

ANEXO 6

Ejercicios propuestos en la XXII Olimpiada Española de Física
Fase Local de Aragón Fecha: 21 de Febrero de 2011



**Universidad
Zaragoza**



PRIMERA PRUEBA

25 de febrero de 2011

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de tres problemas

Emplea una hoja del cuadernillo de respuestas para cada problema

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!



Subvenciona:



P1. Acelerómetro.

Un acelerómetro es, como su propio nombre indica, un dispositivo para medir aceleraciones. Un modelo sencillo consiste en un cilindro cuyo eje coincide con la dirección de la aceleración que se desea medir. Dentro del cilindro hay una bola sujeta a los extremos mediante dos muelles iguales, y un líquido viscoso que amortigua las oscilaciones de la bola cuando se produce un cambio en la aceleración. En ausencia de aceleración, la bola está en equilibrio en el centro del cilindro, como se representa en la figura 1a. Sin embargo, cuando el dispositivo sufre una aceleración en el sentido del eje OX indicado, la bola alcanza un nuevo estado de equilibrio dinámico, desplazada una distancia $x < 0$, como se indica en la figura 1b. Esta distancia no cambia mientras la aceleración sea constante.

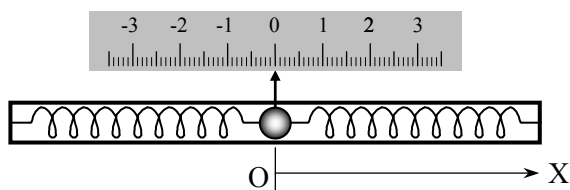


Fig. 1a

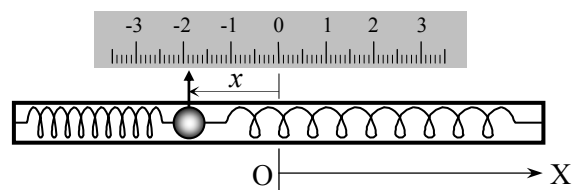


Fig. 1b

- El acelerómetro se sujeta horizontalmente en un vehículo, de forma que el eje del cilindro coincida con la dirección del movimiento (eje OX). En estas condiciones, determina el desplazamiento en equilibrio de la bola, x , en función de la aceleración del vehículo, a , la constante elástica de cada muelle, k , y la masa de la bola, M .
- Mientras el vehículo acelera uniformemente de 0 a 40 km/h en 3,0 s, el desplazamiento en equilibrio de la bola es $x = -3,0$ cm. Sabiendo que la masa de la bola es $M = 10$ g, calcula el valor de la constante k de cada uno de los muelles.
- La gráfica de la figura 2 muestra un registro de la posición x de la bola en función del tiempo t mientras un automóvil se mueve, desde $t = 0$ hasta $t = 20$ s. En esta gráfica se observan claramente tres intervalos de tiempo con aceleraciones diferentes. Calcula la aceleración del automóvil en cada uno de estos intervalos.
- Si el automóvil del apartado anterior ha partido del reposo en $t = 0$, representa gráficamente, de forma aproximada, su velocidad en función del tiempo entre $t = 0$ y $t = 20$ s.
- Calcula por último el espacio total que ha recorrido desde $t = 0$ hasta $t = 20$ s.

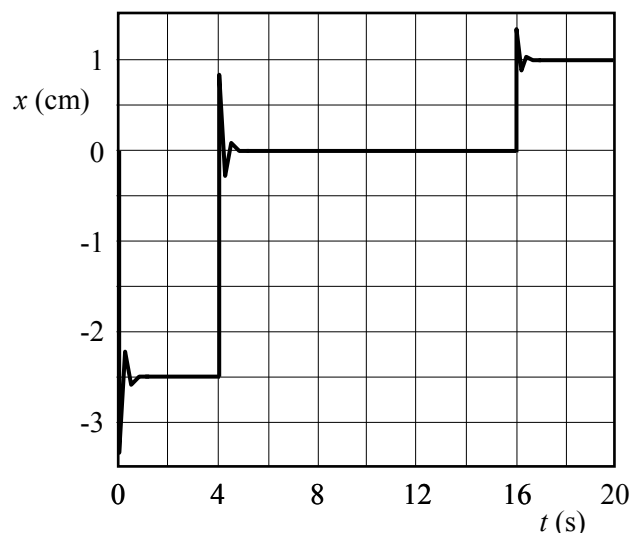


Fig. 2

Solución P1. Acelerómetro.

- a) Los dos resortes son iguales, es decir tienen la misma constante elástica k y la misma longitud natural. Cuando están montados en el acelerómetro, unidos a los extremos del cilindro y a la bola, en ausencia de aceleración ambos están deformados (estirados o comprimidos) la misma distancia x_0 , de forma que están ejerciendo fuerzas de igual módulo $F_0 = kx_0$ sobre la bola, pero en sentidos opuestos, y ésta permanece en el centro del cilindro.

Cuando el sistema se mueve con aceleración uniforme a , tras amortiguarse la oscilación de la bola se alcanza un nuevo estado de equilibrio dinámico en el que todo el sistema, incluida la bola, se mueve con esta aceleración. Por tanto, sobre la bola debe estar actuando una fuerza neta Ma en el sentido de la aceleración. Obviamente esta fuerza es la debida al cambio de deformación de los dos muelles, es decir al desplazamiento de la bola respecto al centro del cilindro

$$Ma = -2kx \quad (1)$$

El signo menos indica que, de acuerdo con el enunciado, cuando la aceleración es en sentido positivo ($a > 0$) el desplazamiento es negativo ($x < 0$) y viceversa. Despejando en (1), el desplazamiento en equilibrio de la bola es

$$x = -\frac{Ma}{2k}$$

- b) En una aceleración uniforme, partiendo del reposo, la velocidad final v_f alcanzada en el instante t_f es

$$v_f = at_f$$

Con los datos de este apartado, y teniendo en cuenta que $40 \text{ km/h} = 40 \cdot 10^3 \text{ m} / 3600 \text{ s} = 11,11 \text{ m/s}$,

$$a = \frac{v_f}{t_f} = 3,704 \text{ m/s}^2$$

Despejando k de (1)

$$k = -\frac{Ma}{2x} = 0,6173 \text{ N/m} \quad \boxed{k = 0,62 \text{ N/m}}$$

- c) En la gráfica de la figura 2 del enunciado se observan tres intervalos de tiempo en los que, salvo la breve oscilación amortiguada inicial, x es constante, es decir la aceleración a es constante:

$$0 < t < 4 \text{ s} : \quad x_1 = -2,5 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad a_1 = -2kx_1 / M = 3,0864 \text{ m/s}^2, \quad \boxed{a_1 = 3,1 \text{ m/s}^2}$$

$$4 \text{ s} < t < 16 \text{ s} : \quad x_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{a_2 = 0}$$

$$16 \text{ s} < t < 20 \text{ s} : \quad x_3 = 1,0 \text{ cm} \quad \rightarrow \quad a_3 = -2kx_3 / M = -1,2346 \text{ m/s}^2, \quad \boxed{a_3 = -1,2 \text{ m/s}^2}$$

En resumen, el coche se mueve con aceleración a_1 durante los cuatro primeros segundos. Entre $t = 4 \text{ s}$ y $t = 16 \text{ s}$ se mueve con aceleración nula, es decir con velocidad constante, y desde $t = 16 \text{ s}$ hasta $t = 20 \text{ s}$ con aceleración a_3 negativa, lo que indica que el coche frena.

- d) Como parte del reposo, la velocidad del coche aumenta linealmente con el tiempo durante el primer intervalo.

$$t_{i1} = 0 < t < t_{f1} = 4 \text{ s} : \quad v_1 = a_1 t$$

Durante el segundo intervalo la velocidad es constante, igual a la alcanzada al final del primer intervalo, es decir en $t_{f1} = 4$ s

$$t_{i2} = 4 \text{ s} < t < t_{f2} = 16 \text{ s} : \quad v_2 = \text{cte.} = a_1 t_{f1} = 12,346 \text{ m/s} = 44,444 \text{ km/h}$$

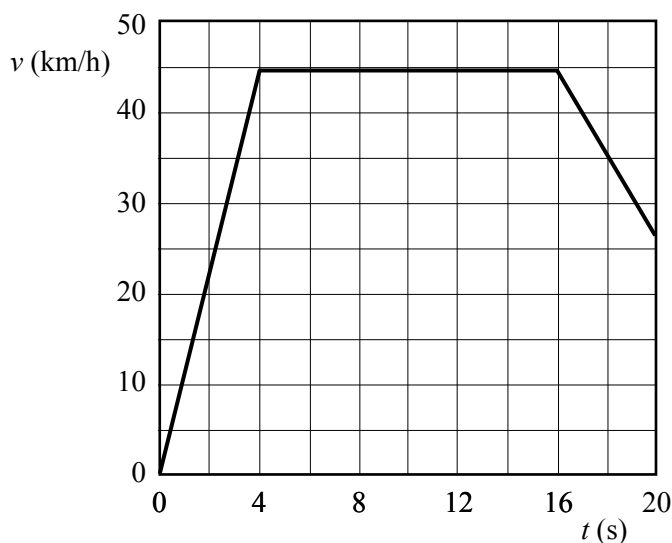
En el tercer intervalo de tiempo el coche decelera uniformemente ($a_3 < 0$), con lo que su velocidad disminuye linealmente partiendo de la velocidad inicial anterior, v_2 , en la forma

$$t_{i3} = 16 \text{ s} < t < t_{f3} = 20 \text{ s} : \quad v_3 = v_2 + a_3(t - t_{i3})$$

La velocidad final en $t_{f3} = 20$ s es

$$v_{f3} = 12,346 \text{ m/s} - 1,2346 \text{ m/s}^2 \times (20 - 16) \text{ s} = 7,4074 \text{ m/s} = 26,667 \text{ km/h}$$

En resumen, la representación gráfica de la velocidad en función del tiempo sería la siguiente



e) El espacio recorrido en cada uno de los tres intervalos de tiempo es

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_{f1}^2 = 24,69 \text{ m}$$

$$s_2 = v_2 (t_{f2} - t_{i2}) = 148,15 \text{ m}$$

$$s_3 = v_2 (t_{f3} - t_{i3}) + \frac{1}{2} a_3 (t_{f3} - t_{i3})^2 = 39,51 \text{ m}$$

Y el espacio total recorrido es

$$s = s_1 + s_2 + s_3 = 212,35 \text{ m}$$

$$s = 2,1 \cdot 10^2 \text{ m}$$

Nota sobre precisión de resultados: los datos numéricos de este problema están dados con dos cifras significativas, por lo que no tiene sentido dar los resultados con más de dos cifras. Sin embargo, para evitar arrastrar y amplificar errores de redondeo en las operaciones de los sucesivos apartados, se ha optado por trabajar con cuatro o cinco cifras y redondear únicamente al presentar los resultados que se piden en los diversos apartados del enunciado.

P2. Tiro con arco.

Ante las "necesidades" de la caza y de la guerra, la humanidad ha desarrollado a lo largo de su historia el tiro con arco. En la actualidad, salvo algunos pueblos primitivos que siguen utilizándolo para cazar, solo se usa como una modalidad deportiva.

Los constructores de arcos antiguos no necesitaron conocer las leyes de la física, pero hoy en día la tecnología basada en detallados estudios físicos permite mejorar sus prestaciones con diseños que en nada recuerdan a los antiguos arcos medievales. En este problema te proponemos que realices unos cálculos basados en dos modelos físicos de arco.

En una primera aproximación, podemos considerar que un arco medieval tiene un comportamiento análogo a algo que encanta a los físicos: un muelle de constante K . Con este *modelo lineal* de arco (ley de Hooke) se supone que la fuerza F de tensado del arco es proporcional a la longitud x que se deforma (figura 1).

- Cuando el arquero ejerce una fuerza F_1 , la distancia de tensado es x_1 . Determina, en función de F_1 y x_1 , el trabajo W_1 que ha realizado el arquero para tensar el arco. Calcula su valor para $F_1 = 700$ N y $x_1 = 0,58$ m.
- Cuando el arquero efectúa el disparo, la mayor parte de la energía potencial almacenada en el arco se transfiere a la flecha, y el resto se invierte en energía cinética de las partes móviles del propio arco. Si la masa de la flecha es $m_1 = 0,060$ kg y admitimos que recibe el 80% de la energía almacenada en el arco, calcula la velocidad de la flecha cuando abandona el arco.

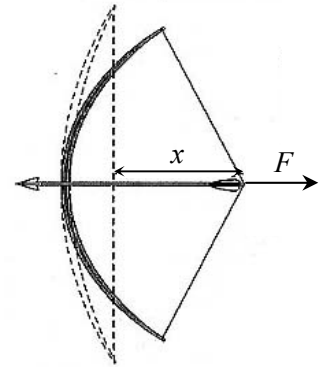


Fig. 1

Los modernos arcos compuestos, como el de la figura 2, están dotados de unas complicadas poleas excéntricas y no tienen un comportamiento lineal; el modelo del muelle no sirve para ellos. La fuerza F para tensarlo y el desplazamiento x siguen una relación no lineal, como la representada en la gráfica de la figura 3. La fuerza que hay que aplicar para mantenerlo tensado con su deformación máxima es mucho menor que con un arco tradicional, lo que evita temblores musculares del arquero y mejora notablemente la puntería.

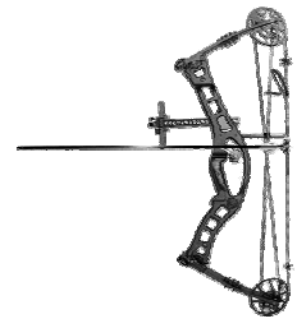


Fig. 2

- Admitiendo que en los arcos compuestos prácticamente toda la energía potencial almacenada se transmite a la flecha, haz una estimación razonada de la masa m_2 que debe tener la flecha para que cuando se tense el arco una distancia máxima $x_2 = 0,50$ m, su velocidad de salida sea igual a la calculada en el apartado b) para el arco medieval.

Ayuda: recuerda que, para una distancia máxima de tensado x_m , el área comprendida entre la curva $F(x)$ y el eje de abscisas hasta x_m es proporcional al trabajo realizado por F hasta alcanzar esa deformación.

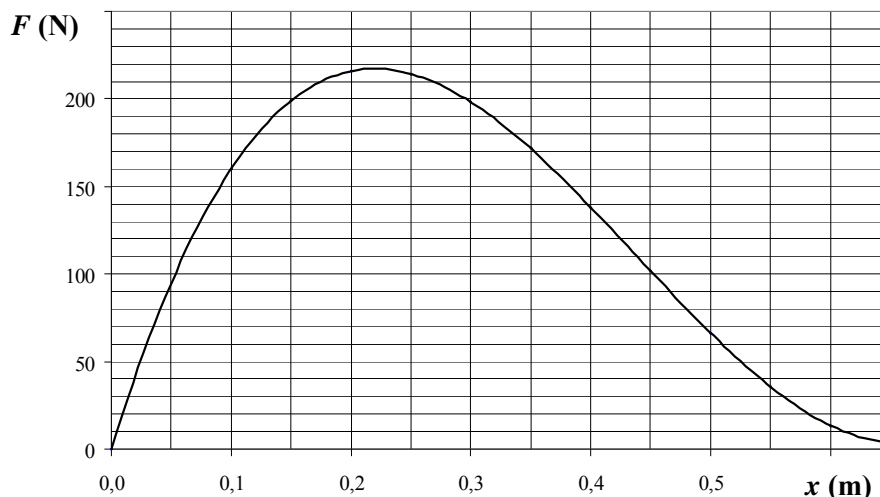


Fig. 3

Solución P2. Tiro con arco.

- a) Tal como se indica en el enunciado, el comportamiento del arco “medieval” es equivalente al de un muelle ideal de constante K , por lo que la fuerza F que ejerce el arquero es proporcional a la longitud que se deforma el muelle (el arco, en este caso). Por tanto, la representación gráfica de F en función de x es la que se muestra en la figura 4.

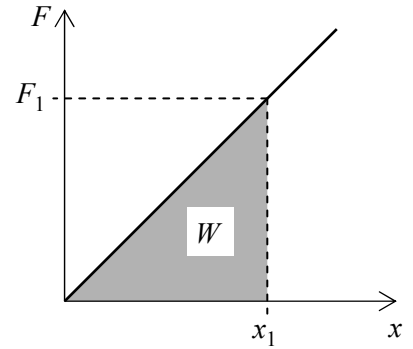


Fig. 4

El trabajo realizado por una fuerza en un desplazamiento puede calcularse como el área comprendida entre la curva $F(x)$ y el eje de abscisas, entre los valores inicial y final de x . En nuestro caso, es el área del triángulo sombreado en la figura 4

$$W_1 = \frac{1}{2} F_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad W_1 = 203 \text{ J}$$

La pregunta de este apartado puede abordarse de otra forma, físicamente equivalente a la anterior: como suponemos que el arco responde a un modelo elástico, para cualquier deformación se cumple $F = Kx$. Además, como la fuerza elástica es conservativa, el trabajo realizado por el arquero es igual a la energía potencial U_1 almacenada por el arco

$$W_1 = U_1 = \frac{1}{2} Kx_1^2 = \frac{1}{2} F_1 x_1$$

- b) Cuando se dispara la flecha, el 80% de la energía potencial se transforma en energía cinética de la flecha. Si llamamos $\gamma = 0,8$ a la eficiencia de esta transformación, es inmediato deducir la velocidad de la flecha

$$\gamma U_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{\frac{2\gamma U_1}{m_1}} = 73,6 \text{ m/s}$$

- c) La energía potencial almacenada por el arco compuesto de nuevo coincide con el trabajo realizado por el arquero al tensarlo, $W_2 = U_2$. Como no se conoce la expresión analítica de $F(x)$, este trabajo sólo puede calcularse, de forma aproximada, a partir del área bajo la curva de la figura 5, entre el origen y la deformación máxima $x_2 = 0,50$ m. En concreto, la energía potencial del arco será igual al número de rectángulos bajo la curva, multiplicado por la energía que corresponde a uno de ellos. Cada rectángulo tiene como base 0,05 m y altura 10 N, por lo que su área representa un trabajo de 0,50 J. Contando cuadros enteros y compensando fracciones de cuadro en cada columna de la figura 5, se obtiene que el área bajo la curva es aproximadamente la de 153 rectángulos. Por tanto

$$U_2 \approx 153 \times 0,50 \text{ J} = 76,5 \text{ J}$$

Como se admite que esta energía se transfiere íntegramente a la flecha, y además se quiere que su velocidad v_2 de salida sea la misma que la v_1 del apartado b), podemos escribir

$$U_2 = \frac{1}{2} m_2 v_1^2$$

lo que permite calcular la masa m_2 de la flecha

$$m_2 = \frac{2U_2}{v_1^2} \approx 28 \text{ g}$$

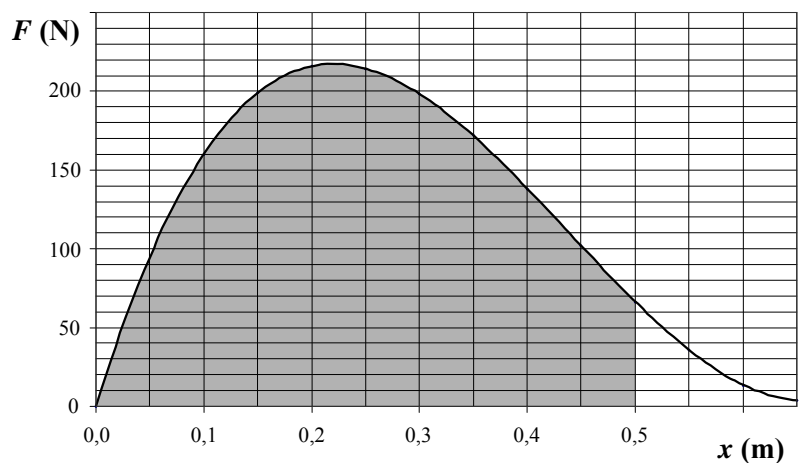


Fig. 5

P3. Espectrómetro de Bainbridge.

Para estudiar la estructura y la composición de la materia se utilizan técnicas experimentales conocidas como *espectroscopía de masas*, consistentes en medir la masa y la abundancia relativa de los iones de una muestra. En la figura 1 se muestra el esquema de un *espectrómetro de Bainbridge* utilizado para estudiar iones que tienen la misma velocidad.

Los iones que provienen de una cámara de ionización, atraviesan las rendijas colimadoras S para delimitar su dirección de propagación. A partir de ahí penetran en una región del espacio (*selector de velocidades*) donde coexisten un campo electrostático uniforme E_1 , producido por dos placas planoparalelas sometidas a una diferencia de potencial V , y un campo magnetostático uniforme B_1 perpendicular al campo eléctrico.

Los iones que atraviesan esta región sin desviarse penetran en otra región en la que existe un segundo campo magnético uniforme B_2 , paralelo a B_1 y, como consecuencia de ello, describen órbitas semicirculares e impactan sobre una placa fotográfica F.

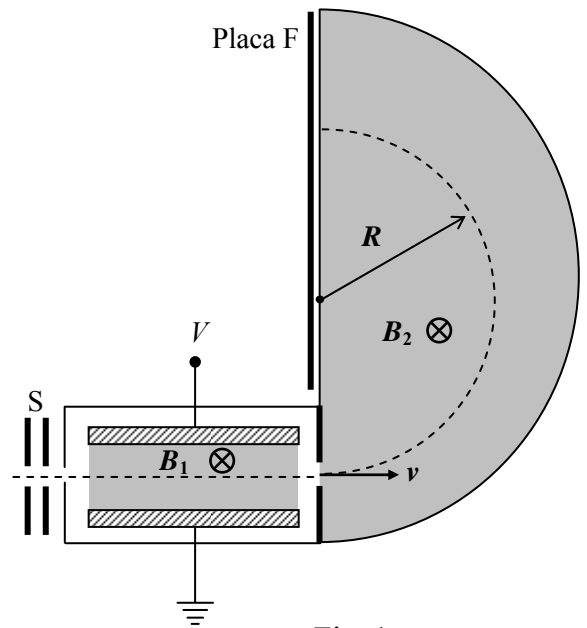


Fig. 1

Considera un espectrómetro que opera con $E_1 = 15 \text{ kV/m}$, $B_1 = B_2 = 0,50 \text{ T}$.

- Sabiendo que la separación entre las placas es $d = 4 \text{ mm}$, determina la diferencia de potencial V entre ellas.
- Determina la velocidad v de los iones que pueden penetrar en la segunda región del espectrómetro.
- Demuestra que la relación q/m (carga/masa) de los iones que impactan en la placa F viene dada por

$$\frac{q}{m} = \frac{E_1}{R B_1 B_2}$$

donde R es el radio de la trayectoria circular seguida por el ión.

- Si la fuente iónica inyecta los tres isótopos del magnesio $^{24}\text{Mg}^+$, $^{25}\text{Mg}^+$ y $^{26}\text{Mg}^+$, que tienen carga $+e$, calcula la separación entre las líneas que aparecen impresionadas en la placa F por el impacto de los tres tipos de iones. Considera que las masas atómicas de los isótopos son, en unidades de masa atómica, iguales a su número másico.

Datos: unidad de masa atómica $u = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; carga elemental $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Solución P3. Espectrómetro de Bainbridge.

- a) Conocida la relación entre el campo y el potencial electrostático en la región comprendida entre las dos placas planoparalelas, podemos calcular la diferencia de potencial V (Nótese que el plano inferior está a potencial nulo).

$$E = \frac{V}{d} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = E d = 60 \text{ V}}$$

- b) En la región 1 del espectrómetro coexisten un campo electrostático uniforme E_1 , y un campo magnetostático uniforme B_1 , por tanto las cargas que la atraviesen estarán sometidas a la fuerza de Lorentz.

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Para penetrar en la región 2 deben atravesar la región 1 sin desviarse. Consecuentemente la fuerza debida al campo electrostático y la debida al campo magnetostático deben ser iguales y de sentido contrario para que la fuerza total sea nula. De la figura 1 observamos que $\vec{v} \times \vec{B}_1$ está contenido en el plano del papel y va de abajo hacia arriba; por tanto, el campo \vec{E}_1 deberá ir de arriba hacia abajo y su módulo deberá coincidir con el producto $v B_1$

$$E_1 = v B_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{E_1}{B_1} = 3,0 \cdot 10^4 \text{ m/s}}$$

- c) En la región 2 los iones se mueven en el seno de un campo magnético B_2 , por tanto se ven sometidos a una fuerza perpendicular a la dirección del movimiento que les proporcionará una aceleración centrípeta y les provocará un movimiento circular de radio R .

$$\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad \Rightarrow \quad F = q v B_2 = m \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{q}{m} = \frac{v}{R B_2}$$

Como en esta región solo entran los iones con velocidad $v = E_1 / B_1$ (apartado b), podemos concluir que

$$\boxed{\frac{q}{m} = \frac{E_1}{R B_1 B_2}}$$

- d) Despejando el radio R en la expresión anterior

$$R = \frac{m E_1}{q B_1 B_2}$$

que puede evaluarse para los tres isótopos del magnesio, $^{24}\text{Mg}^+$, $^{25}\text{Mg}^+$ y $^{26}\text{Mg}^+$.

Dado que las trayectorias circulares no son concéntricas sino tangentes en la rendija de entrada en la región 2), la separación entre las líneas de dos isótopo es el doble de la diferencia de los radios de sus trayectorias. Además, como $m(^{24}\text{Mg}^+) = 24 \text{ u}$; $m(^{25}\text{Mg}^+) = 25 \text{ u}$ y $m(^{26}\text{Mg}^+) = 26 \text{ u}$, obtenemos que la separación Δ entre la línea del isótopo $^{24}\text{Mg}^+$ y la del $^{25}\text{Mg}^+$ es

$$\boxed{\Delta = \frac{2 u E_1}{q B_1 B_2} = 1,2 \text{ mm}}$$

La misma distancia Δ existe entre la línea $^{26}\text{Mg}^+$ y la del $^{25}\text{Mg}^+$. Consecuentemente la distancia Δ' entre la línea $^{26}\text{Mg}^+$ y la del $^{24}\text{Mg}^+$ será

$$\boxed{\Delta' = 2 \Delta = 2,4 \text{ mm}}$$



SEGUNDA PRUEBA

25 de febrero de 2011

INSTRUCCIONES

Esta prueba consiste en la resolución de un problema de tipo experimental

Razona siempre tus planteamientos

¡No olvides poner tus apellidos, nombre y datos del Centro en la primera hoja!



Subvenciona:



Problema experimental. Emulando a Galileo¹

Galileo Galilei es universalmente considerado uno de los padres de la Ciencia moderna. De entre sus múltiples aportaciones en Astronomía, Matemáticas y Física, vamos a recordar aquí sus estudios experimentales sobre la trayectoria que describe un cuerpo en caída libre.

Por ejemplo, en un manuscrito de 1608 aparece la gráfica de la figura 1, en la que anotó los alcances horizontales de una bolita que caía libremente una cierta altura, para diversos valores de la velocidad inicial horizontal.

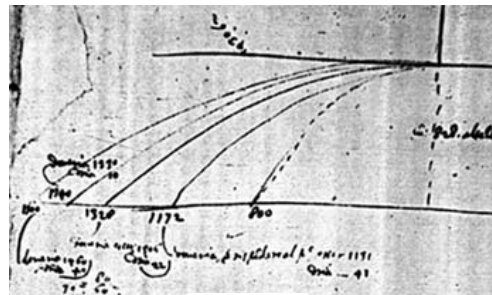


Fig. 1

A partir de estudios experimentales de este tipo para varias alturas de caída, Galileo dedujo que, si la fricción con el aire es despreciable, la distancia recorrida en horizontal es proporcional al tiempo de vuelo, es decir que la componente horizontal de la velocidad es constante (equivalente a la Ley de Inercia). También comprobó que, para velocidad inicial horizontal, la distancia recorrida en vertical es proporcional al cuadrado del tiempo. Componiendo ambos movimientos, Galileo demostró que la trayectoria de la caída es parabólica.

Los métodos e instrumentos que empleó Galileo para medir distancias y tiempos fueron rudimentarios, aunque notablemente precisos. Con medios más modernos, podríamos emular a Galileo y estudiar experimentalmente una caída libre de la siguiente forma:

Lanzamos una bolita por una mesa horizontal y grabamos lateralmente con una cámara de video de "alta velocidad" su caída al suelo tras abandonar la mesa. Posteriormente extraemos imágenes grabadas a intervalos de tiempo regulares $T = 0,040$ s, partiendo del instante $t = 0$ en que la bolita abandona la mesa y comienza su caída libre. En la figura 2 se presentan estas imágenes superpuestas. Se ha tomado origen de coordenadas, O, en el centro de la bolita en su posición inicial de caída, justo cuando abandona la mesa, eje OX horizontal y paralelo a la velocidad inicial de movimiento, v_0 , y eje OY vertical.

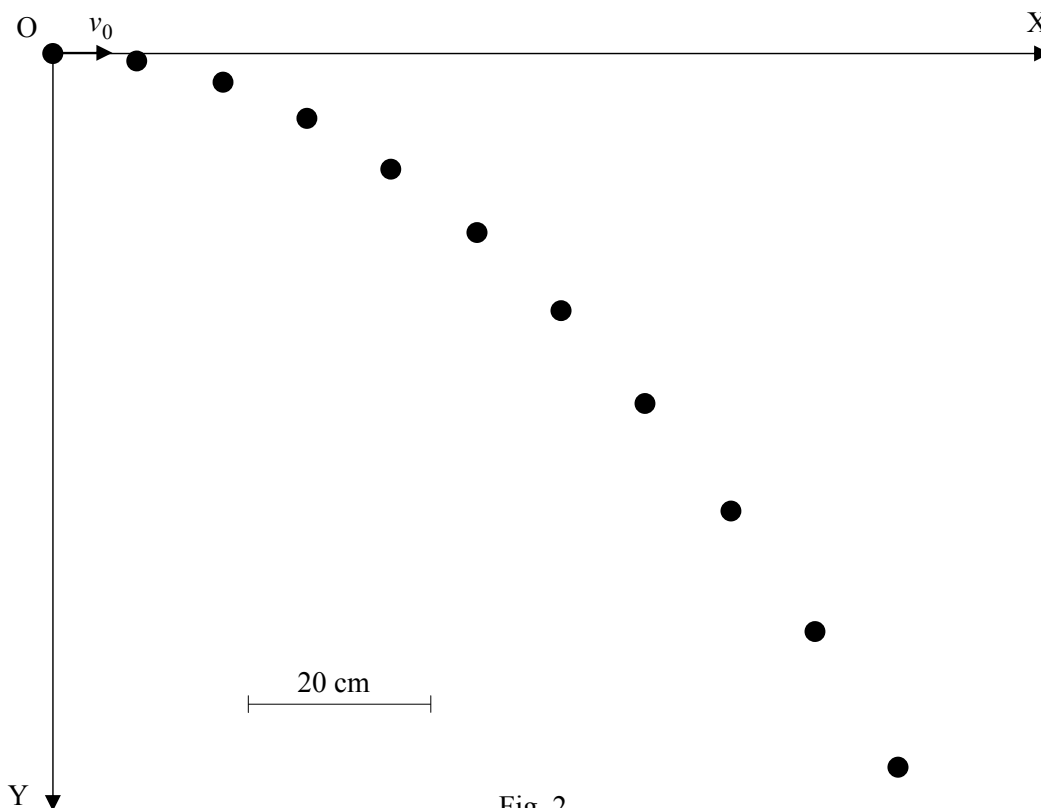


Fig. 2

¹ Este problema experimental está inspirado en una de las pruebas que propuso el Comité Académico local en la XV Olimpiada Iberoamericana de Física (Panamá, 2010).

- a) Midiendo con una regla sobre la figura 2 y teniendo en cuenta la escala indicada en ella, construye una tabla con los valores de t , x e y en las sucesivas posiciones de la bolita. Añade en otra columna los valores de t^2 , que necesitarás más adelante.
- b) Determina, con la mayor precisión posible, el valor de v_0 .
- c) En una gráfica con t^2 en abscisas e y en ordenadas, dibuja los puntos correspondientes y obtén la pendiente de la recta que, pasando por el origen, mejor se ajusta a dichos puntos.
- d) Deduce el valor de la aceleración de la gravedad, g , y haz una estimación de su incertidumbre, Δg .
- e) Si la altura de la mesa es $h = 80,0$ cm, calcula el alcance del tiro parabólico, es decir la x final en el instante del impacto de la bolita con el suelo (supuesta de radio despreciable). Calcula la incertidumbre del alcance debida a la incertidumbre Δg obtenida en el apartado anterior.

Hasta ahora hemos dado por supuesto que, durante la caída, y es proporcional a t^2 . Pero Galileo no lo sabía a priori. Intentando de nuevo emular su trabajo, planteemos la hipótesis de que nuestros datos experimentales se ajustan a una dependencia de la forma

$$y = kt^n$$

donde tanto la constante k como el exponente n son desconocidos.

- f) ¿Cómo podría demostrarse que la hipótesis es correcta, y que el mejor ajuste corresponde a $n = 2$? (Es suficiente con que expliques el método que propones; no es necesario que lo apliques a los datos)

Solución Problema experimental. *Emulando a Galileo*

- a) En la tabla I se recogen las distancias del centro de la bolita a los dos ejes, x_{graf} e y_{graf} , en los instantes $t_m = mT$, con m entero y $T = 0,040$ s. Estas distancias se han medido con una regla normal, graduada en milímetros, y se ha optado por presentar los datos con una resolución de 0,5 mm.

Para medir, por ejemplo, la coordenada x_{graf} de una posición de la bolita, el método habitual es enrasar el cero de la regla con el eje vertical OY y tomar la lectura de la regla donde esté el centro de la bolita. Como ésta tiene más de dos milímetros de diámetro, abarca varios trazos de la regla y no es fácil precisar más allá de 0,5 mm la posición de su centro. Sin embargo, puede mejorarse la resolución de los datos midiendo al revés: es más preciso enrasar el cero, que tiene un trazo largo, con el centro de la bolita (nuestra vista es bastante hábil en esta tarea, con un error típico $\sim 0,1$ mm) y medir en la escala de la regla la posición del eje. Como es una línea fina, ahora sería posible interpolar visualmente entre los trazos de sucesivos milímetros y "afinar la lectura" a la décima de mm, con un margen de incertidumbre estimado de $\pm 0,2$ mm.

Para obtener los valores reales de x e y es necesario tener en cuenta la escala que se presenta en la gráfica del enunciado. La longitud del segmento representado, medida con la regla, es² $L_{graf} = 2,40$ cm y corresponde a una longitud real $L = 20$ cm. Por tanto, x e y se obtienen multiplicando x_{graf} e y_{graf} por el factor de escala

$$f = \frac{L}{L_{graf}} = \frac{200}{24} = \frac{25}{3}$$

Tabla I

t (s)	t^2 (s^2)	x_{graf} (cm)	y_{graf} (cm)	x (cm)	y (cm)
0,000	0,0000	0,00	0,00	0,00	0,00
0,040	0,0016	1,10	0,10	9,17	0,83
0,080	0,0064	2,25	0,40	18,75	3,33
0,120	0,0144	3,35	0,85	27,92	7,08
0,160	0,0256	4,45	1,50	37,08	12,50
0,200	0,0400	5,60	2,40	46,67	20,00
0,240	0,0576	6,70	3,40	55,83	28,33
0,280	0,0784	7,80	4,60	65,00	38,33
0,320	0,1024	9,00	6,05	75,00	50,42
0,360	0,1296	10,10	7,65	84,17	63,75
0,400	0,1600	11,20	9,40	93,33	78,33

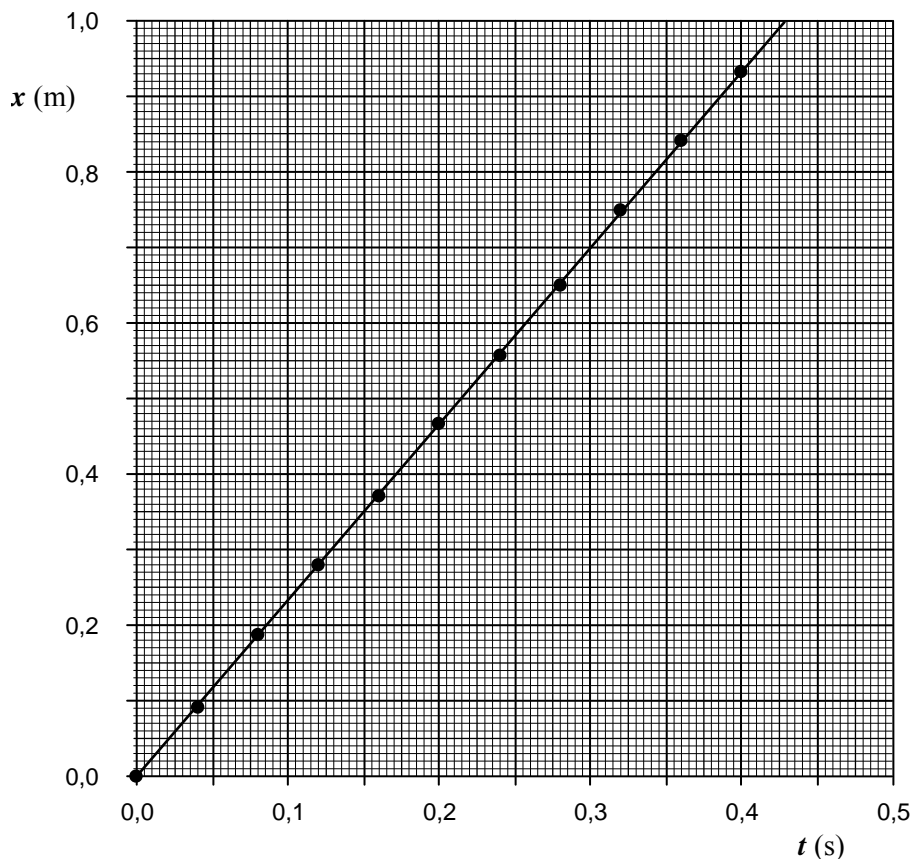
- b) Si se acepta que la componente horizontal de la velocidad durante la caída es constante e igual a v_0 , esta velocidad podría determinarse calculando el cociente x/t para cualquiera de las posiciones de la bolita. Para optimizar la precisión del resultado conviene tomar los datos del último punto, que es el que tiene una menor incertidumbre relativa de la posición, $\Delta x/x$, ya que tiene la misma incertidumbre absoluta Δx que los demás y el mayor valor de x . Con esta idea, una estimación razonable (y rápida) de v_0 sería

$$v_0 = \frac{93,33 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{0,400 \text{ s}} = 2,33 \text{ m/s}$$

² Los procesos de impresión y fotocopiado pueden introducir pequeños cambios de escala, que afectarían por igual a todas las medidas realizadas con una regla sobre la gráfica, de forma que los valores finales de x e y no deberían verse sistemáticamente afectados.

Un cálculo de propagación de errores, que no detallaremos aquí, partiendo de incertidumbres estimadas $\Delta x_{graf} = 0,5 \text{ mm}$ y $\Delta L_{graf} = 0,2 \text{ mm}$ conduce a $\Delta v_0 = 0,03 \text{ m/s}$.

Para mejorar la precisión, podría repetirse este proceso de cálculo, $v_0 = x/t$, con las demás posiciones de la bolita y promediar los resultados. Pero es más correcto (y elegante) representar los puntos experimentales en una gráfica con x en ordenadas y t en abscisas y ajustarlos a una recta que pase por el origen, cuya pendiente es precisamente v_0 . A continuación se presenta esta gráfica, con el aspecto que tendría dibujada en papel milimetrado



Se observa que, como era de esperar, los puntos están muy bien alineados en una recta que pasa por el origen. La pendiente de esta recta, es decir v_0 , se calcula a partir de las coordenadas de un punto de la recta alejado del origen (para mejorar la precisión del resultado) por ejemplo el último punto en la parte superior derecha de la recta trazada, para el que $(t; x) = (0,429 \text{ s}; 1,000 \text{ m})$.

$$v_0 = \frac{1,000 \text{ m}}{0,429 \text{ s}} = 2,33 \text{ m/s}$$

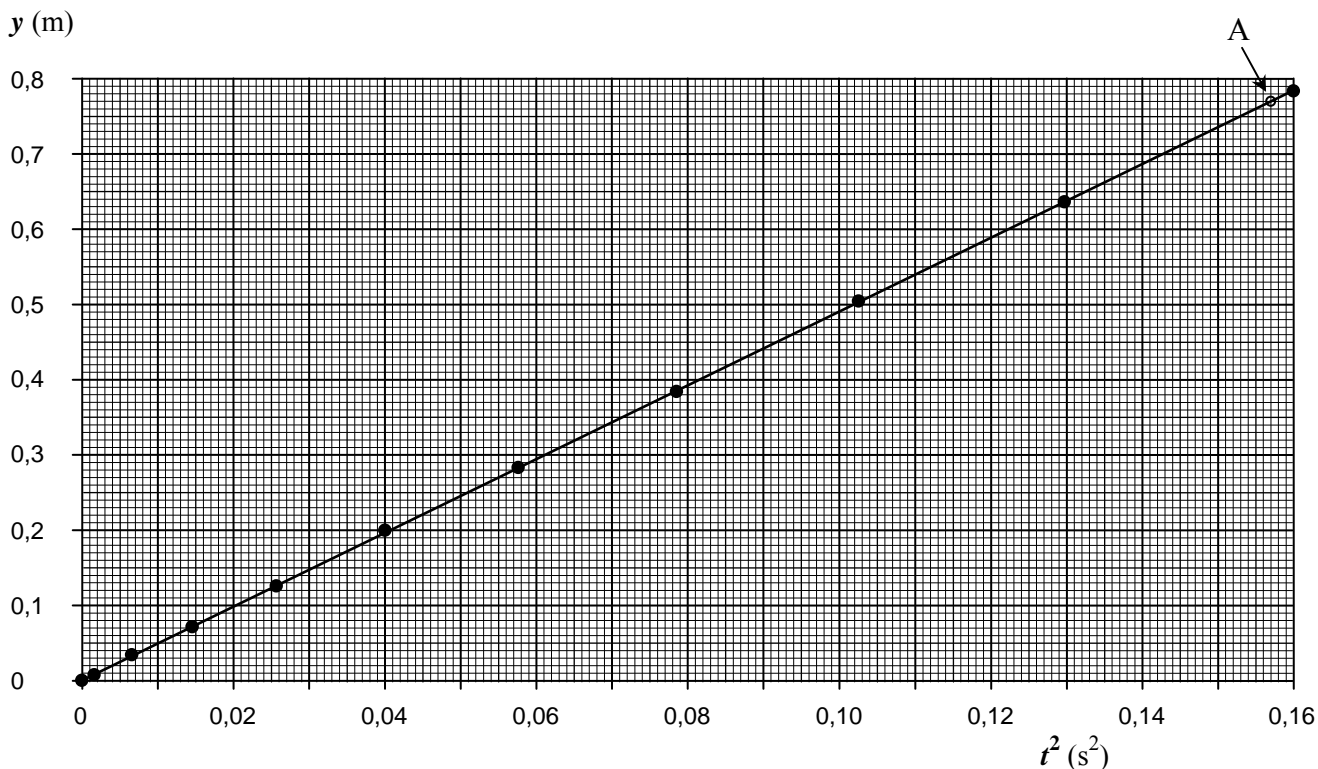
Un ajuste analítico, empleando el método de "mínimos cuadrados", conduce a $v_0 = (2,333 \pm 0,002) \text{ m/s}$.

- c) Como la componente vertical de la velocidad inicial es nula y se ha tomado origen en el punto inicial de la caída, se espera que

$$y = \frac{1}{2}gt^2$$

Done g es la aceleración de la gravedad. Por tanto, se espera una dependencia $y(t^2)$ lineal, con ordenada en el origen nula y pendiente $g/2$.

En la siguiente gráfica se representan los puntos pedidos que, efectivamente, se ajustan muy bien a una línea recta que pasa por el origen.



De nuevo, la pendiente p de esta recta puede obtenerse a partir de las coordenadas de un punto de la recta alejado del origen, por ejemplo el punto A indicado en la figura, con $(t_A^2; y_A) = (0,1570 \text{ s}^2; 0,770 \text{ m})$

$$p = \frac{0,770 \text{ m}}{0,1570 \text{ s}^2} = 4,904 \text{ m/s}^2$$

d) La aceleración de la gravedad sería el doble de la pendiente anterior

$$g = 2p = 9,808 \text{ m/s}^2$$

Este valor es muy próximo al estándar que solemos recordar³.

En cuanto a la incertidumbre de este resultado, es obviamente el doble de la incertidumbre Δp de la pendiente de la recta ajustada $y(t^2)$.

Cuando se quiere hacer una estimación "manual" de la incertidumbre de una pendiente, normalmente se trazan las rectas que con pendientes máxima y mínima se ajustan razonablemente a la serie de puntos experimentales y se obtiene la incertidumbre como

$$\Delta p = \frac{1}{2}(p_{\max} - p_{\min})$$

Pero en nuestro problema los puntos experimentales están tan bien alineados que es imposible trazar estas dos rectas y evaluar sus pendientes. Lo más que podemos hacer sin recurrir a métodos analíticos (fuera de lugar aquí) es estimar la posible falta de precisión al trazar la mejor recta sobre los puntos o al leer en la gráfica las coordenadas del punto auxiliar A sobre dicha recta. Siendo quizá pesimistas, podríamos estimar que, debida a ambas causas, la incertidumbre de la coordenada y del punto A puede ser de medio cuadrado en el papel milimetrado, es decir

$$\Delta y_A = 0,005 \text{ m}$$

Con esta estimación, las pendientes máxima y mínima serían

³ En Zaragoza, a poco más de 200 m sobre el nivel del mar y $41,66^\circ$ de latitud, el valor real es $g = 9,802 \text{ m/s}^2$.

$$\left. \begin{aligned} p_{\max} &= \frac{0,775 \text{ m}}{0,1570 \text{ s}^2} = 4,936 \text{ m/s}^2 \\ p_{\min} &= \frac{0,765 \text{ m}}{0,1570 \text{ s}^2} = 4,873 \text{ m/s}^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta g = 2\Delta p = p_{\max} - p_{\min} = 0,06 \text{ m/s}^2$$

Esta incertidumbre afecta a la segunda cifra decimal, por lo que no tiene sentido dar el tercer decimal de g , y el resultado del experimento sería

$$g = (9,81 \pm 0,06) \text{ m/s}^2$$

Pero aún hay otra fuente de error que hemos de analizar. Se han medido sobre la gráfica del enunciado los valores de y_{graf} para las diferentes posiciones de la bolita. Estos valores pueden estar afectados de pequeños errores aleatorios que tienden a cancelarse con el posterior proceso de ajuste a una recta, pero si existe un error en el factor de escala f , este error se transmitirá sistemáticamente a todos los valores de la altura y descendida, y a los resultados obtenidos a partir de ellos.

En concreto, hemos medido $L_{\text{graf}} = 24,0 \text{ mm}$, y una estimación razonable de su incertidumbre, teniendo en cuenta las posibilidades de interpolación visual entre los trazos de la regla, es $\Delta L_{\text{graf}} = 0,2 \text{ mm}$. Esto supone una incertidumbre relativa

$$\frac{\Delta L_{\text{graf}}}{L_{\text{graf}}} = 8 \cdot 10^{-3}$$

Aunque la relación de la coordenada y con L_{graf} es inversa, el error relativo transmitido es el mismo (como se discutirá más adelante) es decir

$$y = f y_{\text{graf}} = \frac{L y_{\text{graf}}}{L_{\text{graf}}} \rightarrow \frac{\Delta y}{y} = \frac{\Delta L_{\text{graf}}}{L_{\text{graf}}}$$

Por tanto, la incertidumbre relativa $8 \cdot 10^{-3}$ (0,8 %) se transmite sistemáticamente a todos los valores de la altura y , a la pendiente p de la gráfica y al valor de g .

$$\frac{\Delta g}{g} = 8 \cdot 10^{-3} \rightarrow \Delta g = 0,08 \text{ m/s}^2$$

Combinando las dos fuentes de incertidumbre de g , que son independientes, una estimación final razonable podría ser

$$\Delta g = \sqrt{0,06^2 + 0,08^2} \text{ m/s}^2 = 0,1 \text{ m/s}^2$$

De forma que el resultado del experimento tendría una incertidumbre relativa aproximada del 1 %

$$g = (9,8 \pm 0,1) \text{ m/s}^2$$

e) Llamando t_f al instante en que la bolita golpea el suelo y X al correspondiente alcance, se cumple que

$$\left. \begin{aligned} X &= v_0 t_f \\ h &= \frac{1}{2} g t_f^2 \end{aligned} \right\} \rightarrow X = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} = 0,941 \text{ m}$$

Para determinar la incertidumbre de este resultado, teniendo sólo en cuenta la incertidumbre de g , calculamos los valores máximo y mínimo de X , correspondientes respectivamente a los valores mínimo y máximo de g .

$$\left. \begin{aligned} g_{\min} &= 9,7 \text{ m/s}^2 \rightarrow X_{\max} = 0,9463 \text{ m} \\ g_{\max} &= 9,9 \text{ m/s}^2 \rightarrow X_{\min} = 0,9367 \text{ m} \end{aligned} \right\} \rightarrow \Delta X = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2} = 0,005 \text{ m}$$

También puede llegarse a este resultado tomando incrementos, en valor absoluto, en la dependencia $X(g)$

$$X = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \rightarrow \Delta X = v_0 \sqrt{2h} \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g^{3/2}} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{\Delta g}{2g} = X \frac{\Delta g}{2g} \rightarrow \frac{\Delta X}{X} = \frac{1}{2} \frac{\Delta g}{g}$$

Es decir, la incertidumbre relativa de X es la mitad⁴ de la de g . Como ésta es del 1 %, aquella es del 0,5 %

$$\Delta X = 0,005X \approx 0,005 \text{ m}$$

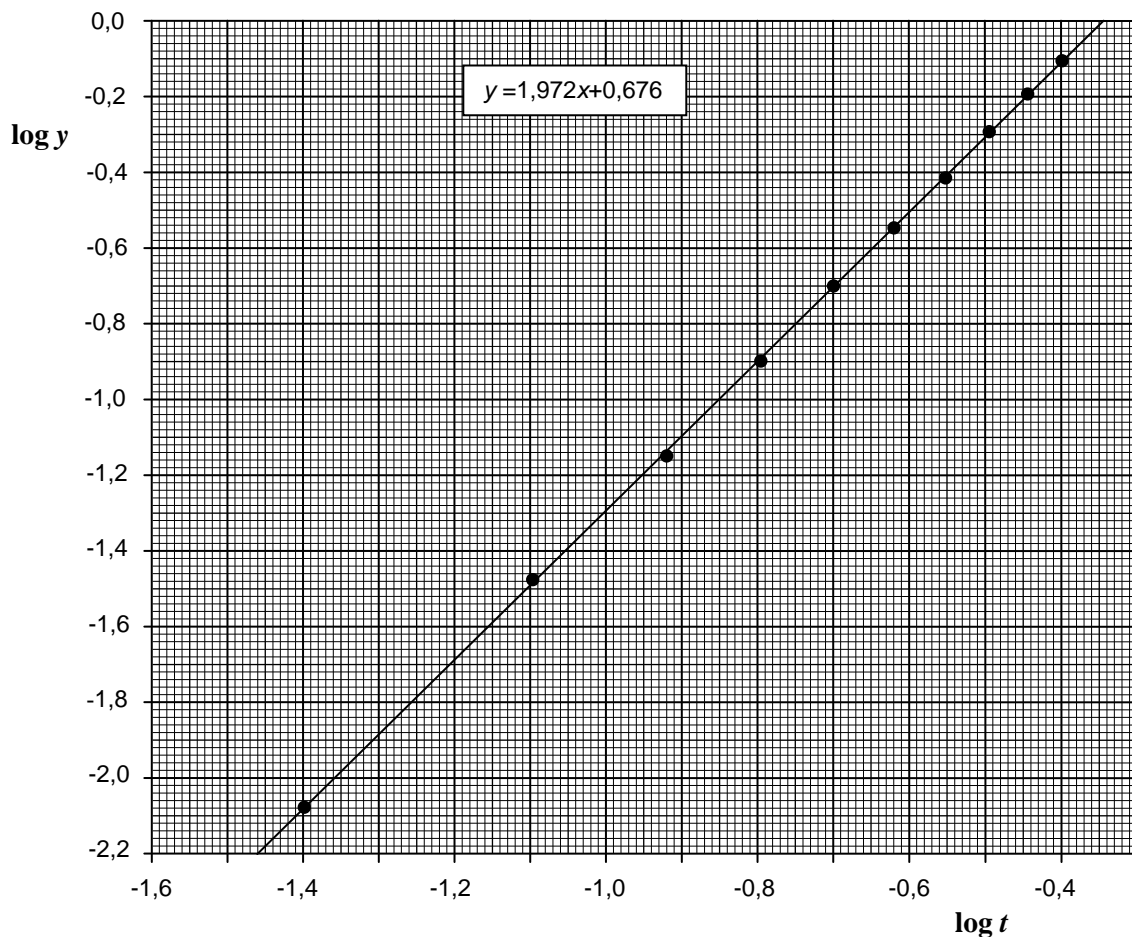
f) La dependencia $y(t)$ propuesta es potencial

$$y = k t^n$$

Esta dependencia puede "linealizarse" tomando logaritmos (en cualquier base) a ambos lados de la igualdad

$$\log y = \log k + n \log t$$

Por tanto, si la hipótesis es correcta, en una gráfica de $\log y$ frente a $\log t$ los puntos deben ajustarse bien a una línea recta, y la pendiente de dicha recta es precisamente n . En nuestro caso la gráfica es la siguiente:



Los puntos se ajustan muy bien a una línea recta de pendiente $p = 1,97$ (calculada por "mínimos cuadrados"), valor que es muy próximo al entero esperado $n = 2$.

⁴ Siguiendo el método indicado de tomar incrementos en valor absoluto, es fácil demostrar que si la dependencia $y(x)$ es potencial, $y = kx^n$, los errores se propagan en la forma $\frac{\Delta y}{y} = |n| \frac{\Delta x}{x}$. En el apartado e) se acaba de comprobar esta idea con $n = -1/2$, y en el apartado d) se ha aplicado con $n = -1$.