Universidad
Complutense de Madrid

Opciones II: Valoración

© *Juan Mascareñas*

Universidad Complutense de Madrid

Nov-2005

1. INTRODUCCIÓN

Al Oeste de la ciudad de Madrid está situado el campus de Somosaguas donde se encuentra la Facultad de Económicas y Empresariales de la Universidad Complutense. Supongamos que un constructor le ofrece el derecho a comprar un apartamento cercano a dicho campus, cuya construcción terminará dentro de un año, por un precio de 400.000 euros a pagar en el momento de la entrega del piso. Usted sabe que el valor de mercado medio de un apartamento semejante en esa zona es en la actualidad de 395.000 euros, que los tipos de interés anuales son del 4% y que alquilar un apartamento idéntico implica unos flujos de caja anuales actualizados de 7.300 euros anuales. Usted se pregunta cuál es el valor de la opción de compra que el constructor le está intentando vender.

Primeramente, deberá estimar la probabilidad de que los precios de los apartamentos dentro de un año se sitúen por encima de los 400.000 euros. Si esa probabilidad fuese nula la opción carecería de valor (usted no va a pagar un precio mayor del que piensa que va a alcanzar el apartamento dentro de un año). Ahora bien, aún cuando espere que los precios de los apartamentos caigan por debajo de 400.000 euros dentro de un año, siempre habrá una pequeña probabilidad de que asciendan por encima de dicha cifra. Cuanto mayor sea el plazo para ejercer la opción mayor será esa probabilidad. Supongamos dos casos posibles, por un lado, que el precio dentro de un año sea de 420.000 euros o, por otro, que sea de 380.000 euros.

Hay dos formas de que usted pueda garantizar que el apartamento será suyo dentro de un año:

a) Podría adquirirlo ahora mismo a un coste de 395.000 euros y alquilarlo durante un año por lo que recibirá 7.300 euros anuales por anticipado. Con lo que el coste neto sería de 387.700 euros.
b) Podría pagar una prima de **c** euros por el derecho a adquirir el apartamento dentro de un año por 400.000 euros. Y con objeto de asegurarse la posesión de dicha cantidad dentro de un año, podría invertir ahora 384.615,38 euros al 4% de interés anual con lo que recibirá el precio de ejercicio de la opción dentro de un año.

HOY		DENTRO DE UN AÑO		
			$S^* > X$	$S^* < X$
Alternativa A				
Compro apto. (S)	-395.000	Vendo apartamento	420.000	380.000
Cobro alquiler (D)	7.300			
Coste total	-387.700			
Alternativa B				
Adquiero opción (c)	- c	Recupero inversión	400.000	400.000
Invierto el VA(X)	-384.615,38	Compro apto.	– 400.000	-
Coste total	- (384.615,38 + c)	Vendo apto.	420.000	-

Fig.1

En la figura 1 se muestran ambas alternativas y es fácil darse cuenta de que si el precio del apartamento dentro de un año (S^*) es mayor que el precio de ejercicio de la opción (X), da igual cuál sea la alternativa elegida pues transcurrido un año el flujo de caja de ambas es el mismo, es decir, S* (420.000 euros en nuestro ejemplo). Ahora bien, si el precio del apartamento se situase por debajo del precio de ejercicio (un precio de 380.000 euros en nuestro caso), la alternativa "a" recibiría un flujo de caja igual a S^* (380.000 euros) mientras que la "b" lo tendría igual a X (400.000 euros); por lo tanto, en éste caso se recibiría un mayor flujo con la alternativa "b". Así, pues, parece lógico suponer que ésta última alternativa deberá tener un valor, al menos, igual o superior al de la "a", puesto que los flujos de caja que produce también son iguales o superiores:

$$387.700 \leq 384.615{,}38 + c \quad \text{o también} \quad S - D \leq VA(X) + c$$

despejando el valor de la opción **c**, obtendremos:

$$c \geq (S - D) - VA(X) \rightarrow c \geq 387.700 - 384.615{,}38 = 3.084{,}62$$

De esta manera, en nuestro ejemplo sabemos que la opción de adquirir el apartamento deberá valer, como mínimo, 3.084,62 euros. A través de este ejemplo hemos podido comprobar como el valor de una opción depende de una serie de factores como son: el valor de mercado del activo, el precio de ejercicio, el tipo de interés, el tiempo hasta el vencimiento, la volatilidad del activo subyacente y los dividendos o intereses que proporcionará dicho activo. Dichos factores van a ser analizados en el epígrafe siguiente.

2. FACTORES QUE DETERMINAN EL PRECIO DE UNA OPCIÓN

El precio de una opción (prima o *premium*) está determinado básicamente por seis factores:

1º. *El valor intrínseco de la acción o del activo subyacente.* Cuanto mayor sea su valor, mayor será el precio de la opción de compra suscrita sobre ese título (considerando constantes el precio de ejercicio y la fecha de expiración del contrato). En la figura 2 se muestra el denominado diagrama de Bachelier, que nos muestra la relación entre el precio de la opción (*call*, en este caso) y el de la acción sobre la que fue emitida.

La línea OM, que forma un ángulo de 45º sobre cada eje, indica la igualdad entre los precios de la opción y de su acción subyacente [**c** = S] en el caso de que el precio de ejercicio sea igual a cero siendo, por tanto, el límite superior del precio de la opción. Esto es así, porque si el precio de ésta última fuese superior al de su acción, al inversor le resultaría más barato adquirir directamente la acción en el mercado.

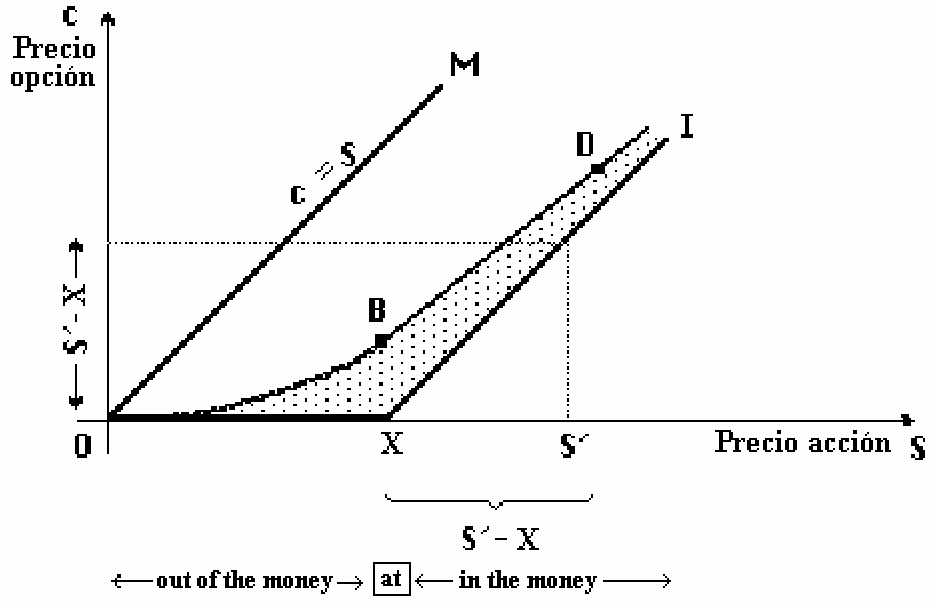

Fig.2. El precio de una opción de compra en relación al de la acción

La línea OXI marca el límite inferior del precio de la opción. Cuando el precio de la acción es inferior al precio de ejercicio de la opción (*strike price*) - caso *out of the money* -, el menor valor que puede tomar la opción es cero. Y cuando el precio de la acción, S, supera al precio de ejercicio de la opción, X (*in the money*), el límite inferior de dicho valor vendrá dado por la recta XI, puesto que cualquier inversor puede ejercer la opción al precio de ejercicio (X) y vender la acción en el mercado obteniendo un ingreso de [S-X], que sería el precio mínimo a pagar por la opción. Esta es la razón de que al emitir una opción *in the money* no interese ejercerla en el momento, dado que el precio de la misma es, cuando menos, igual a la posible ganancia esperada, con lo que el beneficio sería nulo o negativo (véase el ejemplo mostrado en la figura 2, para un precio de mercado hipotético S').

Por lo general, el precio de la opción (**c**) sigue una línea similar a la OBD. En el punto O, el valor de la acción es nulo, lo mismo que el de la opción. En el tramo OB, cuando S < X el precio de la opción toma un valor positivo y creciente debido a que el inversor espera que en el futuro el precio de la acción (S) en el mercado consiga superar al de ejercicio (X).

$$c = 0 \times \text{Prob}\,[S \leq X] + (S - X) \times \text{Prob}\,[S > X] = (S - X) \times \text{Prob}\,[S > X]$$

donde por pequeña que sea la probabilidad para el inversor de que S supere a X, el precio de la opción tomará un valor positivo. Así, pues, la relación entre el valor de la opción de compra y el precio de mercado del activo subyacente es directa; lo contrario ocurre en el caso de las opciones de venta, puesto que cuanto más pequeño es el precio del activo más vale la opción.

2°. *El precio de ejercicio*. Cuanto más bajo sea el precio de ejercicio (X) mayor será el precio de la opción de compra (**c**), puesto que existirá una mayor probabilidad de que el precio de mercado de la acción acabe superando al de ejercicio; ocurriendo justo lo contrario en el caso de las opciones de venta (*put* **-p-**). En la figura 3 se puede apreciar, por ejemplo en el caso de las opciones sobre el índice del mercado continuo de la Bolsa de Madrid el Ibex-35, como a medida que los precios de ejercicio son menores crece el precio de la opción si es de compra (*call*) y desciende si es de venta (*put*).

X	**CALLS**			**PUTS**		
	Enero	*Febrero*	*Marzo*	*Enero*	*Febrero*	*Marzo*
9.800	210	423	557	97	260	353
9.850	182	397	532	118	283	376
9.900	159	372	507	148	307	400
9.950	134	348	484	179	333	425
10.000	113	326	461	202	359	451
10.050	93	304	438	230	387	478
10.100	77	283	417	266	416	506
10.150	64	264	396	303	446	534
10.200	50	245	376	340	477	563
10.250	42	228	357	379	510	594

Fig.3 Opciones sobre el Ibex-35 el 12 de enero de 2001 (S = 9.890,20 puntos)

3°. *La volatilidad del activo subyacente*. La magnitud de las oscilaciones del precio del activo subyacente –su volatilidad- influye directamente en el tamaño del precio de la opción de compra o de venta. De tal manera que a mayor riesgo mayor precio y viceversa. Estadísticamente es la dispersión del rendimiento del activo subyacente, siendo el rendimiento las variaciones del precio durante el periodo considerado.

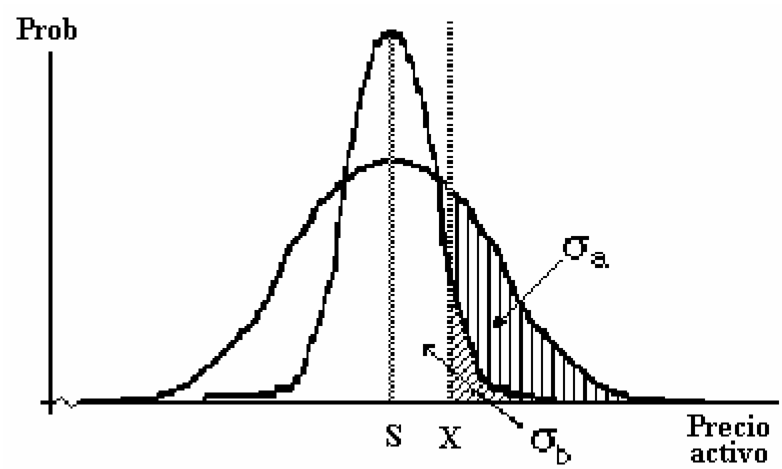

Fig. 4. Efecto de la volatilidad del precio de un activo subyacente sobre el valor de una opción

Por ejemplo, en la figura 4 se consideran dos activos subyacentes el A y el B, donde el primero tiene mayor riesgo que el segundo. Si suponemos que estos títulos tienen el mismo precio de mercado esperado, S, y que las opciones de compra que pueden ser adquiridas sobre cada uno de los dos tienen un precio de ejercicio X, igual en ambas. Si X es mayor que S, en ambos casos (*out of the money*), el comprador de la opción espera que antes de la expiración del contrato, los precios de mercado de ambos activos (S_a, S_b) hayan superado el valor del precio de ejercicio (X). Esto es más probable en el caso de A que en el de B, al ser su variabilidad mayor que la de ésta última (véase el área rayada). Así que al ser más fácil obtener beneficios con A que con B, el precio de la opción de compra de títulos A será superior al de la de los títulos B. Lo mismo se puede decir del caso de las opciones de venta (*put*).

4°. *El tiempo de vida de la opción*. El precio incluye un elemento temporal, que tiende a decrecer al aproximarse la fecha de expiración del contrato de la opción. Es decir, cuanto menos le quede de vida a la opción de compra menor será su valor, puesto que menos probabilidades tiene el precio de mercado de superar al de ejercicio (o de ser inferior al mismo, si nos referimos a las opciones de venta). Volvamos a observar el ejemplo mostrado en la figura 3, en el que podemos ver como si la opción sobre el Ibex-35 vence en Enero, vale menos que si lo hace en Febrero y ya no digamos si es en Marzo.

Un corolario importante es que, por lo general, un inversor preferirá no ejercer una opción de compra antes de la fecha de expiración del contrato, debido a que, incluso, si el precio de mercado, S, supera al precio de ejercicio, X, aún hay tiempo para que aquél se incremente aún más. Asimismo, el poseedor de una opción conseguirá un mayor rendimiento vendiéndola en lugar de comprar la acción subyacente correspondiente y enajenándola seguidamente. En el caso de la figura 3, nos dan 210 puntos (2.100 euros) por la opción de compra con precio de ejercicio 9.800 y vencimiento en Enero, lo que es preferible a comprar el activo subyacente por 9.800, su precio de ejercicio, y venderlo en 9.890,2 puntos, su precio de mercado (ganancia 90,2 puntos o 902 euros). La diferencia (119,8 puntos o 1.198 euros) es conocida como el *valor del elemento temporal* de la opción, que refleja la ganancia potencial de un posterior aumento esperado en el precio de la acción, que puede tener lugar en el tiempo que resta hasta la expiración del contrato (véase la zona sombreada de la figura 2). En la figura 5 se muestra como conforme se aproxima la fecha de vencimiento de la opción su valor de mercado tiende a fundirse con su valor teórico o intrínseco. Sobre este tema volveremos en el epígrafe siguiente.

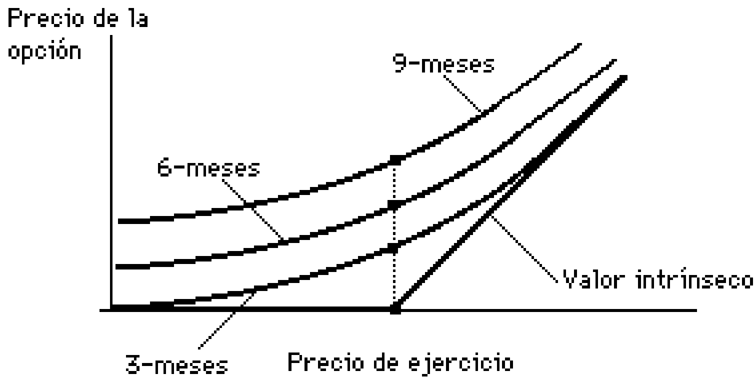

Fig.5 Curvas de precios de una opción de compra para un vencimiento a 3, 6 y 9 meses

5°. *El tipo de interés sin riesgo*. El valor de la opción depende de la tasa de descuento que se aplica en el mercado financiero a las inversiones financieras libres de riesgo (r_f). Esto es así porque al combinar la emisión de opciones de compra sobre acciones con la tenencia de las propias acciones es posible eliminar totalmente el riesgo de la inversión.

En realidad, la adquisición de una opción de compra equivale, desde el punto de vista financiero, a adquirir una acción con parte del pago aplazado. El pago inicial vendrá dado por el coste de la opción (**c**), mientras que la parte aplazada será el valor actualizado del precio de ejercicio (X) al tipo de interés libre de riesgo r_f (tal y como observamos en el ejemplo del primer epígrafe). Así que el precio actual de la acción, S_0, deberá ser como máximo igual a:

$$S_0 = c + X / (1 + r_f)$$

de donde despejando el valor de la opción de compra, obtendremos una expresión que nos indica que cuanto más grande sea el valor del tipo de interés sin riesgo mayor será la prima de la opción de compra.

$$c = S_0 - X / (1 + r_f)$$

Pero aquí existe una contradicción, derivada del hecho de que S_0 no es neutral con respecto a r_f, puesto que como se sabe el precio actual de una acción es una función inversa del tipo de interés libre de riesgo[1]. Esto es, si suponemos que

[1] El valor actual de cualquier activo es función de los flujos de caja que promete generar en el futuro y de la tasa a la que se descuentan. Ésta última es igual al tipo de interés libre de riesgo más una prima de riesgo. Por ello, si aumenta el tipo libre de riesgo aumentará la tasa de descuento y lo contrario.

el tipo libre de riesgo asciende, el valor actual de la acción tenderá a disminuir con lo que el valor de la opción seguirá esta misma tendencia, con arreglo a lo explicado en el punto 1 de este mismo epígrafe, con lo que se llega a una conclusión contraria a lo expuesto anteriormente y mantenido por un gran número de autores. En realidad, la idea de que al ascender el tipo de interés el valor de la opción de compra asciende es cierta si suponemos la cláusula "ceteris paribus" para el resto de las variables de la ecuación, pero en este caso ello es imposible de hacer puesto que la variación del tipo de interés afecta tanto al precio del activo subyacente como al de la opción. Sería tanto como suponer que en una palanca uno de sus brazos permanece quieto mientras que el otro se mueve, semejante suposición es imposible de cumplir, pues lo mismo ocurre aquí con el tipo de interés.

En la figura 2 se puede apreciar que en el punto D la línea representativa del valor de la opción se vuelve asintótica a la recta IX, lo que nos indica que cuanto mayor sea la diferencia [S´-X] más tenderá a aproximarse el precio de la opción, **c**, al valor actualizado de dicha diferencia. Puesto que cuanto mayor sea **c**, mayor será la probabilidad de que S´>X y menor la de que S´<X.

6°. *Los dividendos*. Los dividendos repartidos por la acción subyacente también afectan al valor de la opción. Pues cuanto mayores sean los dividendos más bajo será el coste de la opción de compra (véase el ejemplo del primer epígrafe), puesto que se supone que al repartirse los dividendos el precio de mercado de la acción descenderá, o no subirá tanto como debiera, lo que puede retraer a los posibles adquirentes de las opciones de compra. Con la opción de venta ocurrirá justo lo contrario, puesto que si desciende el precio de mercado del activo subyacente ello redundará en un aumento del valor de la opción de venta.

En resumen, el precio de una opción de compra (**c**), depende principalmente de seis factores: **c** = f (S, E, t, σ, r_f, D), siendo sus relaciones de la siguiente forma:

$$\frac{\partial c}{\partial S} > 0 \ ; \ \frac{\partial c}{\partial X} < 0 \ ; \ \frac{\partial c}{\partial t} > 0 \ ; \ \frac{\partial c}{\partial \sigma} > 0 \ ; \ \frac{\partial c}{\partial r_f} > 0 ; \ \frac{\partial c}{\partial D} < 0$$

Mientras que para la opción de venta las relaciones serían:

$$\frac{\partial c}{\partial S} < 0 \ ; \ \frac{\partial c}{\partial X} > 0 \ ; \ \frac{\partial c}{\partial t} > 0 \ ; \ \frac{\partial c}{\partial \sigma} > 0 \ ; \ \frac{\partial c}{\partial r_f} < 0 ; \ \frac{\partial c}{\partial D} > 0$$

Otra forma de verlo es mediante la figura 6. En ella el signo "+" significa que si la variable asciende también lo hace el valor de la opción, o si desciende lo mismo le pasa a dicho valor. Por el contrario, el signo "-" indica que si la variable aumenta el valor de la opción tiende a descender y viceversa.

	Opción de compra	Opción de venta
Precio del activo subyacente	+	-
Precio de ejercicio	-	+
Tiempo	+	+
Riesgo	+	+
Tipo de interés	+	-
Dividendos	-	+

Fig.6 Relación entre el valor de la opción y las variables que lo definen

3. LOS LÍMITES DEL ARBITRAJE CON OPCIONES

En el epígrafe anterior hemos visto qué variables afectan al valor de las opciones así como en qué sentido influyen sobre el mismo. En este epígrafe vamos a seguir estudiando dichas influencias de una manera algo más profunda a través del estudio del arbitraje sobre opciones. Comenzaremos con el arbitraje sobre las opciones de compra, seguiremos estudiando el arbitraje sobre opciones de venta y finalizaremos con el estudio de la denominada *teoría de la paridad put-call*.

3.1 Límites del arbitraje sobre opciones de compra

Lo primero que tenemos que considerar es que una opción de compra (europea o americana) no puede valer menos de cero, puesto que la opción o tiene valor o no lo tiene, es decir, cuando se tiene el derecho a hacer algo se tiene o un valor positivo o no se tiene nada. Así pues:

$$c \geq 0$$

Una opción no puede valer más que su activo subyacente (S). Es lógico, pues si una opción sobre Telefónica valiese 20 euros, y las acciones de dicha compañía valen 18 euros, sería preferible adquirir éstas últimas en vez de los títulos que dan derecho a adquirirlas:

$$c \leq S$$

Por otro lado, el valor de una opción de compra americana (C), que recordemos puede ser ejercida inmediatamente, es superior o igual a la diferencia entre el precio del activo subyacente (S) y el precio de ejercicio (X). Es decir, es mayor o igual que su valor intrínseco:

$$C \geq S - X$$

El cuarto punto que debemos considerar es que el valor de una opción de compra europea (c) es superior o igual al resultado de restarle al precio del activo subyacente (S) el valor actual del precio de ejercicio (VA(X)). Para demostrarlo supongamos que tenemos dos alternativas:

a) Adquirir una acción subyacente en la actualidad a un precio S
b) Adquirir una opción de compra sobre dicha acción a un precio **c** y, al mismo tiempo, depositar suficiente dinero a un tipo libre de riesgo (r_f) para que al vencimiento de la opción se obtenga el precio de ejercicio (X); dicha cantidad de dinero será igual a VA(X).

HOY		VENCIMIENTO		
			$S^* < X$	$S^* \geq X$
Alternativa A				
Comprar acción (S)	-S	Vender acción	S^*	S^*
Alternativa B				
Adquirir opción (c)	- c	Rtdo. opción	0	S^*-X
Invertir el VA(X)	- VA(X)	Recibir	X	X

Fig.7

En la figura 7 se puede apreciar como si el precio de ejercicio supera al valor de la acción la alternativa B es preferible a la A pues sus flujos de caja totales son mayores ya que $X > S^*$. Mientras que si sucediese lo contrario, ambas alternativas tendrían los mismos flujos de caja (S^*). Por ello, la alternativa B deberá costar hoy más, o al menos igual, que la A:

$$c + VA(X) \geq S \quad \rightarrow \quad c \geq S - VA(X)$$

Como resulta que: S - VA(X) ≥ S - X, se puede deducir que el ejercicio inmediato de una opción de compra americana proporciona unos flujos de caja (S - X) inferiores al mínimo valor de una de tipo europeo no ejercida (S - VA(X)), de donde se puede concluir que el ejercer una opción de compra antes del vencimiento no crea ningún valor adicional. De aquí la frase "un opción de compra viva vale más que una muerta". Podemos resumir diciendo que, en ausencia de dividendos, una opción de compra europea viene a tener el mismo valor que una de tipo americano, lo cual implica que el método de valoración puede ser el mismo para ambos tipos de opciones de compra.

Podemos apreciar otros dos límites. El primero es que si el precio del activo subyacente es nulo el valor de la opción de compra también lo será. El segundo, es que si el precio del activo es muy alto en comparación con el precio de ejercicio (la opción es profundamente *in-the-money*), entonces el valor de la opción se aproxima mucho a su límite inferior (S - VA(X)); la razón es que la probabilidad de ejercer la opción es prácticamente del 100% y no existe ninguna incertidumbre que pueda conferirle un valor extra.

Estos dos límites nos pueden permitir situar dos puntos en el gráfico representativo de la relación entre el valor de la opción de compra y el precio de su activo subyacente que aparece en la figura 8. El primer punto, "x", se encuentra en el origen, mientras que el segundo, "y", está situado casi encima de la recta representativa del límite inferior del valor de la opción S-VA(X). Como se puede apreciar la derivada parcial en el origen del valor de la opción de compra con relación al precio del activo ($\partial c/\partial S$) es aproximadamente cero, esto es, si el precio de la acción se mueve un poco el valor de la opción no lo hará, puesto que al ser una opción que se encuentra situada profundamente en la zona *out-of-the-money*, cualquier crecimiento unitario del precio del activo no tendrá ningún impacto sobre la probabilidad de obtener beneficios si se ejerce la opción en su vencimiento. En el punto "y" ocurre lo contrario al ser una opción claramente *in-the-money*, por lo que cualquier pequeño cambio en el precio del activo se refleja en una variación idéntica en el valor de la opción ($\partial c/\partial S=1$).

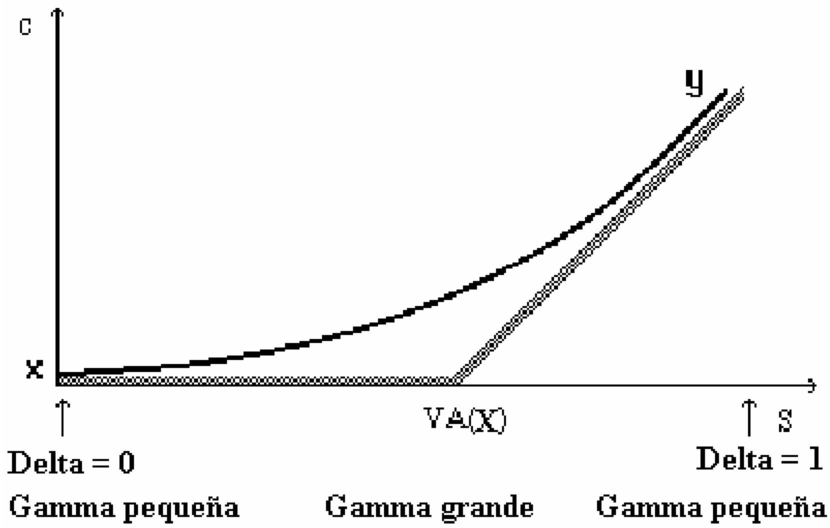

Fig.8 Relación entre el valor de la opción y el precio del activo subyacente. Delta y Gamma de la opción

La pendiente de dicha línea curva representativa del valor de la opción se denomina *delta* y es muy importante en términos de cobertura de las posiciones sobre opciones. Así, por ejemplo, si vendemos una opción de Repsol-YPF que, por ejemplo, tiene una delta = 0,5 sabemos que si el precio de la acción subyacente aumenta en una unidad el de la opción lo hará en 0,5. Así si emitimos una opción de compra sobre 100 acciones de Repsol deberemos adquirir 0,5 x 100 = 50 acciones de la compañía petrolera para proteger nuestra posición de cualquier cambio en el precio de dichas acciones. La *delta*, cuyo valor oscila entre cero y uno, no es constante ya que varía continuamente por ello la cobertura establecida con base en ella sólo es efectiva para pequeñas alteraciones en el precio del activo subyacente. Así, si el precio de la acción de Repsol sube un poco la *delta* puede valer 0,55 lo que haría necesario adquirir cinco acciones más para mantener la cobertura anterior.

La tasa de variación de la *delta* se denomina *gamma*. De una manera informal diríamos que es el grado por el que la relación entre el precio de la opción y el de la acción no es lineal. Formalmente, se define como la segunda derivada parcial de **c** con respecto a S ($\partial^2 c/\partial S^2$). Cuando nos referimos al *riesgo de la gamma*, queremos decir que la cobertura deberá ser revisada continuamente. Tal y como se puede apreciar en la figura 8 la *gamma* es más grande en la zona *at-the money*, por ser cuando una pequeña variación en el precio del activo provoca una alteración mayor en el valor de la *delta*, la *gamma* es más pequeña en las zonas *in* y *out of the money*.

3.2 Límites del arbitraje sobre opciones de venta

Los primeros límites son parecidos a los que vimos para las opciones de compra. Así, la opción de venta tomará siempre un valor positivo o nulo ($p \geq 0$). Su valor siempre será inferior o igual al del precio de ejercicio de la opción ($p \leq X$). Y el valor de la opción de venta de tipo americano será mayor o igual a la diferencia entre el precio de ejercicio y el precio del activo subyacente ($P \geq X - S$).

El cuarto límite consiste en que el valor de una opción de venta de tipo europeo será mayor o igual a la diferencia entre el valor actual del precio de ejercicio y el valor del activo subyacente: $p \geq VA(X) - S$. Para demostrarlo supongamos que tenemos dos alternativas:

a) Podemos adquirir una acción pagando su precio S.
b) Podemos vender una opción de venta europea (**p**) e invertir el valor actual del precio de ejercicio (VA(X)) al tipo de interés sin riesgo (r_f).

Como se aprecia en la tabla de la figura 9, si el precio del activo fuese inferior al precio de ejercicio ($S^* < X$) ambas alternativas son semejantes, puesto que el flujo de caja que proporcionan es el mismo: S^*. Pero, si ocurriese al revés $S^* \geq X$, entonces la alternativa B proporciona un flujo de caja (X) que es inferior al proporcionado por la otra (S^*). Esto nos lleva a decir que la alternativa A deberá ser hoy igual o más cara que la B. Así:

$$S \geq VA(X) - p \rightarrow p \geq VA(X) - S$$

HOY		VENCIMIENTO		
			$S^* < X$	$S^* \geq X$
Alternativa A				
Comprar acción (S)	-S	Vender acción	S^*	S^*
Alternativa B				
Vender opción (p)	p	Rtdo. opción	$-(X-S^*)$	0
Invertir el VA(X)	- VA(X)	Recibir	X	X

Fig.9

Conclusión: Una opción de venta americana "vale más muerta que viva", es decir, vale más ejercida que vendida, debido a que el límite de que esté "viva" es más pequeño que el valor intrínseco ("muerta") antes del vencimiento:

$$X - S \geq VA(X) - S \rightarrow P \geq p$$

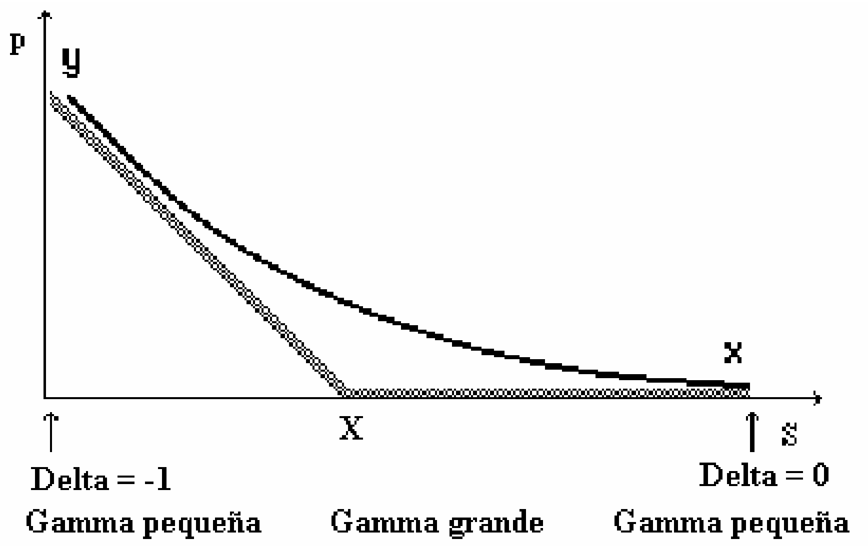

Fig.10 Relación entre el valor de la opción de venta y el precio del activo subyacente.

La diferencia entre las opciones de venta europeas y americanas es bastante importante puesto que, a diferencia de lo que ocurría con las opciones de compra, son necesarios dos modelos distintos para valorar ambos tipos de opciones. Si el precio del activo subyacente es bajo el valor de la opción de venta americana se aproximará a X-S, al no haber incertidumbre que aumente su valor. Por el contrario, si el precio del activo es claramente alto el valor de la opción de venta se aproximará a cero, puesto que casi no habrá posibilidad de ejercerla con beneficios. Estas dos situaciones se han denominado "x" e "y" en la figura 10. La *delta* de las opciones de venta tomará un valor igual a -1 (cuando el precio del activo es muy bajo) hasta 0 (cuando dicho precio es bastante alto).

3.3 La relación entre los precios de las opciones de compra y de venta europeas: la paridad "put-call"

En este subepígrafe vamos a ver como hay una relación entre los precios de las opciones de compra y los de las de venta. Para ello supongamos dos alternativas:

a) Podemos adquirir una opción de compra europea (**c**).
b) Podemos comprar una acción subyacente (S), adquirir una opción de venta europea (**p**) y pedir prestado el valor actual del precio de ejercicio (VA(X)) al tipo de interés sin riesgo (r_f).

Como se aprecia en la tabla de la figura 11 ambas alternativas son iguales. Así si en la fecha del vencimiento $S^* < X$ el resultado en ambos casos es igual a 0, mientras que si ocurriese lo contrario el flujo de caja en dicho instante sería igual a S^*- X para ambas alternativas. Por lo tanto, se puede decir que en la actualidad el precio de una opción de compra europea es igual a la suma del precio actual de la acción subyacente más el precio de una opción de compra menos el valor actual del precio de ejercicio:

$$c = S + p - VA(X)$$

o que en el caso de la opción de venta europea:

$$p = VA(X) - S + c$$

HOY		VENCIMIENTO		
			$S^* < X$	$S^* \geq X$
Alternativa A				
Comprar "call" (c)	-c	Rtdo. opción	0	S^*-X
Alternativa B				
Comprar acción (S)	-S	Vender acción	S^*	S^*
Comprar "put" (p)	-p	Rtdo. opción	X-S^*	0
Pedir prestado	VA(X)	Devolver	-X	-X

Fig.11 Paridad put-call

Como hemos visto anteriormente la opción de venta americana (P) vale lo mismo o más que la europea (p) por lo tanto se podría decir que:

$$P \geq c - S + VA(X) \quad \text{o que} \quad c \leq P + S - VA(X)$$

Por tanto, si tomamos un periódico financiero y calculamos el valor de la opción de venta de tipo americano en función del valor de la opción de compra americana (no se olvide que c = C), del valor de la acción subyacente y del valor actual del precio de ejercicio, observaremos como hay una disparidad entre el valor que acabamos de calcular y el valor de la cotización de dicha opción de venta en el mercado. Esa disparidad se debe no sólo a que P ≥ p si no a que también influye la proximidad del pago de los dividendos esperados por parte de la empresa emisora de las acciones. Por ello la expresión anterior podría ser rescrita de la siguiente forma:

$$P \geq c - [S - VA(D)] + VA(X)$$

4. EL MÉTODO BINOMIAL DE VALORACIÓN DE OPCIONES

Cox, Ross y Rubinstein[2] desarrollaron este método de valoración de opciones, que tiene la ventaja de que, además de ser muy intuitivo, utiliza una matemática muy sencilla. Para mostrar su funcionamiento vamos a aplicarlo a la valoración de acciones ordinarias y para hacer más simple la exposición comenzaremos suponiendo que la acción no reparte dividendos.

4.1. El método binomial para un período

Supongamos que el valor actual de una acción es de 100 €, y que dentro de un período dicho título puede tomar un valor de 120 €, o bien, haber descendido hasta los 83,3 €[3]. La probabilidad de que ocurra un resultado u otro no importa, sólo interesa el rango de resultados posibles. Si adquirimos por **c** euros una opción de compra europea sobre dicha acción con vencimiento dentro de un período y precio de ejercicio 100 euros, sabemos que podrá valer 20 euros, si la acción se sitúa en 120 €, o bien 0 euros si la cotización de la acción desciende a 83,3 € (véase la figura 12).

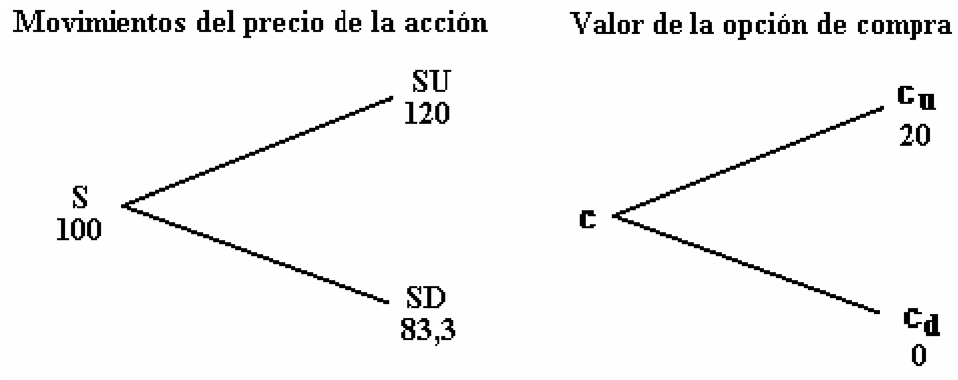

Fig. 12 Precios de la acción ordinaria y valores de su opción de compra

Una forma de valorar un activo financiero (una opción en nuestro caso) consiste en saber cuanto vale otro activo financiero, o una combinación de activos financieros, que genere exactamente los mismos flujos de caja que el activo a valorar. Este método lo vamos a utilizar para valorar la opción de compra anterior. La cartera que vamos a utilizar como comparación[4] del valor de la opción (c) se compone de H acciones y de un préstamo que hemos contraído por B euros a un tipo de interés sin riesgo (r_f). Por tanto, dentro de un período los flujos de caja de dicha cartera pueden tomar los dos valores siguientes:

---

[2] COX,J., ROSS,S., y RUBINSTEIN,M.: "Options pricing: a simplified approach". *Journal of Financial Economics*. nº 7. 1979. Págs.: 229-263

[3] Ya sé que se estará preguntando por qué sólo dos valores cuando puede tomar infinitos; no se preocupe, al final de la explicación verá como realmente están todos representados.

[4] Se denomina *cartera de arbitraje* porque si genera los mismos flujos de caja que el activo financiero a valorar y, sin embargo, toma un valor diferente al de éste, los arbitrajistas podrían obtener un beneficio sin riesgo adquiriendo el más barato y vendiendo el más caro. Este proceso acabaría igualando los precios de ambos.

$$\text{Si } S = 120\ € \rightarrow 120\ H - (1 + r_f)\ B = 20\ €$$
$$\text{Si } S = 83{,}3\ € \rightarrow 83{,}3\ H - (1 + r_f)\ B = 0\ €$$

restando ambas ecuaciones obtendremos el valor del número de acciones ordinarias a comprar (H):

$$36{,}7\ H = 20 \rightarrow H = 0{,}545$$

si el tipo sin riesgo r_f es igual al 6% podemos detraer el valor de B en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores: 42,83 euros.

En el momento actual, el valor de la opción de compra, c, será igual al valor actual de la cartera formada por H acciones más una deuda de B euros, es decir, 100 H – B = 100 x 0,545 – 42,83 = 11,67 euros.

Antes de continuar, usted se preguntará que por qué motivo la deuda B debe recibir un tipo de interés sin riesgo y no un tipo de mercado. La respuesta es simple. Si usted observa en las dos ecuaciones anteriores verá que la combinación formada por H acciones y la venta de una opción de compra sobre ellas no tiene riesgo puesto que proporciona siempre el mismo valor (45,40 euros, que es el valor de la deuda B más los intereses a pagar) tanto si la acción aumenta de valor y se sitúa en 120 € como si desciende a 83,3 €:

$$120\ H - 20 = 83{,}3H - 0 = 45{,}40$$

Si ahora queremos obtener el valor de la opción de compra mediante una expresión general, lo primero que haremos será reproducir el valor intrínseco de la opción dentro de un período e igualarlo a los flujos de caja de la cartera de arbitraje:

$$c_u = SUH - (1 + r_f)\ B$$
$$c_d = SDH - (1 + r_f)\ B$$

donde S es el precio de la acción subyacente en la actualidad, SU será el precio de la acción dentro de un período si es alcista, pues si fuese bajista se le denominaría SD (donde U y D son los coeficientes por los que hay que multiplicar S para obtener el precio de la acción al final del período –en nuestro ejemplo U = 1,2 y D = 0,833-). Por otra parte, el precio de la opción de compra en la actualidad sería **c**, siendo c_u y c_d, respectivamente, para los casos en que el precio de la acción haya ascendido o haya bajado. Si ahora restamos una ecuación de la otra y despejamos el valor de H, obtendremos el valor del denominado *ratio de cobertura*:

$$H = \frac{c_u - c_d}{S\,(U - D)}$$

El siguiente paso, será despejar B en una de las ecuaciones anteriores:

$$B = (SUH - c_u) / (1 + r_f)$$

y sustituir su valor en la ecuación HS – B = c

$$HS - (SUH - c_u) / (1 + r_f) = c$$
$$HS + HSr_f - SUH + c_u = c\,(1 + r_f)$$
$$HS\,(1 + r_f - U) + c_u = c(1 + r_f)$$

sustituyendo ahora H por su valor y eliminando S del denominador y del numerador:

$$\frac{c_u - c_d}{U - D}\,(1 + r_f - U) + c_u = c(1 + r_f)$$

Ahora, haciendo un alto en nuestra demostración, vamos a denominar:

a) $m = \dfrac{1 + r_f - D}{U - D}$

b) $1 - m = \dfrac{U - (1 + r_f)}{U - D}$

Estos valores representan la *probabilidad implícita*[5] de ascenso (m) y de descenso (1-m) del valor de la acción subyacente. Así, por ejemplo, si sustituimos en la ecuación de m las variables por los datos del ejemplo con el que venimos trabajando obtendremos dichas probabilidades:

m = (1 + 0,06 - 0,833) ÷ (1,2 - 0,833) = 61,85% de que ascienda
1-m = 38,15% de que descienda

Por tanto, si ahora retomamos nuestra demostración y sustituimos parte de la ecuación anterior por el valor de 1-m, obtendremos:

$$c_u - (c_u - c_d)\,(1\text{-}m) = c(1 + r_f)$$

ahora despejando **c**, obtendremos la expresión que calcula el valor de la opción de compra según el método binomial que, como se puede apreciar, consiste en calcular la media ponderada de los flujos de caja proporcionados por la opción de compra tanto si el precio del activo subyacente asciende como si desciende, y utilizando como ponderaciones las probabilidades implícitas de que dicho precio del activo suba o caiga. Y todo ello actualizado al tipo libre de riesgo:

---

[5] Esta especie de probabilidad es neutral al riesgo, es decir, no tiene nada que ver con la mayor o menor aversión que el inversor tenga al riesgo, entre otras cosas, porque no hay riesgo si se utiliza la combinación de H acciones y la venta de una opción de compra puesto que $HSU - c_u = HSD - c_d$. Así, en nuestro ejemplo, 0,545 x 120 – 20 = 0,545 x 83,3 - 0 = 45,4 €. Da igual que la acción subyacente suba o baje el valor de la cartera es el mismo, es decir, no tiene riesgo. Por ello, el tipo de interés que se utiliza es el libre de riesgo y no el de mercado.

$$c = \frac{c_u\, m + c_d\, (1 - m)}{1 + r_f}$$

Concretando, el precio teórico de la opción de compra es igual al valor actual de la media ponderada de los flujos de caja que proporciona. Para demostrar que ésta es la ecuación que buscamos sustituiremos las variables por sus valores:

c = (20 x 0,6185 + 0 x 0,3815) ÷ (1,06) = 11,67

4.2 El método binomial para dos períodos

Con objeto de obtener el valor de la opción de compra europea[6] para varios períodos, primeramente vamos a aplicar el método binomial para un par de ellos. Así que si seguimos utilizando los datos del ejemplo que venimos manejando y seguimos suponiendo que el coeficiente de crecimiento del precio de la acción es U = 1,2 y que el de decrecimiento sigue siendo D = 0,833 podremos ver como, transcurridos un par de períodos, la cotización de la acción ha podido ascender hasta un máximo de 144 €, o bien acabar descendiendo hasta un mínimo de 69,39 €, o tomar un valor intermedio de 100 €.

El valor de la opción de compra europea se calcula restando el precio de ejercicio (100 €) del valor de la acción al final del segundo período, sabiendo que si el resultado es negativo el valor de la opción será cero. Así, tendremos los siguientes valores de la opción de compra al final del segundo período: 44, 0 y 0 (véase la figura 13).

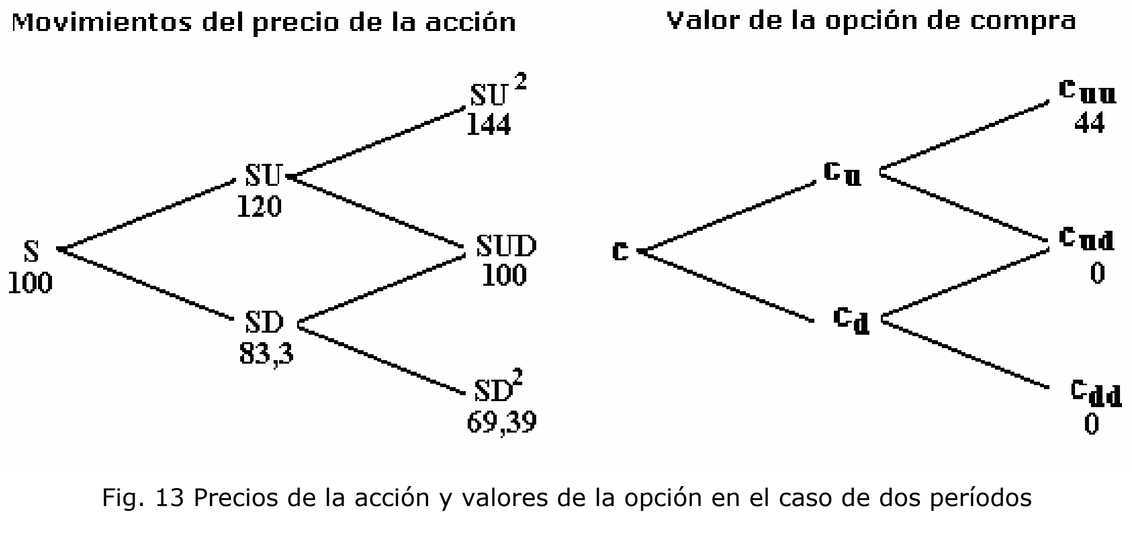

Fig. 13 Precios de la acción y valores de la opción en el caso de dos períodos

El proceso comenzará de derecha hacia la izquierda, período a período. Primeramente deberemos calcular valor de la opción de compra al final del primer período, tanto en el caso de ascenso de la cotización de la acción (c_u) como de descenso (c_d) en función de los posibles valores que pueda tomar la misma al final del

[6] La que sólo se puede ejercer en la fecha de vencimiento

segundo período. Para ello utilizaremos las expresiones matemáticas analizadas en el epígrafe anterior. Así, por ejemplo tendremos:

$$c_u = \frac{c_{uu}\ m + c_{ud}\ (1-m)}{1+r_f} = \frac{44 \text{ x } 0{,}6185 + 0 \text{ x } 0{,}3815}{1{,}06} = 25{,}67\ €$$

$$c_d = \frac{c_{ud}\ m + c_{dd}\ (1-m)}{1+r_f} = \frac{0 \text{ x } 0{,}6185 + 0 \text{ x } 0{,}3815}{1{,}06} = 0\ €$$

Una vez que tenemos estos dos valores podemos calcular el precio teórico de la opción de compra europea a través de la misma expresión matemática:

$$c = \frac{c_u\ m + c_d\ (1-m)}{1+r_f} = \frac{25{,}67 \text{ x } 0{,}6185 + 0 \text{ x } 0{,}3815}{1{,}06} = 14{,}98\ €$$

Por tanto el valor de la opción de compra para dos períodos es de 14,98 €. Resumamos ahora todo el proceso: la valoración comienza con los flujos de caja del último período que son conocidos, luego se va retrocediendo hacia la izquierda hasta llegar al momento actual.

El procedimiento es muy sencillo aunque algo tedioso cuando hay muchos períodos. Esto último es importante puesto que para obtener un valor realista de la opción necesitamos elegir U y D cuidadosamente y dividir el tiempo hasta el vencimiento en una multitud de pequeños subperíodos. Conforme vayamos aumentando el número de subperíodos y, por consiguiente, reduciendo el tiempo de los mismos pasaremos de considerar el tiempo como una variable discreta a considerarlo una variable continua. En realidad, para unos resultados válidos el tiempo hasta el vencimiento debería ser dividido al menos en unos 50 subperíodos (esto proporcionaría 51 valores de la acción subyacente y otros tantos valores intrínsecos de la opción[7]).

Por otro lado, los ratios de cobertura deberán ser recalculados para cada nudo del grafo cuando hay dos o más períodos de tiempo. Así, por ejemplo:

Nudo c_u → $H = \dfrac{c_{uu} - c_{ud}}{SU\,(U-D)} = \dfrac{44-0}{120\,(1{,}2-0{,}833)} = 1$

Nudo c_d → $H = \dfrac{c_{ud} - c_{dd}}{SD\,(U-D)} = \dfrac{0-0}{83{,}3\,(1{,}2-0{,}833)} = 0$

Nudo c → $H = \dfrac{c_u - c_d}{S\,(U-D)} = \dfrac{25{,}67-0}{100\,(1{,}2-0{,}833)} = 0{,}7$

El ratio de cobertura del nudo c_u es igual a la unidad puesto que la opción de compra se encuentra claramente dentro de la zona "in the money" por lo que el flujo de caja será siempre positivo. Por el contrario, el del nudo c_d es igual a cero mostrando que la opción es claramente "out of the money" porque sus flujos de ca-

[7] El lector ve ahora como ya no son sólo dos los valores que puede tomar la acción subyacente dentro de un año sino 51 lo que se aproxima mucho más a la realidad

ja del próximo período van a ser nulos. Conforme el tiempo transcurre es necesario revisar el ratio de cobertura y si el tiempo hasta el vencimiento se divide en un gran número de subperíodos entonces el ratio de cobertura se puede utilizar para determinar la exposición al riesgo con bastante exactitud.

4.3 El modelo binomial para varios períodos

No es mi intención explicar la matemática que aplicada a una serie de períodos (basada en el triángulo de Pascal y en la combinatoria) proporciona la expresión de la binomial para la valoración de las opciones de tipo europeo. Como curiosidad mostraremos la expresión de la misma:

$$c = \frac{1}{(1+r_f)^n} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k} m^k \, (1-m)^{n-k} \; \text{máx} \left\{ \left(SU^k D^{n-k} - X \right), 0 \right\} \right]$$

Casi todas las variables ya son conocidas a excepción de "n" que indica el número de pasos en los que se descompone el proceso binomial. En resumen, la expresión considera que la opción vale simplemente el valor actual de los flujos de caja esperados a lo largo de un árbol binomial con n pasos, cuyos principales supuestos básicos son:

1º. La distribución de los precios de las acciones es una binomial multiplicativa.
2º. Los multiplicadores U y D (y, por ende, las varianzas de los rendimientos) son los mismos en todos los períodos.
3º. No hay costes de transacción, por lo que se puede establecer una cobertura sin riesgo para cada período entre la opción y el activo sin necesidad de realizar ningún coste irrecuperable.
4º. Los tipos de interés sin riesgo se suponen constantes.

Es importante recalcar que no es necesario asumir que los inversores tengan una determinada actitud hacia el riesgo, de hecho el modelo supone una neutralidad ante el riesgo porque se puede construir una cartera de arbitraje que elimina totalmente el riesgo de la inversión. Si el valor de la opción no coincide con éste, entonces se puede conseguir un beneficio sin riesgo.

4.4. La valoración de las opciones de venta

En este epígrafe vamos a valorar una opción de venta (*put option*) teniendo en cuenta que puede ejercerse anticipadamente, si se trata de una de tipo americano, y que este ejercicio anticipado puede ser preferible a esperar a ejercerla en la fecha de vencimiento.

En la figura 14 se muestra el esquema de los posibles movimientos de la acción y del valor de la opción de venta en la fecha de vencimiento (para un precio de ejercicio igual a 100 €). Para calcular el valor de la opción de venta en el momento actual actuaremos de la misma manera que en el caso de la opción de compra.

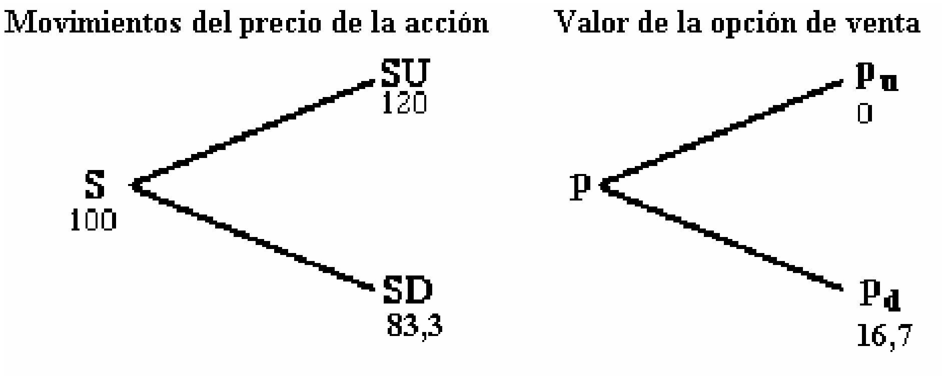

Fig. 14 Precios de la acción y valores de la opción de venta

Para valorar la opción de venta seguiremos el mismo procedimiento que realizamos para valorar la de compra. Supondremos, inicialmente, que actualmente disponemos de una cartera formada por H acciones y una deuda de B euros contraída al tipo de interés sin riesgo (r_f). Después de un período de tiempo el valor de dicha cartera coincide con el valor intrínseco de la opción de venta en dicho momento:

Si S = 120 € → 120 H - (1 + r_f) B = 0 €
Si S = 83,3 € → 83,3 H - (1 + r_f) B = 16,7 €

restando ambas ecuaciones obtendremos el valor del número de acciones ordinarias a comprar (H):

36,7 H = -16,7 → H = -0,455

si el tipo sin riesgo r_f es igual al 6% podemos detraer el valor de B en cualquiera de las dos ecuaciones anteriores: -51,51 euros. Como se ha podido observar la cartera está realmente formada por la venta de H acciones más un préstamo de B euros al tipo sin riesgo. Luego el valor de la opción de venta, p, en la actualidad, será igual al valor actual de la cartera formada por la venta de 0,455 acciones más un préstamo de 51,51 euros, es decir, 51,51 – 0,455 x 100 = 6,01 euros.

La formulación general de este cálculo es idéntica al de las opciones de compra. Así, el ratio de cobertura es igual a:

$$H = \frac{p_u - p_d}{S\,(U - D)}$$

mientras que el valor actual de la opción de venta, p, será igual a:

$$\boxed{p = \frac{p_u\, m + p_d\,(1 - m)}{1 + r_f}}$$

por tanto, la opción de venta tomará un valor igual a:

$$[(0 \times 61,85\%) + (16,7 \times 38,15\%)] \div 1,06 = 6,01 \text{ euros.}$$

Si ahora quisiéramos comprobar la paridad "put-call" no tendremos más que sustituir en la expresión:

$$p = c - S + VA(X) = 11,67 - 100 + (100 \div 1,06) = 6,01\ €$$

En el esquema de la figura 15 se muestra el valor de la opción de venta de tipo europeo cuando hay dos períodos. El cálculo comienza por los valores de la derecha que son obtenidos a través de la conocida expresión Máx {X-S,0}, luego nos moveremos hacia la izquierda calculando los valores de las opciones de venta (p_u y p_d) para terminar con el cálculo de la opción de venta europea hoy (**p** = 3,96 €). Si calculásemos el valor de la opción de venta americana la cosa cambiaría puesto que P_u = 0 y P_d = 16,7 lo que proporciona un valor de P = 6,01 €. Con ello se comprueba como el valor de la opción de venta americana es superior al valor de la opción de venta europea.

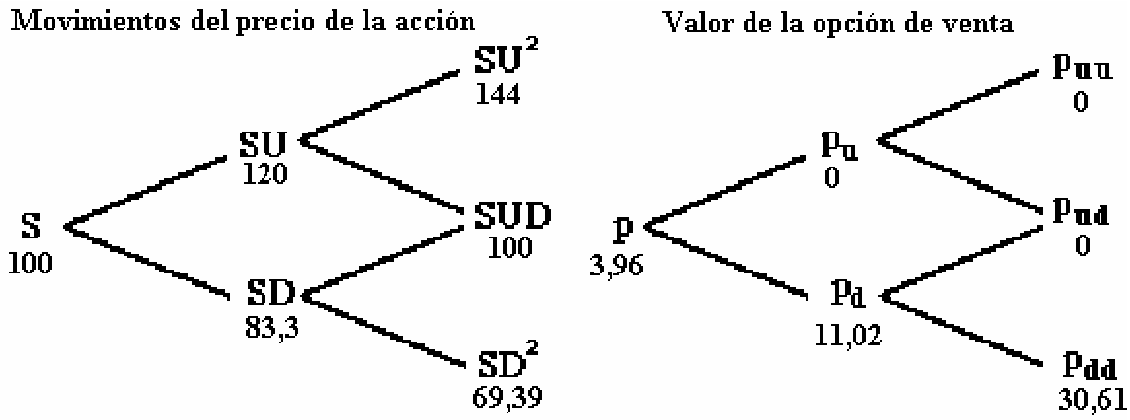

Fig. 15 Distribución de los precios de la acción y de los valores de la opción de venta de tipo europeo en el caso de dos períodos

Al lector le sorprenderá que al alargar el plazo de ejercicio de la opción de venta un año más, se obtenga un valor inferior al obtenido cuando el plazo de ejercicio era un año menor; puesto que según la teoría debería ser mayor (a mayor plazo mayor valor de la opción). Esta aparente disparidad se produce porque el árbol binomial tanto para uno como para dos períodos es inexacto. El valor exacto de la opción de venta para un período de un año es igual a 4,58 € mientras que para dos años es de 5,16 € (calculado a través de la fórmula de Black y Scholes). A pesar de ello vamos a realizar un cálculo más exacto, dentro de la simplicidad que aquí estamos siguiendo, para ver como efectivamente el valor de la opción de venta aumenta cuando el período de ejercicio también lo hace.

En lugar de trabajar con un período de dos años consecutivos vamos a trabajar con un período bianual único. Lo primero será estimar la volatilidad anual que tiene la acción; para ello extraeremos el logaritmo neperiano del coeficiente U, puesto que, como veremos en el epígrafe siguiente, $U = e^{\sigma}$. El valor de la volatilidad anual (sigma) es igual a 18,23%. De aquí obtendremos el valor de la volatilidad bianual a través de una expresión que analizaremos también en el epígrafe siguiente y que calcula dicha volatilidad bianual en función de la volatilidad anual: $\sigma\sqrt{t} = 0{,}1823\sqrt{2}$ = 25,78%, que equivale a un coeficiente de ascenso U = $e^{0,2578}$ = 1,294 y a uno de descenso D = 0,773 (véase la figura 16). Por otro lado, el tipo de interés sin riesgo para dicho período será del $1{,}06^2$ – 1 = 12,36%. Por tanto, las probabilidades neutrales al riesgo serán:

m = (1,1236 – 0,773) ÷ (1,294 – 0,773) = 67,3%
1-m = 32,7%

El valor de la opción de venta será igual a:

[(0 x 67,3%) + (22,7 x 32,7%)] ÷ 1,1236 = 6,61 euros.

valor que es mayor que los 6,01 euros que alcanzaba la opción de venta cuando su plazo de ejercicio era de sólo un período y que ahora sí que parece lógico. Eso sí, tanto los 6,01 euros como los 6,61 euros siguen siendo unos valores aproximados por exceso con respecto a los reales, porque la única forma de calcular el valor de la opción con exactitud a través del método binomial es descomponer el plazo de ejercicio en unos 50 subperíodos lo que escapa del planteamiento didáctico de este trabajo.

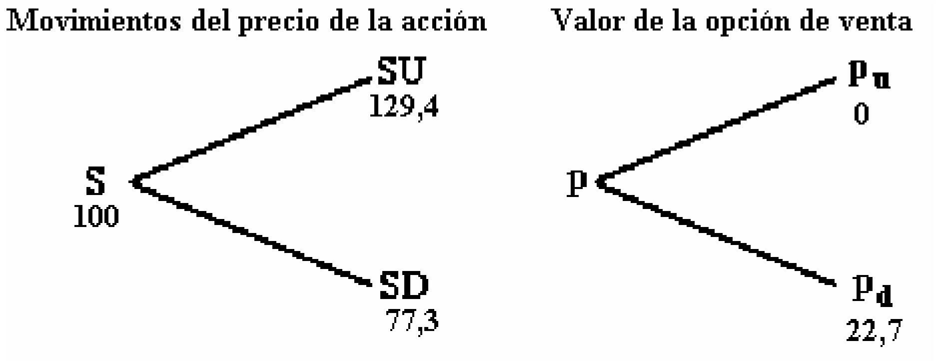

Fig. 16 Precios de la acción y valores de la opción de venta para un período bianual

5. DE LA DISTRIBUCIÓN BINOMIAL A LA NORMAL LOGARÍTMICA

En el proceso de cálculo multiplicativo del modelo binomial podríamos suponer que el factor de descenso D es igual a la inversa del factor de ascenso U, lo que provocaría que los rendimientos del activo fueran simétricos. Ahora bien, téngase en cuenta que para que esto suceda deberemos medir dicho rendimiento a través del logaritmo de la relación entre el precio en un momento determinado (S_t) y el del momento precedente (S_{t-1}). Esto es así, debido a que si, por ejemplo, el precio de una acción durante tres instantes de tiempo consecutivos vale 100, 120 y 100 euros, respectivamente, sus rendimientos serán del 20% (es decir, 20÷100) y del -16,66% (es decir, -20÷120), como se observa el valor absoluto de ambas cantidades no es simétrico aunque el ascenso y descenso sea el mismo en euros, lo que cambia es la base sobre la que se calcula dicha variación. Sin embargo, si aplicamos el cálculo logarítmico obtendremos unos rendimientos de: Ln(120÷100) = 18,23% y Ln(100÷120) = -18,23%, lo que sí los hace simétricos. Por lo tanto, los precios que se distribuyen según una normal logarítmica tendrán unos rendimientos distribuidos normalmente, que serán calculados según la expresión:

$$r_t = \text{Ln}\ (S_t \div S_{t-1})$$

En la figura 17 se muestra un ejemplo de un árbol binomial donde los coeficientes de ascenso y descenso son, respectivamente, U = 1,2 y D = 1/U = 0,833, que se extiende a lo largo de seis períodos y que comienza con un valor de la acción de 100 euros. La amplitud de un árbol binomial dependerá del tamaño de U y del número de pasos en los que se descompone. El supuesto equivalente para un activo cuyos rendimientos se distribuyen según una normal, es que la varianza de los rendimientos es constante en cada período. Así, si la varianza del período es σ^2, la varianza para t años será $\sigma^2 t$. Mientras que la desviación típica será $\sigma\sqrt{t}$ a la que se le suele denominar *volatilidad* del activo.

						2986
					2488	
				2073		2073
			1728		1728	
		1440		1440		1440
	1200		1200		1200	
1000		1000		1000		1000
	833		833		833	
		694		694		694
			579		579	
				482		482
					402	
						335

Fig.17 Árbol binomial de seis períodos y distribución de los precios

Si σ es la desviación típica de los rendimientos por período, t el número de años hasta el vencimiento y n el número de períodos en los que se subdivide t, el proceso binomial para el activo proporciona unos rendimientos normalmente distribuidos en el límite si:

$$U = e^{\sigma\sqrt{t/n}} \quad y \quad D = 1/U = e^{-\sigma\sqrt{t/n}}$$

Así, por ejemplo, si S = 1.000 €; σ = 0,3; t = 0,5 años; r_f = 10% y n = 10 iteraciones (cada subperíodo es igual a 0,05 años):

$$U = e^{0,3\sqrt{0,5/10}} = 1,06938 \quad y \quad D = 1/U = 0,93512$$

además, según las ecuaciones que vimos en el primer epígrafe obtendremos unos valores de las probabilidades neutrales al riesgo iguales a (el tipo de interés sin riesgo semestral es el 5%):

m = [(1 + (0,05/10)) – 0,93512] / (1,06938 – 0,93512) = 0,5204
1-m = 0,4796

Las distribuciones normal-logarítmicas de los precios tienen una forma semejante a una campana asimétrica y podemos pensar que conforme el tiempo va transcurriendo la distribución se va ampliando, lo mismo que le ocurre al árbol binomial. Como se aprecia en la figura 18 en la que se muestra una opción de compra *out-of-the-money*, comenzando en el momento cero cuando el precio de la acción subyacente es S, conforme el tiempo pasa la distribución se amplia hasta que una parte de ella supera, o no, al precio de ejercicio (X) en la fecha de vencimiento. En dicha fecha, los flujos de caja de la opción se representan por la zona sombreada que se encuentra por encima de X. El valor actual de la opción de compra según el método de Black y Scholes es sencillamente el valor actual de dicho área.

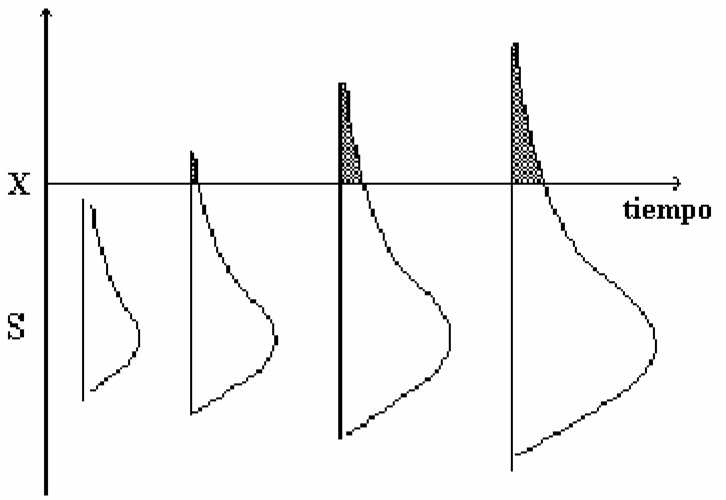

Fig.18 El valor de la opción aumenta conforme la distribución del precio aumenta al transcurrir el tiempo

6. EL MODELO DE BLACK Y SCHOLES

El modelo desarrollado por los profesores Fischer Black y Myron Scholes[8] para valorar las opciones de tipo europeo es importante, no sólo por tener en cuenta la valoración del arbitraje, sino por proporcionar una solución analítica en un sólo paso, es mucho más rápido de calcular que el binomial (aunque también es menos flexible) y asume que los rendimientos de los activos se distribuyen normalmente lo que es teóricamente razonable.

El modelo considera que el precio del activo subyacente se distribuye según una normal logarítmica para la que su varianza es proporcional al tiempo. Los supuestos de los que parte son los siguientes:

1. El precio del activo sigue una distribución normal logarítmica, por lo que los rendimientos se distribuyen normalmente.
2. El valor de los rendimientos es conocido y es directamente proporcional al paso del tiempo.
3. No hay costes de transacción, así que se puede establecer una cobertura sin riesgos entre el activo y la opción sin ningún coste.
4. Los tipos de interés son conocidos y constantes.
5. Durante el período de ejercicio, la acción subyacente no pagará dividendos.
6. Las opciones son de tipo europeo

El modelo desarrollado por Black y Scholes, cuya fórmula de valoración de opciones europeas mostramos seguidamente, resuelve el problema fundamental de la valoración de las mismas que consiste en que dados el tiempo que falta hasta su vencimiento (t), el tipo libre de riesgo (r_f), el precio de ejercicio de la opción (X) y la varianza de la tasa de rentabilidad instantánea (σ^2), habrá que determinar la relación existente entre el coste de la opción de compra europea (**c**) y el precio de la acción sobre la que recae (S_o). Disponiendo de un modelo que ofreciese tal relación, cada día se podría determinar qué opciones se encuentran infravaloradas y cuáles sobrevaloradas mediante la simple introducción, en la fórmula, del precio de la acción ese día.

$$c = S_o\, N(d_1) - X\, e^{-r_f t}\, N(d_2)$$

Donde $N(d_i)$ es la función de distribución de la variable aleatoria normal de media nula y desviación típica unitaria (probabilidad de que dicha variable sea menor o igual a d_i).

$$d_1 = \frac{\mathrm{Ln}(S_0/X) + r_f\, t + \frac{1}{2}\sigma^2 t}{\sigma\sqrt{t}}; \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

---

[8] BLACK, Fisher y SCHOLES, Myron: "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy* nº 81. Mayo-Junio 1973.

Para Black y Scholes un inversor racional nunca ejercería una opción de compra antes de su caducidad y, por lo tanto, el valor de la opción de compra americana coincidirá con la europea. Por otra parte, dado que la opción de venta americana incorpora sobre la europea la ventaja de poder ser ejercida en cualquier momento del período, su valor superará a la correspondiente europea, proporcionando la valoración de ésta última un límite mínimo para aquélla (véase el epígrafe 3). Este límite mínimo se calcularía a través de la relación de paridad, obteniéndose el siguiente valor para una opción de venta europea (donde $e^{-r_f t}$ es el factor de descuento continuo):

$$p = c - S_0 + VA(X)$$

$$p = [S_o\ N(d_1) - X\ e^{-r_f t}\ N(d_2)] - S_o + X\ e^{-r_f t}$$

$$p = S_0\ [N(d_1) - 1] - X\ e^{-r_f t}\ [N(d_2) - 1]$$

Como se puede apreciar la expresión de Black y Scholes aplica una ponderación de $N(d_1)$ a S_o y otra de $N(d_2)$ a $X\ e^{-r_f t}$. Si la ecuación se rellena dando valores por encima del límite inferior, entonces $N(d_1)$ deberá ser mayor que $N(d_2)$.

Ejemplo:
El precio actual de una acción (S_0) es de 10 euros
El precio de ejercicio (X) es de 11 euros
La tasa libre de riesgo (r_f) es del 10%
El tiempo hasta el vencimiento (t) es de 0,5 años
La volatilidad expresada mediante la desviación típica (σ) de los rendimientos del activo subyacente es del 30%
Calcular el valor de la opción de compra (**c**)

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones representativas de d_1 y d_2, obtendremos:

$$d_1 = -0{,}10753 \quad \longrightarrow \quad N(d_1) = 0{,}457185$$
$$d_2 = -0{,}31966 \quad \longrightarrow \quad N(d_2) = 0{,}374613$$

Y sustituyendo en la ecuación de Black y Scholes:

$$c = 10 \times 0{,}457185\ -\ 11 \times e^{-0{,}5 \times 0{,}10} \times\ 0{,}374613$$
$$c = 0{,}65 \text{ euros}$$

Si el valor de la opción de compra en el mercado es inferior a 0,65 euros, la adquiriríamos y si fuese superior la venderíamos. Por otra parte, si calculásemos el valor de la opción de venta europea obtendríamos un valor de p = 1,1156 euros.

En aquellos mercados con un alto grado de eficiencia se utiliza este modelo para hallar la varianza de una acción cualquiera (σ^2_i) como medida de su riesgo total (la *volatilidad implícita).* Para ello se supone que el valor intrínseco de la opción coincide con el de mercado y se trata entonces de averiguar que valor de σ^2 hace que se cumpla la ecuación de Black y Scholes (esto se realiza por tanteo usando un ordenador).

7. LA SENSIBILIDAD DEL PRECIO DE LA OPCIÓN

A continuación vamos a analizar de qué manera ciertas variables exógenas afectan al precio de las opciones, para ello se estudiarán una serie de índices o coeficientes representativos de dichas relaciones y que nos servirán para establecer coberturas de riesgo en las carteras con opciones. A este tipo de coeficientes se les conoce habitualmente como "las griegas" por denominarse mediante letras griegas.

7.1. El coeficiente DELTA

Este coeficiente, al que ya hicimos referencia en el tercer epígrafe, lo podemos definir como la variación producida en el precio de la opción por una unidad de cambio en el precio de la acción subyacente. Expresado en forma discreta tendríamos:

$$\text{DELTA} = \frac{\Delta \text{ precio de la opción}}{\Delta \text{ precio de la acción}} = \frac{\Delta\, c}{\Delta\, S}$$

Mientras que, en forma continua, la *delta* de las opciones de compra y de venta sería igual a la derivada parcial del precio de la opción con relación al precio del activo subyacente:

$$\Delta_c = \frac{\partial c}{\partial S} = N(d_1) \qquad\qquad \Delta_p = \frac{\partial p}{\partial S} = N(d_1) - 1$$

Así, si la *delta* de la opción de compra es igual a 0,457185 indica que si el precio de la acción subyacente aumenta (o desciende) en un euro el precio de la opción lo hará en algo más de 45 céntimos. En el caso de la opción de venta su *delta* sería de: 0,457185 - 1 = -0,542815 que indicaría que ante un ascenso (descenso) del precio de la acción subyacente en un euro el valor de la opción de venta descendería (aumentaría) en unos 54 céntimos. También se puede definir la *delta* de la opción como la probabilidad de ejercer la misma, así podríamos decir que existe el 45,7% de probabilidad de ejercer la opción de compra anterior.

Las *deltas*, a las que se conoce también como ratios de cobertura, indican el número de acciones necesario para cubrir una posición en opciones. Por ejemplo, supongamos que usted ha vendido una opción de compra y otra de venta (es decir, ha vendido un *straddle*), si cada opción es sobre 100 acciones entonces usted deberá adquirir: 100 x [-0,457185 - (-0,542815)] = 8,56 acciones.

En la figura 19 puede apreciarse la gráfica representativa de la *delta* de una opción de compra en función del precio de ésta última y de su activo subyacente. El valor de la *delta* se mantiene nulo mientras la opción se encuentre profundamente dentro de la zona *out of the money*, puesto que cualquier pequeña variación en el precio del subyacente no va a producir ningún beneficio adicional para el propietario de la opción de compra. Ahora bien, conforme se aproxime la opción a la zona *at the money* el precio de la opción comenzará a moverse al alza y cuanto más penetre la opción en el terreno *in the money*, su precio se moverá de acuerdo con el de la acción correspondiente. En este último caso, cuando el precio de ésta última aumenta, la *delta* tiende a la unidad, es decir, el valor de la opción de compra varía euro a euro con el de su acción subyacente.

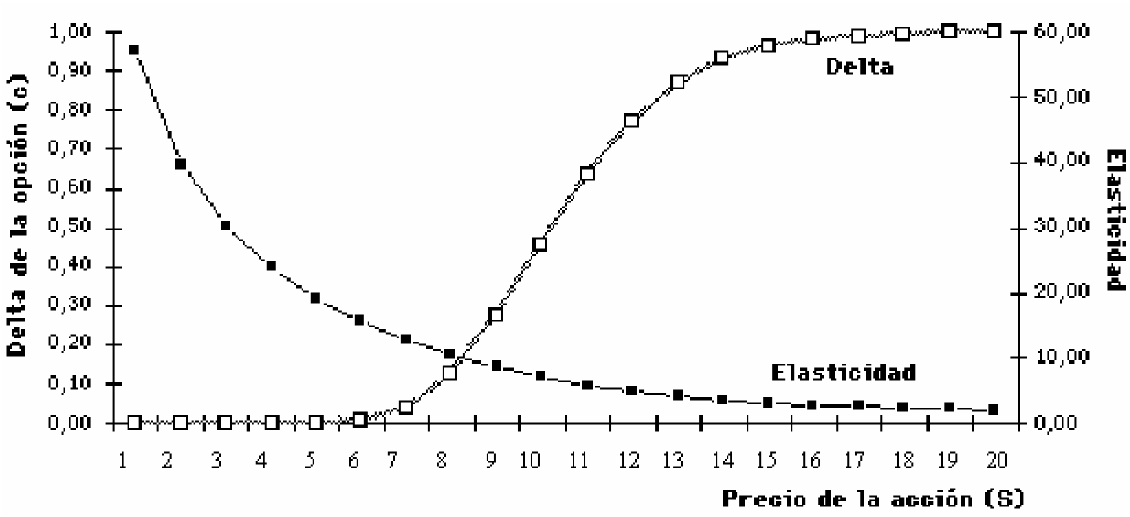

Fig.19 La *delta* y la elasticidad de una opción de compra [X=1.100; t=0,50; σ=30%; r_f=10%].

Si medimos el porcentaje de variación del precio de la opción cuando el precio del activo subyacente varía un 1%, obtendremos la *elasticidad* de la misma. En forma matemática podríamos expresarla así:

$$\text{Elasticidad} = \frac{\partial c}{\partial S} \times \frac{S}{c}$$

La elasticidad es una medida del apalancamiento obtenido con una opción. En la figura 19 se observa la elasticidad de la opción del ejemplo anterior, dónde se puede apreciar como, en el límite, los valores máximo y mínimo de la misma son, respectivamente, infinito (opción profundamente *out of the money*) y cero (opción profundamente *in the money*).

Con relación a la elasticidad surge el concepto de *beta de la opción*. Como parece evidente, tiene mucho que ver con el famoso *coeficiente de volatilidad* (ßeta) de las acciones, que medía la sensibilidad del rendimiento de una acción con relación al rendimiento del mercado. Pues bien, la *beta de la opción* (es decir, la sensibilidad del rendimiento de la opción con respecto al del mercado) es una medida del riesgo y es igual a:

ßeta de la opción = ßeta de la acción x Elasticidad de la opción

Por último, sólo nos queda decir que la *delta* crece conforme aumente la volatilidad del activo subyacente si se encuentra en la zona *out-of-the-money*, decreciendo en la *in-the-money*, tal y como se puede observar en la figura 20 en la que aparece reflejada la misma gráfica de la figura 19 pero para cuatro diferentes desviaciones típicas del activo subyacente.

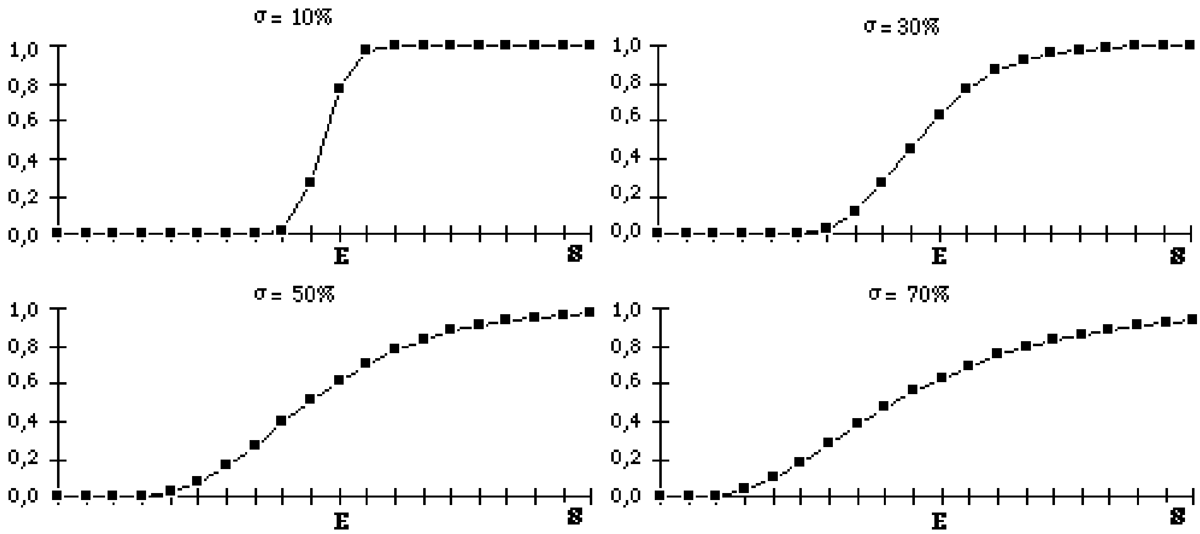

Fig.20 La delta de la opción para cuatro distintas volatilidades del activo subyacente

6.2. El coeficiente GAMMA

Mide el efecto que la inestabilidad del mercado produce en el valor de *delta*. Así que la *gamma* de una opción mide la tasa de cambio de la *delta* cuando el precio de la acción varía una unidad. Matemáticamente se puede definir como la segunda derivada del precio de la opción con respecto al precio del activo subyacente:

$$\text{Gamma} = \frac{\Delta \text{ Delta}}{\Delta \text{ S}} \longrightarrow \gamma = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S\sigma\sqrt{t}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-[0{,}5\, d_1^2]}}{S\sigma\sqrt{t}}$$

Es pues, una medida de la sensibilidad de la *delta*, es decir, es la *delta* de la *delta*. Desde un punto de vista conceptual, si ésta última representa la velocidad, *gamma* representa la aceleración. Veamos un ejemplo: supongamos una volatilidad del 30%, un tipo de interés sin riesgo del 10%, un tiempo de vencimiento de 180 días y un precio de ejercicio de 11 euros. Según lo anterior el valor de la opción de compra será de 0,65 euros, si el precio de la acción es de 10 euros. La *delta* tomará un valor de 0,457185 y la *gamma*[9] de 0,00187. Lo que implica que si el

[9] Tanto la *delta* como la *gamma* se pueden expresar en porcentaje. Así, tendríamos una delta de 45,7% (o 45,7) y una *gamma* de 0,18% (o 0,18 *deltas* o, simplemente, 0,18).

precio de la acción ascendiese a 10,01 euros la *delta* se incrementaría en 0,00187 alcanzando un valor de 0,45905.

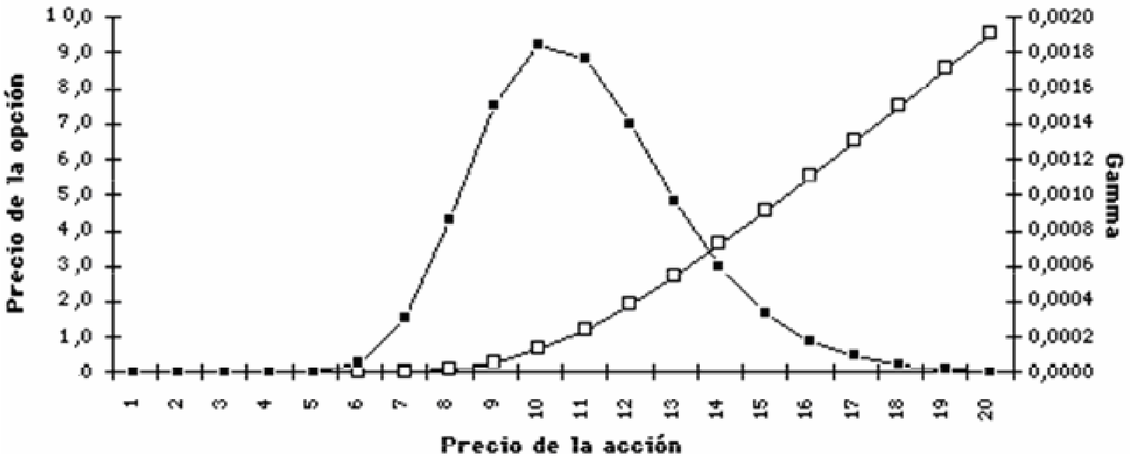

Fig.21 La gamma de una opción de compra

El coeficiente *gamma* de una opción es mayor cuando la acción está en la zona *at the money*, mientras que tenderá a cero según se aleje de ella en cualquier dirección (ver figura 21). La *gamma* refleja el grado de la curvatura en la línea representativa del precio de la opción de compra, de tal forma que cuando la curvatura es más grande (en el precio de ejercicio) la *gamma* alcanzará su valor máximo (en el gráfico se muestra la línea representativa del valor intrínseco de la prima de la opción calculada según la expresión de Black-Scholes, para el ejemplo que venimos utilizando). Por el contrario, cuando no hay curvatura el valor del coeficiente es nulo.

La *gamma* es afectada por la volatilidad y por el plazo hasta el vencimiento de la opción. En el primer caso, cuanto mayor sea la volatilidad menor será *gamma* si la opción es del tipo *at-the-money*, pudiendo aumentar inicialmente la *gamma* de los otros dos tipos de opciones para luego descender. En cuanto al tiempo, si la opción es *at-the-money* y la fecha de vencimiento se aproxima, la *gamma* aumentará fuertemente, mientras que en las opciones *in* y *out of the money*, desciende hacia cero.

Concluyendo, en palabras del profesor Lamothe, "la *gamma* nos proporciona la medida del riesgo específico asumido en nuestras posiciones en opciones, ya que la *delta* nos mide el riesgo de posición en términos del subyacente".

6.3. El coeficiente THETA

Como sabemos, el precio de la opción depende directamente del tiempo que resta para el vencimiento de la misma. Cuanto más tiempo quede más vale la opción, así que la prima de la opción descenderá con el paso del tiempo debido a la Proxymidad de la fecha de vencimiento de la misma (siempre que las demás variables permanezcan constantes). El coeficiente *theta* muestra la variación en el precio de una opción como consecuencia de una variación en el tiempo que resta para su vencimiento. Es pues, una medida del deterioro temporal. Matemáticamente, es la derivada parcial del precio de la opción con respecto al tiempo hasta el vencimiento:

$$\text{Theta} = \frac{\Delta c}{\Delta t} \longrightarrow \theta = \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{S\sigma}{2\sqrt{t}} N'(d_1) + E\, e^{-R_f t} R_f N(d_2)$$

En la mayoría de los casos el coeficiente *theta* es positivo aunque puede tomar un valor negativo cuando faltando muy poco para la fecha de ejercicio se trata de una opción de venta europea muy *in-the-money*, o cuando se trata de opciones europeas tanto de compra como de venta sobre futuros también en la zona *in-the-money*, lo que es debido a que los contratos de futuros alteran su valor con el transcurso del tiempo a causa del descenso en el coste de mantenimiento de los mismos, que está implícito en su precio. Una opción sobre liquidez no debería tener una *theta* negativa[10].

Las opciones que son del tipo *in-the-money* verán su precio descender en forma lineal conforme se acorte el tiempo hasta el vencimiento, lo que es debido a que tienen un pequeño valor temporal y a que seguramente la opción permanecerá en dicha zona. Para las opciones *at-the-money* la tasa de reducción del precio aumenta conforme descienda el tiempo; este tipo de opciones son muy sensibles puesto que conforme se aproximen al final de su vida pueden girar tanto a la zona *in-the-money* como a la *out-of-the-money*. Si la opción pertenece a éste último tipo, la tasa de reducción del precio se va reduciendo cuanto menos le quede de vida; ello es así debido a que la proximidad de la fecha de vencimiento reduce la posibilidad de que el pequeño valor temporal de la opción afecte a su precio (que, por otra parte, será casi nulo).

6.4. El coeficiente RHO

Este coeficiente indica la sensibilidad del precio de la opción debida a los cambios del tipo de interés libre de riesgo. Es decir, mide la cobertura de la opción con respecto a dicho tipo de interés. Mientras que *rho* es positivo para las opciones sobre acciones, resulta ser negativo para otro tipo de activos como es el caso de las opciones sobre futuros, o de las propias acciones, por ejemplo. Matemáticamente, *rho* se calcularía obteniendo la derivada parcial del precio de la opción con relación al tipo de interés:

$$\text{RHO} = \frac{\Delta c}{\Delta R_f} \longrightarrow \rho = \frac{\partial c}{\partial R_f} = t\, E\, e^{-R_f t} N(d_2)$$

Rho es la menos importante de las variables que inciden sobre el valor de la opción. En la figura 22 se muestra la relación entre el valor de la opción y el tipo de interés, y en ella se puede apreciar como las alteraciones del tipo de interés sólo

---

10 Bastantes operadores en opciones suelen "cambiar el signo" de la *thetas* en orden a reflejar el efecto negativo del transcurso del tiempo. Esto hace que las *thetas* negativas aparezcan en las posiciones compradoras de opciones y que las positivas lo hagan en las vendedoras.

afectan ligeramente al precio de la opción. Además, hay que tener en cuenta que en el cálculo de *rho* se supone que al variar el tipo de interés el precio de la acción subyacente se mantiene constante, lo que no es cierto sino que descendería de valor impulsando a la baja al precio de la opción.

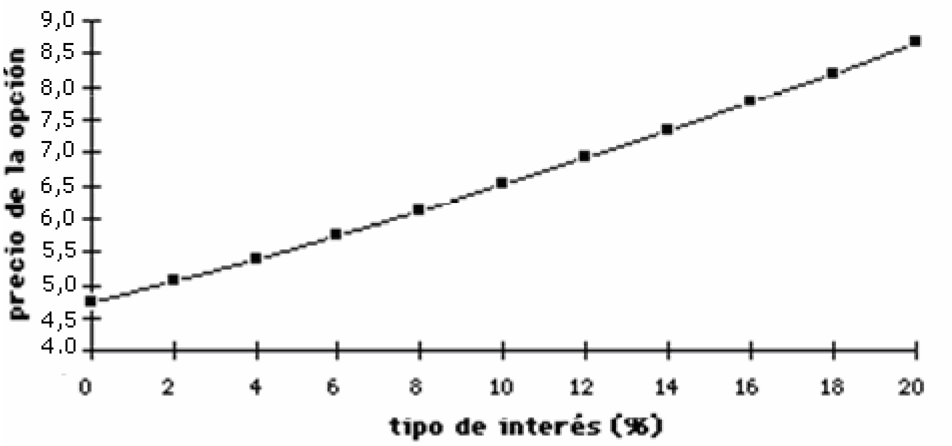

Fig.22 La *rho* de una opción de compra

Siguiendo con el razonamiento anterior podemos decir que *rho* se compone de dos partes. La primera de ellas es un reflejo directo del efecto del tipo de interés libre de riesgo en el precio del título subyacente (∂S/∂Rf) y de éste sobre el valor de la opción, relación que es expresada mediante la *delta* de la opción (∂c/∂S). El segundo componente proviene del impacto de los tipos de interés sobre el coste de mantener la posición. Las opciones son instrumentos apalancados, que dan el derecho sobre un activo siempre que el inversor tenga la financiación suficiente para conseguirlo. Así que, lo mismo que en los contratos de futuros, el precio de la opción incluirá un coste de mantenimiento implícito. La prima de la opción será tanto mayor cuanto más grandes sean el tipo de interés y el coste de mantener la posición. Esto se puede escribir de la siguiente forma:

$$\rho = \frac{\partial S}{\partial R_f} \times \frac{\partial c}{\partial S} + \frac{\partial c}{\partial R_f} = \frac{\partial S}{\partial R_f} \times \textit{delta} + \frac{\partial c}{\partial R_f}$$

Donde el primer término pondera la sensibilidad del precio del título subyacente con respecto al tipo de interés, por la *delta* de la opción. El segundo término tiene en cuenta los cambios en el precio de la opción causado por la alteración del coste de mantener la posición.

6.5. El coeficiente VEGA

Este coeficiente, también denominado *kappa* u *omega*, indica el cambio en el precio de una opción con respecto a una variación producida en la volatilidad de la acción.

Expresada en forma matemática *vega* es la derivada parcial del precio de la opción con relación a la volatilidad del activo subyacente.

$$\text{VEGA} = \frac{\Delta c}{\Delta \sigma} \longrightarrow \nu = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = S\sqrt{t}\,N'(d_1)$$

Así por ejemplo, si la *vega* de una opción cuyo precio es 4,25 € resultase ser 0,5 ello querría decir que un aumento de un 1% de la volatilidad provocaría que el valor de la opción fuera de 4,75 €. El coeficiente *vega* es positivo puesto que todo aumento de la volatilidad del subyacente hace aumentar el valor de la opción ya sea ésta de compra o de venta. Esto es así porque una mayor volatilidad lleva a una probabilidad más alta de oscilaciones en el precio de la acción subyacente, lo que hace aumentar el valor de la opción.

Vega alcanza su valor máximo en la zona *at the money*, cayendo cuando la opción se aleja de dicha zona en cualquier dirección. En términos monetarios absolutos, el precio de la opción es menos sensible cuando se encuentra en las zonas *in* y *out of the money*; sin embargo, en términos porcentuales esto no será así. En la figura 23 se muestra la relación entre el precio de la opción de compra y la volatilidad del ejemplo que venimos manejando (recuérdese que la opción era *out-of-the-money* por ello si la volatilidad es nula el valor de la opción será cero puesto que S<E).

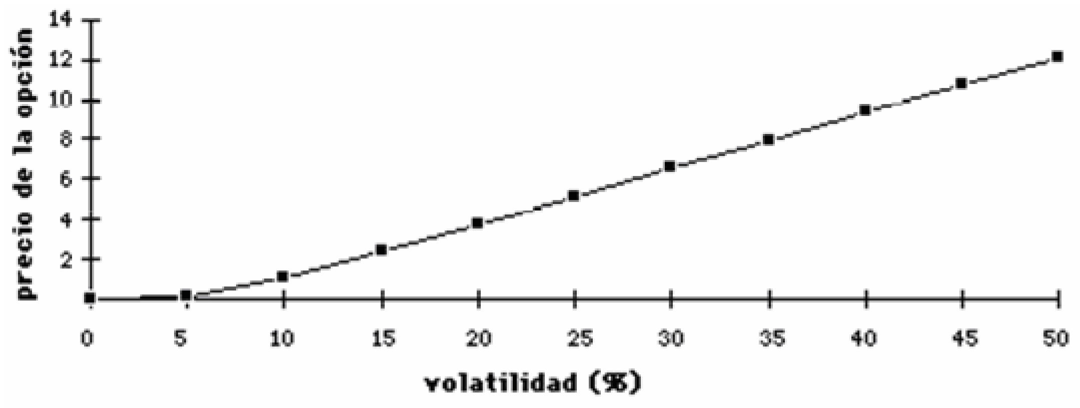

Fig.22 La *vega* de una opción de compra

Se dice que un inversor tiene una posición larga en volatilidad cuando tiene una posición *vega* positiva, porque si la volatilidad de la acción aumenta, también lo hará el valor de su posición. Lógicamente, tendrá una posición corta cuando el valor del coeficiente sea negativo. En el primer caso se tratará de una cartera de opciones de tipo comprador, siendo de tipo vendedor la cartera con *vega* negativa.

Bibliografía

BLACK, Fischer (1991): "Cómo obtuvimos la fórmula para valorar opciones". *Análisis Financiero*. nº 53. Págs: 12-16
BLACK, Fisher y SCHOLES, Myron (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy* nº 81. Mayo-Junio. Págs.: 637-659. Existe traducción en castellano: "Valoración de Opciones y de Pasivos de una Empresa". *Análisis Financiero*. nº 53. 1991. Págs: 18-27
BODIE, Zvi, KANE, Alex, y MARCUS, Alan (1999): *Investments*. Irwin. Homewood (Ill.). 4ª ed.
BOOKSTABER, Richard (1981): *Option Pricing and Strategies in Investing*. Addison Wesley. Reading (Mass).
BOOKSTABER, Richard y CLARKE, Roger (1991): "Problemas para valorar la rentabilidad de carteras con opciones". *Análisis Financiero*. nº 53. Págs: 36-51
CHANCE, Don (1995): *An Introduction to Derivatives*. The Dryden Press. Fort Worth (TX) (3ª ed.)
COX,J., ROSS,S., y RUBINSTEIN,M. (1979): "Options pricing: a simplified approach". *Journal of Financial Economics*. nº 7. Págs.: 229-263
COX,J., y RUBINSTEIN, M. (1985): *Options Markets*. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ).
DEHAPIOT, Tanguy y MANCHET, Stéphane (1989): "Mode de volatilité aléatoire et prix des options". *Finance*. vol 10 nº 2. Págs.: 7-25
ECKL, S., ROBINSON,J. y THOMAS, D. (19909: *Financial Engineering*. Basil Blackwell. Oxford.
FITZGERALD, Desmond (1987): *Financial Options*. Euromoney. Londres.
GEMMILL, Gordon (1993): *Options Pricing*. McGraw Hill. Londres.
HULL, John (2000): *Options, Futures, & Other Derivatives*. Prentice Hall. Upper Saddle River (NJ) (4ª ed.)
KOLB,R. (1991): Options. *An Introduction*. Kolb Publishing. Miami.
LAMOTHE, Prosper y PEREZ, Miguel (2003): *Opciones Financieras y Productos Estructurados*. McGraw Hill. Madrid. (2ª ed.)
MERTON, Robert (1973): "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science* nº 4. Págs.: 141-183
NATEMBERG, S. (1988): *Option Volatility and Pricing Strategies*. Probus. Chicago.
SHARPE, William, ALEXANDER Gordon y BAILEY, Jeffery (1999): *Investments*. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ). 6ª ed.

Ejercicios

1º) Un inversor emite una opción de compra europea con vencimiento dentro de tres meses sobre Iberdrola con un precio de ejercicio de 40 €. El precio actual de las acciones de la compañía eléctrica es, también, de 40 €. Sabiendo que la desviación típica de los rendimientos de la acción es del 20%, que el activo sin riesgo es del 4%, calcúlese el precio intrínseco de la opción a través de la expresión de Black y Scholes. Calcúlese también el coeficiente *delta* en dicho instante explicando qué significa el valor obtenido.

2º) Un inversor ha adquirido una opción de compra europea sobre Repsol. Calcúlese su valor según la expresión de Black y Scholes sabiendo que el precio de ejercicio es de 30 €, el precio del título subyacente es de 32,50 €, la desviación típica de los rendimientos es del 26%, la tasa libre de riesgo es del 4% y el tiempo hasta el vencimiento es de tres meses. Obténgase también el valor del coeficiente *delta*. Si, además, supiéramos que el precio de mercado de la opción es de 2,75 €, ¿qué debería hacer el inversor para ganar dinero?.

3º) Una opción de venta y otra de compra, ambas de tipo europeo, vencen dentro de tres meses y ambas tienen un precio de ejercicio de 25 €. Sabiendo que la tasa libre de riesgo es del 4% se desea determinar, a través de la *paridad put-call*: a) el precio de la opción de venta si la opción de compra valiese 4 € y el precio de mercado del subyacente fuese de 22,50 €; b) el precio de la opción de compra si la de venta tomase un valor de 5 € y el precio del activo subyacente fuese de 20 €.

4º) A través de la *paridad put-call* calcúlese el valor teórico de la opción de venta europea que tuviese el mismo precio de ejercicio y el mismo vencimiento que las opciones de compra de los ejercicios 1 y 2 anteriores.

5º) Calcular el valor de una opción de venta europea a través de un proceso binomial de dos fases (una por año) sabiendo que el precio actual de la acción subyacente es de 10 €, el precio de ejercicio es de 11 €, y la tasa libre de riesgo alcanza a ser del 4% nominal anual. Los coeficientes de ascenso y descenso son, respectivamente, de 1,3 y de 0,8. Obténgase, de paso, el valor del ratio de cobertura de la opción de venta.

6º) Calcular el valor de la opción de compra europea con un precio de ejercicio de 11 €, y con los mismos datos del ejercicio anterior a través del modelo binomial y después compruébese que se cumple la *paridad put-call*.

7º) Usted está considerando la venta de una opción de compra europea[11] con un precio de ejercicio de 10 € y un año de vencimiento. El título subyacente, que no reparte dividendos, tiene un precio actual de 10 € y usted considera que tiene una probabilidad del 50% de aumentar a 12 € y otra probabilidad idéntica de descender a 8 €. El tipo libre de riesgo es del 4%:

a) Describa los pasos específicos implicados en la aplicación del modelo binomial de valoración de opciones con objeto de calcular el valor de la opción de compra.
b) Compare el modelo binomial al modelo de Black y Scholes

8º) Considere un aumento de la volatilidad del título del ejercicio anterior de tal manera que el precio de la acción pueda ascender hasta 13 €, o descender hasta 7 €. Muestre que el valor de la opción de compra europea es superior al indicado en dicho ejercicio.

9º) El ratio de cobertura de una opción de compra europea *at-the-money* sobre Repsol es 0,45 mientras que el ratio de cobertura de una opción de venta europea *at-the-money* sobre dicha compañía es de -0,55. ¿Cuál sería el ratio de cobertura

[11] Este ejercicio está inspirado en uno citado por Bodie, Kane y Marcus: *Investments*. Irwin. 1993., que fué utilizado en el exámen de Chartered Financial Analysts

de la posición *straddle* compradora *at-the-money* sobre Repsol?. y ¿cuál sería el ratio de cobertura si la posición fuese un *strip* o un *strap*?

10°) Tenemos tres opciones de venta europeas sobre un mismo título subyacente. Una tiene un coeficiente *delta* igual a -0,9 otra lo tiene igual a -0,5 y la tercera igual a -0,1. Sabiendo que los precios de ejercicio sobre los que se emitieron son de 10 €, 11 € y 12 €, asígnense cada una de las *deltas* al precio de ejercicio al que correspondan.