Problemas propuestos en el
XXXIV Concurso “Puig Adam”

NIVEL I (3º de E.S.O.)

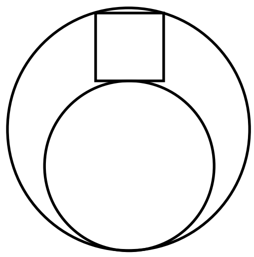
Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

Juan efectúa las mil divisiones enteras siguientes: 2016 entre 1, 2016 entre 2, 2016 entre 3, y así hasta llegar a 2016 entre 1000. ¿Cuál es el mayor resto que ha obtenido?

Problema 2 *(7 puntos)*

En la figura siguiente se observan dos circunferencias tangentes interiores y un cuadrado, uno de cuyos lados es tangente a la circunferencia pequeña, estando los vértices opuestos a ese lado en la circunferencia mayor. Si los radios de las circunferencias son 50 cm y 35 cm, calcula la longitud del lado del cuadrado.



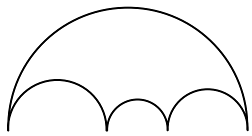
Segunda parte: problema encadenado (*1 hora 30 minutos*)

Problema 1A *(1 punto)*

En mi clase de Alemán somos 10 estudiantes y la nota media de toda la clase es 6,4. Las notas de las chicas han sido mejores que las de los chicos, pues han sacado un 7 de media mientras que la media de los chicos ha sido un 5. ¿Cuántas chicas hay en mi clase?

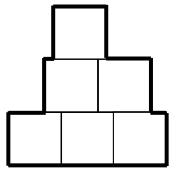
Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura siguiente se observan cuatro semicircunferencias cuyos centros están alineados. Si el perímetro de la figura es P y el radio de la mayor es $\frac{T}{14}$, calcula $\frac{P}{\pi}$.



Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. Con seis cuadrados de lado T formamos la figura siguiente. ¿Cuál es su perímetro?



Problema 1B *(1 punto)*

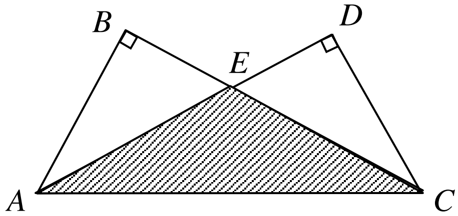
Calcula el número *n* para que $20^{2016} = 10^{2000} \cdot 40^{16} \cdot 2^n$

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y *k* la suma de sus cifras. Una planta de *k* cm de altura crece a un ritmo de 3 cm cada 2 años. Una segunda planta de 58 cm de altura crece a un ritmo de 5 cm cada 6 años. Si ambas duraran mucho tiempo, ¿dentro de cuántos años tendrían la misma altura?

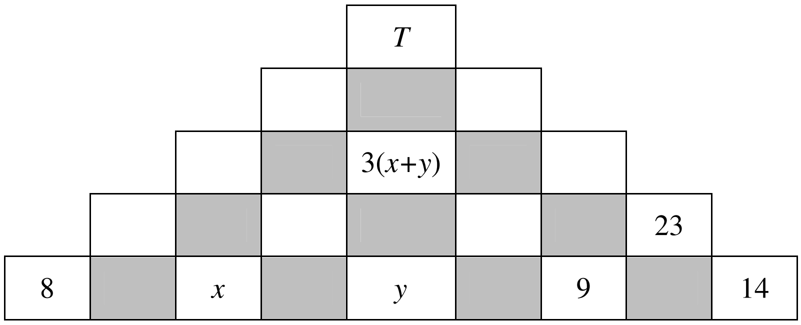
Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En la figura siguiente, $AB = DC =$ T, $BC = AD = 72$ y los ángulos en B y D son rectos. Calcula el área del triángulo AEC.



Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y T la suma de las cifras de $a \cdot b$. En el diagrama siguiente, el número que aparece en cada casilla en blanco es la suma de los de las casillas en blanco que tiene inmediatamente debajo. Calcula $\frac{x}{y}$.



NIVEL II (4º de E.S.O.)

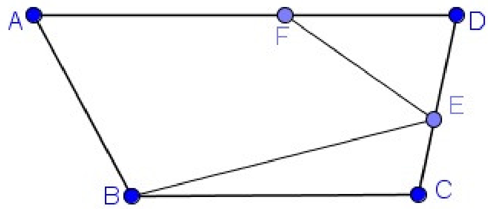
Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

Escribe todas las parejas de enteros positivos (x, y) que verifican la ecuación $\frac{1}{x}+\frac{540}{xy}=2$

Problema 2 *(7 puntos)*

En el trapecio $ABCD$ de la figura siguiente se verifica que el cociente entre las longitudes de las bases es $\frac{BC}{AD}=\frac{5}{7}$. Los puntos E y F están en los lados CD y DA respectivamente y verifican que $\frac{CE}{ED}=\frac{2}{3}$, $\frac{AF}{FD}=\frac{4}{3}$. Si el área del cuadrilátero $ABEF$ es 123, calcula el área del trapecio.



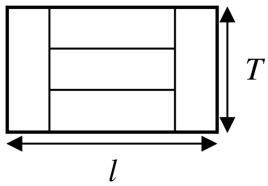
Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

El área de un hexágono regular de lado *h* es el triple del área de un cuadrado de lado *l*. Calcula $\frac{l^4}{h^4}$ y expresa dicho cociente como fracción irreducible.

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea $\frac{a}{b}$ (irreducible) la respuesta del problema anterior y T = *ab*. Con cinco rectángulos idénticos formamos otro grande como muestra la figura siguiente. Si la anchura de este rectángulo grande es *T* cm, ¿cuál es su longitud, *l* ?



Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior. En una bolsa hay nueve bolas numeradas con números enteros positivos. Cuatro de ellas tienen números impares cuya suma es T + *4* y las restantes, números pares, en concreto: 4, 8, 12, 18 y 32. Luis coge cuatro bolas y al coger Ana otras cuatro se da cuenta de que las que eligió ella suman el triple de las que eligió Luis. ¿Qué bola no cogió ninguno de los dos?

Problema 1B *(1 punto)*

Sea p un número primo. Hace p años, las edades de tres niños estaban en progresión geométrica de suma p y razón 2. ¿Cuál es la suma de las edades actuales de los tres?

Problema 2B *(1,5 puntos)*

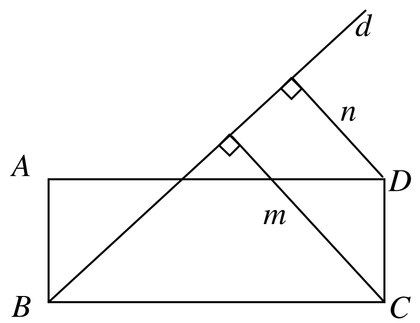
Sea T la respuesta del problema anterior. Se pretende dividir un cono de altura $\frac{T}{7}$ en dos partes de igual volumen mediante un plano paralelo a la base. ¿A qué distancia del vértice debe estar el plano?

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = T^3 - 2$. Cuando Ali tenía la edad de Billy, Celi tenía el doble de la edad de Billy.Cuando Celi tenía la edad de Ali, Celi tenía k años. Cuando Billy tenga la edad de Celi, Ali tendrá 88 años. Cuando Billy tenga la edad de Ali, ¿cuál será la suma de las edades de los tres?

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y m y n las sumas de las cifras de a y b respectivamente. En el rectángulo $ABCD$ de la figura siguiente, triple de largo que de ancho, la recta d pasa por el vértice B y dista m y n de los vértices C y D respectivamente. ¿Cuál es el área de dicho rectángulo?



NIVEL III (1º de Bachillerato)

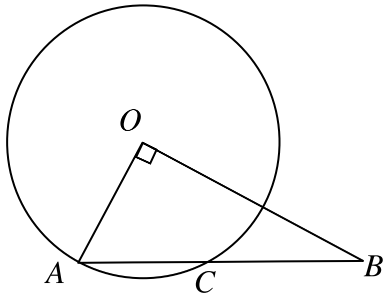
Primera parte *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1 *(7 puntos)*

Sea *f* una función tal que, para todo *x* se verifica que $f(x) = f(x-1) + f(x+1)$. Si $f(20) = 16$ y $f(16) = 20$, calcula $f(2016)$.

Problema 2 *(7 puntos)*

En la figura siguiente se observa una circunferencia de centro *O* y un triángulo *OAB*, rectángulo en *O* siendo *A* un punto de la circunferencia. La hipotenusa *AB* vuelve a cortar a la circunferencia en el punto *C* siendo *AC* = 8 y *CB* = 10. Calcula $cos\,\widehat{B}$.



Segunda parte: problema encadenado *(1 hora 30 minutos)*

Problema 1A *(1 punto)*

Cuando un triángulo rectángulo gira sobre un cateto, el volumen del cono obtenido es 800 π cm^3 y cuando gira sobre el otro, 1920 π cm^3. ¿Cuál es, en cm, la longitud de la hipotenusa del triángulo?

Problema 2A *(1,5 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y *k* =T – 2. ¿Cuántos cuadrados perfectos, menores que 10^6 son múltiplos de *k*?

Problema 3A *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y k el producto de sus cifras. Si N es un número formado por las seis cifras 1, 2, 3, 3, 4 y 5 (en algún orden), calcula el menor valor de N divisible por $11k$.

Problema 1B *(1 punto)*

Calcula $\dfrac{2}{\log_4(2000^6)} + \dfrac{3}{\log_5(2000^6)}$ dando el resultado como fracción irreducible.

Problema 2B *(1,5 puntos)*

Sea $T = m+n$, siendo $\dfrac{m}{n}$ la respuesta del problema anterior. En el cuadrado $ABCD$, los puntos E y F están en los lados AD y BC respectivamente, de forma que $BE = EF = FD = T+3$. Calcula el área de dicho cuadrado.

Problema 3B *(2 puntos)*

Sea T la respuesta del problema anterior y $k = \dfrac{T}{15}$. Si $P(x, y)$ es un punto de la circunferencia $x^2 + y^2 - 14x - 6y = k$, ¿cuál es el mayor valor posible para $3x + 4y$?

Problema 4 *(5 puntos)*

Sea a la respuesta del problema 3A, b la respuesta del problema 3B y m y n las sumas de las cifras de a y b respectivamente. En el rectángulo $ABCD$, el punto E está en CD de forma que $B\hat{A}C = E\hat{A}D$ y el punto F está en la diagonal AC siendo $EF \perp AC$. Si el área del triángulo ABC es m y el área del triángulo CEF es n, calcula el seno de $C\hat{A}E$.