

Examen final de
Introducción a la Econometría

16 de septiembre de 2006, a las 9:00 horas
Duración: 2 HORAS y 15 minutos

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Profesor/a:		Grupo:

No desgrape estas hojas

Problemas (2.5 puntos por pregunta)

Los siguientes problemas deben ser realizados en un ÚNICO cuadernillo aparte
(escriba sus datos personales, grupo y profesor en dicho cuadernillo¹)

Elija **SÓLO** dos (2) de los tres (3) problemas propuestos.

Ejercicio 1. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy & 0 < x < 1; 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

(a) 0.25pts Calcule el valor de k , $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

Solución:

$$\int_0^2 \int_0^1 kxy dx dy = k$$

por tanto k debe ser uno ($k = 1$)

$$f_X(x) = \int_0^2 xy dy = x \int_0^2 y dy = 2x \quad 0 < x < 1$$

$$f_Y(y) = \int_0^1 xy dx = y \int_0^1 x dx = \frac{y}{2} \quad 0 < y < 2$$

Ejercicio 1

(b) 0.5pts Calcule $\text{Var}(Y)$

Solución:

$$E(Y) = \int_0^2 \frac{y^2}{2} dy = \frac{\int_0^2 y^2 dy}{2} = \frac{4}{3}$$

$$E(Y^2) = \int_0^2 \frac{y^3}{2} dy = \frac{\int_0^2 y^3 dy}{2} = 2$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{9}$$

Ejercicio 1

¹Al finalizar entregue estas paginas dentro de dicho cuadernillo

- (c) 0.5pts Calcule $E(9(X-1)Y^2)$

Solución:

$$\int_0^2 \int_0^1 9(x-1)y^2 f_{XY}(x,y) dx dy = -\frac{3 \int_0^2 y^3 dy}{2} = -6$$

Ejercicio 1

- (d) 0.5pts Calcule $E_{Y|X}(Y|x)$, y verifique para este caso el “Teorema de las esperanzas iteradas”, es decir, que la esperanza de la esperanza condicional, $E_x(E(Y|X))$, es igual a $E(Y)$.

Solución: Primero calculamos la función de densidad de probabilidad de Y condicionada a $X = x$

$$f_{Y|X}(Y|x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{xy}{2x} = \frac{y}{2}; \quad \text{con soporte } \mathbb{R}_{Y|X} = [0, 2]$$

y donde $0 < y < 1$.

Por otra parte, el T^a de las esperanzas iteradas dice que $E_x(E(Y|X)) = E(Y)$, veámoslo:

$$E_{Y|X}(Y|x) = \frac{\int_0^2 y^2 dy}{2} = \frac{4}{3}, \quad 0 < x < 1;$$

así pues, su esperanza es

$$E_x\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3} = E(Y)$$

Ejercicio 1

- (e) 0.75pts Calcule las siguientes tres probabilidades: $P(Y > X)$, $P(Y > X | X = 0.5)$, y $P(Y > X | X > 0.5)$,

Solución:

$$\begin{aligned} P(Y > X) &= \int_0^1 \int_x^2 f_{XY}(x,y) dy dx = \int_0^1 x \int_x^2 y dy dx = \frac{7}{8} \\ P(Y > X | X = 0.5) &= \int_{x=0.5}^2 f_{Y|X}(y|0.5) dy = \int_{0.5}^2 \frac{y}{2} dy = \frac{15}{16} \\ P(Y > X | X > 0.5) &= \frac{P(Y > X)}{P(X > 0.5)} = \frac{\int_{0.5}^1 x \int_x^2 y dy dx}{2 \int_{0.5}^1 x dx} = \frac{27}{32} \end{aligned}$$

Ejercicio 1

Ejercicio 2. Se desea analizar la rentabilidad de una cartera de acciones compuesta en un 30% (es decir un 0.3) por acciones de la empresa A y el 70% (es decir un 0.7) restante por acciones de la empresa B. Denominamos X e Y a las rentabilidades de las acciones de las empresas A y B respectivamente. Sabemos que ambas rentabilidades se distribuyen conjuntamente de manera Normal, que $X \sim N(1/2, 1/4)$, y que $Y \sim N(1, 2)$. Además $\text{Corr}(X, Y) = -1/4$.

- (a) 0.5 pts Calcule $\text{Cov}(X, Y)$ y también la rentabilidad esperada de la cartera de acciones.

Solución: Por una parte:

$$\text{Cov}(X, Y) = \text{Corr}(X, Y) \cdot \text{Dt}(X) \cdot \text{Dt}(Y) = -\frac{1}{4} \cdot \sqrt{1/4} \cdot \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{8} = -0.17678.$$

Por otra, puesto que la rentabilidad de la cartera es $V = 0.3 \cdot X + 0.7 \cdot Y$; entonces:

$E(V) = 0.3 \times 0.5 + 0.7 \times 1 = 0.85$, es decir una rentabilidad del 85%.

Ejercicio 2

- (b) 0.5 pts Calcule la probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea superior a 0.75 (es decir, superior al 75 %).

Solución: Primero calculamos la varianza de V :

$$\begin{aligned}\text{Var}(V) &= \text{Var}(0.3X + 0.7Y) = 0.3^2 \text{Var}(X) + 0.7^2 \text{Var}(Y) + 2 \times 0.3 \times 0.7 \times \text{Cov}(X, Y) \\ &= 1.0025 - 0.0525\sqrt{2} = 0.928\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}P(V \geq 0.75) &= P\left(\frac{V - 0.85}{\sqrt{0.928}} \geq \frac{0.75 - 0.85}{\sqrt{0.928}}\right) \\ &= P(Z \geq -0.10) = P(Z \leq 0.10) = 0.5398\end{aligned}$$

Ejercicio 2

- (c) 0.5 pts Calcular el valor esperado de Y condicionado a que $X = 1/4$.

Solución:

$$\begin{aligned}E_{Y|X}(Y | 1/4) &= E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \cdot 1/4 \\ &= 1 - \frac{1}{2} \frac{-0.17678}{0.25} + \frac{-0.17678}{0.25} \times \frac{1}{4} = 1.1768\end{aligned}$$

es decir, ¡más de un 117 %!

Ejercicio 2

- (d) 1 pt Calcule la probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea superior a 1 (es decir, la probabilidad de doblar el valor (rentabilidad de 100 %)), cuando se sabe que la rentabilidad de la empresa A ha sido de $3/4$.

Solución: Primero necesitamos conocer la distribución de $V | X = 3/4$. Como V y X tienen distribución conjunta Normal; la distribución condicionada es Normal. Así pues, basta con calcular la esperanza y la varianza condicionadas para conocer la distribución completamente.

La covarianza es

$$\text{Cov}(V, X) = \text{Cov}(0.3 \cdot X + 0.7 \cdot Y, X) = 0.3 \cdot \text{Var}(X) + 0.7 \cdot \text{Cov}(Y, X) = -0.0487;$$

y por tanto,

$$\begin{aligned}E_{V|X}(V | 3/4) &= E(V) - E(X) \frac{\text{Cov}(V, X)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(V, X)}{\text{Var}(X)} \cdot \frac{3}{4} \\ &= 0.85 - 0.5 \frac{-0.0487}{0.25} + 0.75 \frac{-0.0487}{0.25} = 0.8013\end{aligned}$$

la varianza condicional es

$$\begin{aligned}\text{Var}_{V|X}(V | 3/4) &= \text{Var}(V) \cdot (1 - \rho_{VX}^2) \\ &= 0.928 \cdot \left(1 - \left[\frac{-0.0487}{\sqrt{0.928 \times 0.25}}\right]^2\right) = 0.91866\end{aligned}$$

Ahora ya podemos contestar

$$P(V \geq 1 | X = 3/4) = P\left(\frac{V - 0.8013}{\sqrt{0.91866}} \geq \frac{1 - 0.8013}{\sqrt{0.91866}} \mid X = 3/4\right) = P(Z \geq 0.207) = 0.42$$

aproximadamente.

Ejercicio 2

Ejercicio 3. En un estudio de mercado dos investigadores analizan la probabilidad “ p ” de que un individuo compre en un determinado establecimiento. Disponen de una muestra con 16 datos, de consumidores de la zona, para contrastar $H_0 : p = 0.5$ frente a $H_1 : p = 0.8$. El primer investigador piensa que debe rechazar H_0 si 9 o más consumidores compran en el establecimiento, mientras que el segundo cree que sólo se debe rechazar H_0 si son 10 o más los compradores.

- (a) 0.5 pt Calcule los niveles de significación de ambos contrastes (Emplee la aproximación Normal que aparece en el “chuletario”)

Solución: Puesto que $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$;

$$\alpha_1 = P_{H_0}(X > 9) = P_{H_0}\left(\frac{X/16 - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{16}}} > \frac{9/16 - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{16}}}\right) = P(Z > 0.5) = 0.3085$$

$$\alpha_2 = P_{H_0}(X > 10) = P_{H_0}\left(\frac{X/16 - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{16}}} > \frac{10/16 - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{16}}}\right) = P(Z > 1) = 0.1587$$

Ejercicio 3

- (b) 0.5 pt Calcule la potencia en ambos contrastes.

Solución:

$$W_1(0.8) = P_{H_1}(X > 9) = P_{H_1}\left(\frac{X/16 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{16}}} > \frac{9/16 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{16}}}\right) = P(Z > -2.375) = 0.9911$$

$$W_2(0.8) = P_{H_1}(X > 10) = P_{H_1}\left(\frac{X/16 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{16}}} > \frac{10/16 - 0.8}{\sqrt{\frac{0.8(1-0.8)}{16}}}\right) = P(Z > -1.75) = 0.9599$$

Ejercicio 3

- (c) 0.5 pt A la luz de los resultados anteriores, discuta si alguno de los contrastes es preferible al otro.

Solución: No son comparables. El primero es más potente, pero tiene un mayor nivel de significación, es decir, una probabilidad mayor de cometer el error tipo I (rechazar H_0 cuando ésta es cierta).

Por el contrario, el segundo contraste es menos potente, pero tiene un nivel de significación mejor (más pequeño).

Ejercicio 3

- (d) 1 pt Calcule para cada contraste cuál es el tamaño de muestra suficiente para garantizar una significación del 5%.

Solución: Buscamos lo siguiente

$$0.05 = \alpha_1 = P_{H_0}(X > 9) = P_{H_0}\left(\frac{X/n - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}} > \frac{9/n - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}}\right)$$

Así pues, $\frac{9/n-1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}} = 1.64$; y despejando n tenemos $n = 12.258$, podemos afirmar que con

una muestra de 12 consumidores, la significación será menor al 5%.

Por otra parte, para el segundo contraste:

$$0.05 = \alpha_2 = P_{H_0}(X > 10) = P_{H_0}\left(\frac{X/n - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}} > \frac{10/n - 1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}}\right)$$

y por lo tanto, $\frac{9/n-1/2}{\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})}{n}}} = 1.64$; despejando n tenemos $n = 13.888$, Puesto que región

crítica esta situada en la cola adecuada, podemos afirmar que con una muestra de 13 consumidores, la significación será menor al 5%.

Ejercicio 3

Preguntas cortas (0.5 puntos por pregunta)

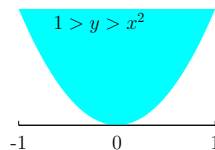
Las siguientes cuestiones deben ser respondidas en el **recuadro** que queda a continuación de cada pregunta.

Ejercicio 4. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta $f_{XY}(x, y)$. La integral sobre su soporte conjunto \mathbb{R}_{XY} es:

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f_{XY}(x, y) dy dx = 1.$$

Dibuje el soporte \mathbb{R}_{XY} .

Solución:



Ejercicio 4

Ejercicio 5. Contraste si la siguiente muestra proviene de una distribución Uniforme (0, 1), empleando el contraste Kolmogorov-Smirnov con tres intervalos de misma amplitud.

0.15 0.77 0.70 0.77 0.24 0.05 0.26 0.94 0.75 0.45

Solución:

z	1/3	2/3	1
$F_z(z)$	1/3	2/3	3/3
$F_n(x)$	4/10	5/10	1
$D_n = \text{Max diff}$	1/15	1/6	0

Puesto que $1/6 = 0.16$ es un n° menor que cualquiera de los que vienen en la tabla para un tamaño muestral de 10 datos, no es posible rechazar la hipótesis de distribución Uniforme (0, 1) con una significación del 20% o menos.

Ejercicio 5

Ejercicio 6. Suponga una muestra de 40 datos con los siguientes estadísticos: media muestral de 1/2, varianza muestral de 3, coeficiente de asimetría de 1/2 y Kurtosis de 2.5. ¿Cual es el p-valor del contraste Jarque-Bera de esta muestra? ¿Qué concluiría a raíz del p-valor obtenido para la muestra?

Solución:

$$n \left[\frac{\widehat{AS}^2}{6} + \frac{(\widehat{K} - 3)^2}{24} \right] = 40 \cdot \left[\frac{0.5^2}{6} + \frac{(2.5 - 3)^2}{24} \right] = 2.08$$

Por tanto, el p-valor es aproximadamente un 0.35.

La conclusión es que se rechazaría la hipótesis de distribución normal de la muestra con niveles de significación superiores al 35%.

Ejercicio 6

Ejercicio 7. Un canal de televisión realiza una encuesta a 5000 menores de 30 años, y la siguiente tabla de contingencia resume la información acerca del gusto por las películas de Van Damme:

	gusta	no gusta
chicos	348	3152
chicas	82	1418

Calcule el valor del estadístico Chi-cuadrado para contrastar la independencia entre el gusto por las películas y el sexo.

Solución:

$$P(\text{ser chica}) = \frac{82 + 1418}{5000} = 0.3 \quad P(\text{ser chico}) = 0.7$$

$$P(\text{gusta}) = \frac{348 + 82}{5000} = \frac{43}{500} \quad P(\text{no gusta}) = \frac{457}{500}$$

Frecuencias teóricas:

	gusta	no gusta
chicos	$0.7 \times \frac{457}{500} \times 5000 = 301$	3199
chicas	129	1371

$$\sum_{i=1}^k \frac{(T_i - O_i)^2}{T_i} = 26.76;$$

que es un valor muy grande para una χ^2 con un grado de libertad, por lo que rechazamos el contraste a casi cualquier nivel de significación. **Ejercicio 7**

Ejercicio 8. El p-valor de un determinado contraste es 0.12. ¿Qué nos dice esta información?

Solución: Que no se rechaza la hipótesis nula planteada en el contraste con niveles de significación de 12% o menos. **Ejercicio 8**

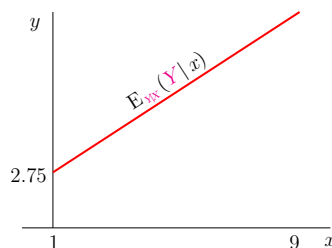
Ejercicio 9. Comente si es cierta o no la siguiente frase: “Que dos variables aleatorias tengan la misma función generatriz de momentos, no implica que tengan la misma función de densidad”.

Solución: La frase es falsa, pues contradice un teorema que afirma justamente lo contrario para variables aleatorias con funciones generatrices de momentos definidas “Si dos variables aleatorias tienen idéntica distribución, tienen idénticas funciones generatrices de momentos, y viceversa.” **Ejercicio 9**

Ejercicio 10. Disponemos de una muestra de datos relativa a la renta X , y el consumo Y de 128 familias; con los siguientes estadísticos: $\bar{y} = 5$, $\bar{x} = 4$, $s_{xy} = 3$ y $s_x^2 = 4$. Se ha estimado el siguiente modelo lineal simple $Y = \alpha + \beta X + U$ obteniendo los siguientes resultados: $\hat{\beta} = 0.75$ y $\hat{\alpha} = 2$.

Dibuje e interprete la recta de regresión suponiendo que el soporte de X es, $\mathbb{R}_x = [1, 9]$.

Solución:



Para familias con una renta $x = 1$ su consumo esperado es $E_{yx}(Y|1) = 2.75$; y cada unidad adicional de renta supone un incremento del consumo de 0.75 unidades. **Ejercicio 10**

Ejercicio 11. Empleando los datos del ejercicio anterior, contraste si la propensión marginal a consumir es de 1/2 (frente a que se consuma más de la mitad de la renta) si la cuasi-varianza

residual del modelo estimado es 8. Realice el contraste con un 2.5% de significación.

Solución: $H_0 : b = 1/2$; $H_1 : b > 1/2$. La región crítica de una sola cola es

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{\hat{\beta} - 1/2}{\sqrt{\hat{s}_e^2 / T s_x^2}} > k \right\}, \text{ por tanto el estadístico vale } \frac{3/4 - 1/2}{\sqrt{\frac{8}{128 \times 4}}} = 2$$

y donde k es el valor de la tabla para una t de Student de 126 grados de libertad. Puesto que el número de grados de libertad es elevado, podemos emplear la tabla de la distribución $N(0, 1)$. Así, k es 1.96, por lo que rechazamos H_0 .

Ejercicio 11

Ejercicio 12. Sea la siguiente función de cuantía

$P_{XY}(x, y)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	1/9	3/9	2/9
$x = 1$	1/18	1/6	1/9

Obtenga la función generatriz de momentos conjunta.

Solución: Puesto que $M_{X,Y}(t, \tau) = E(e^{tX + \tau Y})$; entonces

$$\begin{aligned} M_{X,Y}(t, \tau) &= E(e^{tX + \tau Y}) = \sum_{x_i \in \mathbb{R}_X} \sum_{y_j \in \mathbb{R}_Y} e^{tx_i + \tau y_j} P_{XY}(x_i, y_j) \\ &= 1/9e^{0t+0\tau} + 3/9e^{\tau} + 2/9e^{2\tau} + 1/18e^t + 1/6e^{t+\tau} + 1/9e^{t+2\tau} \end{aligned}$$

Ejercicio 12

Ejercicio 13. Utilizando exclusivamente la función generatriz de momentos calculada en el ejercicio anterior obtenga la esperanza de X .

Solución: La función generatriz de momentos marginal es la conjunta evaluada en $\tau = 0$, por tanto

$$M_X(t) = 2/3 + 1/18e^t + 1/6e^t + 1/9e^t = 2/3 + 1/3e^t$$

derivando respecto de t y evaluando en $t = 0$

$$E(X) = \left. \frac{d(2/3 + 1/3e^t)}{dt} \right|_{t=0} = 1/3e^0 = 1/3.$$

Ejercicio 13

Formulas de posible utilidad

Transformación de variables Sea $f_X(x)$ en el soporte $\mathbb{R}_X = (a, b)$. Sea $Y = h(X)$, entonces $f_Y(y) = \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| \cdot f_X(h^{-1}(y))$; en el soporte $\mathbb{R}_Y = (h(a), h(b))$; donde $h^{-1}(\cdot)$ es la función inversa de $h(\cdot)$, es decir $h^{-1}(h(x)) = x$.

Función generatriz de momentos conjunta del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ evaluada en el vector $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$: $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = E(e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n})$

Aproximación lineal a la esperanza condicional

$$E(Y|X = x) \approx g^*(x) = E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \cdot x; \quad \forall x \in \mathbb{R}_X.$$

Varianza condicional de la normal bivalente: $\text{Var}_{Y|X}(Y|x) = \sigma_Y^2 - \frac{(\sigma_{XY})^2}{\sigma_X^2} = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$,

Modelo de regresión lineal Sea el modelo $Y_t = a + bX_t + U_t$, donde $(\mathbf{U}|\mathbf{X}) \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$; y $t = 1, 2, \dots, T$. Sean \hat{a} y \hat{b} los estimadores MCO de a y b . Entonces

$$\hat{a} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2 \sum x_t^2}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}\right); \quad \hat{b} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right).$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias si $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ con muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} &\sim N(0, 1); & \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} &\sim N(0, 1) \\ \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\mathbf{s}^2/n}} &\sim t_{n-1}; & \frac{(n-1)\mathbf{s}^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{n-1}^2; & \frac{\mathbf{s}_1^2/\sigma_1^2}{\mathbf{s}_2^2/\sigma_2^2} &\sim F_{n_1-1, n_2-1} \\ & & \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{(n_1-1)\mathbf{s}_1^2 + (n_2-1)\mathbf{s}_2^2}{n_1+n_2-2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} &\sim t_{n_1+n_2-2}, & \text{si } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \end{aligned}$$

donde \mathbf{s}^2 denota la *cuasivarianza* muestral $\left(\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}\right)$.

Proporciones $\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$. Con muestras de tamaños n y m :

$$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{(n+m)\hat{p}_T(1-\hat{p}_T)}{n \cdot m}}} \stackrel{a}{H_0} \sim N(0, 1); \quad \text{donde } \hat{p}_T = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m}; \quad H_0: p_1 = p_2$$

Contraste de Jarque-Bera $JB = n \left[\frac{AS^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right] \sim \chi_{(2)}^2$

Contrste Chi cuadrado $\sum_{i=1}^k \frac{(T_i - O_i)^2}{T_i} \stackrel{a}{\sim} \chi^2$, donde T_i y O_i son, respectivamente las i -ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Kolmogorov-Smirnov para una sola muestra: $D_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$, donde $F_n(x)$ es la función de distribución empírica (o muestral), y $F(x)$ es la función de distribución de H_0 .

Tamaño muestral	nivel de significación				
	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
8	0.3583	0.4096	0.4543	0.5065	0.5418
9	0.3391	0.3875	0.4300	0.4796	0.5133
10	0.3226	0.3687	0.4092	0.4566	0.4889
> 40	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

Kolmogorov-Smirnov para dos muestras: $D_n = \sup |F_1(x) - F_2(x)|$. Cuando n_1 y n_2 son grandes; y donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales)

$$\text{Nivel crítico: } D_{\alpha, n_1, n_2} \approx k \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}},$$

donde $k = 1.07; 1.22; 1.52$; para α igual a 10 %, 5 % y 1 % respectivamente.

ν	Probabilidad acumulada desde 0 hasta x para $X \sim \chi_\nu^2$ con ν grados de libertad										
	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515

z	Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta z para $Z \sim N(0, 1)$									
	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990