Examen de Introducción a la Econometría (LECO).

Departamento de Economía Cuantitativa. Universidad Complutense de Madrid.
11 de junio de 2007. Duración: **2 horas y 30 minutos**.

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Nombre del profesor:		Grupo:

No desgrape las hojas de este cuadernillo. El examen está compuesto por tres problemas y 10 cuestiones cortas. Elija SÓLO DOS DE LOS TRES problemas propuestos y respóndalos en hojas aparte. Las cuestiones cortas deben ser respondidas en el espacio debajo del enunciado en este mismo cuardernillo. Junto a cada pregunta y apartado se indica la puntuación.

Problemas

Problema 1. (2.5 pt.) Sea la función de densidad: $f(x, y) = k,\ 0 < x < 6, \frac{x}{2} < y < 3$.

1. (0.25 pt) Dibuje el soporte de $f(x, y)$.
2. (0.25 pt) ¿Cuál es el valor de k que hace de $f(x, y)$ una función de densidad?
3. (0.25 pt) Compruebe si X e Y son independientes.
4. (0.25 pt) Calcule $E(Y/X = x)$ y represéntela sobre el soporte.
5. (0.5 pt) Calcule $P[X + Y < 3]$.
6. (0.5 pt) Calcule $P[Y \leq 2/X \leq 2]$.
7. (0.5 pt) Calcule $P[Y \leq 2/X = 2]$.

Problema 2. (2.5 pt.) Sea X el tiempo en minutos que transcurre entre dos llamadas que llegan a una centralita telefónica. Se supone que $X \sim f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}$, $x \geq 0$; esto es, sigue una distribución exponencial con parámetro θ. Se pide:

1. (0.5 pt) Calcule $E(X)$ y $V(X)$.
2. (0.5 pt) Formule la función de verosimilitud para una muestra tamaño n.
3. (0.5 pt) Encuentre la región crítica más potente para contrastar $H_0 : \theta = 1$ frenta a la alternativa $H_1 : \theta = 3$.
4. (0.5 pt) Sabiendo que el estadítico $\frac{2}{\theta} \sum x_i \sim \chi^2_{2n}$, donde x_i son los elementos de una muestra aleatoria simple tamaño n, encuentre el valor crítico para un contraste al 5 % de significación con $n = 5$.
5. (0.5 pt) Si con la muestra anterior se obtiene $\bar{x} = 1{,}5$, ¿cuál es el p-valor del contraste? ¿Qué decisión adoptaría sobre H_0?

Problema 3. (2.5 pt.) Es frecuente oir comentarios sobre si el rendimiento de los estudiantes se evalúa de forma similar por diferentes profesores de la misma asignatura. Se dispone de las calificaciones de dos conjuntos de estudiantes **pertenecientes a dos grupos distintos de la misma asignatura** que aparecen en la siguiente tabla:

Grupo A	5.6	5.0	7.2	5.5	5.9	4.3	2.8	6.8	6.6	3.8
Grupo E	5.8	5.6	5.5	4.8	5.9	8.5	7.0			

Para los datos anteriores se han calculado los siguientes estadísticos:

	Media	Varianza	Asimetría	Curtosis	Mediana
Grupo A	5.35	1.76	-0.43	2.19	5.55
Grupo E	6.16	1.28	1.03	2.98	5.80

1. (0.5 pt) Contraste si los datos del Grupo A proceden de una distribución normal. Calcule el p-valor.
2. (0.5 pt) Suponiendo que para las calificaciones del Grupo E se acepta el mismo resultado que ha obtenido en el apartado 1, ¿cómo contrastaría que el nivel de exigencia es igual en ambos grupos? Formule la hipótesis nula, la alternativa, escriba el estadístico que emplearía y justifique la respuesta.
3. (0.5pt) Aplique el contraste propuesto en el apartado anterior. Indique si rechazaría la hipótesis nula y calcule el p-valor.
4. (0.5 pt) ¿Cómo cambiaría su respuesta al **apartado 2 si NO pudiese suponer normalidad** de los datos de calificaciones?
5. (0.5 pt) Utilice el contraste de Kolmogorov-Smirnov para comprobar si los datos del Grupo E siguen la misma distribución que los del Grupo A. ¿Es equivalente el resultado del apartado 3 y el obtenido en éste?

Cuestiones cortas. Debe obtener más 2 puntos en estas preguntas para que se califiquen los problemas.

Cuestión 1. (0.5 pt) Una variable aleatoria bidimensional $(X, Y)'$, se distribuye normal bivariante con vector de esperanzas $(0, 0)'$ y matriz de varianzas covarianzas $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$. ¿Cuál es la probabilidad de que $\left(\frac{1}{2}X - Y\right)$ sea mayor que 1,28?

Cuestión 2. (0.5 pt) Considere una economía con sólo dos bienes de consumo: A y B. Se tienen los siguientes datos:

	Bien A		Bien B	
	precio	cantidad	precio	cantidad
1998	5	30	2	20
1999	6	35	4	10

Tomando como base el año 1998, ¿cuál es la inflación anual en 1999?

Cuestión 3. (0.5 pt) Sea (X, Y) un par aleatorio que representa la demanda de dos bienes **sustitutivos**. Se sabe que $E(X) = 5$ y $E(Y) = 10$. Si se produce una demanda de tres unidades de X, ¿esperaría que la demanda de Y fuese mayor que 10 ó menor que 10? ¿Por qué?

Cuestión 4. (0.5 pt) La función generatriz de momentos de una v.a. chi-cuadrado de r grados de libertad es $M(t) = (1-2t)^{-r/2}$. Demuestre que si se tienen n variables aleatorias independientes $X_i \sim \chi^2_{r_i}$, $i = 1, \ldots, n$, entonces $\sum_{i=1}^n X_i \sim \chi^2_{\sum r_i}$.

Cuestión 5. (0.5 pt) Si una variable aleatoria sigue una distribución exponencial con parámetro θ, $X \sim f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x}$, $x \geq 0$, obtenga su función generatriz de momentos.

Cuestión 6. (0.5 pt) **Utilizando los resultados de las dos cuestiones previas**, para una muestra aleatoria simple de tamaño n obtenida de una distribución exponencial con parámetro θ, demuestre que $\frac{2n}{\theta}\bar{x} \sim \chi^2_{2n}$.

Enunciado para las dos cuestiones siguientes. Un profesor de la Facultad, saliendo a las 8:00 de su casa (y evitando los túneles de la M-30), ha empleado 25 minutos de media en llegar al Campus de Somosaguas las últimas seis veces que ha venido. La desviación típica de dichos tiempos de trayecto ha sido de ocho minutos. Suponga normalidad de los tiempos de trayecto.

Cuestión 7. (0.5 pt) Proporcione un intervalo del 95 % de confianza para el tiempo que empleará el próximo día que venga a la Facultad.

Cuestión 8. (0.5 pt) ¿A qué hora debe salir de casa este profesor si quiere tener una confianza del 99 % de llegar a tiempo a su clase de las 8:30?

Cuestión 9. (0.5 pt) Sea la siguiente función de cuantía conjunta para X e Y:

$P(X=x, Y=y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=0$	0.33	0.62	0.05
$x=1$	0	0.25	0.25

¿Son independientes? Calcule $E(Y/X=1)$.

Cuestión 10. (0.5 pt) A partir de la tabla de la **cuestión 9**, obtenga la función generatriz de momentos marginal de Y.

Fórmulas de posible utilidad

Transformación de variables. Sea $X \sim f_X(x)$ y se define $Y = h(X)$. Entoces $f_Y(y) = f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|$ donde $h^{-1}(\cdot)$ es la *función inversa* de $h(\cdot)$.

Aproximación lineal a la esperanza condicional.

$$E^*(Y/X = x) = E(Y) - E(X)\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} + E(X)\frac{Cov(X,Y)}{V(X)} \cdot x$$

Varianza condicional de la normal bivariante. $V(Y/X = x) = V(Y)(1 - \rho^2_{XY})$.

Modelo de regresión lineal. Sea $E(Y_i/X_i = x_i) = a + bx_i$ (o $Y_i = a + bx_i + U_i$, $U_i \underset{iid}{\sim} N(0, \sigma^2)$). Si $\hat{a}$ y $\hat{b}$ son los estimadores por el método de los momentos de a y b, entonces:

$$\frac{\hat{a} - a}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2 \sum x_i^2}{T\sum(x_i - \bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}; \qquad \frac{\hat{b} - b}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}} \sim t_{n-2}.$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias. Si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ e independientes y se dispone de muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1); \qquad \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{s^2/n}} \sim t_{n-1}; \qquad \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}; \qquad \frac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_s^2} \sim F_{n_1-1, n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1); \qquad \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}} \sim t_{n+m-2}$$

donde s^2 denota la *cuasivarianza* muestral.

Proporciones. $\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to N(0,1)$. Con dos poblaciones y muestras de tamaños n y m:

$$\frac{(\hat{p_1} - \hat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\left(\frac{n+m}{n \cdot m}\right)\hat{p_T}(1 - \hat{p_T})}} \to N(0,1),$$

donde $\hat{p_T} = \frac{n\hat{p_1} + m\hat{p_2}}{n+m}$.

Contraste de Jarque-Bera. $JB = n\left[\frac{AS^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right] \to \chi^2_2$.

Contraste Chi cuadrado. $\sum_{i=1}^{k}\frac{(T_i - O_i)^2}{T_i} \sim \chi^2$ donde T_i y O_i son, respectivamente las i-ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para una muestra $D_n = \sup|F_n^*(x) - F(x)|$. Para dos muestras $D_{n,m} = \sup|F_n^*(x) - G_m^*(x)|$. $F_n^*(x)$ y $G_m^*(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales) y $F(x)$ es una función de distribución teórica.

Contraste de Wilcoxon. El estadístico $T = T^+ - T^-$, bajo H_0 cumple $E(T) = 0$ y $V(T) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Contraste de Mann-Whitney. $U = \text{mín}(U_1, U_2)$, donde $U_1 = n_1 n_2 + \frac{n_1(n_1+1)}{2} - R_1$ y $U_2 = n_1 n_2 + \frac{n_2(n_2+1)}{2} - R_2$. Bajo H_0 se cumple $E(U) = \frac{n_1 n_2}{2}$ y $V(U) = \frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}$.

Aproximación a los valores críticos en los contrastes de Kolmogorov-Smirnov. Para el contraste de una muestra, el valor crítico c^* con un nivel de significación α se aproxima mediante $c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{1/n}$, donde k_α es 1.07, 1.22, 1.36, 1.52 y 1.63 para niveles de significación del 20 %, 10 %, 5 %, 2 % y 1 %, respectivamente.

Para el contraste de dos muestras, el valor crítico aproximado se calcula:

$$c^*_\alpha = k_\alpha\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}},$$

donde k_α es 1.07, 1.22 y 1.52 para niveles de significación α del 10 %, 5 % y 1 %, respectivamente.

Tablas estadísticas

	x.xx	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993

Cuadro 1: Función de distribución de la $N(0,1)$

r	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
2	0.45	0.71	1.02	1.39	1.83	2.41	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	13.82
4	1.65	2.19	2.75	3.36	4.04	4.88	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	18.47
6	3.07	3.83	4.57	5.35	6.21	7.23	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	22.46
8	4.59	5.53	6.42	7.34	8.35	9.52	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	26.12
10	6.18	7.27	8.30	9.34	10.47	11.78	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	29.59
12	7.81	9.03	10.18	11.34	12.58	14.01	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	32.91
14	9.47	10.82	12.08	13.34	14.69	16.22	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	36.12
16	11.15	12.62	13.98	15.34	16.78	18.42	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	39.25
18	12.86	14.44	15.89	17.34	18.87	20.60	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	42.31
20	14.58	16.27	17.81	19.34	20.95	22.77	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	45.31

Cuadro 2: Función de distribución de la χ^2_r.

r	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.975	0.99	0.999
1	0.3249	0.7265	1.3764	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	318.3088
2	0.2887	0.6172	1.0607	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	22.3271
3	0.2767	0.5844	0.9785	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	10.2145
4	0.2707	0.5686	0.9410	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	7.1732
5	0.2672	0.5594	0.9195	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	5.8934
6	0.2648	0.5534	0.9057	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	5.2076
7	0.2632	0.5491	0.8960	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	4.7853
8	0.2619	0.5459	0.8889	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	4.5008
9	0.2610	0.5435	0.8834	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	4.2968
10	0.2602	0.5415	0.8791	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	4.1437
11	0.2596	0.5399	0.8755	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	4.0247
12	0.2590	0.5386	0.8726	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.9296
13	0.2586	0.5375	0.8702	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.8520
14	0.2582	0.5366	0.8681	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	3.7874
15	0.2579	0.5357	0.8662	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	3.7328
16	0.2576	0.5350	0.8647	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	3.6862
17	0.2573	0.5344	0.8633	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	3.6458
18	0.2571	0.5338	0.8620	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	3.6105
19	0.2569	0.5333	0.8610	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	3.5794
20	0.2567	0.5329	0.8600	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	3.5518

Cuadro 3: Función de distribución de la t_r.