XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

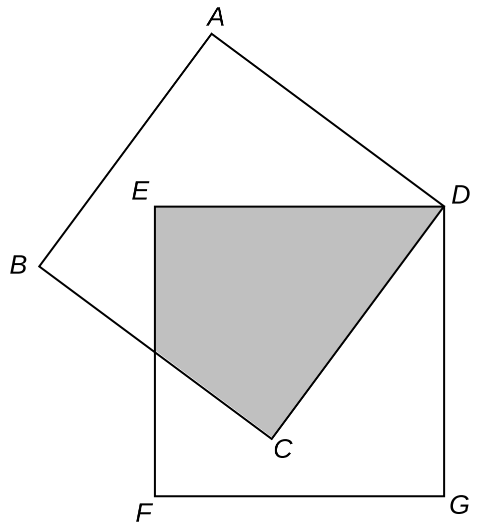
17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. Encuentra todos los números de cuatro cifras que empezando por 4 y acabando en 8 son múltiplos de 2, 3, 4, 6, 8 y 9.

2. En el segmento *AB* marcamos el punto *C* tal que $AC = 3 \cdot CB$. Con diámetros *AC* y *CB* dibujamos sendas circunferencias cuyas tangentes exteriores cortan a la prolongación de *AB* en el punto *D*. Demuestra que *BD* es igual al radio de la circunferencia pequeña.

3. En el dibujo de la figura *ABCD* y *DEFG* son cuadrados iguales de área 16. *D* es un vértice común a ambos y el cuadrilátero *EBFC* es un rectángulo. Calcula el área de la región sombreada común a ambos cuadrados



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

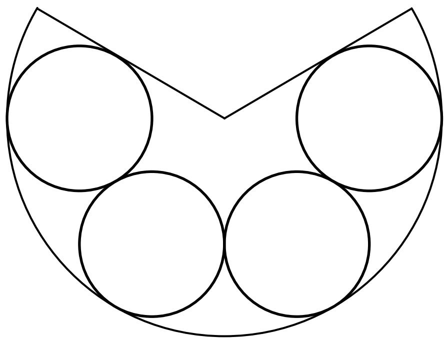
17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

1. ¿Cuál es el menor múltiplo de 84 entre cuyas cifras aparecen exclusivamente “6” y “7”?

2. Si $x + \frac{1}{x} = 3$, ¿cuál es el valor de $x^6 + \frac{1}{x^6}$?

3. En el dibujo de la figura hay cuatro circunferencias iguales, tangentes entre sí, y un sector circular que corresponde al desarrollo de la superficie lateral de un cono cuyo radio de la base es $\frac{2}{3}$ de su generatriz. Las circunferencias son a su vez tangentes al arco y a los radios del sector. Calcula el cociente entre la generatriz de dicho cono y el radio de las circunferencias.



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

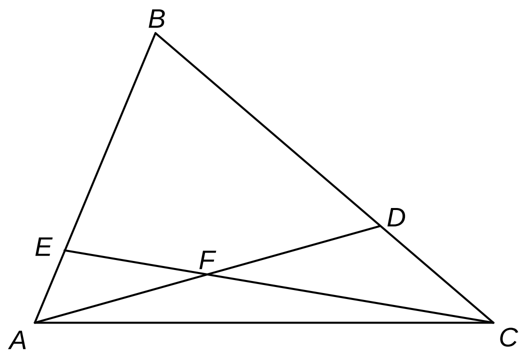
17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Representamos por P_k al producto de los k primeros números primos.
Demuestra que, sea cual fuere k, $P_k + 1$ nunca es un cuadrado perfecto.

2. Si $z^2 + \frac{1}{z^2} = 14$ y $z > 0$, ¿cuál es el valor de $z^5 + \frac{1}{z^5}$?

3. En el lado AB del triángulo ABC marcamos el punto E de tal manera que $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{3}$ y en el lado BC marcamos el punto D con $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$. Si F es el punto de intersección de AD y CE, calcula $\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD}$.



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

PRUEBA INDIVIDUAL **1º y 2º de E.S.O.** (90 minutos)

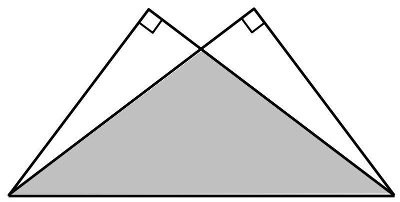
1. En la siguiente expresión *a, b* y c representan tres cifras cualesquiera, no todas nulas. Calcula el valor de dicha expresión.

$$\frac{0'\widehat{abc}+0'\widehat{acb}+0'\widehat{bac}+0'\widehat{bca}+0'\widehat{cab}+0'\widehat{cba}}{0'\widehat{a}+0'\widehat{b}+0'\widehat{c}}$$

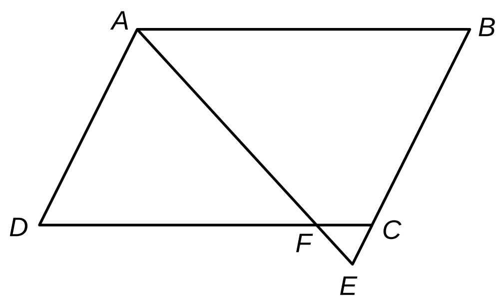
2. En el conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 50\}$ hay muchos conjuntos formados por cinco enteros consecutivos, por ejemplo $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ o $\{13, 14, 15, 16, 17\}$ ¿Cuántos de estos conjuntos verifican que el producto de sus cinco elementos es múltiplo de 12 y de 21 simultáneamente?

3. En un triángulo isósceles de lados *AB* = 5, *AC* = 5 y *BC* = 8, calcula la distancia del vértice *A* al centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo.

4. Dos triángulos rectángulos iguales, de catetos 24 y 32 cm, se colocan como indica la figura. Calcula el área de la región sombreada común a ambos triángulos.



5. Prolongamos el lado *BC* del paralelogramo *ABCD* de forma que el área del triángulo *ADF* es 81 cm^2 y el área del triángulo *FCE* es 4 cm^2. Calcula el área del paralelogramo *ABCD*.



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

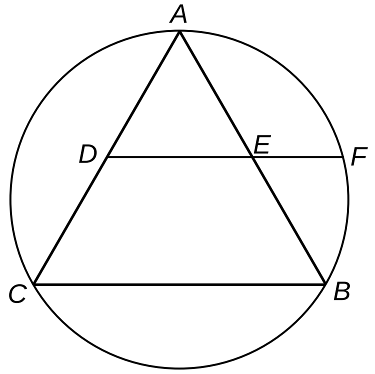
PRUEBA INDIVIDUAL **3º y 4º de E.S.O.** (90 minutos)

1. Si $[abc]$ representa el número de tres cifras, *a*, *b* y *c*, con *a* K 0, calcula el mínimo valor de la expresión $[abc]-\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

2. Determina todos los números primos *p* tales que $p^{2012}+p^{2013}$ sea un cuadrado perfecto.

3. El triángulo *ABC* es semejante al triángulo *MNP* con *BC* = 60, *AB* = 12, *MP* = 8 y *BC* > *AC* > *AB*. Calcula la suma de todos los posibles valores enteros para el cociente entre el área de *ABC* y el área de *MNP*.

4. En el triángulo equilátero *ABC* de la figura, *D* y *E* son puntos medios de los correspondientes lados. Expresa el cociente $\frac{DE}{EF}$ como $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ con *a, b* y *c* enteros.



5. En una competición un equipo gana 3 partidos seguidos, luego pierde 1, luego vuelve a ganar 3 seguidos, luego pierde 2, gana 3, pierde 3, etc., es decir, gana 3 seguidos y pierde cada vez un partido más que la vez anterior. Si *N* es el número total de partidos jugados, calcula el menor valor de *N* para el que el porcentaje de partidos ganados sea inferior al 25 %.

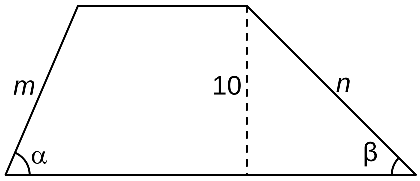
XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

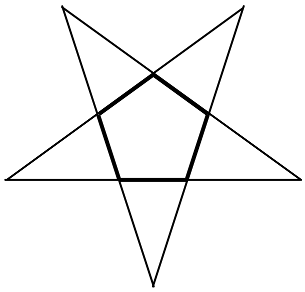
PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

1. En el triángulo *ABC* la longitud del lado *BC* es la media de las longitudes de los otros dos. Si $\cos\hat{C} = \frac{AB}{AC}$, calcula el valor de dicho coseno.

2. En el trapecio de la figura, de altura 10, las longitudes de los lados *m* y *n* vienen dadas por números enteros. Si la suma de los senos de los ángulos agudos α y β es $\frac{1}{2}$, calcula el mayor valor posible para la suma *m* + *n*.



3. Prolongamos los lados de un pentágono regular hasta formar una estrella de cinco puntas como indica la figura. Si el cociente entre el área del pentágono y el área de la estrella es $sen\varphi$, calcula el valor de φ.



4. Un entero positivo *N* decimos que es "*autodescriptivo*" si cada uno de sus dígitos aparece tantas veces como indica su valor. Por ejemplo: 1, 22, 212, 122333 son "*autodescriptivos*". Calcula la suma de los dígitos de todos los números "*autodescriptivos*" de seis dígitos.

5. Sea $P(x)$ un polinomio de grado 2010. Si $P(n) = \frac{1}{n}$ para n = 1, 2, 3,…, 2011, calcula el valor de $P(2012)$.

XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

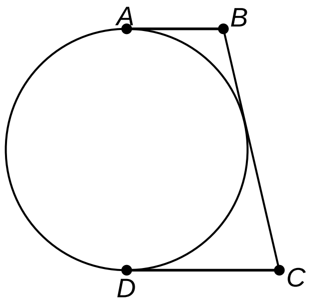
1º y 2º de ESO.-

1A.- Calcula la cifra de las unidades del número 1234567^{89}.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B

En el triángulo *ABC* en el que los tres ángulos son agudos, $\hat{A} = \left(x + \frac{T}{3}\right)^0$, $\hat{B} = (2x-6)^0$ y el ángulo exterior en *C* mide $(3x+9)^0$. Calcula el número de posibles valores enteros de *x*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "$T = \frac{a}{b}$" la respuesta del problema 2C, expresada en forma de fracción irreducible.
En la figura, los segmentos *AB* y *DC* son paralelos y tangentes a la circunferencia, siendo *A* y *D* los puntos de tangencia. El segmento *BC* también es tangente a la circunferencia. Si *AB* = *b* y *DC* = *a*, calcula el área del trapecio *ABCD*.
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

3º y 4º de ESO.-

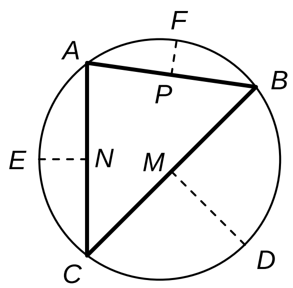
.

2A.- Sea "T" la respuesta del problema 3A.

El radio de la circunferencia de la figura adjunta es $\frac{T}{5}$ y el perímetro del triángulo *ABC* inscrito es *T*.

Los segmentos *DM, EN* y *FP* pertenecen a las mediatrices de los lados del triángulo. Calcula el área del hexágono *AFBDCE*.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



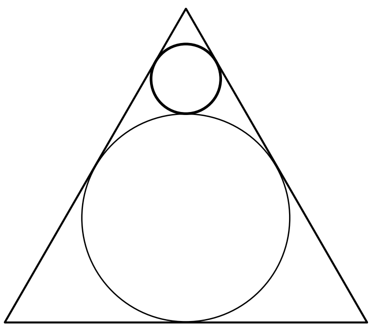
2B.- En un concurso de problemas el 40 % de los chicos y el 60 % de las chicas obtuvieron una puntuación superior a 80 puntos. Si había el triple de chicos que de chicas participantes, ¿qué porcentaje de los participantes obtuvieron una puntuación superior a 80 puntos?

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

2C.- Sea "T" la respuesta del problema 3C.

En un triángulo equilátero de lado *T* se dibujan dos circunferencias tangentes como se muestran en la figura. Calcula el cuadrado del radio de la circunferencia pequeña.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)



XII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

17 de noviembre de 2012

PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)

Bachillerato.-

3A.- Sea "T" la respuesta del problema 1A.

En el cuadrado *ABCD* las coordenadas de los vértices *A* y *B* son, respectivamente, $\left(\log_{15} 5, 0\right)$ y $\left(0, \log_{15} x\right)$. Si las coordenadas de los otros dos vértices son positivas y la suma de las ocho coordenadas de los cuatro vértices es $T + 1$, calcula x.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.

En una circunferencia de radio T inscribimos un triángulo *ABC* en el que $\hat{B} = 30º$. Con centro en B se traza otra circunferencia tangente a la recta que pasa por *A* y *C*. Calcula el máximo valor para el área de la región exterior a la circunferencia de centro *B* pero interior al triángulo *ABC*.

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

3C.- ¿Cuántas palabras capicúas (que se leen igual de izquierda a derecha que de derecha a izquierda) pueden formarse utilizando en cada una todas las letras de la palabra “MISSISSIPPI”.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)