

Tema 3: Regresores estocásticos en el Modelo Lineal General

- 3.1. Modelos dinámicos
- 3.2. Regresores estocásticos
- 3.3. Modelos de ecuaciones simultaneas.

1

3.1. Modelos dinámicos

Impactos: desfases y/o varios períodos

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t-1} + u_t$$


$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + \beta_4 x_{t-2} + u_t$$

Inercia

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \beta_1 x_t + \beta_2 z_t + \xi_t$$

ξ { con autocorrelación (AR o MA)
sin autocorrelacion

2



Posibles generadores:
Modelo de ajuste parcial
(Nerlove)

$$k_t^* = \beta_1 + \beta_2 y_t + u_t$$

(capital deseado empresa)

$$k_t - k_{t-1} = \delta(k_t^* - k_{t-1}) \quad 0 < \delta < 1$$

(mecanismo de ajuste parcial)

3

Implica:

$$k_t = \delta k_t^* + (1 - \delta)k_{t-1}$$

Iterativamente:

$$k_t = \delta k_t^* + \delta(1 - \delta)k_{t-1}^* + \delta(1 - \delta)^2 k_{t-2}^* + \dots$$

En términos de variables observables:

$$k_t = \delta\beta_1 + \delta\beta_2 y_t + (1 - \delta)k_{t-1} + \delta u_t$$

Demanda de capital a corto plazo.

Estudiaremos estimación de distintos tipos de modelos dinámicos.

4

a) Estimación con retardos de las variables explicativas

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_t + \beta_3 x_{t-1} + \beta_4 x_{t-2} + u_t$$

Problema: imprecisión por multicolinealidad aproximada.

Posible solución: reparametrizar (Koyck)

$$\beta_i = \delta \beta_{i-1} \quad |\delta| < 1 \quad \forall i \geq 3$$

$$\begin{aligned} y_t &= \beta_1 + \beta_2 x_t + \delta \beta_2 x_{t-1} + \delta^2 \beta_2 x_{t-2} + u_t = \\ &= \beta_1 + \beta_2 (x_t + \delta x_{t-1} + \delta^2 x_{t-2}) + u_t \end{aligned}$$

Estimación: por máxima verosimilitud; no lineal en δ .

5

b) Estimación con retardos de la variable endógena:

b.1.) El término de error no tiene correlación:

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 x_t + u_t \quad |\beta_2| < 1$$

$$- E(u) = 0$$

$$- E(x_t u_t) = 0$$

$$- E(y_{t-1} u_t) = 0$$

$$- \text{plim} (x'x)/T = \Sigma_{xx}$$

6

Bajo estos supuestos, el Teorema de Mann y Wald asegura que:

$$\begin{aligned} \text{plim} \left(\frac{x'u}{T} \right) &= 0 \\ \frac{x'u}{\sqrt{T}} &\sim N(0, \sigma_u^2 \Sigma_{xx}) \end{aligned} \text{, así que:}$$

1.- $\hat{\beta}_{mco}$ es consistente.

$$\begin{aligned} \text{plim} \hat{\beta}_{mco} &= \text{plim} \left[\beta + \left(\frac{x'x}{T} \right)^{-1} \left(\frac{x'u}{T} \right) \right] = \\ &= \beta + \text{plim} \left(\frac{x'x}{T} \right)^{-1} \text{plim} \left(\frac{x'u}{T} \right) = \beta + \Sigma_{xx}^{-1} 0_k = \beta \end{aligned}$$

2.- Normalidad asintótica

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_{mco} - \beta) \rightarrow N(0, \sigma_u^2 \Sigma_{xx}^{-1})$$

7

- a) Resultado aproximado
- b) Permite inferencia y predicción con variables explicativas aleatorias.

8

b.2) Estimación de un modelo dinámico con autocorrelación en el término de error (AR(1))

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 x_t + u_t \quad |\beta_2| < 1$$
$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\rho| < 1$$

$\hat{\beta}_{mco}$: inconsistente. Necesario V.I.

$$z_t = (1, x_{t-1}, x_t)$$

$$\hat{\beta}_{VI} = (z'x)^{-1} z'y$$

$$\hat{\beta}_{VI} \left\{ \begin{array}{l} \text{consistente} \\ \text{aproximadamente normal} \end{array} \right.$$

9

b.3) Estimación de un modelo dinámico con error MA(1)

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 x_t + u_t \quad |\beta_2| < 1$$
$$u_t = \theta \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$\hat{\beta}_{mco}$: inconsistente, necesario V.I.

$$z_t = (1, y_{t-2}, x_t)$$

$$\hat{\beta}_{VI} = (z'x)^{-1} z'y$$

$$\hat{\beta}_{VI} \left\{ \begin{array}{l} \text{consistente} \\ \text{aproximadamente normal} \end{array} \right.$$

10

Errores de medida (Novales p. 362)

$$y_t = w_t \beta_0 + v_t \quad E(w'_t v_t) = 0$$

$$x_t = w_t + \eta_t$$

$$y_t = x_t \beta_0 + \varepsilon_t$$

Problema

$\hat{\beta}_{mco}$: inconsistente

(Existencia de errores de medida en una sola variable \Rightarrow inconsistencia del vector de estimadores)

11

Solucion: V.I.

Usar al menos un instrumento para cada una de las variables explicativas sujetas a error de medida

$$\hat{\beta}_{VI} = (z'x)^{-1} z'y$$

¿Cómo elegimos las Z?

- Para cada variable sujeta a error de medida elegimos una variable instrumental que puede ser otra medida de la misma variable, sujeta a otro error de medida incorrelacionado con el error original.

12

3.2.) Regresores estocásticos:

3.2.1. Introducción. Tipos de regresores estocásticos

(Novales págs. 37-44 y 307-309)

S.1. $Y_t = \beta x_t + u_t$: relación estocástica

S.2. Ausencia error de especificación

S.3. $E(u) = 0$

S.4. $V(u) = \sigma_u^2 \cdot I$

S.5. Linealidad en los parámetros

S.6. X fijas

S.7. x_1, \dots, x_k : linealmente indep.

13

S.6. 'x : estocásticas.

Caso frecuente en economía. No existe control sobre las x. ¿Qué ocurre con $\hat{\beta}_{mco}$ cuando x son estocásticas?.

A) Si x_t y u_t son independientes,

$\hat{\beta}_{mco}$: insesgado y consistente.

B) Si x_t y u_t son parcialmente independientes:

x_t y u_t independientes pero x_t y u_{t-j} dependientes.

$\hat{\beta}_{mco}$: sesgado pero consistente.

C) Si x_t y u_t dependientes

$\hat{\beta}_{mco}$: sesgado e inconsistente.

(necesario usar Variables Instrumentales)



3.2.2.Caso 1: regresores no correlacionados con las perturbaciones

S.6': x estocásticas pero
 x independiente de u


$$f(x) = f(x/u)$$

$$g(u) = g(u/x)$$

S.3. ' $E(u/x) = 0$

S.4. ' : $V(u) = V(u/x) = \sigma_u^2 I$

15



Se puede demostrar que bajo estas condiciones el estimador de MCO de las β : $\hat{\beta}_{mco}$ es insesgado y eficiente.

$$E(\hat{\beta}_{mco}) = \beta$$

$$V(\hat{\beta}_{mco}) = \sigma_u^2 (x'x)^{-1}$$

Se cumple el Teorema de Gauss-Markov. El supuesto de independencia entre errores y perturbaciones no siempre se da. Es un supuesto muy fuerte.

16

3.2.3. Caso 2: regresores correlacionados con las perturbaciones

Casos en los que no se da la independencia entre errores y regresores:

- a) Errores en las variables (errores de medida en las variables explicativas)
- b) Especificación dinámica con autocorrelación del error
- c) Sistemas de ecuaciones simultaneas

17

A) Errores de medida en las variables:

$$y_t = w_t \beta_0 + v_t \quad E(w_t' v_t) = 0$$

w_t se mide con error


$$x_t = w_t + \eta_t$$

$$E(w_t' \eta_t) = 0 \quad E(\eta_t' \eta_t) \neq 0 \quad E(\eta_t' v_t) = 0$$

$$y_t = x_t \beta_0 + v_t - \eta_t \beta_0 = x_t \beta_0 + \varepsilon_t$$

$$E(\hat{\beta}_{omco}) \neq \beta_0 \quad : \text{sesgado e inconsistente}$$

18



B) Especificación dinámica con autocorrelación del error

$$y_t = y_{t-1}\alpha_0 + w_t\delta_0 + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho_0\varepsilon_{t-1} + v_t$$

$$E(w_t'\varepsilon_t) = 0 \quad E(\varepsilon_{t-1}v_t) = 0$$

$$x_t = (y_{t-1}, w_t)$$

$$\beta_0' = (\alpha_0, \delta_0')$$

$$y_t = x_t\beta_0 + \varepsilon_t$$

$$E(\hat{\beta}_{0mco}) \neq \beta_0$$

MC0: sesgado e inconsistente

19



C) Sistemas de ecuaciones simultaneas

$$y_{t1} = y_{t2}\alpha_0 + w_{t1}\delta_0 + \varepsilon_{t1}$$

$$y_{t2} = w_{t2}\gamma_0 + \varepsilon_{t2}$$

$$E(w_{t1}'\varepsilon_{t1}) = 0 \quad E(w_{t2}'\varepsilon_{t2}) = 0$$

Ejemplos:

- Precio y cantidad en sistema de ecuaciones de oferta y demanda.
- Rentabilidad y publicidad en empresas.

Si se estima, por ejemplo, la primera ecuación por MCO, $\hat{\beta}_{mco}$ será sesgado e inconsistente.

20

Cuando hay correlación entre errores y regresores $\Rightarrow \hat{\beta}_{mco}$: sesgado e inconsistente \Rightarrow es necesario usar el método de...

VARIABLES INSTRUMENTALES

Estimador alternativo a MCO con mejor comportamiento en muestras grandes.

Z_t : variables instrumentales

1) $E(z_t u_t) = 0$

2) $E(z_t x_t) \neq 0$

$$\hat{\beta}_{VI} = (z'x)^{-1} z'y$$

21

A veces x_t y z_t tienen variables en común. Solo es necesario instrumentar las variables que presenten problemas de correlación con el error.

Ejemplo: modelo dinámico con autocorrelación del error.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 x_t + u_t \quad |\beta| < 1$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t \quad |\rho| < 1$$

$$X_t = (1, y_{t-1}, x_t) \quad Z_t = (1, x_{t-1}, x_t)$$

22


$$\hat{\beta}_{VI} = (Z'X)^{-1}ZY$$

Z : matriz T x k de observaciones de las variables instrumentales.

$(Z'X)^{-1}$: lo suponemos invertible.

23

3.2.4. Introducción a la Teoría Asintótica

a) Convergencia en probabilidad:

Se dice que una sucesión de variables aleatorias x_1, x_2, \dots, x_n converge en probabilidad a la variable aleatoria x si $\forall \varepsilon > 0$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P[|X_t - X| < \varepsilon] = 1$$

$$\text{plim } x_t = x$$

24

b) Consistencia:

El estimador $\hat{\beta}$ del parámetro β es consistente si al obtener la sucesión $\{\hat{\beta}_t\}_{t=1}^{\infty}$ se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P[|\hat{\beta}_t - \beta| < \varepsilon] = 1$$

Comentarios:

- Generalizable a vectores y matrices.
- β puede ser constante.

25

c) Convergencia en distribución:

Sea x_1, x_2, \dots, x_t una sucesión de variables aleatorias con funciones de distribución F_1, F_2, \dots, F_t . Supongamos que $F_t(x) \rightarrow F(x)$ en todos los puntos de continuidad de la función $F(x)$, y que en ellos, $F(x)$ es una función de distribución. Entonces se dice que la sucesión de variables aleatorias x_t converge en distribución a x , donde x es una variable aleatoria con función de distribución F , y se representa por $x_t \xrightarrow{D} x$.

26

d) Un Teorema Central del Limite

Sea x_1, x_2, \dots, x_k una sucesión de vectores aleatorios de dimensión k , independientes entre sí e idénticamente distribuidos, con $E(x_i) = \mu$ y $V(x_i) = \Sigma$.

Entonces se tiene que:

$$\sqrt{T} \left[\frac{1}{T} \sum_1^T x_t - \mu \right] \xrightarrow{D} N_k(0, \Sigma)$$

27

e) Teorema de Mann y Wald:

Sea x una matriz $T \times k$ y u un vector de dimensión T tales que:

i) $E(u) = 0$ $E(uu') = \sigma_u^2 I_T$

ii) $E(x_i' u) = 0$, $i = 1, \dots, k$

donde x es la columna i -ésima de la matriz x

iii) $\text{plim}(x'x/T) = \Sigma_{xx} < \infty$

donde Σ_{xx} es una matriz simétrica definida positiva.

28

Entonces se tiene que:

$$a) \text{plim} \left(\frac{x'u}{T} \right) = 0_k$$

$$b) \frac{x'u}{\sqrt{T}} \rightarrow N(0, \sigma_u^2 \Sigma_{xx})$$

29

3.2.5. Consistencia del estimador de V.I.:

Sea z una matriz $T \times k$ de observaciones de las variables z_1, z_2, \dots, z_k , quizás aleatorias. Sea z_t' la fila t de z y supongamos que tenemos:

$$1) E(z_t' u_t) = 0_k \quad \forall t$$

$$\left. \begin{array}{l} 2) \text{plim} \left(\frac{z'x}{T} \right) = \Sigma_{zx} \\ \text{plim} \left(\frac{z'z}{T} \right) = \Sigma_{zz} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ambas no} \\ \text{singulares y finitas} \end{array}$$

30

Y además:

S.1. $y_t = \beta x_t + u_t$

S.2. Ausencia error de especificación

S.3. $E(u/x) \neq 0$

S.4. $V(u/x) = \sigma_u^2 \Sigma \Rightarrow$ autocorrelación
y/o heteroscedasticidad.

S.5. Linealidad en los parámetros.

S.6' x estocásticas

S.7. x_1, \dots, x_k : linealmente indep.

31

Entonces el estimador de V.I.

$$\hat{\beta}_{VI} = (z'x)^{-1} z'y$$

Es consistente: ~~$\beta + \epsilon$~~

$$\begin{aligned} plim(\hat{\beta}_{VI}) &= \beta + plim \left[\left(\frac{z'x}{T} \right)^{-1} \left(\frac{z'u}{T} \right) \right] = \\ &= \beta + \left[plim \left(\frac{z'x}{T} \right) \right]^{-1} plim \left(\frac{z'u}{T} \right) = \beta + \Sigma_{zx}^{-1} 0_k = \beta \end{aligned}$$

(Se ha utilizado el Teorema de Mann y Wald)

32

Normalidad asintótica del estimador V.I.

Dado el modelo $y_t = \beta x_t + u_t$ donde x_t es el vector de variables explicativas que puede incluir retardos de la variable endógena, y u_t el término de error ruido blanco ($niid(0, \sigma)$).

Sea z la matriz $T \times k$ de observaciones de las variables z_1, \dots, z_k y supongamos que:

$$1) E(z_t' u_t) = 0_k \quad \forall t$$

$$2) plim \left(\frac{z'z}{T} \right) = \Sigma_{zz} \text{ simétrica, def. positiva}$$

$$3) plim \left(\frac{z'x}{T} \right) = \Sigma_{zx} \text{ no singular}$$

33

Entonces el estimador $\hat{\beta}_{VI}$ es consistente y se tiene que:

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_{VI} - \beta) \rightarrow N(0, \sigma_u^2 (\Sigma_{zx}^{-1}) \Sigma_{zz} (\Sigma_{zx}^{-1})')$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{VI}) = \hat{\sigma}_u^2 (z'x)^{-1} (z'z) [(z'x)^{-1}]'$$

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{(y - x\hat{\beta}_{VI})'(y - x\hat{\beta}_{VI})}{T - k}$$

34

Eficiencia del estimador de Variables Instrumentales

$$\hat{\beta}_{VI}$$

$$\hat{\beta}_{MC2E}$$

$$Ej: \hat{y}_{t-1} = \hat{\alpha}_1 x_{1t-1} + \hat{\alpha}_2 x_{2t-1} + \hat{\alpha}_3 x_{3t-1}$$

$$\hat{\beta}_{MC2E} = (\hat{x}'x)^{-1} \hat{x}'y$$

$$\hat{V}(\hat{\beta}_{MC2E}) = \sigma_u^2 (\hat{x}'x)^{-1} \hat{x}'\hat{x}((\hat{x}'x)^{-1})'$$

35

3.3. Modelos de ecuaciones simultaneas:

3.3.1. Forma estructural y reducida

Ejemplo:


Modelo de oferta y demanda: 2 ecuaciones y una condición de equilibrio.

$$\left. \begin{aligned} q_t^0 &= \alpha_1 + \alpha_2 p_t + u_{1t} \\ q_t^d &= \beta_1 + \beta_2 p_t + \beta_3 y_t + u_{2t} \\ q_t^0 &= q_t^d \end{aligned} \right\} \text{Forma estructural}$$

Variables endógenas: q_t, p_t

Variable exógena: y_t

36



Forma estructural(de un sistema de ecuaciones simultaneas)

Son las ecuaciones que reflejan el comportamiento económico, con sus parámetros de comportamiento.

La teoría económica sugiere cuáles son exógenas y cuáles son endógenas, así como cuáles intervienen en cada ecuación y cuáles no.

37



Forma reducida:

Consiste en escribir el sistema de ecuaciones de forma que cada variable endógena sea función exclusivamente de las exógenas y predeterminadas.

Los parámetros de la forma reducida son combinaciones de los de la forma estructural; los parámetros de la forma estructural no siempre se pueden recuperar a partir de los de la forma reducida. (Problema de identificación).

38

Forma reducida del ejemplo anterior

$$q_t = \pi_{11} + \pi_{21}y_t + v_{1t}$$

$$p_t = \pi_{12} + \pi_{22}y_t + v_{2t}$$

donde:

$$\pi_{11} = \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2 - \beta_2} \quad \pi_{12} = \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\alpha_2 - \beta_2}$$

$$\pi_{21} = \frac{\alpha_2\beta_3}{\alpha_2 - \beta_3} \quad \pi_{22} = \frac{\beta_3}{\alpha_2 - \beta_2}$$

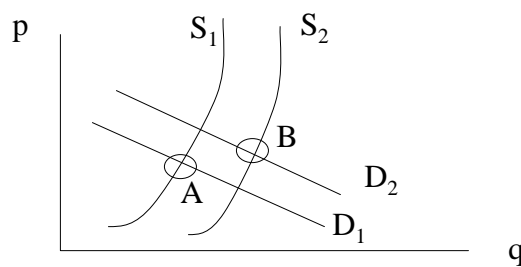
$$v_{1t} = \frac{\alpha_2u_{2t} - \beta_2u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2} \quad v_{2t} = \frac{u_{2t} - u_{1t}}{\alpha_2 - \beta_2}$$

39

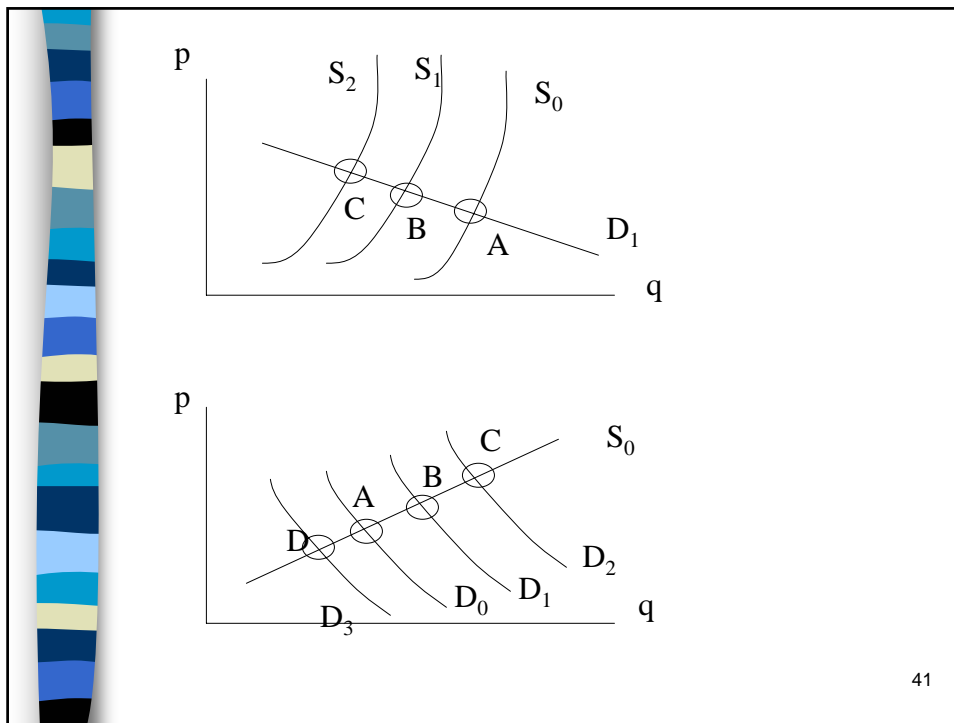
3.3.2. Concepto de identificación:

Identificación: recuperación de los parámetros de la forma estructural a partir de los de la reducida.

Importante: porque forma reducida se puede estimar por MCO, pero los estimadores MCO de la forma estructural son inconsistentes.



40




41

Para resolver problemas de identificación, pasar de parámetros de forma reducida a estructural, hay que resolver un sistema de ecuaciones.

- A) Si hay igual n° de ecuaciones que de incógnitas, ecuación identificada.
- B) Si hay más incógnitas que ecuaciones, ecuación no identificada o subidentificada.
- C) Si hay más ecuaciones que incógnitas, la ecuación estará sobreidentificada (varias estimaciones para un mismo parámetro).


42



3.3.3. Estimación de sistemas de ecuaciones simultáneas

A) MCO del modelo estructural sesgado e inconsistente

43




B) MCO del modelo en su forma reducida:

Si hay algunas/s ecuación/es exactamente identificada/s, podemos recuperar los parámetros de la forma estructural a partir de los de la reducida.

Mínimos cuadrados indirectos: MCI

Notas:

- Solo válida para ecuaciones exactamente identificadas.
- En general, sesgado pero consistente. (Sesgado por ser transf. No lineal)



C) Variables instrumentales


Util para ecuaciones exactamente identificadas.

$$\hat{\beta}_{VI} = (z'x)^{-1} z'y$$
$$\hat{\beta}_{VI} : \text{consistente y con distribución asintótica Normal.}$$

¿Candidatos a V.I.?. Las variables que no aparecen como explicativas en la ecuación considerada.

Notas: - No único
 - No eficiente

45



D) Mínimos cuadrados en dos etapas (caso particular de V.I.)

Se puede utilizar para estimar los coeficientes de ecuaciones exactamente identificadas o sobreidentificadas.

46



METODO:

Etapa 1^a

Se construye una regresión auxiliar para cada una de las variables explicativas endógenas de la ecuación, que se regresan sobre todas las predeterminadas del sistema y obtenemos predicciones de las variables endógenas:

\hat{Y}_1 : son ahora instrumentos válidos.

47



Etapa 2^a

$$\hat{\beta}_{MC2E} = ((\hat{Y}_1, X_1)(\hat{Y}_1, X_1))^{-1}(\hat{Y}_1, X_1)y_1$$

$\hat{\beta}_{MC2E}$ {
- consistente
- asintóticamente normal
- optimo

48