

Simultaneidad con Datos de Panel

Teodosio Pérez Amaral,
Universidad Complutense de Madrid
Universidad de Zaragoza, junio 2005

1

- Frecuente en datos económicos.
- Complejidad.
- Variables instrumentales.
- Implementación en Stata.

2



Forma estructural

Modelo de oferta y demanda: 2 ecuaciones y una condición de equilibrio.

$$\begin{aligned}q_t^o &= \alpha_1 + \alpha_2 p_t + u_{1t} \\q_t^d &= \beta_1 + \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + u_{2t} \\q_t^o &= q_t^d\end{aligned}$$

Variables endógenas: q_t , p_t

Variable exógena: y_t

3



Forma estructural (de un sistema de ecuaciones simultáneas)

Son las ecuaciones que reflejan el comportamiento económico, con sus parámetros de comportamiento.

La teoría económica sugiere cuáles variables son exógenas y cuáles son endógenas, así como cuáles intervienen en cada ecuación y cuáles no.

4



Forma reducida:

Consiste en escribir el sistema de ecuaciones de forma que cada variable endógena sea función exclusivamente de las exógenas y predeterminadas.

Los parámetros de la forma reducida son combinaciones de los de la forma estructural; los parámetros de la forma estructural no siempre se pueden recuperar a partir de los de la forma reducida. Problema de identificación.

5



Forma reducida del ejemplo anterior

$$q_t = \pi_{11} + \pi_{21}y_t + v_{1t}$$

$$p_t = \pi_{12} + \pi_{22}y_t + v_{2t}$$

donde:

$$\pi_{11} = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} \quad \pi_{12} = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2}$$

$$\pi_{21} = \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_2 - \beta_2} \quad \pi_{22} = \frac{\beta_3}{\alpha_2 - \beta_2}$$

$$v_{1t} = \frac{\alpha_2 u_{2t} - \beta_2 u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2} \quad v_{2t} = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}$$

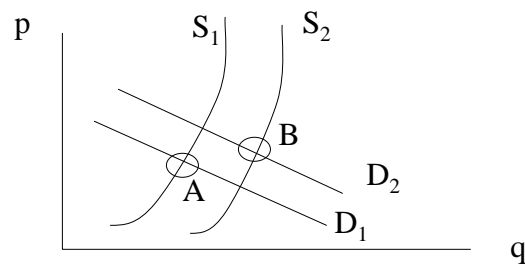
6



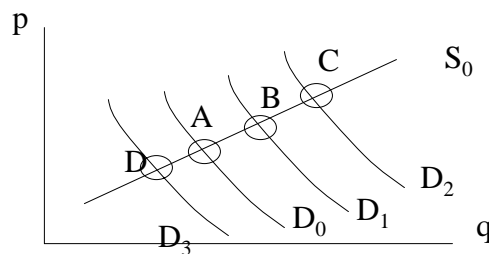
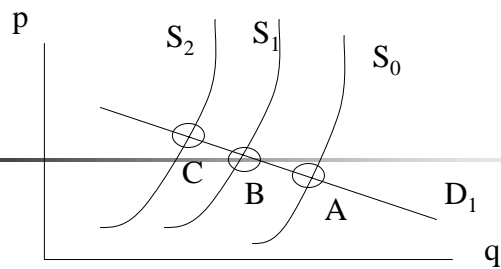
Concepto de identificación:

Recuperación de los parámetros de la forma estructural a partir de los de la reducida.


Importante: porque forma reducida se puede estimar por MCO, pero los estimadores MCO de la forma estructural son inconsistentes.



7




8



Identificación, pasar de parámetros de forma reducida a estructural, resolver un sistema de ecuaciones.

- A) Si hay igual n° de ecuaciones que de incógnitas, ecuación identificada.
- B) Si hay más incógnitas que ecuaciones, ecuación no identificada o subidentificada.
- C) Si hay más ecuaciones que incógnitas, la ecuación estará sobreidentificada (varias estimaciones para un mismo parámetro).

9




Estimación de sistemas de ecuaciones simultáneas

A) MCO del modelo estructural.
Sesgado e inconsistente

B) MCO del modelo en su forma reducida:

Si hay algunas/s ecuación/es exactamente identificada/s, podemos recuperar los parámetros de la forma estructural a partir de los de la reducida.

10




Estimador de Mínimos Cuadrados Indirectos: MCI

Notas:

- Solo válida para ecuaciones exactamente identificadas.
- En general, sesgado pero consistente. (Sesgado por ser transformaciones no lineales)

11



C) Variables instrumentales

Útil para ecuaciones exactamente identificadas.

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'y$$

$\hat{\beta}_{VI}$: consistente y con distribución asintótica Normal.

¿Candidatos a V.I.?. Las variables que no aparecen como explicativas en la ecuación considerada.

- Notas:
- No único
 - No eficiente

12



Cuando hay correlación entre errores y regresores $\Rightarrow \hat{\beta}_{mco}$: sesgado e inconsistente \Rightarrow es necesario usar el método de...

VARIABLES INSTRUMENTALES

Estimador alternativo a MCO con mejor comportamiento en muestras grandes.

Z_t : variables instrumentales

1) $E(z_t u_t) = 0$

2) $E(z_t x_t) \neq 0$

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}Z'y$$

13



A veces x_t y z_t tienen variables en común. Solo es necesario instrumentar las variables que presenten problemas de correlación con el error.

Las variables que no presentan correlación con el error actúan como variables instrumentales de ellas mismas.

14



$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'Y$$

Z : matriz T x k de observaciones de las variables instrumentales.

(Z'X) : ha de ser invertible.

15



Consistencia del estimador de V.I.

Sea Z una matriz T x k de observaciones de las variables z_1, z_2, \dots, z_k , quizás aleatorias.

Sea z_t' la fila t de Z y supongamos que:

$$1) E(z_t' u_t) = 0_k \quad \forall t$$

$$2) \left. \begin{array}{l} p \lim \left(\frac{Z'X}{T} \right) = \Sigma_{zx} \\ p \lim \left(\frac{Z'Z}{T} \right) = \Sigma_{zz} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ambas no} \\ \text{singulares y finitas} \end{array}$$

16



Y además:

- S.1. $y_t = \beta x_t + u_t$
- S.2. Ausencia error de especificación
- S.3. $E(u/X) \neq 0$
- S.4. $V(u/X) = \sigma^2_u \Sigma \Rightarrow$ autocorrelación y/o heteroscedasticidad.
- S.5. Linealidad en los parámetros.
- S.6. X estocásticas
- S.7. x_1, \dots, x_k : linealmente independientes

17



El estimador de V.I.

$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1} Z'y$$

Es consistente:

$$p \lim(\hat{\beta}_{VI}) = \beta$$

$$p \lim(\hat{\beta}_{VI}) = \beta + p \lim \left[\left(\frac{Z'X}{T} \right)^{-1} \left(\frac{Z'u}{T} \right) \right] =$$

$$= \beta + \left[p \lim \left(\frac{Z'X}{T} \right) \right]^{-1} p \lim \left(\frac{Z'u}{T} \right) = \beta + \Sigma_{zx}^{-1} 0_k = \beta$$

Usando el Teorema de Mann y Wald.

18

Normalidad asintótica del estimador V.I.

Dado el modelo $y_t = \beta x_t + u_t$ donde x_t es el vector de variables explicativas que puede incluir retardos de la variable endógena, y u_t el término de error ruido blanco, $niid(0, \sigma)$. Sea Z la matriz $T \times k$ de observaciones de las variables z_1, \dots, z_k y supongamos que:

$$1) E(z_t' u_t) = 0_k \quad \forall t$$

$$2) p\lim\left(\frac{Z'Z}{T}\right) = \Sigma_{zz} \quad \text{simétrica, def. positiva}$$

$$3) p\lim\left(\frac{Z'X}{T}\right) = \Sigma_{zx} \quad \text{no singular}$$

19

Entonces el estimador $\hat{\beta}_{VI}$ es consistente y se tiene que:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_{VI} - \beta) \rightarrow N(0, \sigma_u^2 (\Sigma_{zx}^{-1}) \Sigma_{zz} (\Sigma_{zx}^{-1})')$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{VI}) = \hat{\sigma}_u^2 (Z'X)^{-1} (Z'Z) [(Z'X)^{-1}]'$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{(y - X\hat{\beta}_{VI})'(y - X\hat{\beta}_{VI})}{T - k}$$

20



Eficiencia del estimador de Variables Instrumentales

$$\hat{\beta}_{VI}$$


$$\hat{\beta}_{MC2E}$$

$$Ej: \hat{y}_{t-1} = \hat{\alpha}_1 x_{1t-1} + \hat{\alpha}_2 x_{2t-1} + \hat{\alpha}_3 x_{3t-1}$$

$$\hat{\beta}_{MC2E} = (\hat{X}'X)^{-1} \hat{X}'y$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{MC2E}) = \sigma_u^2 (\hat{X}'X)^{-1} \hat{X}'\hat{X}((\hat{X}'X)^{-1})'$$

21


$$\hat{\beta}_{MC2E} = \left((\hat{Y}_1, X_1)' (\hat{Y}_1, X_1) \right)^{-1} (\hat{Y}_1, X_1)' y_1$$

- $$\hat{\beta}_{MC2E} \left\{ \begin{array}{l} - \text{consistente} \\ - \text{asintóticamente normal} \\ - \text{optimo} \end{array} \right.$$

22



Modelo de ecuaciones simultáneas

Forma estructural con datos de panel.

GxG coeficientes en Γ ;

Gxk coeficientes en B.

$$\Gamma y_{it} + Bx_{it} + \mu = v_{it}, \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, N \\ t = 1, \dots, T \end{array}$$

23



Componentes del error. No observables

$$v_{it} = \alpha_i + \lambda_t + u_{it}$$

24



$$E x_{it} v'_{js} = 0$$

$$E \alpha_i \alpha'_j = \begin{cases} \Omega_\alpha = (\sigma_{\alpha gl}^2) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$E \lambda_t \lambda'_s = \begin{cases} \Omega_\lambda = (\sigma_{\lambda gl}^2) & \text{si } t = s, \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$$

$$E u_{it} u'_{js} = \begin{cases} \Omega_u = (\sigma_{ugl}^2) & \text{si } i = j \text{ y } t = s, \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

25



Forma reducida

Premultiplicando por Γ^{-1} tenemos la forma reducida del sistema simultáneas.

$$y_{it} = \mu^* + \Pi x_{it} + \varepsilon_{it}$$

$$\Pi = -\Gamma^{-1} \mathbf{B}$$

26



La forma reducida también tiene una estructura de componentes del error.

$$\varepsilon_{it} = \alpha_i^* + \lambda_t^* + u_{it}^*$$

27




Propiedades de los componentes de la forma reducida

$$E\alpha_i^* = E\lambda_t^* = Eu_{it}^* = 0$$

$$E\alpha_i^* \lambda_t^{*'} = E\alpha_i^* u_{it}^{*'} = E\lambda_t^* u_{it}^{*'} = 0$$

28




$$E\alpha_i^* \alpha_j'^{*'} = \begin{cases} \Omega_\alpha^* = (\sigma_{\alpha g1}^{*2}) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$E\lambda_t^* \lambda_s'^{*'} = \begin{cases} \Omega_\lambda^* = (\sigma_{\lambda g1}^{*2}) & \text{si } t = s, \\ 0 & \text{si } t \neq s \end{cases}$$

$$Eu_{it}^* u_{js}'^{*'} = \begin{cases} \Omega_u^* = (\sigma_{u g1}^{*2}) & i = j, t = s \\ 0 & \text{si distintos} \end{cases}$$

29



Estimación de las ecuaciones estructurales.

Estimación de una sola ecuación del sistema

$$y_g = Y_g \gamma_g + X_g \beta_g + v_g$$

$NT \times 1$

$$= W_g \theta_g + v_g, \quad g = 1, \dots, G$$

Y_g es un matriz $NT \times (G_g - 1)$ observaciones

30



El vector de errores

$$v_g = (I_N \otimes e_T) \alpha_g + (e_N \otimes I_T) \lambda_g + u_g$$

- Es frecuente estar interesados solo en una ecuación.
- Estimamos solo una ecuación, forma de proceder habitual.

31



- Principio de información limitada. Se evita la propagación de los errores de especificación por todo el sistema.

- Podemos estimar por MC2E.

32



Identificabilidad

- Ecuación no identificada: no estimable.
- Ecuación sobreidentificada: sirve MC2E
- Ecuación exactamente identificada: VI.
- Condición de rango, suficiente de identificabilidad de una ecuación de un sistema:
 - $K \geq K_g + G_g - 1$

33



Comentarios

- Las exógenas y predeterminadas de una ecuación actúan como sus propios instrumentos.
- Fácil implementación en paquetes.
- Los paquetes avisan de no identificabilidad, y se corrige aumentando el número de VI.

34



¿Cuáles VI elegir?

- Aquellas exógenas y predeterminadas que no están presentes en la ecuación considerada, y en número suficiente para la identificabilidad.
- Las más correlacionadas con la variable problemática y menos correlacionadas con el error.
- Se suelen elegir las VI de la ecuación estructural de la variable endógena explicativa que se está instrumentando.

35



¿Cuántas variables instrumentales?

- Variables instrumentales, las justas nada más.
- Si son pocas, se podría aumentar la eficiencia.
- Si son demasiadas, se reproduce el comportamiento de la variable endógena y se introduce **SESGO** en el estimador de VI (o de MC2E).

36



Problemas de VI

- Estimador no es único.
- Las estimaciones pueden variar bastante según las VI elegidas.
- No sabemos si tenemos las correctas.
- Ayuda: contraste de SARGAN, que viene en muchos paquetes.
- Usar la estructura del problema y el sentido común.