lo tanto la única posibilidad es p = 301, q = 70 para que se verifique $\frac{m}{M} = 430 = 2\cdot 5\cdot 43$

Problema 2.
En un triángulo rectángulo el radio de la circunferencia inscrita es de 2,8 cm y el radio de la circunferencia circunscrita es de 9,1 cm. Calcula el perímetro del triángulo.



Primer método.-

Como $BG = BE$ y $FC = EC$ si llamamos $x = BG$, $y = FC$, podemos escribir,
$(x + r)^2 + (y + r)^2 = BC^2$ y además $BC = x + y = 18{,}2$
Sustituyendo los valores conocidos, $r = 2{,}8$ $y = 18{,}2 - x$ obtenemos,

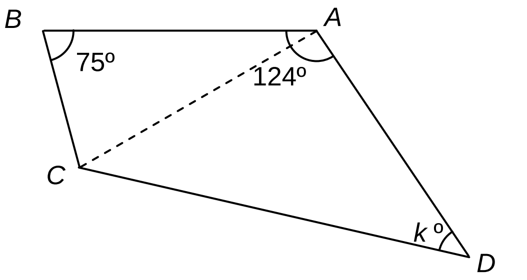
$$(x + 2{,}8)^2 + (18{,}2 - x + 2{,}8)^2 = 18{,}2^2 \text{ desarrollamos,}$$
$$x^2 + 5{,}6x + 7{,}84 + x^2 - 42x + 441 = 331{,}24 \Rightarrow$$
$$2x^2 - 36{,}4x + 117{,}6 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 18{,}2x + 58{,}8 = 0$$

Resolviendo se obtiene $x = 4{,}2$ $y = 14$, por lo tanto el perímetro es (4,2 + 2,8) + (14 + 2,8) + 18,2 = 42 cm

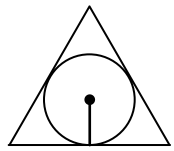
Segundo método.-
Es más breve y más elegante darse cuenta de que el perímetro buscado es:
$AG + GB + BE + EC + CF + FA = r + 2\cdot BE + 2\cdot EC + r = 2r + 2(BE + EC) = 2r + 4R = 2(r + 2R)$ o bien conocer la relación de los radios con el semiperímetro p que es: $p = r + 2R$.
En este caso $p = 2{,}8 + 18{,}2 = 21$ con lo que el perímetro será $2p = 42$ cm

NIVEL I. **RESPUESTA AL PROBLEMA ENCADENADO.**

1A. El mayor valor se obtendrá para E = 9 con lo que las cifras que ocupan los lugares impares es 27. La suma de las cifras de los lugares pares no puede ser 27, por lo que deberá ser 16. Las cifras que cumplen esto y nos dan el mayor número son: L = 8, V = 7, N = 1.
Solución $\boxed{T_1 = 989791}$



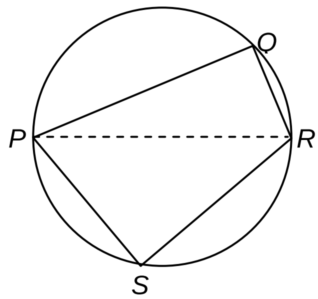
2A. k = 9 + 8 + 9 + 7 + 9 + 1 = 43.
Como ABC es isósceles $\Rightarrow$ ABCA = 75º y el ABAC = 30º $\Rightarrow$ ACAD = 94º y como k = 43 $\Rightarrow$ ADCA = 180º - (94º + 43º) = 43º . Entonces ACD es isósceles y $AD = AC = AB$. En consecuencia ABD también es isósceles y el ángulo ABDA = (1/2)(180º - 124º) = 28º.
El ángulo pedido es 43º - 28º = 15º.
Solución $\boxed{T_2 = 15º}$



3A. La sección vertical del cono nos determina que el centro de la esfera es el centro del triángulo equilátero, es decir, el baricentro. Por lo tanto la altura, que es la misma que la mediana, es igual al triple del radio y como éste es 15 la respuesta es 45. $\boxed{a = 45}$

1B. Sea x el lado del cuadrado. En la suma de los perímetros están contados dos veces todos los segmentos interiores al cuadrado, de donde se deduce que 120 = 10x (6 tramos horizontales y 4 verticales). El lado del cuadrado es 12 y su área 144.
La solución es $\boxed{S_1 = 144}$

2B. n = 1 + 4 + 4 = 9. El número 24X8Y al ser divisible por 4 y por 5, termina en 0, y por ser múltiplo de 9, 2 + 4 + X + 8 + 0 = 14 + X tiene que ser múltiplo de 9, de donde X = 4.
X + Y = 4 y la solución es $\boxed{S_2 = 4}$



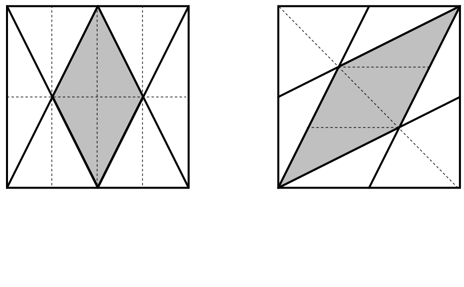
3B. Se forman dos triángulos rectángulos que comparten hipotenusa, con lo que podemos escribir, $PQ^2 + QR^2 = RS^2 + SP^2$ y de aquí, $60^2 + 25^2 = 52^2 + SP^2 \Rightarrow SP = 39$. La solución es $\boxed{b = 39}$

4. El lado de los cuadrados es 45 – 39 = 6.
El área de cada uno es 36. Descomponiendo los cuadrados como se indica en la figura, cada cuadrado se ha dividido en triángulos de igual área, bien porque sean congruentes (de igual forma y tamaño) o bien porque tienen igual base y altura.

En el primer cuadrado el área del paralelogramo sombreado es $\frac{4}{16} \cdot 36 = 9$

En el segundo cuadrado el área del paralelogramo sombreado es $\frac{4}{12} \cdot 36 = 12$

La diferencia de las áreas es 12 – 9 = 3.
La respuesta es $\boxed{d = 3}$



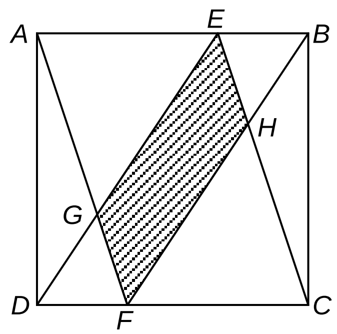
NIVEL II

RESPUESTAS

Problema 1.
Al escribir una a continuación de otra las edades de Alicia y Bruno resulta un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si hiciéramos lo mismo, en ese orden, dentro de 31 años resultaría un número también de cuatro cifras y también cuadrado perfecto.
¿Cuáles son las edades actuales de Alicia y de Bruno?

Sean [*ab*] y [*cd*] las edades de Alicia y Bruno, entonces [*abcd*] = $1000a + 100b + 10c + d = n^2$.
Dentro de 31 años el número de cuatro cifras que se forma será,
$1000(a + 3) + 100(b + 1) + 10(c + 3) + (d + 1) = k^2$ y restando ambas expresiones obtenemos,
$3131 = k^2 - n^2$, es decir, $31\cdot 101 = (k + n)(k - n)$, de donde $k + n = 101$, $k - n = 31$ y de aquí $k = 66$, $n = 35$
Como $35^2 = 1225$. Las edades actuales de Alicia y Bruno son 12 y 25 años. Dentro de 31 años tendrán 43 y 56 y se verifica que $4356 = 66^2$.

Problema 2.
En el cuadrado *ABCD* de la figura $AE = 2\cdot EB$ y $FC = 2\cdot DF$. ¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo *EGFH* y el área del cuadrado *ABCD*?



Por la semejanza de los triángulos *FCH* y *BEH*, como $FC = 2EB$,
La altura del triángulo *FCH* es doble de la altura de *BEH* que será un tercio del lado del cuadrado que llamaremos x.
Área del cuadrado: x^2
Área de *DAE*: $(1/2)x\cdot(2/3)x = (1/3)x^2$
Área de *DGF*: $(1/2)\cdot(1/3)x\cdot(1/3)x = (1/18)x^2$
Área de *EGFH*: $x^2 - 2\cdot[(1/3)x^2 + (1/18)x^2] = (2/9)x^2$.
El cociente pedido es (2/9).

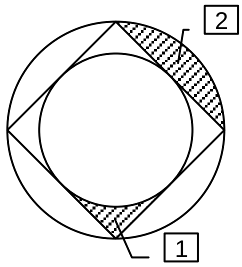
$\boxed{\text{NIVEL II}}$. **RESPUESTA AL PROBLEMA ENCADENADO.**

1A. Si el radio de la circunferencia interior es x, el lado del cuadrado es $2x$ y el radio de la circunferencia exterior $x\sqrt{2}$.

Área del recinto $\boxed{1}$ $(1/4)[(2x)^2 - \pi x^2] = (1/4)x^2\cdot(4 - \pi)$.

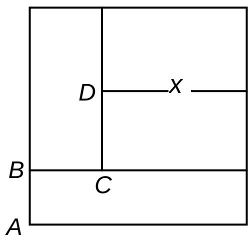
Área del recinto $\boxed{2}$ $(1/4)[\pi(x\sqrt{2})^2 - (2x)^2] = (1/4)x^2\cdot(2\pi - 4)$.

El cociente entre las dos áreas es: $\boxed{T_1 = \dfrac{4-\pi}{2\pi-4}}$



2A. El lado del cuadrado es $l = \dfrac{4}{4} = 1$.

Como todos los rectángulos tienen igual área se deduce que $AB = \dfrac{1}{4}$, $BC = \dfrac{1}{3}$ y $DC = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{8}$ y como el área de cada rectángulo es $\dfrac{1}{4}$, tenemos que $\dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{8}x \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$. $\boxed{T_2 = \dfrac{2}{3}}$



3A. $n = 2(2 + 3) = 10$. Si hay x chicos la clase tiene $10 + x$ estudiantes.

Por lo tanto $0{,}15 = \dfrac{10}{10+x}\cdot\dfrac{9}{9+x} \Rightarrow (10+x)(9+x) = 600 \Rightarrow x = 15.$ Luego $\boxed{a = 15}$

1B. $\big||x| - 2013\big| < 5 \Leftrightarrow -5 < |x| - 2013 < 5 \Leftrightarrow 2008 < |x| < 2018$, cuyas soluciones enteras son: $\pm 2009, \pm 2010, \ldots, \pm 2017$, en total 24 soluciones. $\boxed{S_1 = 18}$

2B. Teniendo en cuenta que $18 = 4^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2$ tenemos 9 casos: 1014, 1041, 1104, 1140, 1401, 1410, 4011, 4101 y 4110.

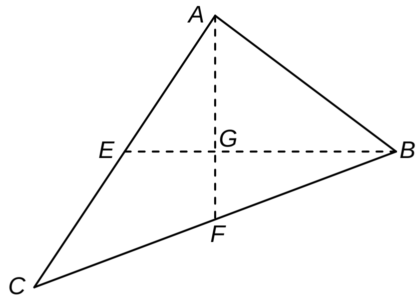
También $18 = 3^2 + 3^2 + 0^2 + 0^2$ que nos da 3 casos más: 3003, 3030 y 3300.

También $18 = 3^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2$ que nos da 12 casos más: 1223, 1232, 1322, 2123, 2132, 2213, 2231, 2312, 2321, 3122, 3212 y 3221. En total hay 24 casos. $\boxed{S_2 = 24}$

3B. Las longitudes de los lados AC y BC son $2 + 4 = 6$ y $2\cdot 4 = 8$. Luego $AE = 3$ y $BF = 4$.

Si $x = AF$, $y = BE$ tenemos:

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 &= 3^2 \\ \left(\frac{x}{3}\right)^2 + \left(\frac{2y}{3}\right)^2 &= 4^2 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} 4x^2 + y^2 &= 81 \\ x^2 + 4y^2 &= 144 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 45.$$



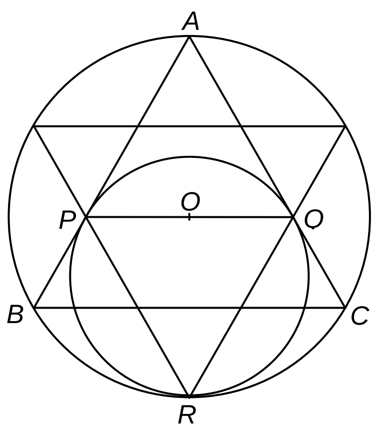
Como $AB^2 = \left(\dfrac{2x}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2y}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}\left(x^2 + y^2\right) = \dfrac{4}{9}\cdot 45 = 20$

resulta que $AB = \sqrt{20}$. $\boxed{b = \sqrt{20}}$

4. La siguiente construcción demuestra que el segmento PQ pasa por el centro de la circunferencia circunscrita, es decir, pasa por el baricentro del triángulo ABC.

La razón de semejanza de los triángulos APQ y ABC es por lo tanto $k = \dfrac{2}{3}$. Como $BC = 15\cdot 20 = 300$, entonces

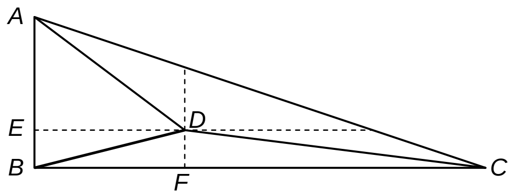
$\boxed{PQ = \dfrac{2}{3}\cdot 300 = 200}$



NIVEL III

RESPUESTAS

Problema 1.
En el interior del triángulo rectángulo *ABC*, con ángulo recto en *B*, tomamos un punto *D* tal que el área del triángulo *ABD* es la tercera parte del área del triángulo original y el área del triángulo *BDC* es la cuarta parte del área del triángulo original. Si las distancias de *D* a los vértices *A* y *C* son, respectivamente, 3 y 4 cm, calcula la distancia de *D* al vértice *B*.



Área de *ABC* = 3·Área de *ABD* $\Rightarrow$ *BC* = 3·*BF*
Área de *ABC* = 4·Área de *CBD* $\Rightarrow$ *AB* = 4·*BE*
Llamando $BA = x$ y $BC = y$ tenemos,
En el triángulo *AED*

$$\left(\frac{3x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 3^2 \Rightarrow 81x^2 + 16y^2 = 1296$$

En el triángulo *DFC* $\left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{2y}{3}\right)^2 = 4^2 \Rightarrow 9x^2 + 64y^2 = 2304$ y sumando ambas expresiones se obtiene $90x^2 + 80y^2 = 3600 \Rightarrow 9x^2 + 8y^2 = 360$.

Resolvemos el sistema $\left.\begin{array}{r} 9x^2 + 64y^2 = 2304 \\ 9x^2 + 8y^2 = 360 \end{array}\right\} \Rightarrow 56y^2 = 1944 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y^2 = \dfrac{243}{7} \\ x^2 = \dfrac{64}{7} \end{array}\right\}$

Por lo tanto, como $BD^2 = \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2$ resulta $BD^2 = \frac{4}{7} + \frac{27}{7} = \frac{31}{7} \Rightarrow \boxed{BD = \sqrt{\frac{31}{7}}\,cm}$

Problema 2.
Encuentra todos los enteros positivos que escritos en notación usual (base 10) son una unidad mayor que la suma de los cuadrados de sus cifras.

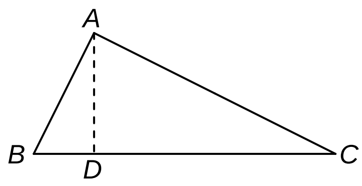
Es evidente que el número no puede tener más de tres cifras porque la suma de los cuadrados de sus cifras, más uno, siempre será menor que el propio número.
¿Podrá ser de tres cifras? $[abc] = 100a + 10b + c = 1 + a^2 + b^2 + c^2$
$a^2 + b^2 + c^2$ como máximo podría ser 243 por lo que *a* solo podría ser 2 ó 1. Si fuera $a = 2$,
$a^2 + b^2 + c^2$ como máximo podría ser 164, por lo que *a* sólo podría ser 1.
En este caso $100 + 10b + c = 1 + 1 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow 98 = b(b-10) + c(c-1)$ y como $b(b-10) < 0$, el mayor valor posible de $b(b-10) + c(c-1)$ es $72 - 9 = 63$. De aquí se concluye que el número o los números buscados han de ser de dos cifras. (De una es evidente que no hay)
Buscamos los de dos cifras.
$[ab] = 10a + b = 1 + a^2 + b^2$. Probando con sucesivos valores de $a = 1, 2, \ldots, 9$, nos encontramos que para $a = 3$ resulta $b = 5$ y para $a = 7$ resulta $b = 5$. Luego los únicos números que cumplen la condición exigida son: 35 y 75.
$35 = 1 + 3^2 + 5^2$ y $75 = 1 + 7^2 + 5^2$.

$\boxed{\text{NIVEL III}}$. **RESPUESTA AL PROBLEMA ENCADENADO.**

1A. Supongamos que x > y > 0

$p-1=(4x)^2-(4y)^2=16(x+y)(x-y)\Rightarrow p=16(x+y)(x-y)+1$. Como buscamos el menor valor de *p* probamos con los menores valores de *x* e *y* cuya diferencia sea la menor posible. Con *x* = 2, *y* = 1 se obtiene *p* = 49 que no es primo. Con *x* = 3, *y* = 2 se obtiene *p* = 81 que no es primo. Con *x* = 4, *y* = 3 se obtiene *p* = 113 que es primo. $\boxed{T_1=113}$

2A. *k* = 1 + 1 + 3 = 5.



Como el área de *ADC* es igual a cinco veces el área de *ABD* se deduce que *DC* = 5·*BD* = 5*x*.

Por el teorema de la altura $AD^2=x\cdot 5x=5x^2\Rightarrow AD=x\sqrt{5}$.

$tg^2\hat{B}=\left(\frac{x\sqrt{5}}{x}\right)^2=5$ $\boxed{T_2=5}$

3A. Descomponemos $n^2-5n+6=(n-2)(n-3)$ que solamente será un número primo cuando uno de los factores sea 1 (ó -1). Esto ocurre para *n* = 1 y para *n* = 4. Luego $\boxed{a=4}$

1B. Calculamos los dos primeros términos de la progresión.

$\lg_2 4=\lg_2 2^2=2$. $\lg_{\sqrt{2}} 8=\lg_{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\right)^6=6$ luego la razón es 3 y por lo tanto $\lg_3\left(9^{T-1}\right)=18\Rightarrow \lg_3(3)^{2(T-1)}=18\Rightarrow 2(T-1)=18\Rightarrow T=10$. $\boxed{S_1=10}$

2B. La inecuación $x^2>x+6$ se verifica $\forall x\notin[-2,3]$, es decir, para todos los enteros excepto – 2, – 1, 0, 1, 2, 3.

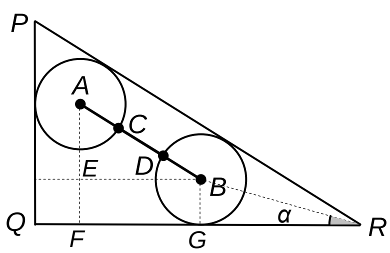
La inecuación $|x|<100\Leftrightarrow -100<x<100$ se verifica para 199 números enteros:

- 99, - 98,…, - 1, 0, 1,…, 99.

En total el número de soluciones enteras del sistema es 199 – 6 = 193. $\boxed{S_2=193}$

3B. (Principio del palomar) Si elegimos 1000 naranjas, 2012 peras, 218 manzanas y 192 limones tendríamos un conjunto de 3422 piezas que no cumple ninguna de las características exigidas, pero al elegir una pieza más seguro que se cumplirá alguna de las características. Luego el menor número de piezas que debemos elegir es 3423. $\boxed{b=3423}$

4. $PQ=\frac{12}{2}=6$ $QR=2\cdot 4=8$ de donde *PR* = 10.



En el triángulo *PQR* $sen2\alpha=\frac{6}{10}, \cos 2\alpha=\frac{8}{10}$ por lo tanto, utilizando la relación del ángulo mitad,

$$tg\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{sen2\alpha}=\frac{1-\frac{8}{10}}{\frac{6}{10}}=\frac{1}{3}\Rightarrow GR=3r$$

EB = *FG* = 8 – 4*r* y como los triángulos *AEB* y *PQR* son semejantes, $\frac{3r}{8-4r}=\frac{10}{8}\Rightarrow r=\frac{5}{4}$

La respuesta es $\boxed{r=\frac{5}{4}}$