

Examen final de Introducción a la Econometría

16 de septiembre de 2006, a las 9:00 horas
Duración: 2 HORAS y 15 minutos

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Profesor/a:	Grupo:	

No desgrape estas hojas

Problemas (2.5 puntos por pregunta)

Los siguientes problemas deben ser realizados en un **ÚNICO** cuadernillo aparte

(*escriba sus datos personales, grupo y profesor en dicho cuadernillo*¹)

Elija **SÓLO** dos (2) de los tres (3) problemas propuestos.

Ejercicio 1. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} kxy & 0 < x < 1; 0 < y < 2 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

- (a) Calcule el valor de k , $f_X(x)$ y $f_Y(y)$
- (b) Calcule $\text{Var}(Y)$
- (c) Calcule $E(9(X-1)Y^2)$
- (d) Calcule $E_{Y|X}(Y|x)$, y verifique para este caso el “Teorema de las esperanzas iteradas”, es decir, que la esperanza de la esperanza condicional, $E_X(E(Y|X))$, es igual a $E(Y)$.
- (e) Calcule las siguientes tres probabilidades: $P(Y > X)$, $P(Y > X | X = 0.5)$, y $P(Y > X | X > 0.5)$,

Ejercicio 2. Se desea analizar la rentabilidad de una cartera de acciones compuesta en un 30% (es decir un 0.3) por acciones de la empresa A y el 70% (es decir un 0.7) restante por acciones de la empresa B. Denominamos X e Y a las rentabilidades de las acciones de las empresas A y B respectivamente. Sabemos que ambas rentabilidades se distribuyen conjuntamente de manera Normal, que $X \sim N(1/2, 1/4)$, y que $Y \sim N(1, 2)$. Además $\text{Corr}(X, Y) = -1/4$.

- (a) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$ y también la rentabilidad esperada de la cartera de acciones.
- (b) Calcule la probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea superior a 0.75 (es decir, superior al 75%).
- (c) Calcular el valor esperado de Y condicionado a que $X = 1/4$.
- (d) Calcule la probabilidad de que la rentabilidad de la cartera sea superior a 1 (es decir, la probabilidad de doblar el valor (rentabilidad de 100%), cuando se sabe que la rentabilidad de la empresa A ha sido de $3/4$.

¹Al finalizar entregue estas paginas dentro de dicho cuadernillo

Ejercicio 3. En un estudio de mercado dos investigadores analizan la probabilidad “ p ” de que un individuo compre en un determinado establecimiento. Disponen de una muestra con 16 datos, de consumidores de la zona, para contrastar $H_0 : p = 0.5$ frente a $H_1 : p = 0.8$. El primer investigador piensa que debe rechazar H_0 si 9 o más consumidores compran en el establecimiento, mientras que el segundo cree que sólo se debe rechazar H_0 si son 10 o más los compradores.

- (a) Calcule los niveles de significación de ambos contrastes (Emplee la aproximación Normal que aparece en el “chuletario”)
- (b) Calcule la potencia en ambos contrastes.
- (c) A la luz de los resultados anteriores, discuta si alguno de los contrastes es preferible al otro.
- (d) Calcule para cada contraste cuál es el tamaño de muestra suficiente para garantizar una significación del 5%.

Preguntas cortas (0.5 puntos por pregunta)

Las siguientes cuestiones deben ser respondidas en el **recuadro** que queda a continuación de cada pregunta.

Ejercicio 4. Sean X e Y variables aleatorias con distribución conjunta $f_{XY}(x, y)$. La integral sobre su soporte conjunto \mathbb{R}_{XY} es:

$$\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f_{XY}(x, y) dy dx.$$

Dibuje el soporte \mathbb{R}_{XY} .

Ejercicio 5. Contraste si la siguiente muestra proviene de una distribución Uniforme $(0, 1)$, empleando el contraste Kolmogorov-Smirnov con tres intervalos de misma amplitud.

0.15 0.77 0.70 0.77 0.24 0.05 0.26 0.94 0.75 0.45

Ejercicio 6. Suponga una muestra de 40 datos con los siguientes estadísticos: media muestral de $1/2$, varianza muestral de 3, coeficiente de asimetría de $1/2$ y Kurtosis de 2,5. ¿Cual es el p-valor del contraste Jarque-Bera de esta muestra? ¿Qué concluiría a raíz del p-valor obtenido para la muestra?

Ejercicio 7. Un canal de televisión realiza una encuesta a 5000 menores de 30 años, y la siguiente tabla de contingencia resume la información acerca del gusto por las películas de Van Damme:

	gusta	no gusta
chicos	348	3152
chicas	82	1418

Calcule el valor del estadístico Chi-cuadrado para contrastar la independencia entre el gusto por las películas y el sexo.

Ejercicio 8. El p-valor de un determinado contraste es 0.12. ¿Qué nos dice esta información?

Ejercicio 9. Comente si es cierta o no la siguiente frase: “*Que dos variables aleatorias tengan la misma función generatriz de momentos, no implica que tengan la misma función de densidad*”.

Ejercicio 10. Disponemos de una muestra de datos relativa a la renta X , y el consumo Y de 128 familias; con los siguientes estadísticos: $\bar{y} = 5$, $\bar{x} = 4$, $s_{xy} = 3$ y $s_x^2 = 4$. Se ha estimado el siguiente modelo lineal simple $Y = \alpha + \beta X + U$ obteniendo los siguientes resultados: $\hat{\beta} = 0.75$ y $\hat{\alpha} = 2$.

Dibuje e interprete la recta de regresión suponiendo que el soporte de X es, $\mathbb{R}_x = [1, 9]$.

Ejercicio 11. Empleando los datos del ejercicio anterior, contraste si la propensión marginal a consumir es de $1/2$ (frente a que se consuma más de la mitad de la renta) si la cuasi-varianza

residual del modelo estimado es 8. Realice el contraste con un 2.5% de significación.

Ejercicio 12. Sea la siguiente función de cuantía

$P_{xy}(x, y)$	$y = 0$	$y = 1$	$y = 2$
$x = 0$	$1/9$	$3/9$	$2/9$
$x = 1$	$1/18$	$1/6$	$1/9$

Obtenga la función generatriz de momentos conjunta.

Ejercicio 13. Utilizando exclusivamente la función generatriz de momentos calculada en el ejercicio anterior obtenga la esperanza de X .

Formulas de posible utilidad

Transformación de variables Sea $f_X(x)$ en el soporte $\mathbb{R}_X = (a, b)$. Sea $Y = h(X)$, entonces $f_Y(y) = \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| \cdot f_X(h^{-1}(y))$; en el soporte $\mathbb{R}_Y = (h(a), h(b))$; donde $h^{-1}(\cdot)$ es la función inversa de $h(\cdot)$, es decir $h^{-1}(h(x)) = x$.

Función generatriz de momentos conjunta del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ evaluada en el vector $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$: $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = E(e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n})$

Aproximación lineal a la esperanza condicional

$$E(Y|X = x) \approx g^*(x) = E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \cdot x; \quad \forall x \in \mathbb{R}_X.$$

Varianza condicional de la normal bivalente: $\text{Var}_{Y|X}(Y|x) = \sigma_Y^2 - \frac{(\sigma_{XY})^2}{\sigma_X^2} = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$,

Modelo de regresión lineal Sea el modelo $Y_t = a + bX_t + U_t$, donde $(\mathbf{U}|\mathbf{X}) \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$; y $t = 1, 2, \dots, T$. Sean \hat{a} y \hat{b} los estimadores MCO de a y b . Entonces

$$\hat{a} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2 \sum x_t^2}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}\right); \quad \hat{b} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right).$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias si $\mathbf{X} \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ con muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} &\sim N(0, 1); & \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} &\sim N(0, 1) \\ \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\mathbf{s}^2/n}} &\sim t_{n-1}; & \frac{(n-1)\mathbf{s}^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{n-1}^2; & \frac{\mathbf{s}_1^2/\sigma_1^2}{\mathbf{s}_2^2/\sigma_2^2} &\sim F_{n_1-1, n_2-1} \\ & & \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{(n_1-1)\mathbf{s}_1^2 + (n_2-1)\mathbf{s}_2^2}{n_1+n_2-2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} &\sim t_{n_1+n_2-2}, & \text{si } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \end{aligned}$$

donde \mathbf{s}^2 denota la *cuasivarianza* muestral $\left(\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n-1}\right)$.

Proporciones $\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$. Con muestras de tamaños n y m :

$$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{(n+m)\hat{p}_T(1-\hat{p}_T)}{n \cdot m}}} \stackrel{a}{H_0} \sim N(0, 1); \quad \text{donde } \hat{p}_T = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m}; \quad H_0: p_1 = p_2$$

Contraste de Jarque-Bera $JB = n \left[\frac{AS^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right] \sim \chi_{(2)}^2$

Contrste Chi cuadrado $\sum_{i=1}^k \frac{(T_i - O_i)^2}{T_i} \stackrel{a}{\sim} \chi^2$, donde T_i y O_i son, respectivamente las i -ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Kolmogorov-Smirnov para una sola muestra: $D_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$, donde $F_n(x)$ es la función de distribución empírica (o muestral), y $F(x)$ es la función de distribución de H_0 .

Tamaño muestral	nivel de significación				
	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
8	0.3583	0.4096	0.4543	0.5065	0.5418
9	0.3391	0.3875	0.4300	0.4796	0.5133
10	0.3226	0.3687	0.4092	0.4566	0.4889
> 40	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

Kolmogorov-Smirnov para dos muestras: $D_n = \sup |F_1(x) - F_2(x)|$. Cuando n_1 y n_2 son grandes; y donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales)

$$\text{Nivel crítico: } D_{\alpha, n_1, n_2} \approx k \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}},$$

donde $k = 1.07; 1.22; 1.52$; para α igual a 10 %, 5 % y 1 % respectivamente.

ν	Probabilidad acumulada desde 0 hasta x para $X \sim \chi_\nu^2$ con ν grados de libertad										
	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515

z	Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta z para $Z \sim N(0, 1)$									
	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990