Estadísticos de variabilidad

Eduardo López
Dpto. MIDE. UCM

Objetivos

1. Comprender la necesidad de la variabilidad para el estudio de los fenómenos educativos.
2. Conocer las principales medidas de la variabilidad.
3. Aprender a calcular las medidas de variabilidad estudiadas.
4. Diferenciar y analizar distintas fuentes de variabilidad.
5. Analizar en qué medida las distribuciones se alejan del modelo normal en cuanto a apuntamiento y simetría.

Esquema

Introducción
1. Medidas numéricas de variabilidad
   1.1. El recorrido-L y la amplitud Total-AT
   1.2. Recorrido intercuartil o Rango semiintercuartil
   1.3. Desviación media- DM
   1.4. Varianza- s^2 y Desviación Típica- s
   1.5. El cociente de variación- CV
2. Varianza entre grupos y varianza dentro de los grupos
3. Variabilidad y distribuciones
   3.1. Distribuciones normales vs. anormales
   3.2. Apuntamiento o curtosis
   3.3. Asimetría

Introducción

Para estudiar un grupo o conjunto de datos de una variable es necesario reducirlo a promedios de tendencia central (entre otros, la media) y de variabilidad. Dice Kerlinger (1975, 73) que

> "para estudiar problemas científicos y responder a preguntas científicas, debemos estudiar diferencias entre fenómenos. Sin diferencias, sin variación, no hay modo de determinar las relaciones entre variables".

Unos conjuntos de datos se pueden estudiar o expresar desde dos puntos de vista, esto es, desde el peso o cantidad predominante o prototípica del grupo, también llamada tendencia central, y desde la variabilidad promedio respecto de alguna norma, usualmente la que se sirve de tendencia central. Ambas clases de datos compendian conjuntos de puntuaciones, pues ambas son puntuaciones de grupo, representan con un solo dato a todo el grupo; pero dichos compendios expresan dos importantes facetas de los datos, su peso, densidad o cantidad promedio y su desviación.

Pero mientras el primer índice es expresión de las puntuaciones promediadas, el segundo precisa referirlo a un punto de referencia, a una comparación. En este sentido puede afirmarse que la ciencia surge de la fórmula: (X_{ij} - *media* de X_j). Afirma Fisher (1970: Ferguson, 1986, 71):

> "una población de individuos idénticos en todos los sentidos se define completamente por medio de la descripción de cualquier individuo, junto con el número de individuos en el grupo. Las poblaciones que son objeto de estudio estadístico siempre presentan variación en uno o más sentidos".

Es decir, si todos los sujetos X_{ij} fueran idénticos, para el conocimiento de todos bastaría con el conocimiento de uno de ellos. Pero si cada X_{ij} varía de su *media* nos podemos preguntar por qué esto es así, a qué es debido. Así, pues, es preciso estudiar las diferencias entre individuos para efectuar cualquier tipo de indagación. Se puede estudiar la diferencia de cada sujeto respecto de algún promedio, p.e. la *media* aritmética; pero cuando se estudian las diferencias de todos los sujetos respecto de algún promedio se recurre a estadísticos grupales de dispersión como la amplitud total, el recorrido, la desviación *media*, varianza, desviación típica, recorrido intercuartílico, recorrido semiintercuartílico, cociente de variación.

1. Medidas numéricas de variabilidad

1.1. El recorrido-L y la Amplitud Total-AT

No suelen los autores distinguir entre amplitud total, recorrido o rango (Cfr. Pérez Juste, 1985, 107), denominación idéntica de un índice del que se dice que es de dispersión que únicamente tiene en cuenta sus valores extremos, lo que -dicen- puede ocultar características relevantes de las series. Tal vez la distinción que se establece a continuación carezca de reconocimiento en los manuales de muchos otros autores pero la distinción entre recorrido y amplitud total tiene su justificación y cierto grado de utilidad. Se está hablando de aquella medida que expresa la distancia o diferencia entre la medida más grande y la más pequeña pero esta distancia puede tener dos lecturas. De ahí la utilidad de distinguir entre *recorrido* y *amplitud total*.

Por *amplitud total (AT)* se entiende el recorrido teórico de una variable, es decir, la máxima diferencia que en teoría puede existir entre las puntuaciones máxima y mínima de una distribución. Esta dependerá de cuáles sean las puntuaciones extremas posibles que se pueden obtener. Sin embargo, una cosa es la amplitud total y otra cosa es el *recorrido* (L) de las puntuaciones empíricas que se dan en una distribución, recorrido que puede ser inferior al de la amplitud total o al menos nunca superior.

Una prueba objetiva de matemáticas de 50 preguntas tiene una amplitud total de 51 puntuaciones, desde la puntuación 0 hasta la 50. Pero si un determinado grupo, por la aplicación de la prueba, obtiene unas puntuaciones que varían desde 13 hasta 47 el recorrido de la distribución, aunque teóricamente puede ser de 51, en la práctica en este grupo es de

35: (47 - 13) + 1 = 35. Por tanto, amplitud total y recorrido son medidas de variabilidad diferentes.

Supongamos un ejemplo, en el que cada uno (*Xijec*) de los 10 alumnos extraídos al azar de una clase o grupo de clase de 6º de Educación Primaria recibe un tratamiento (*T*) metodológico-didáctico, consistente en clase convencional (*EC*) para aprender matemáticas, y que al final del curso se les aplica una prueba consistente en 15 preguntas, puntuando cada una de ellas con un punto. Puede cada uno tener al final la puntuación máxima de 15 puntos y mínima de 0. Supóngase que los resultados han sido los siguientes, indicándose la suma de las puntuaciones directas (ΣXijec), la suma de las puntuaciones directas previa elevación al cuadrado (ΣX^2ijec), la *media* aritmética y el número de alumnos medidos:

Grupo de tratamiento-T_{ec} : Xijec:	ΣXijec: 67	*Media: 6.7*
7,8,5,7,9,4,4,6,7,10	ΣX^2ij: 485	n_{jec} : 10

En el estadístico anterior la amplitud total era 16: (15 - 0) + 1; el recorrido de 7: (10 - 4) + 1.

El *uso* de este tipo de medidas es muy restringido. Suelen usarse para formar intervalos o para tener una idea aproximada y primera sobre los valores entre los que fluctúa la serie. Sin embargo, el uso del recorrido y de la amplitud total puede tener *inconvenientes*, el primero de los cuales se refiere a que con muestras grandes es una medida descriptiva inestable; y el segundo alude a que el recorrido no es independiente del tamaño de la muestra, excepto bajo especiales circunstancias. Dice Ferguson (1986, 72) que

> "Para distribuciones que llegan a 0 en los extremos, existe más posibilidad de obtener valores extremos en las muestras grandes que en las pequeñas. Consecuentemente, los recorridos calculados para muestras compuestas por diferente número de casos no son directamente comparables".

1.2. Recorrido intercuartil ó Rango semi-intercuartil

Este estadístico de muchos modo se ha nombrado, incluso *amplitud semiintercuartil*. Baste insertar la fórmula y comentar brevemente: $Q = (Q_3 - Q_1) / 2$.

Como consta en la fórmula, es la distancia *media* entre el cuartil tercero y el primero. Indica la densidad o concentración de las puntuaciones en una distribución, de tal modo que cuando la puntuación *Q* es alta es también alta la densidad de las puntuaciones en el centro de la tabla o distribución, mientras que es baja si el valor de *Q* es bajo.

1.3. Desviación media-DM

Cuando se habla de medidas de variabilidad nos estamos refiriendo a medidas de grupo o promedios que expresan dispersión *media* de un grupo. Ambas medidas -tendencia central y variabilidad- son básicas para poder estudiar las unidades de observación (puntuaciones individuales): Mientras que las medidas de tendencia central desempeñan un papel de ponderación o *normativo*, y pueden existir sin otras medidas, excepto las puntuaciones de las que proceden, por el contrario las de variabilidad necesitan una norma o punto de referencia o de comparación; es decir, existen porque expresan la *distancia* desde puntuaciones individuales a una norma. Para que exista variabilidad como puntuación de grupo es preciso hacer lo siguiente:

1) Un punto de partida, que son las puntuaciones individuales;
2) La obtención de una medida de tendencia central, que sirva de norma o referencia para los sujetos de todo el grupo;
3) Calcular la distancia entre las puntuaciones individuales y la norma del grupo; y
4) Promediar las distancias, que requiere previa suma de las anteriores y división posterior de tal suma entre el número o tamaño del grupo.

Así, pues, se trata de la siguiente fórmula: Σ (X_{ij} - *media* de X_j) / n_{ij}.

Sin embargo, la expresión algebraica Σ (X_{ij} - *media* de X_j), por una de las propiedades de la *media* aritmética, la de equidistar numéricamente de las puntuaciones componentes, resulta igual a 0. Por tanto, se precisa de alguna solución:

- Se puede recurrir a convertir dichas puntuaciones diferenciales a valores absolutos; y
- Se puede recurrir a elevar al cuadrado las puntuaciones diferenciales.

Si se recurre a convertir las puntuaciones diferenciales a valores absolutos, a sumarlas y promediarlas, es cuando hablamos de desviación *media*. Se puede definir la *desviación media-DM* como la *media* aritmética de las desviaciones absolutas respecto de la *media* aritmética; es la *media* de las desviaciones:

D.M. = $\Sigma(|X_{ijec}$ - *media* de $X_{jec}|)$ / n_{ij}.

En el ejemplo, que se cita en la tabla anterior, el grupo de 10 alumnos de *Enseñanza Convencional,* tiene una DM.
Es la siguiente:

D.M. = $\Sigma(|X_{ijec}$ - *media* de $X_{jec}|)$ / n_{ij} = 15.6 / 10 = 1.56.

Es preciso reconocer que no es un índice estadístico usual en el análisis estadístico, ya que no es manipulable de modo algebraico fácilmente porque usa valores absolutos. Por otra parte, es muy sensible a puntuaciones atípicas o extremas de una distribución, con lo que, cuando eso ocurre, se distorsiona el valor de representatividad que de la variabilidad o desviación *media* tiene la *desviación media*. Sin embargo, se usa habitualmente en los manuales, al menos por razones pedagógico-didácticas, dado que ilustra muy bien cuál es el significado de las medidas de promedio de dispersión.

1.4. Varianza-s^2 y desviación típica-s

Se decía más arriba que la expresión algebraica Σ (X_{ijec} - *media* de X_{jec}) resultaba igual a 0 y que, por consiguiente, la expresión Σ (X_{ijec} - *media* de X_{jec})/n_{ij} en consecuencia resultaba 0. Se había apuntado que una de las soluciones era la convertir las puntuaciones diferenciales a valores absolutos. Pero otra solución, desde el punto de vista estadístico mejor, era la de recurrir a elevar al cuadrado las puntuaciones diferenciales.

Unos estadísticos alternativos a la *desviación media* pero con idéntica pretensión, la de encontrar una medida de la variabilidad promedio, son la *varianza* y la *desviación típica*. Mientras la desviación *media* recurrió a las puntiaciones diferenciales en valor absoluto para obviar el problema de que la suma de dichos valores era igual a 0, ambos estadísticos recurren al procedimiento de elevar al cuadrado las puntuaciones diferenciales, esto es, las puntuaciones diferenciales cuadráticas.

Suma cuadrática dentro del grupo

Si solamente se recurriera a la suma de las puntuaciones diferenciales cuadráticas sin promediarlas se estaría hablando de la suma de cuadrados o *suma cuadrática-SC* : Σ (X_{ijec} - *media* de X_{jec}) ^{2} que, por ser de puntuaciones de los sujetos del grupo o desviaciones internas al grupo, se puede denominar *suma cuadrática intragrupo*, de enorme uso en Estadística.

Varianza. Pero ahora interesa el sumatorio anterior por ser la base del cálculo de un estadístico como la *varianza*, a la que se llega mediante la división de este sumatorio por el número de casos en orden a calcular u obtener la variabilidad promedio en términos cuadráticos. Existen dos métodos para definir la varianza y ambos se usan comúnmente:

- Uno de ellos define la varianza como el cociente del sumatorio de las desviaciones cuadráticas entre el número de casos: $s^2 = \Sigma$ (X_{ijec} - *media* de X_{jec}) ^{2} / n_{ij}.
- El otro consiste en dividir la suma de cuadrados por (n_{ijec} - 1). Así: $s^2 = \Sigma$ (X_{ijec} - *media* de X_{jec}) ^{2} / (n_{ijec} - 1).

Ambas fórmulas proporcionan estimaciones de la varianza de la población: σ^2. Sin embargo, la diferencia esencial entre ambas fórmulas reside en que una está sesgada y la otra no:

- Cuando la suma de cuadrados se divide entre n_{ijec}, la estimación de σ^2 tiene un sesgo hacia valores menores que σ^2. En algunos casos en que está implicada la estadística descriptiva, por conveniencia y simplicidad se recurre al uso de n_{ijec}, pero no será lo habitual .
- Cuando la suma de cuadrados se divide entre (n_{ijec} - 1) la estimación de σ^2 no muestra una tendencia sistemática a ser mayor o menor que σ^2. "En general -dice Ferguson (1986, 75)- en este libro el símbolo s^2 se utilizará para referirse a la estimación insesgada obtenida mediante la división de la suma de cuadrados por N - 1".

Decir en la investigación *variabilidad* es decir *varianza*. La varianza es, pues, una medida de la diseminación o dispersión de las puntuaciones, que expresa el grado en que las puntuaciones de los sujetos de un grupo difieren entre sí. Si medimos una variable con algún tipo de prueba, p.e. el rendimiento verbal de los alumnos, se obtienen calificaciones para cada sujeto, algunas de las cuales serán idénticas entre sí y otras diferirán, pero probablemente casi todas serán distintas de la norma de grupo o medida de tendencia central, que ordinariamente es la media aritmética. Es decir, las calificaciones varían y exhiben una amplia variabilidad respecto de la norma o, dicho de otra forma, poseen varianza, porque hay amplias diferencias individuales, dado que los sujetos de un grupo no suelen ser homogéneos.

En el ejemplo de los datos de los 10 alumnos de 6º de Educación Primaria, que aprendieron matemáticas mediante un sistema convencional-*EC,* los alumnos obtienen unas puntuaciones individuales, las cuales tienen una *media* de 6.7.

X_{iec} : Gr.tratamiento-T_{ec}	**(X_{iec} - media$_{ec}$) = x_{iec}**	**(X_{iec} - x_{iec}) = media$_{ec}$**
7	7 - 6.7 = +0.3	7 - 0.3= 6.7
8	8 - 6.7 = +1.3	8 - 1.3= 6.7
5	5 - 6.7 = -1.7	5 + 1.7= 6.7
7	7 - 6.7 = +0.3	7 - 0.3= 6.7
9	9 - 6.7 = +2.3	9 - 2.3= 6.7
4	4 - 6.7 = -2.7	4 + 2.7= 6.7
4	4 - 6.7 = -2.7	4 + 2.7= 6.7
6	6 - 6.7 = -0.7	6 + 0.7= 6.7
7	7 - 6.7 = +0.3	7 - 0.3= 6.7
10	10 - 6.7 = +3.3	10 - 3.3=6.7
ΣXij: 67	0. (En valor absoluto: 15.6)	67
ΣX^2ij: 485	36.1	448.90
Media: 6.7	0. Valor absol.: 15.6/10 = 1.56: DM	6.7
n_{jec} :10	10	10

Si a las puntuaciones individuales de esos alumnos se resta la *media* se tienen los datos de la columna segunda, que son las puntuaciones diferenciales. Estas puntuaciones expresan básicamente dos cosas, esto es, diferencias individuales y errores de medida. Las diferencias individuales provienen de factores que afectan a cada alumno particularmente; son fruto de factores genéticos, ambientales y de ambos en interacción. Es decir, son fruto de la capacidad del alumno, de su personalidad, de las aptitudes, ... y también de cómo haya estudiado, de cómo se encontraba el día del examen, del ambiente de clase para realizar el examen. Etc. Pero, además, son fruto de los errores del instrumento de medida del rendimiento matemático; y esto ocurre cuando el instrumento no es del todo fiable.

Estas son diferencias o varianza entre individuos dentro del grupo. ¿Cuánto es su valor? La *Suma Cuadrática dentro del grupo* de *Enseñanza Convencional*, tal como se indica en la base de la columna de puntuaciones diferenciales, vale 36.1, valor que resulta de sumar cada puntuación diferencial elevada al cuadrado. Este valor resulta también de la siguiente fórmula:

$$SC_{\text{intragrupo}} = \Sigma X^2 ij - (\Sigma Xij)^2 / n_{\text{ijec}} = 485 - 67^2 /10 = 36.1.$$

Si se quiere promediar esta variabilidad se obtiene la varianza, cuyo símbolo es: s^2.

$$s^2 = \{\Sigma X^2ij - (\Sigma Xij)^2 / n_{ijec}\} / n_{ijec} = 36.1 / 10 = 3.61$$

Desviación típica. Dos de los estadísticos más parecidos son la desviación *media* y la desviación típica. Ambos son promedios no cuadráticos de la variabilidad dentro de un grupo. La única, aunque sustancial, diferencia entre ambos radica en que la desviación típica-*s* proviene de la raíz cuadrada de la suma de las puntuaciones diferenciales, previa elevación al cuadrado, mientras que la Desviación *Media* proviene directamente de las puntuaciones diferenciales en valor absoluto.

Así, pues, si a la varianza se extrae la raíz cuadrada se tiene la desviación típica: $\sqrt{s^2} = s$. En nuestro caso: $\sqrt{3.61} = 1.90$. Mientras la Desviación *Media* valía 1.56, la desviación típica vale 1.90. La desviación típica es un índice más estable que la desviación *media* por cuanto las puntuaciones extremas pesan menos en el conjunto. Por otra parte, mientras la desviación *media* tiene finalidad de uso didáctico, la desviación típica es el índice usual de variabilidad de un grupo.

Supongamos que otro grupo de 10 alumnos extraídos al azar de la misma clase de 6º de Educación Primaria que la anteriormente aludida recibe un tratamiento (*T*) alternativo al de la Enseñanza Convencional, p.e. Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO), igualmente para aprender matemáticas, al final de cuyo tratamiento esos otros 10 alumnos obtienen unas puntuaciones (*Xijeao*) fruto de la aplicación de la misma prueba que el grupo anterior de *Enseñanza Convencional* (*EC*).

Gr. tratamiento-T_{eao} : Xijeao	ΣXijeao: 97	*Media: 9.7*
12, 8, 11, 10, 7, 12, 9, 11, 8, 9	ΣX^2ijeao: 969	n_{jeao} : 10

Ese nuevo grupo presenta una desviación *media* de 1.50 = /15/ : 10. La suma cuadrática dentro del grupo de EAO es: SC_{eao} = 28.1. La varianza (s^2) es 28.1/10 = 2.81. La desviación típica es: $s = \sqrt{2.81} = 1.68$.

Grupo tratamiento- T_{eao}	**X_{1eao} - media$_{eao}$**	**(X_{ieao} - x_{ieao}) = media$_{eao}$**
12	12 -9.7 =+2.3	12-2.3=9.7
8	8 -9.7 =-1.7	8+1.7= 9.7
11	11 -9.7 =+1.3	11-1.3=9.7
10	10 -9.7 =+0.3	10-0.3=9.7
7	7 -9.7 =-2.7	7+2.7= 9.7
12	12 -9.7 =+2.3	12-2.3=9.7
9	9 -9.7 =-0.7	9+0.7= 9.7
11	11 -9.7 =+1.3	11-1.3=9.7
8	8 -9.7 =-1.7	8+1.7= 9.7
9	9 -9.7 =-0.7	9+0.7= 9.7
ΣXij$_{eao}$: 97 ΣX^2ij$_{eao}$: 969 *Media*$_{eao}$: 9.7 n_{jeao} 10	0. En valor absoluto = 15. 28.1 0. En valor absoluto: 1.5 (DM) 10	97 940.90 9.7 10

1.5. El Cociente de Variación-CV

Para los fines del presente apartado se incluye una tabla comparativa de los diversos índices estadísticos hasta ahora analizados, para comparar después la variabilidad relativa de ambos grupos.

Indices estadísticos	**Grupo de Enseñanza Convencional-EC**	**Grupo de Enseñanza Asistida por Ordenador-EAO**
DM	1.56	1.50
SC	36.1	28.1
S^2	3.61	2.81
S	1.90	1.68
Media	6.7	9.7

De la contemplación de dicha tabla se pueden entresacar algunas conclusiones por lo que variabilidad se refiere. La desviación *media* en ambos grupos es similar. La Suma Cuadrática es igualmente similar, aunque levemente superior la del primer grupo. En *varianza* sigue siendo superior la variabilidad del primer grupo y en *desviación típica* igualmente, aunque no es considerable. En conjunto es algo más heterogéneo el grupo primero que el segundo.

Sin embargo, no se ha hecho alusión a la *media* de ambos grupos. En efecto, no sería idéntica la cantidad de variabilidad cuando de dos grupos que tuvieran una *desviación típica* de 1.90, uno tuviera una *media* de 15 y otro de 9: Es más variación cuando la *media* es 9 que cuando es 15. Aquí pasa lo mismo: ¿es idéntica la variabilidad -*desviación típica*- cuando la *media* en un grupo es 6.7 (grupo de *EC*) y en el otro (grupo de *EAO*) 9.7, si ambos tuvieran idéntica *desviación típica*? ¿*Y* si además también es diferente ésta?

Para responder a estas preguntas, los estadísticos han creado un índice comparativo de variabilidad, que consiste en referir la *desviación típica* del grupo a su respectiva *media*, así:

Cociente de variación-CV = s/*media*.

Indices estadísticos	**Grupo de Enseñanza Convencional-EC**	**Grupo de Enseñanza Asistida por Ordenador-EAO**
S	1.90	1.68
Media	6.7	9.7
Cociente de Variación-CV	s_{ec}/*media* = 1.90 / 6.7 = 0.283	s_{eao}/*media*$_{eao}$ = 1.68 / 9.7 = 0.172

Se puede concluir de la comparación de ambos índices que el grupo primero es sensiblemente más heterogéneo que el segundo.

Es decir, el cociente de variación-CV es un índice comparativo de variabilidad que compara la variabilidad de:

- dos o más variables en un mismo grupo, en orden a comprobar en qué variable el grupo es más homogéneo; y

- dos o más grupos en una misma variable, en orden a comprobar qué grupo es más homogéneo en la variable.

Varianza entre grupos y varianza dentro de los grupos

Hasta ahora se ha visto que la variabilidad de los grupos -desviación *media*, SC, *varianza, desviación típica*- ha sido variabilidad interna a los grupos, es variabilidad entre los sujetos dentro de su grupo; en resumen, es variabilidad de diferencias individuales.

Contémplese la columna 1 en la que los 20 alumnos están unidos; los datos corresponden al rendimiento en matemáticas de 20 alumnos de 6º de Educación Primaria, independientemente de que hayan estudiado por un procedimiento de *Enseñanza Convencional* o por un procedimiento de *Enseñanza Asistida por Ordenador.* Estos sujetos rinden de promedio 8.2 y, por tanto, cada uno se desvía de su *media* total. Expresada esta variabilidad en Sumas Cuadráticas vale lo que figura en la base de la columna 2, esto es, 109.2, que resulta de sumar las puntuaciones diferenciales al cuadrado. Esta es la máxima variabilidad de las puntuaciones que, por estar expresadas en Sumas Cuadráticas, es la *Suma cuadrática* total ó SC_{tot}. Esta es la máxima variabilidad posible, que puede existir entre las puntuaciones y que es preciso explicar, esto es, saber de dónde procede o a qué es debida.

Grs. trat T_{ec+eao} (1)	**X_{iT} - media trat.T_{ec+eao} (2)**	**Gr.trat. T_{ec} (3)**	**Gr.trat. T_{eao} (4)**	**X_{iec} - media$_{ec}$ (5)**	**X_{1eao} - media$_{eao}$ (6)**	**X_{iec} - x_{iec} = media$_{ec}$ (7)**	**X_{ieao} - x_{ieao} = media$_{eao}$ (8)**	**media $_{Tec}$ - media$_T$ (9)**	**media $_{Teao}$ - media$_T$ (10)**
7	7-8.2=-1.2	7	12	+0.3	+2.3	7-0.3= 6.7	12-2.3=9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
8	8-8.2=-0.2	8	8	+1.3	-1.7	8-1.3= 6.7	8+1.7= 9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
5	5-8.2=-3.2	5	11	-1.7	+1.3	5+1.7= 6.7	11-1.3=9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
7	7-8.2=-1.2	7	10	+0.3	+0.3	7-0.3= 6.7	10-0.3=9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
9	9-8.2=+0.8	9	7	+2.3	-2.7	9-2.3= 6.7	7+2.7= 9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
4	4-8.2=-4.2	4	12	-2.7	+2.3	4+2.7= 6.7	12-2.3=9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
4	4-8.2=-4.2	4	9	-2.7	-0.7	4+2.7= 6.7	9+0.7= 9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
6	6-8.2=-2.2	6	11	-0.7	+1.3	6+0.7= 6.7	11-1.3=9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
7	7-8.2=-1.2	7	8	+0.3	-1.7	7-0.3= 6.7	8+1.7= 9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
10	10-8.2=+1.8	10	9	+3.3	-0.7	10-3.3=6.7	9+0.7= 9.7	6.7-8.2 = -1.5	9.7-8.2 = +1.5
12	12-8.2=+3.8								
8	8-8.2=-0.2								
11	11-8.2=+2.8								
10	10-8.2=+1.8								
7	7-8.2=-1.2								
12	12-8.2=+3.8								
9	9-8.2=+0.8								
11	11-8.2=+2.8								
8	8-8.2=-0.2								
9	9-8.2=+0.8								

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
ΣX_{ij}:164	0	67	97	0	0	67	97	-15	+15
ΣX^2_{ij}:1454	109.2	485	969	36.1	28.1	448.9	940.9	22.5	22.5
Media: 8.2	0	6.7	9.7	0	0	6.7	9.7	0	0
$n_{j:}$: 20	20	10	10	10	10	10	10	10	10

Si ésta es la variabilidad total ¿tiene componentes? La respuesta es obvia. Ya se ha visto que una parte de la variabilidad total corresponde a la que cada grupo produce. Por tanto, si se quisiera calcular la variabilidad interna a los dos grupos habría que sumar la que produce uno y la que produce otro grupo. Expresada esta variabilidad en términos de *Suma cuadrática*-SC sería la que produce el grupo primero (columna 3) y la que produce el grupo segundo (columna 4): 28.1 + 36.1 = 64.2. Es la *Suma cuadrática* dentro de los grupos o intragrupo ó SC_{dentro}.

Esta varianza total, pues, tiene un componente, que surge de las diferencias existentes entre los sujetos de cada uno de los grupos. Es *la suma cuadrática dentro de los grupos*. Se obtiene sumando en cada grupo las distancias (diferencias) al cuadrado entre las puntuaciones de cada sujeto y su correspondiente promedio (media) de tendencia central. Esta es una variabilidad interna a los grupos, propia de los errores que se cometen al medir las variables y de la especificidad de los sujetos, esto es, de su herencia, de las condiciones del ambiente que le haya tocada vivir tanto en el presente como en el pasado y de la interacción entre ellos.

Hágase una pausa para progresar. Así, pues, no todas las diferencias son de igual naturaleza en los grupos y, en general, en la ciencia. Hasta ahora se han identificado dos tipos de diferencias:

- Por una parte, se ha identificado una variabilidad de todos los sujetos independientemente del grupo al que pertenezcan. Esto es, identificada la *media* total, cada sujeto se *distancia* numéricamente del promedio total o medida de tendencia central (*media* total). El cuadrado de estas puntuaciones diferenciales da lugar a la *Suma cuadrática* total.

- Por una parte, los miembros de un grupo normalmente difieren entre sí. Existe, por tanto, variabilidad entre los miembros de un grupo, la cual es variabilidad interna o *intragrupo*. Esto mismo se puede afirmar de cuantos grupos haya y será tanta cuantos grupos haya. Así, pues, la existencia de variabilidad interna a un grupo se evidencia mediante la medición de la *distancia* numérica que existe desde cada una de las puntuaciones de los sujetos del grupo al promedio o medida de tendencia central (media).

Por tanto, si hay una variabilidad total y una parte ¿qué es la otra parte? Dicho numéricamente: Si la *suma cuadrática* total vale 109.2 y un componente de esa variabilidad total es 64.2, que es suma cuadrática dentro de los grupos, el resto (109.2 - 64.2 = 45) ¿qué es? El centro de atención se orientará a explicar esta nueva fuente de variabilidad.

- Es preciso caer en la cuenta de que los grupos pueden diferir entre sí; es decir, existe también variabilidad *entre grupos*, porque los grupos, por muy homogéneos que sean, como tales entre sí, suelen diferir. Basta que tengan promedios de tendencia central distintos para que haya variabilidad entre grupos. Y la existencia de variabilidad entre grupos se evidencia mediante la medición de la distancia de los respectivos promedios a una norma superior al grupo, que es el promedio supragrupo (de todos los sujetos independientemente del grupo al que pertenezcan) o la media total.

Veámoslo numéricamente en el ejemplo. Se ha dicho que cada grupo produce diferencias individuales, siempre que los distintos sujetos del grupo no puntúen igual que la *media* de dicho grupo. Por tanto, si a la puntuación de cada sujeto de un grupo se resta la puntuación diferencial resultaría la *media* del grupo. Esto es lo que se ha hecho en la columna 7 para el grupo de *Enseñanza Convencional* y en la 8 para el de *Enseñanza Asistida por Ordenador*. Deducida la puntuación diferencial, cada sujeto de su grupo es idéntico a los demás. Cualquier sujeto de su grupo sería el prototipo del grupo.

Pero nótese que los 10 sujetos del grupo de *EC* puntúan 6.7 y los 10 del de *EAO* puntúan 9.7. Es decir, hay diferencias *entre los grupos*. ¿Cuánta? Las diferencias entre los grupos se hacen en función de las diferencia que cada grupo tiene con respecto a la *media* total, que actúa como norma de rango superior o norma supragrupo. Esto quiere decir, tal como se indica en las columnas 9 y 10, que cada grupo, por ser dos y tener el mismo tamaño, difiere 1.5 de la *media* total, en el primer caso por debajo (signo negativo) y en el segundo por encima (signo positivo).

Esto es, la suma de estas nuevas y *sistemáticas* puntuaciones diferenciales cuadráticas en ambos grupos vale 22.5 y, por tanto, para los dos grupos será: 22.5 (2) = 45. Esto es la *Suma cuadrática* entre grupos.

Así, pues, en forma de recapitulación se puede decir que existen tres distintos tipos de puntuaciones, que es preciso destacar:

1. Existen *puntuaciones individuales* de los sujetos de cualquier grupo, es decir, cada sujeto en su grupo arroja una puntuación, que entre sí son coincidentes o no;
2. Cada grupo tiene una puntuación promedio de tendencia central, *media de cada grupo*, que cumple la función de ser la norma del grupo, es decir, es la referencia para interpretar las distintas puntuaciones del grupo; y
3. Independientemente de las puntuaciones individuales de los sujetos de los distintos grupos y de la media de cada grupo, existe una puntuación global de tendencia central, que es normativa, llamada *media total* de todos los sujetos.

Así, pues, la SC_{tot} tiene dos componentes: SC_{entre} y SC_{dentro}.

$$SC_{tot} = SC_{dentro} + SC_{entre}$$

Hay, por tanto, diferentes tipos de varianza a la hora de explicar la varianza total. De entre las muchas clases de varianza emerge una clasificación relacionada con la estabilidad de la causa de la variabilidad. Así, se puede hablar de *varianza sistemática* y varianza no sistemática. La sistemática "es la variación en las medidas debida a ciertas influencias conocidas o desconocidas que 'hacen' que las puntuaciones se inclinen más en una dirección que en otra" (Kerlinger, 1975, 76).

Es decir, cuando se puede predecir que el comportamiento de las puntuaciones de un grupo irán sistemáticamente en una determinada dirección, esa inclinación de las puntuaciones será debida a una fuente de varianza sistemática. En nuestro ejemplo, cada sujeto del grupo de

Enseñanza Convencional tiende a puntuar 1.5 puntos por debajo, mientras cada sujeto de *EAO* tiende a puntuar sistemáticamente 1.5 puntos por encima. Se puede decir que existe alguna variable o fuente que es sistemática, porque hace que los alumnos de un grupo, como tal grupo, tienden a puntuar por debajo y otros por encima. El motivo puede ser diverso pero, mientras no se demuestre lo contrario, hay que achacarlo a que los dos grupos han recibido dos métodos distintos para aprender matemáticas durante un tiempo.

Como final, se puede escribir: $SC_{tot} = SC_{dentro} + SC_{entre}$.
Sustituyendo: 109.2 = 64.2 + 45.

¿Cómo se llama esta *varianza* entre? Supóngase asimismo, que si se pretendiera medir el grado de influencia de la metodología didáctica en el rendimiento en conocimientos de investigación y estadística de los alumnos universitarios de segundo año de Pedagogía en la asignatura de *Métodos y diseños de investigación educativa*, se podrían exponer dos grupos de alumnos a sendos métodos (I y II), al final de cuya exposición se podría medir el grado en que los conocimientos se han modificado, suponiendo que al inicio fueran igual.

En este caso la variable independiente, metodología didáctica, ha sido manipulada y las diferencias entre los grupos, la varianza entre grupos, si existiera, se debería presumiblemente a la manipulación experimental. Esto es, el experimentador hizo algo a un grupo que fue diferente de lo que hizo al otro, y estos diferentes tratamientos hicieron diferentes los grupos y sus medias.

Aunque existen distintos tipos de varianza sistemática, ésta siempre es entre grupos porque afecta por igual a todos los sujetos del grupo. Pues bien, ante las distintas fuentes existentes de varianza sistemática una de las tareas del investigador consistirá en identificar o separar los variados tipos de varianza.

> "El científico trata de separar aquellas por las que se interesa de las que no le interesan. Y también debe separar de sus varianzas sistemáticas la varianza aleatoria. En realidad, la investigación puede definirse con precisión y técnicamente como estudio controlado de las varianzas" (Kerlinger, 1975, 77).

A esto se llama controlar la varianza.

De entre las varianzas sistemáticas de grupo existe una por la que se interesa directamente el investigador, es la varianza sistemática *experimental*, que surge como fruto de la manipulación de la variable independiente experimental. Pero existe, además, una *varianza no sistemática*, que es debida a las fluctuaciones o variaciones de las medidas debidas a la casualidad, al azar. Dado que de esta fuente de variabilidad no nos es conocido su origen, en estadística se la llama *varianza de error* y siempre es interna a los grupos. Dice Kerlinger (1975, 80):

> "Muchos, muchísimos acontecimientos y ocurrencias no pueden ser explicados. Mucha varianza elude la identificación y el control. Esto es varianza de error -por lo menos mientras la identificación y el control nos eludan".

En la página siguiente:

> " *Varianza de error* es la varianza que queda en un conjunto de medidas después de que se han eliminado de las medidas todas las fuentes conocidas de varianza sistemática".

Es decir, cuando el investigador ha intentado identificar todas las fuentes de varianza sistemática y no encuentra nuevas fuentes, el resto de la varianza total lo atribuye a factores aleatorios, que probablemente no lo serían si se tuviera un conocimiento más exacto de la naturaleza de las cosas. Dado que no sabe atribuirse esta varianza a factores conocidos se la denomina de muchas maneras: Varianza de error, varianza aleatoria, incluso varianza de ignorancia, la cual siempre es varianza dentro o interna a los grupos.

En efecto, dado que la varianza dentro de los grupos es varianza no sistemática, no se encuentra un factor que haga que las puntuaciones de un grupo varíen en una determinada dirección y, por tanto, es razonable considerar dicha varianza interna a los grupos como una medida de fluctuación casual.

La esencia del método estadístico, que se basa en estos conceptos, llamado *análisis de varianza,* compara ambos tipos de varianza, la sistemática debida a factores de grupo -en un diseño es varianza experimental- y la no sistemática ligada a fluctuaciones aleatorias. Pues bien, este método estadístico compara -divide- la varianza experimental con la varianza aleatoria o de error. Dicha comparación sirve de base para comprobar si las diferencias, si las hubiere, son meramente aleatorias o más bien hay base para pensar que son sistemáticas, con lo cual el factor experimental ha actuado probablemente.

2. Variabilidad y distribuciones

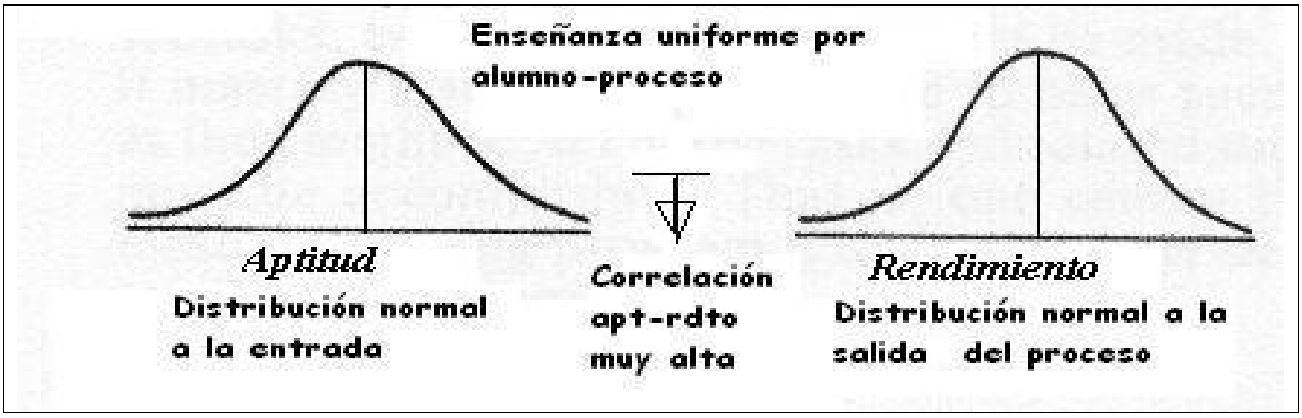
En el capítulo o tema de la variabilidad suele incluirse un apartado sobre distribuciones anormales, que tienen que ver con la variabilidad. Glass y Stanley (1974, 90) afirman que son cuatro las propiedades de los grupos de puntuaciones, a saber, la tendencia central, la variabilidad, la simetría y la curtosis. De la simetría se hablará más adelante en este mismo apartado

De las distribuciones normales ya se hablará con más detenimiento al hablar de los modelos de distribución muestral, dado que allí se alude a la distribución normal *standard* o curva normal de probabilidades o ampana de Gauss, y también de la distribución *t* de Student, que es también una distribución normal aunque no *standard*. Por tanto, en un intento de esquema se puede afirmar que las distribuciones pueden ser normales y anormales. Las primeras son las aludidas, que a la vez son simétricas.

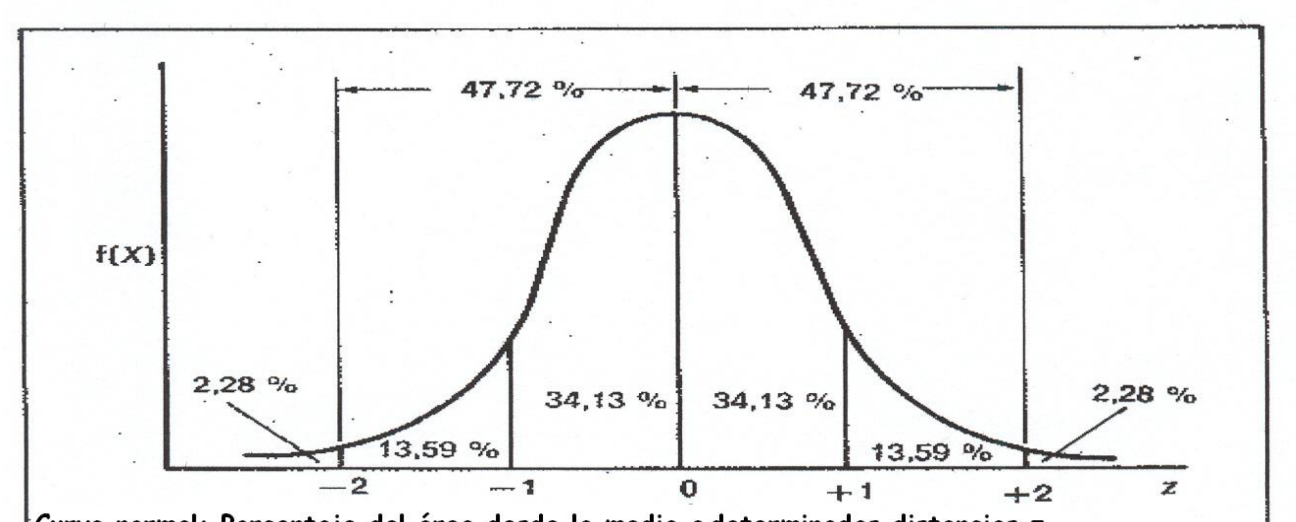
Las distribuciones anormales, de las que se hablará en este apartado, pueden ser simétricas o asimétricas. Las distribuciones anormales simétricas se clasifican por el apuntamiento (curtosis o kurtosis) en leptocúrticas, mesocúrticas y platicúrticas. Las distribuciones anormales asimétricas (*skewness*) se clasifican en asimétricas negativas o positivas. De todas ellas se hablará y, sobre todo, se comentará, en la medida que las páginas lo permitan, la concepción pedagógica subyacente a cada una de ellas o, al menos, a las de mayor interés pedagógico. Se formularán unas tesis pedagógicas al insertar las distintas distribuciones y se incluirá la fórmula e interpretación de los resultados.

1) La primera tesis que se puede formular es muy sencilla de enunciar: *Cuando se inicia el proceso de aprendizaje, la distribución de las aptitudes de aprendizaje a la entrada al proceso de enseñanza/aprendizaje viene a ser normal.*

Esto lo afirma e ilustra Block (1979, 6) al resumir el pensamiento de Benjamín S. Bloom (1968) en un excelente trabajo, que tiene total vigencia:



En efecto, al comienzo del aprendizaje las aptitudes suelen distribuirse normalmente. Se entiende por *aptitudes* el rendimiento previo, las aptitudes escolares, la inteligencia



Curva normal: Porcentaje del área desde la media a determinadas distancias z específica y muchas otras variables relevantes para el aprendizaje en el momento de entrada. Parece que de esto apenas hay duda en términos generales. Se puede afirmar que la distribución de las aptitudes es una distribución lo más parecida a la distribución normal *standard* o curva normal de probabilidades.

Esto de tal modo es así que si la curva se divide, más o menos artificialmente por algún punto, en *trozos* o áreas separadas por una desviación ó *z*, identifica seis grupos de sujetos, en este caso alumnos, que pueden ser calificados como *extremadamente bajos* (menos de 2 desviaciones ó *z*) en la variable aptitudinal previa a la entrada al aprendizaje, en *muy bajos* (entre menos 2 y menos 1 desviación), en *medio bajos* (entre menos una desviación y el centro 0 de la distribución), en *medio altos* (entre el centro 0 de la distribución y más una desviación), en *muy altos* (entre más una y dos desviaciones) y en *extremadamente altos* (por encima de dos desviaciones).

Ahora bien, lo más interesante de todo en el aprendizaje es cómo sale el alumno del proceso de enseñanza/aprendizaje. Por eso, se formula una nueva tesis.

2) Si como ilustra Block (1979), media entre la entrada y la salida una enseñanza, como allí se dice, *uniforme por alumno*, esto es, no recuperadora de las dificultades que va encontrando el alumno a lo largo del proceso sino igual para todos, entonces se puede afirmar: *Cuando media una enseñanza uniforme por alumno entre la entrada al aproceso de enseñanza y la salida de él, entonces la distribución del rendimiento final seguirá siendo normal.*

Aquí, *seguirá siendo normal* significa que seguirá habiendo al final del proceso de aprendizaje en forma de rendimiento un porcentaje similar al de la entrada de alumnos calificados como *extremadamente bajos, muy bajos, medio bajos, medio altos*, *muy altos* y *extremadamente altos.* Se ha reproducido al final la estructura inicial y, aunque todos pueden haber aprendido, sigue habiendo grupos heterogéneos en la clase.

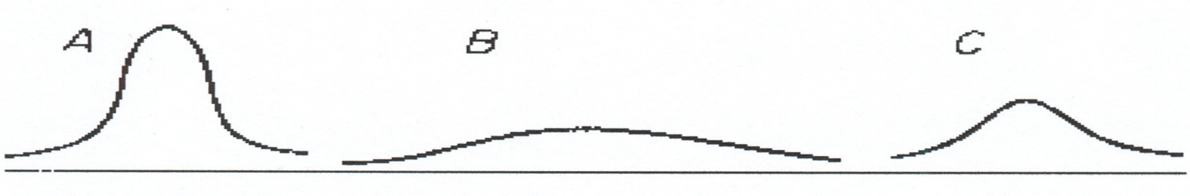
Esto ocurre al final del proceso cuando media una enseñanza *uniforme*. Pero también ocurre cuando, aun no mediando una enseñanza uniforme sino recuperadora, se obtienen medidas del rendimiento en los momentos iniciales del proceso, en los primeros meses, en las primeras unidades de aprendizaje. Esto se ilustra con los resultados de un examen en una asignatura de métodos y diseños de investigación educativa de unos alumnos universitarios de Pedagogía de primeros cursos, examen que evaluaba el aprendizaje en forma de rendimiento en un módulo primero sobre Éstadística Descriptiva (son datos reales; es una salida del programa de análisis de items *Iteman*).

Se han incluído en la última fila o casilla algunos de los estadísticos que el programa inserta. La distribución es lo más parecida a la distribución normal standard. Si esto se examina desde el punto de vista del apuntamiento, éste es de lo más normal o *mesocúrtica*. En efecto, uno de los estadísticos que el programa Iteman arroja es la *curtosis* ó Kurtosis, que vale 0.251. Detengámonos en este valor.

<table>
<tr><th>Núm. de pregunta</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia acumulada</th><th>Porcentaje acumulado</th><th>Porcentaje de alumnos examinados</th></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>+##</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>|</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>|</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>|##</td></tr>
<tr><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>5</td><td>|##</td></tr>
<tr><td>5</td><td>3</td><td>5</td><td>6</td><td>10-P_{10}</td><td>+#####</td></tr>
<tr><td>6</td><td>4</td><td>7</td><td>10</td><td>17</td><td>|#######</td></tr>
<tr><td>7</td><td>8</td><td>14</td><td>18</td><td>31-Q_1</td><td>|##############</td></tr>
<tr><td>8</td><td>4</td><td>7</td><td>22</td><td>38</td><td>|#######</td></tr>
<tr><td>9</td><td>9</td><td>16</td><td>31</td><td>53</td><td>|################</td></tr>
<tr><td>10</td><td>9</td><td>16</td><td>40</td><td>69</td><td>+################</td></tr>
<tr><td>11</td><td>6</td><td>10</td><td>46</td><td>79-Q_3</td><td>|##########</td></tr>
<tr><td>12</td><td>3</td><td>5</td><td>49</td><td>84</td><td>|#####</td></tr>
<tr><td>13</td><td>3</td><td>5</td><td>52</td><td>90-P_{90}</td><td>|#####</td></tr>
<tr><td>14</td><td>3</td><td>5</td><td>55</td><td>95</td><td>|#####</td></tr>
<tr><td>15</td><td>2</td><td>3</td><td>57</td><td>98</td><td>+###</td></tr>
<tr><td>16</td><td>1</td><td>2</td><td>58</td><td>99</td><td>|##</td></tr>
<tr><td>17</td><td>0</td><td>0</td><td>58</td><td>99</td><td>|</td></tr>
<tr><td>18</td><td>0</td><td>0</td><td>58</td><td>99</td><td>|</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|----+----+----+----+----+
5 10 15 20 25</td></tr>
<tr><td>18 items</td><td>58</td><td>100</td><td>58</td><td>100</td><td></td></tr>
</table>

Número de Items o preguntas: 18
Número de alumnos examinados: 58
Media aritmética de las puntuaciones: 9.207
Mediana: 9.000
Varianza (s^2): 9.716
Desviación típica (S): 3.117
Puntuación mínima: 0.000
Puntuación máxima: 16.000
Skewness o asimetría:-0.176
Kurtosis o apuntamiento: 0.251

La *kurtosis* o *curtosis* es una propiedad de las distribuciones ordinariamente unimodales o de sola una moda y se refiere al empinamiento o apuntamiento de la curva en la proximidad de la única moda. *Kurtosis* es una palabra griega que significa pendiente de una curva. Se trata, pues, de comprobar cómo es de escarpado o plano un polígono de frecuencias, una curva de distribución de puntuaciones. Hay curvas muy escarpadas o apuntadas y se llaman



Curvas «escarpada», «plana» y «mesocúrtica» (*A*, *B* y *C*, respectivamente).

leptocúrticas, otras son muy o mínimamente escarpadas o *platicúrticas,* y finalmente otras son de un apuntamiento medio, llamadas *mesocúrticas*.

La curva ideal se considera aquélla que tiene un apuntamiento de 0.263, con lo que este valor se constituye en norma para el resto de las formas de apuntamiento. De este modo toda distribución que tenga un apuntamiento menor de 0.263 se considerará platicúrtica en mayor o menor grado, mientras que toda distribución que tenga un valor de escarpamiento superior a 0.263 se considerará más o menos leptocúrtica.

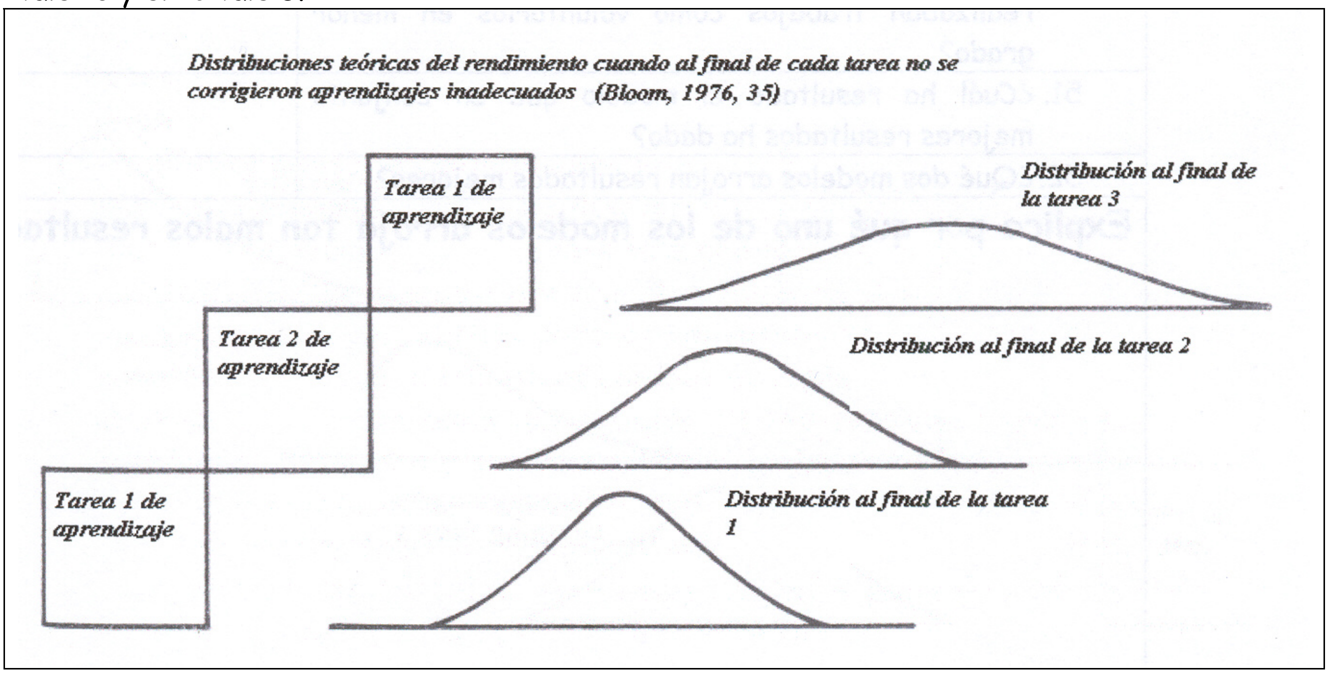
Glass y Stanley (1974) insertan una fórmula que se invita al alumno a calcular en los datos arriba incluídos. Se trata de la siguiente:

$$\textit{Curtosis} = \{\Sigma\, (X_i - \textit{media}_x)^4 \,/\, n\}/s_x^4$$

Como la expresión $\{(X_i - \textit{media}_x)\,/s_x\}^4$ es $z_x^{\,4}$, se puede finalmente escribir que la *curtosis* tiene como fórmula ésta:

$$\textit{Curtosis} = \Sigma\, z_x^{\,4}/n = \textit{media} \text{ de } z_x^{\,4}.$$

Otros autores insertan una fórmula un tanto más ágil de cálculo: *Curtosis* = Q / $(P_{90} - P_{10})$. Recuérdese *Q,* recorrido semiintercuartil, que responde a la fórmula $Q = (Q_3 - Q_1) / 2$. El cuartil 3 (Q_3) vale en puntuaciones directas aproximadamente lo que el percentil 79, al estar próximo al percentil 75, es decir, 11. Asimismo, el cuartil 1 (Q_1), que es el poercentil 25, está próximo al percentil 31, que vale 7. Por tanto, $Q = (11 - 7) / 2 = 2$. A su vez, el percentil 90 vale 13 y el 10 vale 5.



Por tanto, *curtosis* = Q / $(P_{90} - P_{10}) = 2/\,(13 - 5) = 0.25$.

Este valor de 0.25, comparado con el *standard* de 0.263, aunque inicialmente platicúrtico, es un valor absolutamente normal, en el sentido de mesocúrtico.

Hace varias décadas, Bloom (Bloom, 1968: Block, 1979, 48) al hablar del *Mastery Learning* había dejado escrito lo siguiente sobre el modelo de distribución normal en educación :

> "La curva normal de calificaciones ha sido utilizada durante tanto tiempo que los educadores terminaron por creer en ella".

Y continúa:

> "Como hemos sido condicionados a la distribución normal, establecemos sistemas de calificaciones dentro de estos términos y nos horrorizamos si algún profesor sugiere un nuevo sistema".

Algo más adelante sentencia:

> "La curva normal no es sagrada. Describe el resultado de un proceso aleatorio. Ya que la educación es una actividad con propósito en la cual buscamos que los estudiantes aprendan lo que se les enseña, la distribución del rendimiento debería ser muy diferente de la curva normal si nuestra instrucción es eficaz. En realidad, podemos decir que nuestros esfuerzos educativos son infructuosos cuando el rendimiento de los alumnos está normalmente distribuído".

Es decir, que, en principio, el que la distribución del rendimiento en los diferentes objetivos generales no sea normal es algo positivo. ¿Qué es lo deseable?

3) Mientras la llamada *enseñanza convencional* tiene tendencia a reproducir al final en rendimiento la distribución normal inicial en aptitud, porque presta cierta asistencia al alumno, no ocurre siempre así: *Cuando se hacen evaluaciones a lo largo del proceso y no se corrigen los defectos o los inadecuados aprendizajes, entonces los alumnos se irán haciendo más heterogéneos, unos aprenderán y otros aprenderán menos, habiendo cada vez menos alumnos que siguen siendo pasablemente normales.*

Así, pues, ¿qué relevancia o relación tienen estas distribuciones con las situaciones de aprendizaje? No resisto la tentación de insertar la ilustración de Bloom (1976, 35) de cómo evoluciona la distribución del rendimiento a lo largo del proceso de aprendizaje cuando no se corrigen los aprendizajes inadecuados detectados al final de cada unidad de aprendizaje. El grupo, como se puede ver, se va haciendo más heterogéneo, más disperso; cada vez menos alumnos se distancian más de los que cada vez saben menos. Pero ¿qué ocurre cuando se corrigen los aprendizajes inadecuados detectados al final de cada unidad de aprendizaje?

4) *Cuando se corrigen los aprendizajes inadecuados detectados al hacer el control o evaluar el final de cada tarea o unidad de aprendizaje, entonces el rendimiento se hace progresivamente más anormal asimétrico negativo.*

<table>
<tr><th>Núm. de pregunta</th><th>Frecuencia</th><th>Porcentaje</th><th>Frecuencia acumulada</th><th>Porcentaja acumulado</th><th>Porcentaje de alumnos examinados</th></tr>
<tr><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td><td>+######</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>4</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>5</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>+</td></tr>
<tr><td>6</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>8</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>9</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>10</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>+</td></tr>
<tr><td>11</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>12</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>13</td><td>0</td><td>0</td><td>5</td><td>6</td><td>|</td></tr>
<tr><td>14</td><td>1</td><td>1</td><td>6</td><td>7</td><td>|#</td></tr>
<tr><td>15</td><td>2</td><td>2</td><td>8</td><td>9</td><td>+##</td></tr>
<tr><td>16</td><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>9</td><td>|</td></tr>
<tr><td>17</td><td>0</td><td>0</td><td>8</td><td>9</td><td>|</td></tr>
<tr><td>18</td><td>1</td><td>1</td><td>9</td><td>10</td><td>|#</td></tr>
<tr><td>19</td><td>2</td><td>2</td><td>11</td><td>12</td><td>|##</td></tr>
<tr><td>20</td><td>0</td><td>0</td><td>11</td><td>12</td><td>+</td></tr>
<tr><td>21</td><td>2</td><td>2</td><td>13</td><td>15</td><td>|##</td></tr>
<tr><td>22</td><td>2</td><td>2</td><td>15</td><td>17</td><td>|##</td></tr>
<tr><td>23</td><td>1</td><td>1</td><td>16</td><td>18</td><td>|#</td></tr>
<tr><td>24</td><td>1</td><td>1</td><td>17</td><td>19</td><td>|#</td></tr>
<tr><td>25</td><td>1</td><td>1</td><td>18</td><td>20</td><td>+#</td></tr>
<tr><td>26</td><td>2</td><td>2</td><td>20</td><td>23</td><td>|##</td></tr>
<tr><td>27</td><td>5</td><td>6</td><td>25</td><td>28</td><td>|######</td></tr>
<tr><td>28</td><td>2</td><td>2</td><td>27</td><td>31</td><td>|##</td></tr>
<tr><td>29</td><td>4</td><td>5</td><td>31</td><td>35</td><td>|#####</td></tr>
<tr><td>30</td><td>10</td><td>11</td><td>41</td><td>47</td><td>+###########</td></tr>
<tr><td>31</td><td>16</td><td>18</td><td>57</td><td>65</td><td>|##################</td></tr>
<tr><td>32</td><td>11</td><td>12</td><td>68</td><td>77</td><td>|############</td></tr>
<tr><td>33</td><td>12</td><td>14</td><td>80</td><td>91</td><td>|##############</td></tr>
<tr><td>34</td><td>7</td><td>8</td><td>87</td><td>99</td><td>|########</td></tr>
<tr><td>35</td><td>1</td><td>1</td><td>88</td><td>99</td><td>+#</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td>|----+----+----+----+----+
5 10 15 20 25</td></tr>
<tr><td>35 items</td><td>88</td><td>88</td><td>88</td><td>100</td><td></td></tr>
</table>

Número de Items o preguntas: 35
Número de alumnos examinados: 88
Media aritmética de las puntuaciones: 27.659
Mediana: 31.00
Varianza (s^2): 67.088
Desviación típica (S): 8.191
Puntuación mínima: 0.000
Puntuación máxima: 35.000
Skewness o asimetría:-2.277
Kurtosis o apuntamiento: 4.749

Cuando se practica una evaluación formativa frecuente, un *feedback* de los resultados de las pruebas formativas y una enseñanza correctiva (corrección de los aprendizajes inadecuados) suele obtenerse un rendimiento final similar al de la tabla adjunta (son datos reales tomados del análisis de una prueba a alumnos universitarios a través del Iteman), que es un rendimiento asimétrico negativo, tal como se indica en los datos al final (ver: Skewness o asimetría: - 2.277).

Algo similar ocurre cuando se practican idénticas estrategias a lo largo del proceso, tendentes a resolver los problemas que los alumnos se van encontrando a lo largo del proceso. Véase la secuencia de la asimetría a medida que los alumnos avanzan en los objetivos generales de la asignatura:

Prueba de rendimiento al final de cada uno de los objetivos generales de la asignatura	**Resultados en asimetría**
- Primero	- 0.299
- Segundo	- 1.022
- Tercero	- 0.586
- Cuarto	- 0.871
- Quinto	- 1.293

¿Qué es asimetría? La asimetría es un sesgo de las puntuaciones, que se manifiesta en la distribución de frecuencias de las puntuaciones y ocurre cuando éstas son muy superiores o inferiores a un promedio, normalmente la *media*.

Glass y Stanley (19874, 88 ss) afirman que la mejor fórmula para expresar el grado de asimetría es mediante la siguiente fórmula:

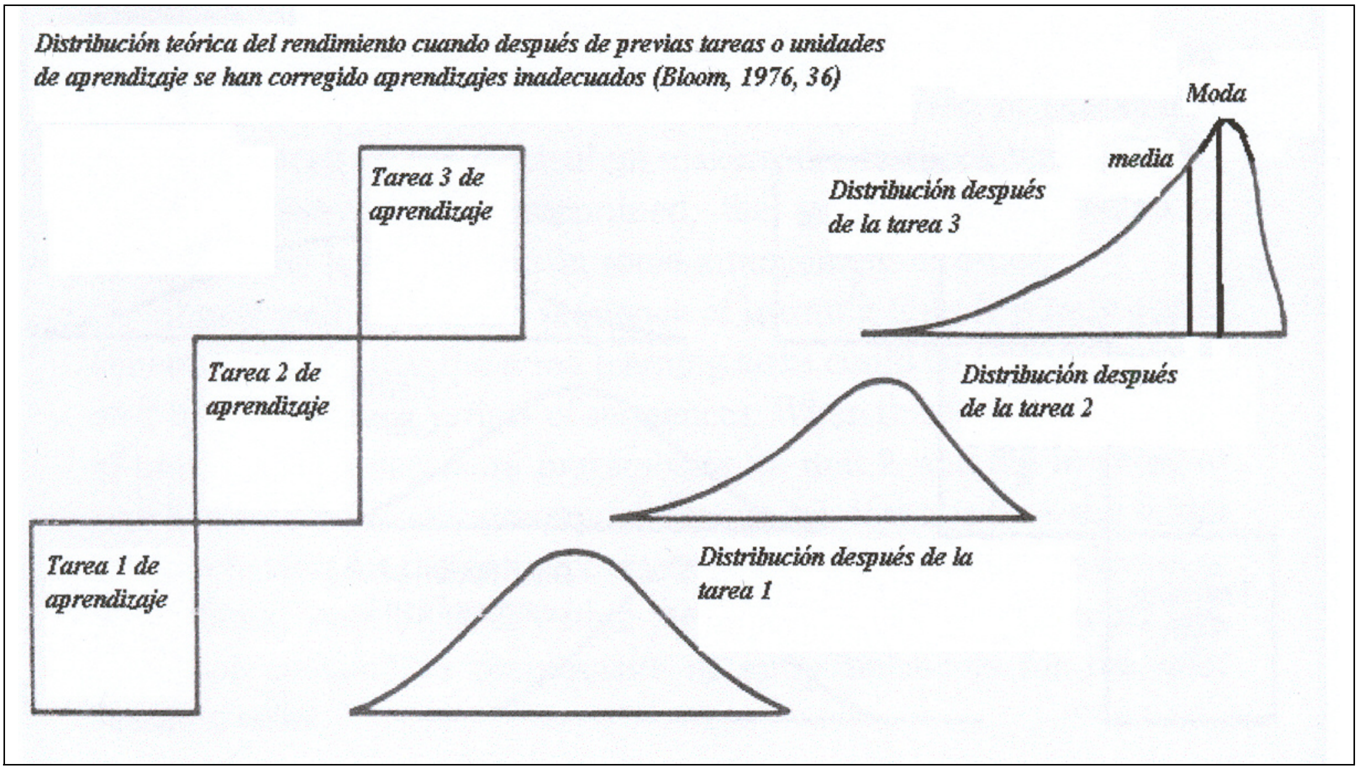
Asimetría = $\{\Sigma (X_i - media_x)^3/n\}/s^3{}_x$. Esta fórmula se convierte en :
Asimetría = $\Sigma\, z^3/n = media\ de\ z^3$.

Es una medida práctica para expresar la distancia que se halla cada una de las puntuaciones directas de la *media* del grupo en términos de unidades típicas. En el ejemplo de la tabla se comprueba que la *media* está a bastante distancia de las dispersas y alejadas puntuaciones inferiores, distancias que pesarán mucho si se suman y que no lograrán contrapesar las positivas, las cuales están próximas a las *media*. El hecho de elevar al cubo las puntuaciones diferenciales responde a que como el signo de un número no varía cuando se elevan al cubo las puntuaciones, el resultado tiene un menor efecto sobre el resultado final que el de sumar las segundas potencias.

El dividir por el cubo de la *desviación típica* obedece al efecto de tipificar las distancias para que los valores de la asimetría se traduzcan a una misma unidad de recorrido, sean cuales fueren los recorridos de las variables. Es decir, la división por s_x independiza la medida de variabilidad de la distribución a la cual pertenece. En el caso de la asimetría los recorridos máximo y mínimo no suelen pasar de +3 y de -3. Si la distribución es simétrica dará cero.

Estos cálculos se pueden hacer con los datos de la muestra de 88 alumnos, pero se recomienda no ser dispendioso. En efecto, hay otras fórmulas más breves y en ellas se ve incluso más patente lo que significa asimetría positiva y negativa:

- Asimetría = (*media* - Moda)/*s*;
- Asimetría = 3(*media* - mediana)/*s*;
- Asimetría = $\{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)\}/(Q_3 - Q_1)$;
- Asimetría = $\{(P_{90} + P_{10})/2\} - P_{50}$.



Una asimetría perfecta de cero implica que toda puntuación negativa se compensa con toda puntuación positiva de igual valor. La distribución del rendimiento de la tarea 3 de la figura adjunta, al tener la *media* donde la tiene, es decir, no equidistante de las puntuaciones directas, evidenciará que las puntuaciones diferenciales negativas cúbicas será mayor sus homólogas positivas y, en consecuencia, el promedio de las puntuaciones típicas cúbicas será negativo. Se tiene una distribución asimétrica negativa al final del proceso debido a que los errores o aprendizajes inadecuados se han ido corrigiendo a lo largo del proceso.

Para terminar este apartado se va a citar un largo párrafo de Bloom (1976, 35/6), que ilustra el gráfico adjunto del mismo autor:

> "si los estudiantes aprenden todo o la mayor parte de las partes esenciales de la primera tarea (o su aprendizaje inadecuado se corrige) antes de emprender la segunda tarea, y si su aprendizaje a lo largo de la segunda tarea es/ adecuado (o corregido), entonces habrá una variación igual o decreciente del rendimiento en las siguientes tareas de aprendizaje. El que permanezca igual la variación del rendimiento o disminuya, probablemente dependerá de que los estudiantes ganen adecuación o competencia en cada sucesiva

> tarea o de que entren en cada tarea con las mismas cualidades afectivas con las que entraron en las previas tareas de aprendizaje"

Dice Block (1979, 6):

> Si "cada uno de ellos (los alumnos) recibe una instrucción de calidad óptima y el tiempo de aprendizaje que él requiere, cabe esperar que la mayoría de los alumnos alcancen el dominio de la materia".

Esto significa, como consecuencia, que la distribución del rendimiento es muy diferente de la distribución de las aptitudes previas: Si cada vez quedan menos alumnos sin dominar la materia y es mayor el porcentaje de los que la dominan de un modo significativo, entonces la mayor parte de las puntuaciones se aproximan a los valores superiores y, consecuentemente, el rendimiento se distribuye de un modo asimétrico negativo.

Resta por explicar las distribuciones leptocúrticas y las asimétricas positivas. Otro día.

Bibliografía

BLOCK, J.H. (1979): *Cómo aprender para lograr el dominio de lo aprendido* (*Mastery Learning*), El Ateneo, Buenos Aires,
BLOOM, B.S. (1968: Block, 1979): *Mastery Learning*, pp. 46-63;
BLOOM, B.S. (1976): *Human characteristics and school learning,* McGraw-Hill, New York
FERGUSON, G. (1986): *Análisis estadístico en educación y psicología*, cap. 5 (Medidas de dispersión, asimetría y curtosis);
GARCÍA LLAMAS,J.L.; PEREZ JUSTE,R.; DEL RÍO SADORNIL,D.(1999): *Problemas y diseños de investigación resueltos.* Medidas de variabilidad. pp.192-196. Dykinson, Madrid
FERNÁNDEZ DÍAZ, M.J. *et al.* (1990): *Resolución de problemas de estadística aplicada a las ciencias sociales. Guía práctica para profesores y alumnos*, Medidas de variabilidad, págs. 39-48;
GLASS, G.V. Y STANLEY, J.C. (1974): *Métodos estadísticos aplicados a las ciencias sociales*, Cap. 5 (Medidas de variabilidad)
KERLINGER, F.N. (1975): *Investigación del comportamiento. Técnicas y metodología*, cap. 6 (Variancia);
PÉREZ JUSTE, R. (1985): *Estadística Descriptiva*, Tema VI (Expresión numérica de las características de grupo II: Variabilidad, simetría y apuntamiento)
WELKOWITZ, J. *et al.* (1981): *Estadística aplicada a las Ciencias de la Educación*, cap. 5 (Medidas de dispersión);

EJERCICIOS DE AUTOEVALUACIÓN

Retomemos los datos del problema 3 del capítulo anterior:
"calificaciones obtenidas por un grupo de 28 alumnos de 3º de E.S.O. en Inglés:
6-9-8-15-26-29-22-6-15-13-18-3-4-28-30-2-4-15-22-18-19-10-11-28-13-14-14-17"

1. Calcule la amplitud total

2. Calcule el recorrido semiintercuartil

3. Recordemos ahora los datos del problema nº 7 del capítulo 17:

Sujetos	Madurez Lectora	Asist./no Ed.Infantil	Sujetos	Madurez lectora	Asist/no Ed.Infantil	Sujetos	Madurez lectora	Asist/no Ed.Infantil
1	9	No	11	11	No	21	9	No
2	11	Si	12	14	Si	22	4	No
3	7	No	13	17	Si	23	18	Si
4	12	Si	14	10	No	24	11	No
5	10	Si	15	8	No	25	4	No
6	9	Si	16	14	Si	26	3	No
7	8	No	17	11	No	27	20	Si
8	6	No	18	12	Si	28	16	Si
9	5	No	19	7	No	29	5	No
10	15	Si	20	13	Si	30	19	Si

¿Cuál es la desviación típica del grupo que asistió a preescolar?

4. Y¿la varianza total del grupo de 30 alumnos?

5. ¿Qué grupo es más homogéneo en madurez lectora?

6. ¿Cuál es la naturaleza de una distribución cuya s = 0 ?

7. Ennumerar al menos tres casos específicos en los que una medida de variabilidad sea importante al describir a un grupo.

8. Ennumerar tres casos en los que una medida de variabilidad sea importante para comparar grupos de personas.

9. Calcular la desviación típica de los siguientes conjuntos de observaciones:

   a) 10,8,6,0,8,3,2,2,8,0.
   b) 1,3,3,5,5,5,7,7,9.
   c) 20,1,2,5,4,4,4,0.
   d) 5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5.
   e) ¿porqué es tan grande la desviación típica (s) del apartado c)?. Describa el efecto que tienen las desviaciones extremas sobre (s).

Soluciones a los ejercicios de autoevaluación

1. A.T.= 29
2. Q = 5,5

3. Puntuaciones de grupo que asistió a ed.infantil:
   11-12-10-9-15-14-17-14-12-13-18-20-16-19.
   Media: 14,28
   $\sum X = 200$
   $\sum X^2 = 3006$
   N = 14
   s = 3,26
4. Es más homogéneo el grupo que asistió a educación infantil, puesto que su coeficiente de variación (CV) es 22,82%, menor que el coeficiente de variación de los que no asistieron (35,19%).

5. Todas las puntuaiones son iguales.

6. Un profesor de matemáticas informa al profesor del curso siguiente que sus alumnos de 1º de ESO tienen un promedio de Notable. (En este caso una medida de variabilidad es importante pues no es lo mismo que todos los niños varían entre el 7 y el 8, entre el 6 y el 9 o que haya 2 ó 3 con 10 y varios 6, algún 4 y un 2).

   La renta per cápita de un país es el resultado de dividir la riqueza de un país por el número de habitantes, pero no es lo misma que la riqueza se distribuya equitativamente entre la población que que haya un reducido número de personas muy ricas, una gran abundancia de personas que apenas tienen lo justo y otro grupo no muy grande que disfrutan de una economía desahogada.

   El nº de kilos de carne consumidos por una camada de 7 perros es de 50Kg/semana. Si una medida de variabilidad puede ocurrir que la información nos lleve a pensar que todos los perros se alimentan por igual, cuando bien puede ocurrir que alguno se quede sin comer por ser otro muy tragón.
7. Dos equipos de cross compuestos de 5 corredores han obtenido un tiempo medio en carrera de 5 minutos. En orden a promocionarlos para su entrenamiento de cara a una competición la entidad promotora se decide a apoyar al equipo cuyos corredores tuvieron una media individual más igualada (menor dispersión) pues piensa que tendrán más oportunidades de ganar que el otro que se compone de un corredor muy rápido, dos medianos y dos algo más lentos.

   Consideremos tres grupos de alumnos: uno de los grupos está compuesto por niños superdotados, otro por niños agrupados al azar, otro está tomado de un colegio de niños límite. ¿En cual de los grupos será mayor la variabilidad en C.I.? Obviamente las puntuaciones en términos de CI tendrán más oportunidad de tomar valores distintos en el rupo de alumnos formada al azar porque cualquiera de los otros dos ha sido seleccionado precisamente en función de una menor variabilidad en CI (unos por altas puntuaciones y otros por puntuaciones en el límite inferior de la normalidad)

   Una medida de variabilidad también nos daría mucha información sobre dos grupos de igual media aritmética, que han seguido dos métodos de enseñanza diferentes. El primero ha sido sometido a una enseñanza convencional y el segundo al “mastery learning” o modelo orientado al dominio de los objetivos. La dispersión en el segundo de los grupos es mucho menor, son más homogéneas.

8. La desviación típica es:
   a) 3,52
   b) 2,31
   c) 5,89
   d) 0
   e) Distorsionan la información sobre la distribución real de las puntuaciones.