Econometría II

Análisis de series temporales (II): Extensiones y metodología

Miguel Jerez y Sonia Sotoca

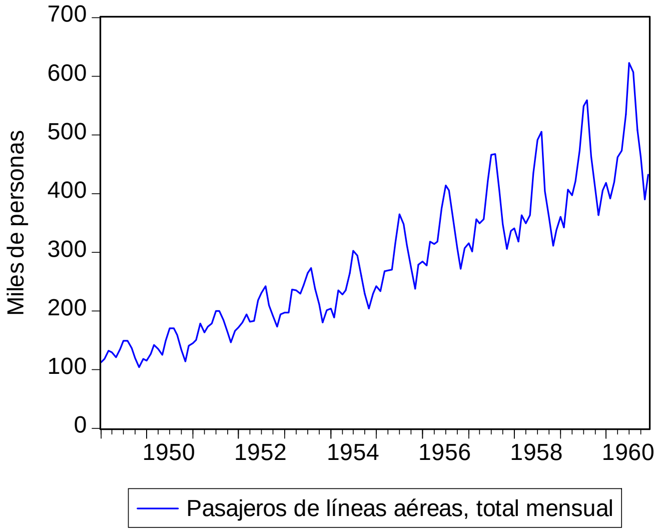
Universidad Complutense de Madrid

Marzo 2010

Índice

- Propiedades típicas de las series económicas
- Transformaciones de datos
- Operadores retardo y diferencia
- Procesos generalizados
- Extensiones
- Metodología

Propiedades típicas de las series económicas



Muchas series temporales económicas presentan:

- tendencia,
- estacionalidad,
- una variabilidad que crece con su nivel y
- componentes deterministas (valores atípicos, ...)

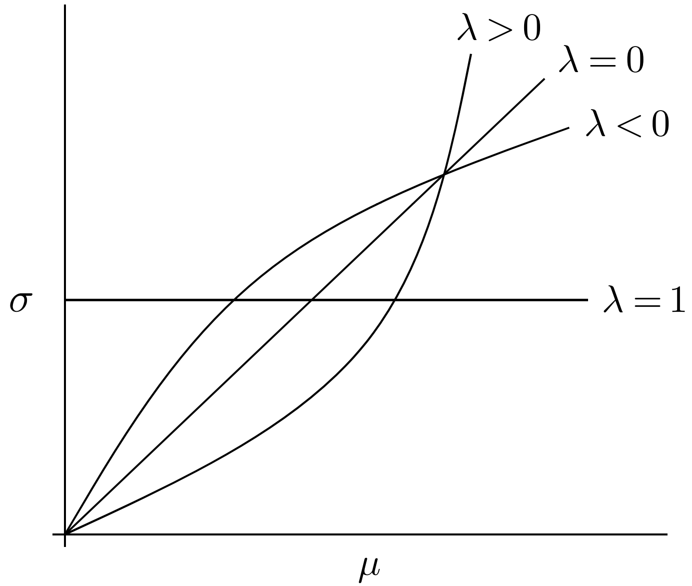
Sin embargo, los procesos ARMA describen variables puramente estocásticas, no estacionales, con media y varianza constantes. Por tanto, para modelizar series económicas es necesario definir:

- **Transformaciones de datos** diseñadas para estabilizar la media y la varianza de las series.
- **Extensiones de la familia de procesos ARMA**, para captar tendencias y fluctuaciones estacionales.

Transformaciones de datos (I): Box-Cox

Muchas series temporales muestran una variabilidad que cambia con su nivel. Para eliminar esta característica se utiliza la transformación de Box-Cox:

$$y_t^{\lambda,m} = \begin{cases} \dfrac{(y_t + m)^{\lambda} - 1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \ln(y_t + m) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$



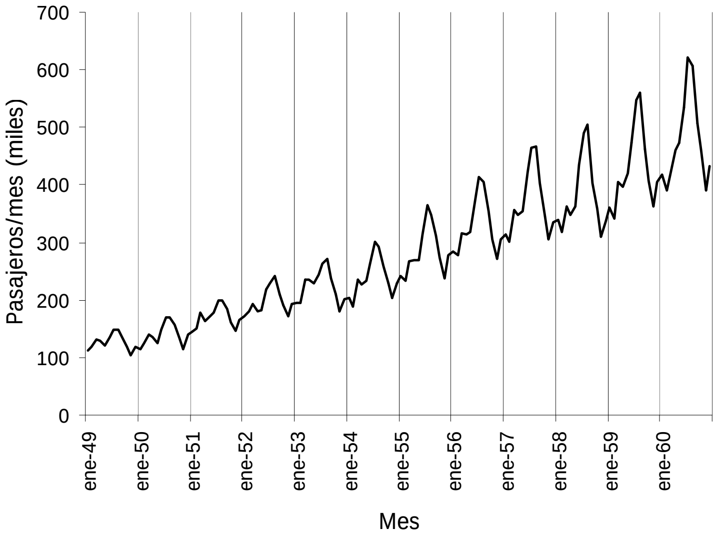
Cada transformación se caracteriza por un valor del parámetro λ.

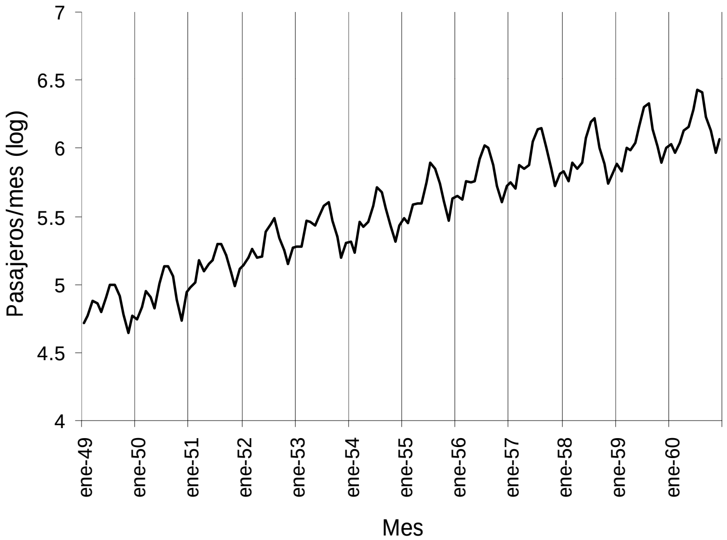
Cuando la transformación requiere valores positivos, puede aplicarse un cambio de origen (parámetro, *m*)

Para elegir la transformación adecuada puede usarse el gráfico media-desviación típica muestral de varias submuestras. La figura muestra las configuraciones correspondientes a diversos valores de λ.

Las series económicas a menudo muestran una variabilidad que depende de forma aproximadamente lineal de la media. En ese caso, la transformación adecuada es la logarítmica (λ=0)

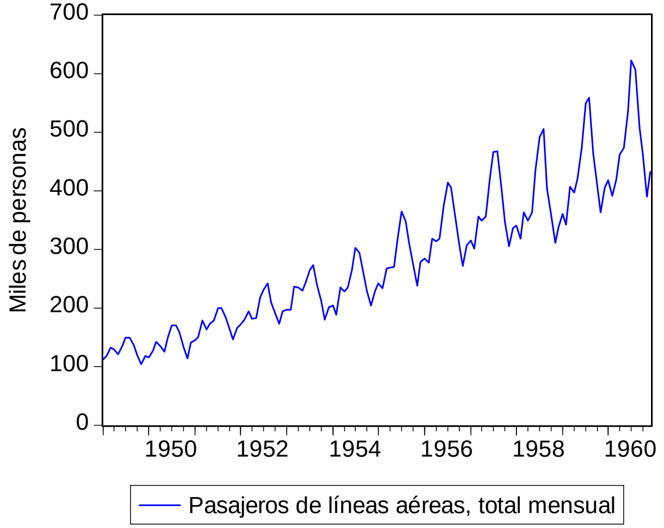
Transformaciones de datos (II.a): Ejemplo Box-Cox

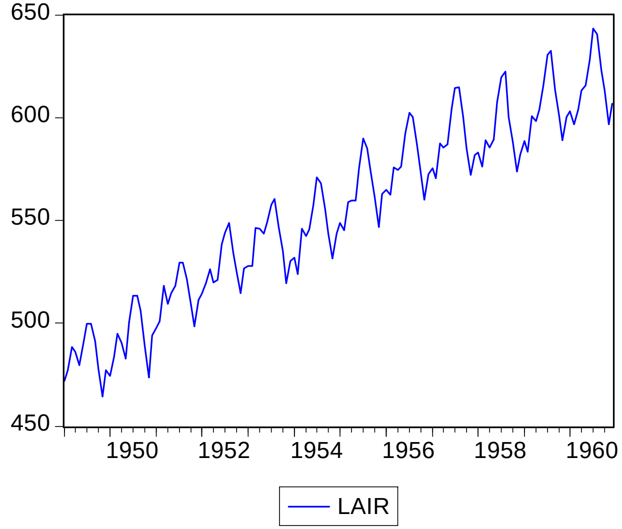


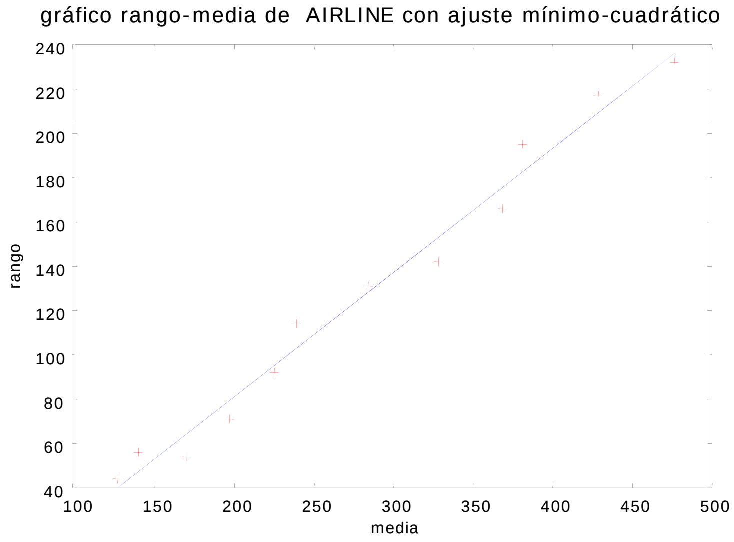


- La primera figura muestra la serie de pasajeros de líneas aéreas
- Esta serie muestra una dispersión que crece con su media, por lo que resulta difícil aplicarle técnicas estadísticas estándar
- La segunda figura muestra el logaritmo neperiano los datos, que es la transformación Box-Cox más habitual; como puede verse, la dispersión se ha estabilizado en un valor independiente de la media
- La transformación logarítmica tiene distintas ventajas estadísticas ya que, a menudo:
  - independiza la varianza de la media
  - induce normalidad en los datos, y
  - linealiza las relaciones
- Un ventaja conceptual es que al prever una variable a partir de su logaritmo, las previsiones serán no negativas

Transformaciones de datos (II.b): Ejemplo Box-Cox







Los gráficos indican que:

- Hay una relación aproximadamente lineal entre nivel y volatilidad,
- Que se reduce o elimina en la serie transformada logarítmicamente

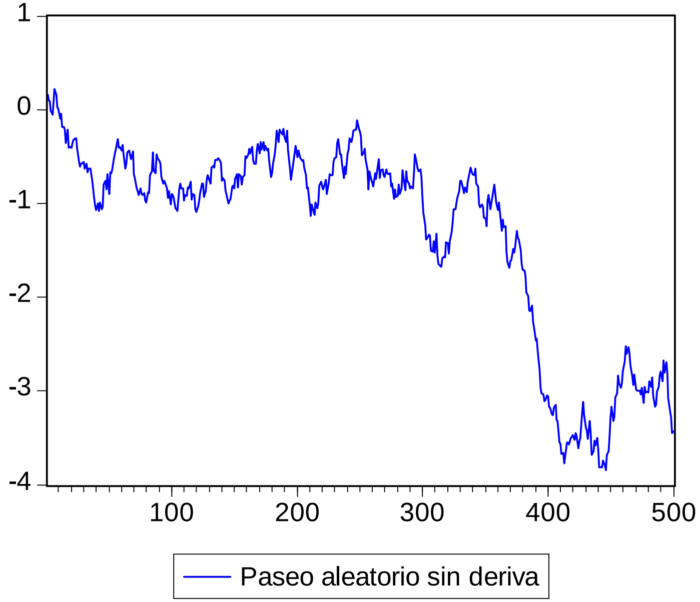
Transformaciones de datos (III): Diferencias

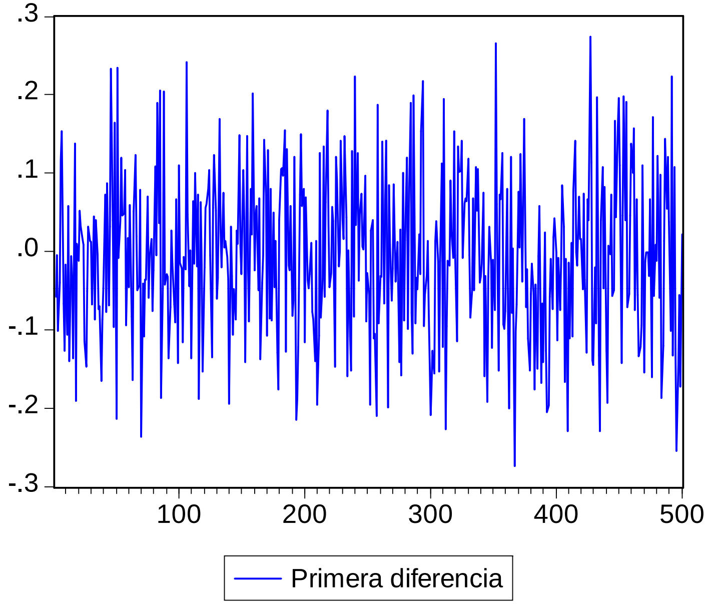
A menudo la tendencia de una serie puede eliminarse diferenciando los datos. Se dice que una serie es “integrada de orden uno”, o *I*(1), si su primera diferencia:

$$z_t = y_t - y_{t-1}$$

es estacionaria en media.

La serie de la primera figura es una muestra del proceso estocástico $y_t = y_{t-1} + a_t$; $a_t \sim$ iid N(0,.01) Por tanto, $z_t = y_t - y_{t-1}$ será estacionaria.





Algunas series necesitan una diferencia adicional para conseguir una media incondicional estable. En ese caso se dice que son “integradas de orden dos”

Transformaciones de datos (IV): Interpretación

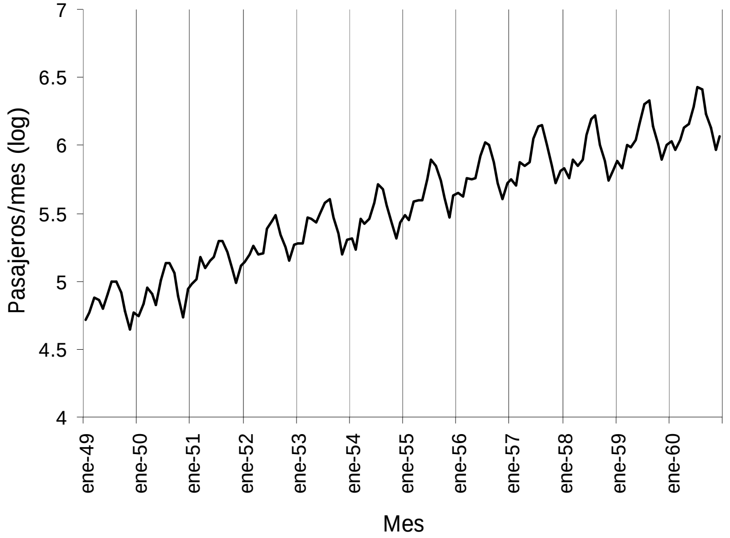
La primera diferencia del logaritmo de una serie es una tasa logarítmica en tanto por uno, alternativa a la tasa porcentual, ya que si: $y_t = (1+\alpha_t)y_{t-1}$, resulta: $\ln y_t - \ln y_{t-1} = \ln(1+\alpha_t) \simeq \alpha_t$ Frente a la tasa de variación convencional, la tasa logarítmica tiene la ventaja de ser aditiva, esto es:

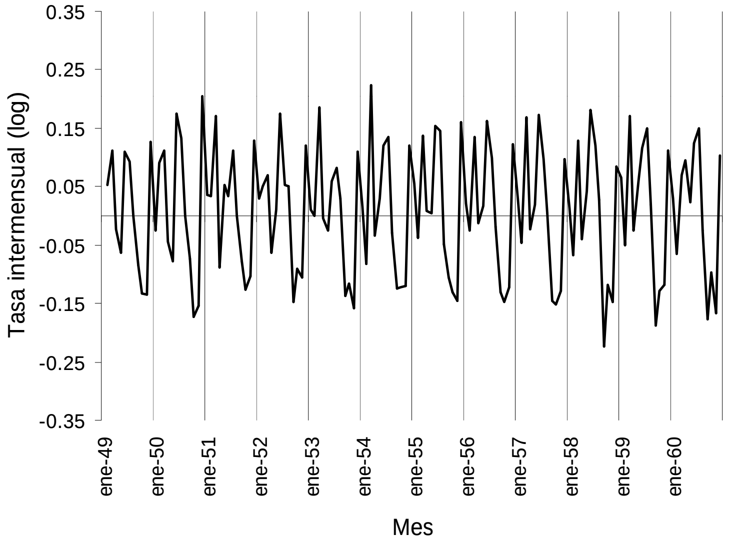
$$\ln y_n - \ln y_0 = \sum_{t=1}^{n} \left(\ln y_t - \ln y_{t-1}\right) = \sum_{t=1}^{n} \ln(1+\alpha_t)$$

En el cuadro se presentan varias transformaciones comunes y su interpretación.

Serie transformada	Interpretación
$z_t = y_t - y_{t-1}$	Cambio en el valor de y_t. Es un indicador de "crecimiento"
$z_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$	Tasa logarítmica (en tanto por uno) de variación entre un período y el siguiente. Es un indicador de crecimiento en términos relativos
$w_t = z_t - z_{t-1}$; $z_t = \ln y_t - \ln y_{t-1}$	Cambio en la tasa logarítmica de variación entre un período y el siguiente. Es un indicador de "aceleración" en el crecimiento relativo
$z_t = \ln y_t - \ln y_{t-S}$	Tasa logarítmica de variación acumulada en *S* períodos. Indicador de crecimiento acumulado en un ciclo estacional

Transformaciones de datos (V.a): Ejemplo

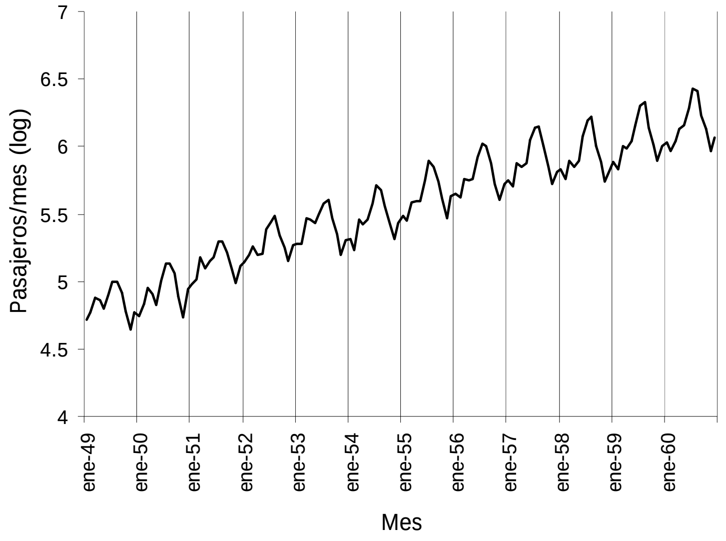


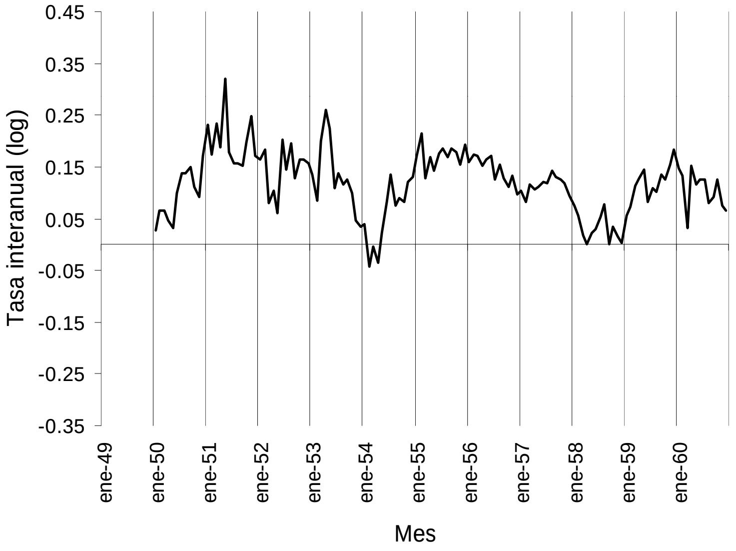


Diferencias regulares y tendencia:

- La primera figura muestra el logaritmo de la serie de pasajeros de líneas aéreas; esta serie tiene tendencia, por lo su media no es estable ni finita
- Si al dato en cada mes se le resta el dato del mes anterior queda una serie que fluctúa establemente en torno a un nivel finito (segunda figura)
- El cambio mes a mes del logaritmo de una serie es la tasa logarítmica intermensual (*tasa log*)
- Esta serie se parece a la tasa de variación en tanto por uno
- Aunque la tasa log ya no tenga tendencia sigue teniendo estacionalidad: en vez de una media hay doce medias

Transformaciones de datos (V.b): Ejemplo



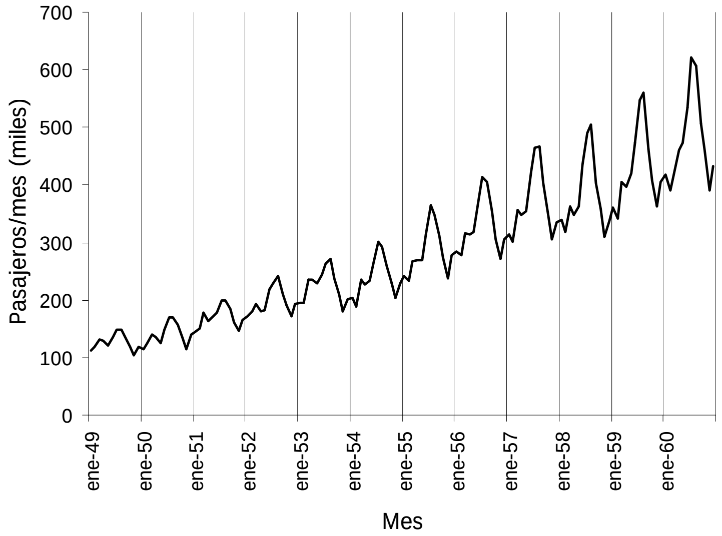


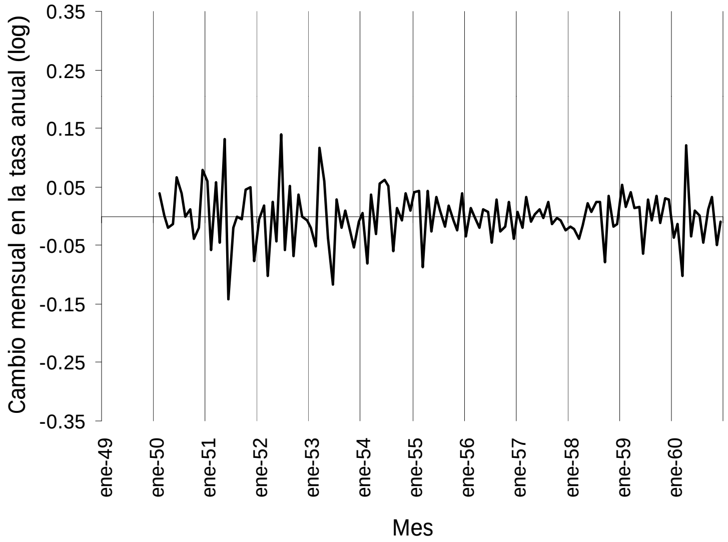
Diferencias estacionales:

- La primera figura muestra nuevamente el logaritmo de la serie de pasajeros de líneas aéreas; esta serie tiene estacionalidad, por lo que su media cambia cíclicamente
- Si al (log) del dato en cada mes se le resta el (log) del dato del mismo mes en el año anterior, se obtiene una serie sin estacionalidad aparente pero con cambios locales en la media (segunda figura)
- El cambio año a año del logaritmo de una serie es su tasa de variación logarítmica interanual
- Esta serie se parece a la correspondiente tasa de variación en tanto por uno:

$$\ln y_t - \ln y_{t-12} \cong \frac{y_t}{y_{t-12}} - 1$$

Transformaciones de datos (V.c): Ejemplo





Mensajes publicitarios:

- Muchas series temporales:
  - no tienen una media finita, o
  - su media cambia en el tiempo y, a menudo,
  - su variabilidad depende de su media
- La mayoría de las series temporales, sobre todo las medidas en unidades monetarias, requieren:
  - una transformación logarítmica,
  - al menos una diferencia regular, y
  - si hay estacionalidad, al menos una diferencia estacional
- Las series transformadas resultantes pueden interpretarse como cambios en las tasas (log) de variación

Operadores retardo y diferencia

A menudo resulta práctico representar los procesos estocásticos utilizando el *operador retardo*, que se define de la siguiente manera:

$$B \ / \ i)\ Bz_t = z_{t-1}$$

$$ii)\ Bk = k\ ;\ k\text{:constante}$$

$$iii)\ B^{-1} z_t = z_{t+1}$$

$$iv)\ B^{0} z_t = z_t$$

$$v)\ \ z_t = Bz_{t+1} = B^2 z_{t+2} = B^3 z_{t+3} = \ldots = B^l z_{t+l}\ \ (l > 0)$$

El *operador diferencia* se define a partir del operador retardo como:

$$\nabla \ / \ \nabla y_t = (1 - B) y_t = y_t - y_{t-1}$$

En series estacionales de período *S*, a menudo se utiliza una variante de este operador que se conoce como *diferencia estacional*:

$$\nabla_S \ / \ \nabla_S y_t = (1 - B^S) y_t = y_t - y_{t-s}$$

Procesos generalizados (I): ARMA(*p*,*q*)

Los procesos definidos anteriormente pueden escribirse con órdenes generales:

- AR(*p*): $z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \ldots + \phi_p z_{t-p} + a_t$
- MA(*q*): $z_t = \mu_z + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$
- ARMA(p,q): $z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \ldots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$

... y expresarse en términos del operador retardo de la siguiente forma:

- AR(*p*): $\phi_p(B) z_t = c + a_t$
- MA(*q*): $z_t = \mu_z + \theta_q(B) a_t$
- ARMA(p,q): $\phi_p(B) z_t = c + \theta_q(B) a_t$

... en donde los *polinomios característicos* de las partes AR y MA del modelo son:

$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p$ (polinomio AR)

$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q$ (polinomio MA)

Procesos generalizados (II): Estacionariedad

Estacionariedad: Se dice que un proceso estocástico es *estacionario* si todas las raíces de la ecuación característica $1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\ldots-\phi_p B^p=0$ están fuera del círculo de radio unidad del plano complejo.

La condición de estacionariedad sólo afecta a la componente AR del proceso ARIMA, ya que la componente MA siempre es estacionaria.

Cuando el polinomio AR tiene alguna raíz igual a uno, se dice que tiene “raíces unitarias”.

Consecuencias del cumplimiento:

- El proceso tiene media y varianza incondicionales finitas y estables.
- El proceso puede escribirse en forma MA equivalente.

Consecuencias del no cumplimiento (raíces unitarias):

- La varianza incondicional diverge a infinito.
- Si tiene deriva, la media incondicional diverge a infinito.
- El factor AR puede factorizarse separando las raíces unitarias de las raíces estacionarias.

Ejemplo. El proceso AR(2) no estacionario: $(1-1.5B+.5B^2)y_t=a_t$ es equivalente al proceso ARIMA(1,1,0): $(1-.5B)\nabla y_t=a_t$

Procesos generalizados (III): Invertibilidad

Invertibilidad: Se dice que un proceso estocástico es *invertible* si todas las raíces de la ecuación característica $1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\ldots-\theta_q B^q=0$ están fuera del círculo de radio unidad del plano complejo.

La condición de invertibilidad sólo afecta a la componente MA del proceso ARIMA, ya que la componente AR siempre es invertible.

Consecuencias del cumplimiento:

- El proceso puede escribirse en forma AR equivalente.

Consecuencias del no cumplimiento (raíces unitarias):

- El proceso podría simplificarse, bien eliminando una diferencia, bien representando la tendencia de forma determinista.

Ejemplos.

El proceso ARIMA(2,2,1) no invertible: $(1-.5B+.7B^2)\nabla^2 y_t=(1-B)a_t$ es equivalente al proceso ARIMA(2,1,0): $(1-.5B+.7B^2)\nabla y_t=a_t$

Diferenciando el proceso de tendencia determinista: $y_t=\beta t+a_t$ se obtiene el proceso ARIMA(0,1,1) no invertible: $\nabla y_t=\beta+(1-B)a_t$

Procesos generalizados (IV)

Representaciones alternativas: Cuando un proceso estocástico no tiene raíces AR ni MA dentro del círculo de radio unidad, puede escribirse de forma equivalente como AR(∞) o MA(∞):

Ejemplo 1. Un AR(1) no explosivo puede escribirse como: $(1-\phi B)z_t = c + a_t$ o, alternativamente, como un proceso media móvil infinito:

$$z_t = \frac{c}{1-\phi} + \frac{1}{1-\phi B} a_t = \mu_z + (1 + \phi B + \phi^2 B^2 + \ldots) a_t$$

Ejemplo 2. Un MA(1) con raíces en o fuera del círculo de radio unidad puede escribirse como: $z_t = \mu_z + (1-\theta B) a_t$ o, alternativamente, como:

$$\frac{1}{1-\theta B} z_t = \frac{\mu_z}{1-\theta} + a_t \; ; \; (1 + \theta B + \theta^2 B^2 + \ldots) z_t = c + a_t$$

Esto quiere decir que el proceso ARIMA es una aproximación finita a los procesos estocásticos generales:

- Forma "pi": $z_t = c + \pi_1 z_{t-1} + \pi_2 z_{t-2} + \ldots + a_t$
- Forma "psi": $z_t = \mu_z + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \ldots$

Procesos generalizados (V): ARIMA(p,d,q)

La tendencia estocástica de las series económicas puede captarse mediante raíces AR unitarias. Por ello tiene interés generalizar la formulación del modelo ARMA admitiendo en él este tipo de factores. Esta idea da lugar al modelo ARIMA (p,d,q), que se define como:

$$\phi_p(B)\nabla^{\mathrm{d}} y_t^{\lambda,m} = c + \theta_q(B) a_t$$

en donde:

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \quad \text{[polinomio AR}(p)\text{]}$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \ldots - \theta_q B^q \quad \text{[polinomio MA}(q)\text{]}$$

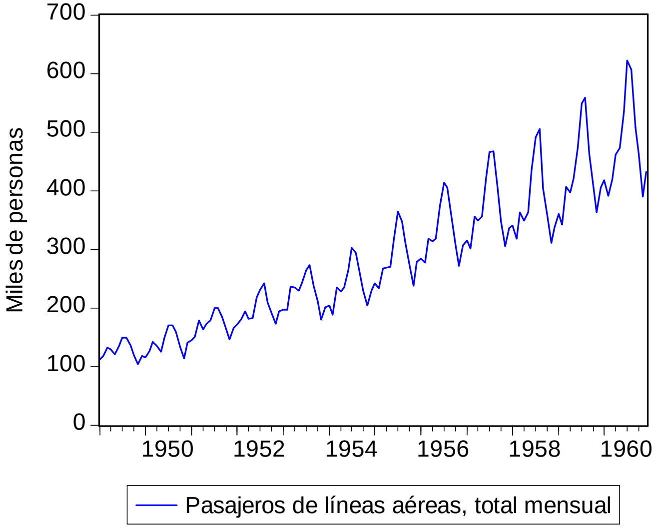
$$B / B^{\pm k} y_t = y_{t \mp k} \quad \nabla \equiv 1 - B \quad \text{[operadores retardo y diferencia]}$$

$$y_t^{\lambda,m} = \begin{cases} \dfrac{(y_t + m)^{\lambda} - 1}{\lambda} & \text{si } \lambda \neq 0 \\ \ln(y_t + m) & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \quad \text{[transformación de datos (Box-Cox)]}$$

Si los polinomios AR y MA tienen sus raíces en o fuera del círculo de radio unidad, el proceso ARIMA puede escribirse de las siguientes formas equivalentes:

$$\nabla^{\mathrm{d}} y_t^{\lambda,m} = \mu_z + \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)} a_t \qquad \frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)} (\nabla^{\mathrm{d}} y_t^{\lambda,m} - \mu_z) = a_t \qquad \frac{\phi_p(B)}{\theta_q(B)} \nabla^{\mathrm{d}} y_t^{\lambda,m} = \bar{c} + a_t$$

Extensiones (I): Estacionalidad



Las series económicas a menudo muestran un *comportamiento estacional*, esto es, una pauta que se repite con una periodicidad fija, a menudo anual.

El *período estacional* (*S*) se define como el número de observaciones necesarias para recorrer todo el ciclo estacional. Por ejemplo, *S*=12 para datos mensuales, *S*=4 para datos trimestrales, etc.

Para captar este comportamiento, se define el modelo ARIMA(p,d,q)x(P,D,Q)$_S$:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)\nabla_S^D\nabla^d y_t^{\lambda,m} = c + \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)a_t$$

... que incluye tres nuevos factores:

$$\Phi_P(B^S) = 1 - \Phi_1 B^S - \Phi_2 B^{2\cdot S} - \ldots - \Phi_P B^{P\cdot S}$$ [polinomio AR(P)$_S$]

$$\Theta_Q(B^S) = 1 - \Theta_1 B^S - \Theta_2 B^{2\cdot S} - \ldots - \Theta_Q B^{Q\cdot S}$$ [polinomio MA(Q)$_S$]

$$\nabla_S \equiv 1 - B^S$$ [operador diferencia estacional]

Este modelo admite relaciones entre un dato y el de *S* períodos atrás.

Extensiones (II): Modelo RegARIMA

Uniendo las ideas anteriores con el análisis de regresión, resulta inmediato formular el modelo RegARIMA (modelo de regresión con errores ARIMA) como:

$$y_t^{\lambda_y, m_y} = (\boldsymbol{x}_t^{\lambda_x, \boldsymbol{m}_x})^T \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_t \;\; \text{; con } \phi_p(B)\Phi_P(B^S)\nabla_S^D \nabla^d \varepsilon_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)a_t$$

o bien:

$$\phi_p(B)\Phi_P(B^S)\nabla_S^D \nabla^d \left[y_t^{\lambda_y, m_y} - (\boldsymbol{x}_t^{\lambda_x, \boldsymbol{m}_x})^T \boldsymbol{\beta} \right] = \theta_q(B)\Theta_Q(B^S)a_t$$

De manera que los valores de la serie temporal se ponen en relación, no sólo con su pasado, sino también con los valores contemporáneos de otras series, que actúan como variables explicativas o “inputs”.

Las variables $\boldsymbol{x}_t^{\lambda_x, \boldsymbol{m}_x}$ pueden ser series económicas o variables deterministas diseñadas para modelizar:

• **Efectos calendario**, causados por irregularidades en la unidad de tiempo como pueden ser: distinto número de días laborables y festivos o celebración de la Semana Santa.

• **Valores atípicos** (*outliers*) debidos a fenómenos como, p.ej., el *split* del nominal de una acción, cambios en tipos impositivo o fenómenos como inundaciones o terremotos. En este caso se dice que el modelo es “de intervención”.

Extensiones (III): Inputs de intervención

Impulsos. Producen un cambio en el nivel de una sola observación de la serie. Pueden modelizarse mediante:

$$x_t^i = \begin{cases} 1 & \text{si } t = t^* \\ 0 & \text{si } t \neq t^* \end{cases}$$

Impulsos compensados. Producen un cambio en el nivel de una observación, seguido por un cambio de nivel compensatorio en la observación siguiente. Pueden modelizarse mediante:

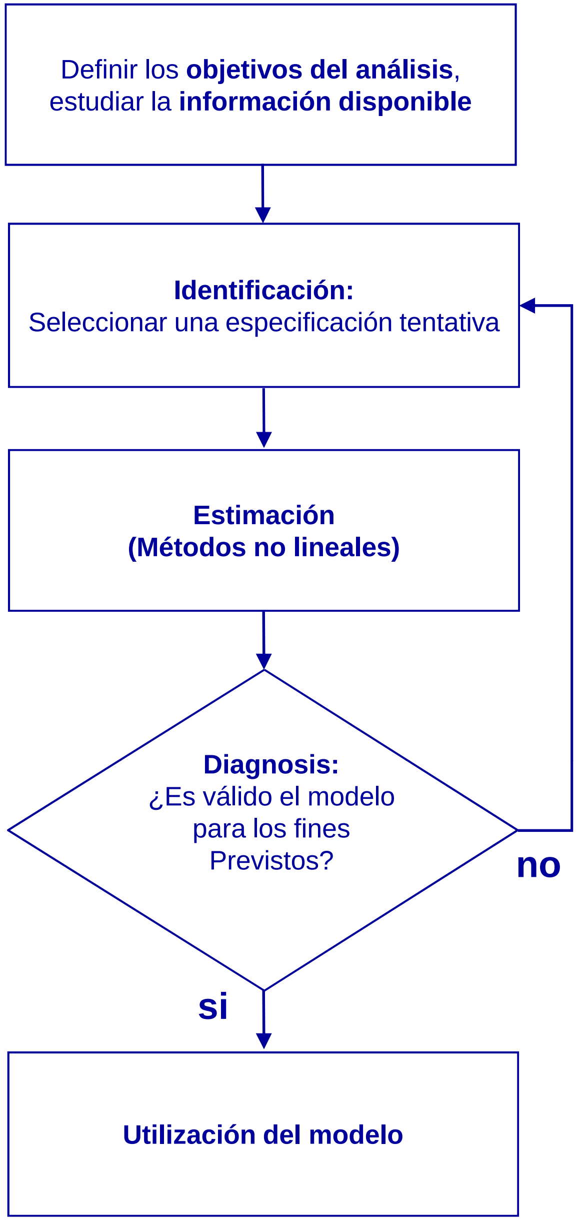
$$x_t^{IC} = \begin{cases} 1 & \text{si } t = t^* \\ -1 & \text{si } t = t^* + 1 \\ 0 & \text{si } t \neq t^*, t^* + 1 \end{cases}$$

Escalones. Producen un cambio en el nivel de todas las observaciones posteriores a una fecha dada. Pueden modelizarse mediante:

$$x_t^E = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq t^* \\ 0 & \text{si } t < t^* \end{cases}$$

Metodología (I)

Los métodos de análisis de series temporales combinan los modelos e instrumentos anteriores en una metodología sistemática para construir y probar modelos



Metodología (II): Identificación

Parámetro	**Instrumento de identificación**	**Observaciones**
m, λ	• Gráfico media-desviación típica • Gráfico de la serie temporal	Se trata de conseguir que la variabilidad de los datos sea independiente de su nivel. En series económicas es habitual λ=0, lo que supone transformar logarítmicamente los datos.
***d*, orden de diferenciación**	• Gráfico de la serie temporal • ACF (decrecimiento lento y lineal)	Se trata de conseguir que los datos fluctúen en torno a una media aproximadamente estable
Término constante	• Media muestral de la serie diferenciada • Desviación típica de la media	Si la media de la serie transformada es significativa, el modelo debe incluir un término constante
***p*, orden del término AR**	• PACF de orden *p* • ACF infinita	La PACF tiene *p* valores no nulos Un proceso AR finito y estacionario equivale a un MA(∞)
***q*, orden del término MA**	• ACF de orden *q* • PACF infinita	La ACF tiene *q* valores no nulos Un proceso MA finito e invertible equivale a un AR(∞)

Metodología (III): Diagnosis

Parámetro	**Instrumento de identificación**	**Observaciones**
***d*, orden de diferenciación**	• Raíces de los polinomios AR y MA	• Una raíz próxima a uno en la parte AR indica que conviene añadir una diferencia • Una raíz próxima a uno en la parte MA indica que conviene quitar una diferencia
	• Gráfico de la serie de residuos	Si muestra rachas largas de residuos positivos o negativos, puede ser necesaria una diferencia adicional
Término constante	• Media muestral de los residuos • Desviación típica de la media	Si la media de los residuos es significativa, debe añadirse un término constante
p* y *q	• Contrastes de significación de los parámetros estimados	Permiten eliminar parámetros irrelevantes
	• ACF y PACF residuales	Detectan pautas de autocorrelación no modelizadas
	• Test *Q*	Contrasta la hipótesis conjunta de que todos los coeficientes de autocorrelación son nulos
	• Correlaciones elevadas entre parámetros estimados	Puede ser un síntoma de sobreparametrización
	• Sobreajuste	Consiste en añadir parámetros AR y/o MA, para comprobar si resultan significativos y mejoran la calidad estadística del modelo