# TEMA 4: Sistemas de ecuaciones lineales II



– – – – – – – – – – – – – – – – – – –

## 5) Métodos de factorización.

En este tema en el que se estudian los sistemas de ecuaciones lineales desde la perspectiva del cálculo matricial, es importante detenerse en el estudio de métodos de resolución de sistemas que permiten economizar en el número de operaciones a realizar. Estamos pensando, por ejemplo, en situaciones en las que aparecen sistemas de ecuaciones $AX = B$ con la misma matriz de coeficientes $A$ y lo que cambia es sólo el término independiente $B$ . En estos casos es muy útil poder factorizar la matriz $A$ como producto de dos matrices triangulares $L \cdot U$, donde $L$ es triangular inferior y $U$ triangular superior. Veamoslo en un ejemplo

Tomamos el sistema

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Vamos a utilizar eliminación gaussiana en la matriz de coeficientes $A$ para transformarla en una matriz triangular superior. Las operaciones elementales permitidas son dos:

1) multiplicar una fila por un escalar $\lambda \neq 0$

2) sumar a una fila otra multiplicada por un escalar

**no** se permite intercambiar filas, si esto fuese necesario para conseguir un pivote no nulo deberemos hacer los cambios oportunos previamente en el sistema de ecuaciones. Tengamos en cuenta que queremos resolver el mismo sistema para distintos $B$. Procedemos con nuestra matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_2 - 2f_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 + f_1]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[f_3 + 3f_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} = U$$

en otros términos, si las operaciones elementales anteriores fuesen las matrices $E_1, E_2$ y $E_3$ respectivamente, entonces multiplicando $A$ por esas matrices obtenemos $U$

$$E_3(E_2(E_1 \cdot A)) = U$$

Como estas matrices son regulares se tiene

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \cdot U$$

Observemos que las matrices $E_1, E_2$ y $E_3$ son triangulares inferiores y que su inversa tambien es triangular inferior, concretamente

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos entonces nuestra descomposición:

$$A = \underbrace{E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1}}_{L} \cdot U$$

El método mas sencillo para hallar $L$ no requiere pasar por las matrices elementales y calcular su producto, sino que partiendo de la matriz identidad vamos a hacer las operaciones elementales inversas a las realizadas arriba a $A$ pero empezando por la última, esto es $E_1^{-1}(E_2^{-1}(E_3^{-1} \cdot I)) = L$

Recordemos que la operación inversa de 1) es dividir esa fila por $\lambda$ y que la operación inversa de 2) es restar a esa fila la otra multiplicada por el escalar. En nuestro caso

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - 3f_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3 - f_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[f_2 + 2f_1]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Concluimos finalmente que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

**La matriz $A$ puede escribirse como producto $LU$ siempre que los pivotes de la eliminación Gaussiana no sea cero.**

Volviendo al sistema de ecuaciones, la factorización de $A$ separa el sistema $AX = B$ en dos sistemas triangulares:

$$\begin{array}{rcl} L(UX) & = & B \\ 1^o)\ \ LY & = & B \\ 2^o)\ UX & = & Y \end{array}$$

En nuestro ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 1, y_2 = -4, y_3 = -4$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

solución: $\boxed{x_1 = -3, x_2 = 2, x_3 = 1}$

Si solo vamos a resolver un sistema $AX = B$ no hay razón, desde el punto de vista práctico, para factorizar la matriz $A$ , pero si hubiera un segundo sistema con la misma matriz $AX' = B'$ si es útil conocer la factorización $LU$. Supongamos que tenemos dos sistemas con la misma matriz de coeficientes $A$ de orden $n$ , resolver el primer sistema supone realizar del orden de $n^3/3$ operaciones, mientras que para resolver el segundo sistema, una vez factorizada $A$ el número de operaciones es $n^2/2$ en cada sistema triangular, esto es, $n^2$ operaciones. Para sistemas de orden alto, pensemos por ejemplo $n = 150$, hallar la solución del segundo sistema es considerablemente menos costosa si empleamos la factorización de $A$:

$$(150)^3/3 = 50\,(150)^2 \text{ operaciones frente a } (150)^2 \text{ del segundo sistema}$$

La descomposición $LU$ es asimétrica en el sentido de que la matriz $L$ tiene unos en la diagonal mientras que la matriz $U$ contiene los pivotes de la eliminación gaussiana. Para corregir esto basta con factorizar $U$ como producto de una matriz diagonal $D$ que contiene los pivotes y otra $R$ triangular superior con unos en la diagonal, es decir

$$U = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & \cdots & u_{1n}/d_1 \\ & 1 & & u_{2n}/d_2 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

Escribiremos ahora la descomposición de $A$ como $A = LDR$ . En el ejemplo de antes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al realizar el proceso de eliminación de Gauss hay cierta libertad para efectuar los cálculos, la pregunta natural que nos hacemos es si la descomposición de una matriz $A$ es o no única. Veremos en la siguiente proposición que independientemente del proceso de eliminación siempre obtendremos la misma descomposición

**PROPOSICIÓN.-**

La factorización de $A$ como $LDR$ está determinada de manera única, esto es, si $A = L_1D_1R_1$ y $A = L_2D_2R_2$ donde las $L$ son triangulares inferiores con diagonal unitaria, las $R$ son diagonales superiores con diagonal unitaria y las $D$ son matrices diagonales sin ceros en la diagonal, entonces $L_1 = L_2, D_1 = D_2, R_1 = R_2$.

**Demostración.-**

Partimos del hecho

$$L_1D_1R_1 = L_2D_2R_2$$

Puesto que $L_1$ es invertible y ademas $L_1^{-1}$ tiene las mismas características que $L_1$ (triangular inferior con unos en la diagonal) , tenemos

$$D_1R_1 = L_1^{-1}L_2D_2R_2$$

Ahora procedemos del mismo modo con $D_1$, obteniendo

$$R_1 = D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2R_2$$

y finalmente con $R_2$

$$R_1R_2^{-1} = D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2$$

Observamos en esta igualdad que el miembro de la izquierda es una matriz triangular superior con unos en la diagonal y que el miembro de la derecha es una matriz triangular inferior, esto obliga en primer lugar a que ambas matrices sean diagonales

$$\begin{array}{l} R_1R_2^{-1} \text{ es diagonal} \\ D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2 \;\text{ es diagonal} \end{array}$$

y en segundo lugar, puesto que $R_1R_2^{-1}$ tiene unos en la diagonal, a que $R_1R_2^{-1} = D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2 = I$ . Tenemos entonces $R_1 = R_2$. Con la otra igualdad, $D_1^{-1}L_1^{-1}L_2D_2 = I$, obtenemos

$$L_1^{-1}L_2 = D_1D_2^{-1}$$

De $L_1^{-1}L_2$ sabemos que es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y ahora concluimos, por esta igualdad, que debe ser diagonal. Por tanto $L_1^{-1}L_2 = I$, luego $L_1 = L_2$ . Para terminar, $D_1 D_2^{-1} = I$ luego $D_1 = D_2$. $\square$

Vamos a considerar en los que sigue sólo **matrices simétricas**. Estas matrices constituyen un conjunto muy importante dentro del conjunto de matrices pues aparecen en muchas ramas de las matemáticas.

**PROPOSICIÓN.-**

Si $A$ es una matriz simétrica que puede factorizarse como $A = LDR$ , entonces $R = L^t$. Por tanto una matriz simétrica tiene una factorización simétrica $A = LDL^t$.

**Demostración.-**

Es bien sencilla, tomamos la traspuesta de $A = LDR$ que es $A^t = R^t D^t L^t$ , e igualamos por ser $A$ simétrica ($A = A^t$)

$$LDR = R^t D^t L^t$$

Como $R^t$ es triangular inferior y $L^t$ es triangular superior, tenemos dos descomposiciones de $A$ que por la proposición anterior deben coincidir. Así pues $R = L^t$, lo que completa la demostración. $\square$

*Ejemplo.-* La matriz simétrica $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ se descompone como sigue

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En este ejemplo observamos que en la matriz de pivotes $D$ los términos de la diagonal son todos positivos. Esta característica particular de algunas matrices simétricas nos permite situarlas dentro de una clasificación que será estudiada con más detenimiento en la asignatura de Ampliación de Matemáticas de $2^o$ curso.

**Definición.-** Decimos que una matriz simetrica es **definida positiva** si todos los pivotes en la descomposición $LDL^t$ son positivos.

Para estas matrices, puesto que los elementos de $D$ poseen raiz cuadrada, podemos escribir $D = \sqrt{D}\sqrt{D}$ y entonces

$$A = L\sqrt{D}\sqrt{D}L^t = (L\sqrt{D})(L\sqrt{D})^t$$

Esta es la denominada "descomposición de Cholesky" de $A$ . En el caso de la matriz del ejemplo anterior

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \sqrt{D}\sqrt{D}$$

lo que nos lleva a la descomposición de $A$ como producto de dos matrices simetricas $(L\sqrt{D})$ y $(L\sqrt{D})^t$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$