Dpto. de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid

Examen final de Introducción a la Econometría

26 de junio de 2006, a las 12:00 horas
Duración: 2 HORAS y 15 minutos

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Profesor/a:		Grupo:

No desgrape estas hojas

Problemas (2.5 puntos por pregunta)

Los siguientes problemas deben ser realizados en un **ÚNICO** cuadernillo aparte

(*escriba sus datos personales, grupo y profesor en dicho cuadernillo*[1])

Elija **SÓLO** dos (2) de los tres (3) problemas propuestos.

Ejercicio 1. Sean X e Y variables aleatorias **independientes** con función generatriz de momentos $(1-t^2)^{-1}$ (distribución de Laplace) y con **esperanza nula**.

(a) Sea $U = X + Y$. Demuestre que la función generatriz de momentos de U es $(1 - t^2)^{-2}$.

(b) Sea $V = X - Y$. Demuestre que U y V tienen idéntica distribución.

(c) Calcule la función generatriz de momentos conjunta de U y V

(d) Demuestre que U y V no son independientes

(e) No obstante, demuestre que U y V están incorreladas (**pista:** recuerde que $\operatorname{E}(X) = \operatorname{E}(Y) = 0$, y que $\operatorname{E}\left(X^2\right) = \operatorname{E}\left(Y^2\right)$ puesto que ambas variables tienen idéntica distribución.)

Ejercicio 2. Se cree que las terrazas y chiringuitos de verano tienen unos ingresos fijos "a", más unos ingresos que dependen de los metros cuadrados que ocupan (además de otras circunstancias independientes de su superficie, como son su situación, la proximidad a otros locales, la calidad del servicio, etc.)

La variable Y hace referencia a los ingresos de toda la temporada de verano en **miles de euros**. La variable X son los metros cuadrados ocupados por un establecimiento.

Establecimiento	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2	$\widehat{y}_i$	$\widehat{e}_i$	$x_i\widehat{e}_i$	$\widehat{e}_i^{\,2}$
A	27	5	135	25	28	-1	-5	1
B	23	3	69	9	18	5	15	25
C	35	6	210	36	33	2	12	4
D	9	2	18	4	13	-4	-8	16
E	36	7	252	49	38	-2	-14	4
sumas	130	23	684	123	130	0	0	50

Cuadro 1:

Además se sabe que las varianzas y covarianzas muestrales son:

$$T \cdot s_x^2 = 17.2, \quad T \cdot s_y^2 = 480, \quad T \cdot s_{xy} = 86,$$

donde T es el tamaño muestral.

Suponga que plantea el siguiente modelo

$$Y_i = a + bx_i + U_i,$$

donde U_i son los otros factores que afectan a los ingresos distintos de la superficie ocupada. Se sabe que la distribución conjunta de dichos factores es: $\boldsymbol{U} \sim N(\mathbf{0},\ \sigma^2\,\mathbf{I})$, donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de orden 5, y σ^2 es la varianza de U_i, cuyo valor es desconocido.

(a) Estime por MCO los parámetros del modelo. ¿Cual es el valor esperado del ingreso fijo de un establecimiento? ¿En cuanto aumenta el ingreso esperado de un local si hace crecer su terraza en un metro cuadrado?

(b) Estime por MCO la pendiente del modelo, pero dando un intervalo de confianza del 95 %.

[1] Al finalizar entregue estas paginas dentro de dicho cuadernillo

(c) Un empresario hostelero dice que el rendimiento de un metro adicional de establecimiento rinde una cantidad de (al menos) seis mil euros (pero nunca menos). Contraste dicha hipótesis con una significación del 10 %. Bajo la hipótesis del empresario ¿cuál es el p-valor de la estimación del parámetro b?

(d) ¿Qué establecimiento ha ingresado más respecto al nivel esperado, dada su superficie? ¿y cual menos?

(e) Dado el modelo estimado, ¿cuál es el ingreso esperado para un establecimiento con una superficie de 4 metros cuadrados?

Ejercicio 3. Suponga que las variables aleatorias X e Y tienen distribución conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} ky^2 & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{en el resto de casos} \end{cases}$$

(a) Dibuje el soporte y calcule el valor de k

(b) Calcule $\text{Var}(Y)$

(c) Calcule $\text{E}_{X|Y}(X \mid y)$

(d) Empleando el Tª de las esperanzas iteradas, calcule $\text{E}(X)$; es decir, emplee la propiedad de que *la esperanza de la esperanza condicional es la esperanza incondicional*

(e) Derive la expresión general $\text{E}(X^r Y^s)$ (donde r y s son números enteros positivos).

(f) Empleando la expresión obtenida en el apartado anterior calcule $\text{Corr}(X,Y)$ (tendrá que sustituir r y s por los números enteros que necesite para cada momento calculado, por ejemplo $\text{E}(XY) = \text{E}\left(X^1Y^1\right)$, es decir $r = 1$ y $s = 1$).

(g) Calcule $P(2X > Y \mid Y < 1/2)$

Preguntas cortas **(0.5 puntos por pregunta)**

Las siguientes cuestiones deben ser respondidas en el **recuadro** que queda a continuación de cada pregunta.

Ejercicio 4. Se pretende contrastar si la excelencia de los alumnos se mantiene entre dos cursos consecutivos (curso 2005 y curso 2006). Para ello se dividen las calificaciones de 1200 alumnos en las siguientes categorías: "1: suspenso", "2: aprobado", "3: aprobado con nota". La información muestral se resume del siguiente modo:

	(1) suspensos	(2) aprobados	(3) con nota
2005	240	190	70
2006	310	270	120

a) Calcule la tabla de frecuencias absolutas esperadas bajo H_0. b) Para esta muestra, el estadístico Chi cuadrado arroja un valor aproximado de 2.7 ¿Cuanto vale el p-valor? (emplee el valor más próximo de los que aparecen en las tablas). c) Lleve a cabo el contraste Chi cuadrado para niveles de significación del 5 % y del 10 %.

Ejercicio 5. Calcule el valor del contraste de homogeneidad de Kolmogorov-Smirnov para dos muestras con los datos del ejercicio anterior.

Ejercicio 6. Un canal de televisión realiza una encuesta a 5000 menores de 30 años, y la siguiente tabla de contingencia resume la información acerca del gusto por las películas de Van Damme:

	gusta	no gusta
chicos	348	3152
chicas	82	1418

Calcule la tabla de frecuencias absolutas teórica (o esperada) y el p-valor del estadístico Chi-cuadrado para contrastar la independencia entre el gusto por las películas y el sexo (sabiendo que para esta muestra el estadístico arroja un valor de 26.76). ¿Para qué niveles de de significación rechazaría H_0?

Ejercicio 7. Considere una variable aleatoria discreta X, de la que desconoce su ley de probabilidad. Usted tiene dos hipótesis posibles para la posible función de cuantía de X:

X	1	2	3	4	5	6
Bajo H_0 $P_X(x)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6
Bajo H_1 $P_X(x)$	2/15	1/6	1/5	1/5	1/6	2/15

Para contrastar H_0, decide realizar el siguiente contraste empleando una muestra de tamaño uno:

Rechazar H_0 si se observan los valores 4 o 5 (y no rechazar si se observa cualquier otro valor)

Halle el nivel de significación (probabilidad de cometer el error tipo I) y la probabilidad de cometer el error tipo II.

Ejercicio 8. La variable aleatoria X tiene la siguiente función de densidad: $f_X(x) = 2x/a^2$ definida en el intervalo $[0, a]$, con $a > 0$. Queremos contrastar H_0: $a = 1$ frente a H_1: $a > 1$. Se dispone de una muestra aleatoria simple de tamaño 1 y de dos tests que vienen caracterizados por las siguientes regiones críticas:

Test 1: $RC_1 = \{\mathbf{x} | x > 0.987\}$

Test 2: $RC_2 = \{\mathbf{x} | x < 0.158\}$.

Calcule el nivel de significación de ambos contrastes.

Ejercicio 9. Dibuje en un mismo gráfico las funciones potencia de los contrastes de hipótesis de la pregunta anterior.

Ejercicio 10. Sea X una variable aleatoria que sigue una distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Se desea contrastar H_0: $\sigma^2 = 100$ frente a H_1: $\sigma^2 < 100$ empleando el contraste uniformemente más potente. Se tiene una muestra de tamaño 31 con una cuasi-varianza $\mathfrak{s}^2 = 75$. Resuelva el contraste con una significación del 5 % y del 1 %.

Ejercicio 11. Sean X e Y los volúmenes de venta de dos bienes producidos por una empresa, con distribución normal bivariante con vector de medias $\begin{pmatrix}10 & 15\end{pmatrix}'$ y matriz de varianzas covarianzas $\left(\begin{smallmatrix}9 & 2\\ 2 & 9\end{smallmatrix}\right)$. ¿Calcule la probabilidad de que el volumen de ventas del primer producto supere el volumen de ventas del segundo?

Ejercicio 12. Con los datos del ejercicio anterior, ¿Cual es el la mejor predicción que puede hacer de las ventas de Y si sabe que las ventas del otro producto han sido X=12?

Ejercicio 13. Sea la siguiente función de cuantía conjunta para X e Y

$P_{XY}(x,y)$	y=0	y=1	y=2
x=0	0.33	0.12	0.05
x=1	0	0.25	0.25

Calcule $\mathrm{E}_{X|Y}(X \mid 2)$.

Formulas de posible utilidad

Transformación de variables Sea $f_X(x)$ en el soporte $\mathbb{R}_X = (a, b)$. Sea $Y = h(X)$, entonces $f_Y(y) = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| \cdot f_X\left(h^{-1}(y)\right)$; en el soporte $\mathbb{R}_Y = (h(a),\ h(b))$; donde $h^{-1}(\cdot)$ es la *función inversa* de $h(\cdot)$, es decir $h^{-1}(h(x)) = x$.

Función generatriz de momentos conjunta del vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ evaluada en el vector $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$: $M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{E}\left(e^{t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n}\right)$

Aproximación lineal a la esperanza condicional

$$\mathrm{E}(Y|X = x) \approx g^*(x) = \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)} + \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)} \cdot x; \qquad \forall x \in \mathbb{R}_X.$$

Varianza condicional de la normal bivariante: $\mathrm{Var}_{Y|X}(Y \mid x) = \sigma_Y^2 - \frac{(\sigma_{XY})^2}{\sigma_X^2} = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$,

Modelo de regresión lineal Sea el modelo $Y_t = a + bX_t + U_t$, donde $(\mathbf{U}|\,\mathbf{X}) \sim N\left(\mathbf{0}\,,\,\sigma^2\,\mathbf{I}\right)$; y $t = 1,\ 2, \ldots, T$. Sean $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ los estimadores MCO de a y b. Entonces

$$\widehat{a} \sim N\left(a\,,\,\frac{\sigma^2 \sum x_t^2}{T\sum(x_t - \overline{x})^2}\right); \qquad \widehat{b} \sim N\left(b\,,\,\frac{\sigma^2}{\sum(x_t - \overline{x})^2}\right).$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias si $X \sim N\left(\mu\,,\,\sigma^2\right)$, $X_1 \sim N\left(\mu_1\,,\,\sigma_1^2\right)$ y $X_2 \sim N\left(\mu_2\,,\,\sigma_2^2\right)$ con muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N\left(0\,,\,1\right); \qquad \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N\left(0\,,\,1\right)$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\mathfrak{s}^2/n}} \sim t_{n-1}; \qquad \frac{(n-1)\mathfrak{s}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}; \qquad \frac{\mathfrak{s}_1^2/\sigma_1^2}{\mathfrak{s}_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{(n_1-1)\mathfrak{s}_1^2 + (n_2-1)\mathfrak{s}_2^2}{n_1+n_2-2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}, \text{ si } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

donde $\mathfrak{s}^2$ denota la *cuasivarianza* muestral $\left(\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}\right)$.

Proporciones $\frac{\widehat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{a}{\sim} N\left(0\,,\,1\right)$. Con muestras de tamaños n y m:

$$\frac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{(n+m)\widehat{p_T}(1-\widehat{p_T})}{n\cdot m}}} \underset{H_0}{\overset{a}{\sim}} N\left(0\,,\,1\right); \quad \text{donde } \widehat{p_T} = \frac{n\widehat{p_1} + m\widehat{p_2}}{n+m}; \ H_0:\ p_1 = p_2$$

Contraste de Jarque-Bera $JB = n\left[\frac{AS^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right] \sim \chi^2_{(2)}$

Contrste Chi cuadrado $\sum_{i=1}^k \frac{(T_i - O_i)^2}{T_i} \overset{a}{\sim} \chi^2$, donde T_i y O_i son, respectivamente las i-ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Kolmogorov-Smirnov para una sola muestra: $D_n = \sup\left|F_n(x) - F(x)\right|$, donde $F_n(x)$ es la función de distribución empírica (o muestral), y $F(x)$ es la función de distribución de H_0.

	nivel de significación				
Tamaño muestral	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
8	0.3583	0.4096	0.4543	0.5065	0.5418
9	0.3391	0.3875	0.4300	0.4796	0.5133
10	0.3226	0.3687	0.4092	0.4566	0.4889
> 40	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

Kolmogorov-Smirnov para dos muestras: $D_n = \sup\left|F_1(x) - F_2(x)\right|$. Cuando n_1 y n_2 son grandes; y donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales)

$$\text{Nivel crítico: } D_{\alpha,n_1,n_2} \approx k\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}},$$

donde $k = 1.07;\ 1.22;\ 1.52$; para α igual a 10 %, 5 % y 1 % respectivamente.

	Probabilidad acumulada desde 0 hasta x para $X \sim \chi^2_\nu$ con ν grados de libertad										
ν	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515

ν	Probabilidad acumulada desde 0 hasta x para $X \sim \chi^2_\nu$ con ν grados de libertad										
	0.1 %	0.5 %	1.0 %	2.5 %	5.0 %	10.0 %	12.5 %	20.0 %	25.0 %	33.3 %	50.0 %
25	8.649	10.520	11.524	13.120	14.611	16.473	17.184	18.940	19.939	21.461	24.337
26	9.222	11.160	12.198	13.844	15.379	17.292	18.021	19.820	20.843	22.399	25.336
27	9.803	11.808	12.879	14.573	16.151	18.114	18.861	20.703	21.749	23.339	26.336
28	10.391	12.461	13.565	15.308	16.928	18.939	19.704	21.588	22.657	24.280	27.336
29	10.986	13.121	14.256	16.047	17.708	19.768	20.550	22.475	23.567	25.222	28.336
30	11.588	13.787	14.953	16.791	18.493	20.599	21.399	23.364	24.478	26.165	29.336
35	14.688	17.192	18.509	20.569	22.465	24.797	25.678	27.836	29.054	30.894	34.336
40	17.916	20.707	22.164	24.433	26.509	29.051	30.008	32.345	33.660	35.643	39.335

ν	Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta x para t de STUDENT con ν grados de libertad										
	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
25	0.256	0.436	0.684	0.856	1.178	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.450
26	0.256	0.436	0.684	0.856	1.177	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435
27	0.256	0.435	0.684	0.855	1.176	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421
28	0.256	0.435	0.683	0.855	1.175	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408
29	0.256	0.435	0.683	0.854	1.174	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396
30	0.256	0.435	0.683	0.854	1.173	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.385
35	0.255	0.434	0.682	0.852	1.170	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	3.340

	Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta z para $Z \sim N(0\,,\,1)$									
z	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	**0.5000**	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	**0.5987**	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	**0.6985**	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	**0.7486**	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	**0.7995**	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	**0.8508**	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	**0.8997**	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	**0.9495**	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	**0.9750**	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	**0.9898**	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990