A partir de los datos:

t	yt	xt0	xt1	xt2
1	10	1	1	0
2	25	1	3	-1
3	32	1	4	0
4	43	1	5	1
5	58	1	7	-1
6	62	1	8	0
7	67	1	10	-1
8	71	1	10	2

Se pide:

a) Estimar por MCO los parámetros del modelo: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$

b) Calcular y representar gráficamente los residuos del modelo

c) Obtener la estimación insesgada de la varianza del error

d) Obtener la estimación máximoverosímil de la varianza del error

e) Calcular el coeficiente de determinación habitual y el corregido con grados de libertad

f) Estimar las matrices de covarianzas y correlaciones de los parámetros estimados

g) Contrastar con un 95% de confianza las hipótesis $H_0 : \beta_0 = 0$ $H_0 : \beta_1 = 0$ $H_0 : \beta_2 = 0$

h) Obtener intervalos de confianza individuales para el verdadero valor de los parámetros

i) Contrastar con un 95% de confianza las hipótesis $H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$

j) Contrastar con un 95% de confianza las hipótesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$

k) Contrastar con un 95% de confianza la hipótesis: $H_0 : \beta_1 = 10\beta_2$

l) Contrastar con un 95% de confianza la hipótesis: $H_0 : 2\beta_0 + 2\beta_1 + 7\beta_2 = 50$

m) Contrastar el cumplimiento conjunto de las hipótesis nulas de los dos apartados anteriores

n) Obtener para t=9 una previsión puntual y por intervalo (al 95% de confianza) para el valor de la variable endógena correspondiente a $x_{9,1} = 11$; $x_{9,2} = 1$

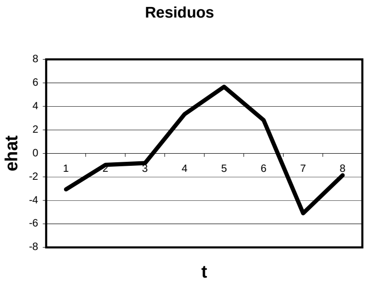
a) Estimar por MCO los parámetros del modelo: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t$

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 8 & 48 & 0 \\ 48 & 364 & 5 \\ 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 368 \\ 2710 \\ 35 \end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1} = 1/4664 * \begin{pmatrix} 2887 & -384 & 240 \\ -384 & 64 & -40 \\ 240 & -40 & 608 \end{pmatrix} \qquad \hat{\beta}_{MCO} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 6.470 \\ 6.588 \\ 0.257 \end{pmatrix}$$

b) Calcular y representar gráficamente los residuos del modelo

t	yt	xt0	xt1	xt2	$\hat{y}_t$	$\hat{\varepsilon}_t$
1	10	1	1	0	13.058	-3.058
2	25	1	3	-1	25.977	-0.977
3	32	1	4	0	32.822	-0.822
4	43	1	5	1	39.667	3.333
5	58	1	7	-1	52.329	5.671
6	62	1	8	0	59.174	2.826
7	67	1	10	-1	72.093	-5.093
8	71	1	10	2	72.864	-1.864



c) Obtener la estimación insesgada de la varianza del error

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{1}{n-k}\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon} = \quad 18.330$$

d) Obtener la estimación máximoverosímil de la varianza del error

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{1}{n}\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon} = \quad 11.456$$

e) Calcular el coeficiente de determinación habitual y el corregido con grados de libertad

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}}{(\boldsymbol{y} - \hat{\mu}_y)^T(\boldsymbol{y} - \hat{\mu}_y)} = 1 - \frac{\hat{\text{var}}(\hat{\varepsilon})}{\hat{\text{var}}(\boldsymbol{y})} = \quad 0.973$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\dfrac{\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon}}{n-k}}{\dfrac{(\boldsymbol{y} - \hat{\mu}_y)^T(\boldsymbol{y} - \hat{\mu}_y)}{n-1}} = \quad 0.962$$

f) Estimar las matrices de covarianzas y correlaciones de los parámetros estimados

$$\hat{\sigma}^2_\varepsilon = \frac{1}{n-k}\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon} = \quad 18.330$$

$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.619 & -0.082 & 0.051 \\ -0.082 & 0.014 & -0.009 \\ 0.051 & -0.009 & 0.130 \end{pmatrix}$$

$$\hat{cov}(\hat{\beta}_{MCO}) = \hat{\sigma}^2_\varepsilon(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 11.346 & -1.509 & 0.943 \\ -1.509 & 0.252 & -0.157 \\ 0.943 & -0.157 & 2.390 \end{pmatrix} \qquad \hat{corr}(\hat{\beta}_{MCO}) = \begin{pmatrix} 1 & -0.893 & 0.181 \\ -0.893 & 1 & -0.203 \\ 0.181 & -0.203 & 1 \end{pmatrix}$$

g) Contrastar con un 95% de confianza las hipótesis $H_0 : \beta_0 = 0$ $H_0 : \beta_1 = 0$ $H_0 : \beta_2 = 0$

$\hat{\beta}_{MCO}$	$sd(\hat{\beta}_{MCO})$	$\hat{\beta}_{MCO} / sd(\hat{\beta}_{MCO})$	p-valor	
6.470	3.368	1.921	0.113	H0 no se rechaza al 95% de confianza, pero es dudosa
6.588	0.502	13.136	4.56E-05	H0 se rechaza claramente al 95% de confianza
0.257	1.546	0.166	0.874	H0 no se rechaza al 95% de confianza

h) Obtener intervalos de confianza individuales para el verdadero valor de los parámetros

Parámetro	$\hat{\beta}_{MCO}$	$sd(\hat{\beta}_{MCO})$	Pcrt. t (5)	Límite sup.	Límite inf.	
β_0	6.470	3.368	2.571	15.129	-2.189	El valor nulo no se excluye del intervalo al 95%: el parámetro no es significativo
β_1	6.588	0.502	2.571	7.877	5.299	El valor nulo se excluye del intervalo al 95%: el parámetro es significativo
β_2	0.257	1.546	2.571	4.231	-3.717	El valor nulo no se excluye del intervalo al 95%: el parámetro no es significativo

i) Contrastar con un 95% de confianza las hipótesis $H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 0$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\hat{\beta} - \boldsymbol{c} = \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 6.470 \\ 6.588 \\ 0.257 \end{pmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} = \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 8.000 & 48.000 & 0.000 \\ 48.000 & 364.000 & 5.000 \\ 0.000 & 5.000 & 8.000 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-k}\hat{\varepsilon}^T\hat{\varepsilon} = 18.330$$

$$F = \frac{(\boldsymbol{A}\hat{\beta} - \boldsymbol{c})^T \left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} (\boldsymbol{A}\hat{\beta} - \boldsymbol{c})}{m\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2} = 368.113$$

p-valor: 2.77E-06 H0 se rechaza claramente al 95% de confianza

j) Contrastar con un 95% de confianza las hipótesis $H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$

$$F = \frac{n-k}{k-1}\frac{R_{MCO}^2}{1-R_{MCO}^2} = 90.462$$

p-valor: 1.19E-04

Alternativamente:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\hat{\beta} - \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 6.588 \\ 0.257 \end{pmatrix}$$

$$\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} = \begin{pmatrix} 76.0 & 5.0 \\ 5.0 & 8.0 \end{pmatrix}$$

$$F = \frac{(\boldsymbol{A}\hat{\beta} - \boldsymbol{c})^T \left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} (\boldsymbol{A}\hat{\beta} - \boldsymbol{c})}{m\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2} = 90.453$$

p-valor: 1.19E-04 Hay diferencias en el estadístico por errores de redondeo

k) Contrastar con un 95% de confianza la hipótesis: $H_0: \beta_1 = 10\beta_2$

A =	0.0	1.0	-10.0	***c*** =	0.0

$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c} =$ 4.018

$\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} =$ 0.076

$F = \dfrac{(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c})^T \left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} (\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c})}{m\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2} =$ 0.067

p-valor 0.936 H0 no se rechaza al 95% de confianza

l) Contrastar con un 95% de confianza la hipótesis: $H_0: 2\beta_0 + 2\beta_1 + 7\beta_2 = 50$

A =	2.0	2.0	7.0	***c*** =	50.0

$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c} =$ -22.085

$\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} =$ 0.1057

$F = \dfrac{(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c})^T \left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} (\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c})}{m\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2} =$ 2.813

p-valor 0.152 H0 no se rechaza al 95% de confianza

m) Contrastar el cumplimiento conjunto de las hipótesis nulas de los dos apartados anteriores

A =	0.0	1.0	-10.0	***c*** =	0.0
	2.0	2.0	7.0		50.0

$\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c} =$

4.018
-22.085

$\left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} =$

0.4411	0.4747
0.4747	0.6165

$F = \dfrac{(\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c})^T \left[\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{A}^T\right]^{-1} (\boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c})}{m\,\hat{\sigma}_\varepsilon^2} =$ 6.0984

p-valor 0.046 H0 se rechaza al 95% de confianza

n) Obtener para *t* =9 una previsión puntual y por intervalo (al 95% de confianza) para el valor de la variable endógena correspondiente a $x_{9,1} = 11\,;\; x_{9,2} = 1$

	$\hat{\beta}_{MCO}$	x9,i
xt0	6.470	1.000
xt1	6.588	11.000
xt2	0.257	1.000

$\hat{y}_9$	79.195
$s.\hat{d}.(\hat{y}_9)$	5.266
Pcrt. t (5)	2.571
Límite sup.	92.731
Límite inf.	65.659

a) Estimar los parámetros por MCO con datos en desviaciones con respecto a su media

DATOS (en desviaciones con respecto a la media):

t	yt	xt0	xt1	xt2
1	-36	0	-5	0
2	-21	0	-3	-1
3	-14	0	-2	0
4	-3	0	-1	1
5	12	0	1	-1
6	16	0	2	0
7	21	0	4	-1
8	25	0	4	2

$$\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X} = \begin{matrix} 76 & 5 \\ 5 & 8 \end{matrix} \qquad \boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} = \begin{matrix} 502 \\ 35 \end{matrix}$$

$$(\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1} = 1/583^* \begin{matrix} 8 & -5 \\ -5 & 76 \end{matrix} \qquad \hat{\beta}_{MCO} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y} = \begin{matrix} 6.588 \\ 0.257 \end{matrix}$$

Resolver todas las cuestiones del enunciado utilizando los datos en desviaciones.

NOTA: Deberá tener en cuenta que este modelo no tiene término constante por lo que alguna cuestión (p. ej. h) no podrá responderse