

## Examen de Introducción a la Econometría

11 de junio de 2004, 12:00h.  
Duración: 2 HORAS y 30 MINUTOS

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Profesor/a:	Grupo:	

No desgrape las hojas de este cuadernillo

### Problemas largos (2 puntos por problema)

Los siguientes problemas deben ser realizados en un **ÚNICO** cuadernillo a parte  
(*escriba sus datos personales, grupo y profesor en dicho cuadernillo*<sup>1</sup>)

Elija **SÓLO** dos (2) de los tres (3) problemas propuestos.

**Ejercicio 1.** Sean los siguientes datos:

Familia	$y_i$	$x_i$	$x_i y_i$	$x_i^2$	$\hat{y}_i$	$\hat{e}_i$	$x_i \hat{e}_i$	$\hat{e}_i^2$
A	2	4	8	4	1.74	0.26	1.04	0.07
B	3	7	21	9	3.44	-0.44	-3.08	0.19
C	1	3	3	1	1.18	-0.18	-0.54	0.03
D	5	9	45	25	4.56	0.44	3.96	0.19
E	9	17	153	81	9.08	-0.08	-1.36	0.01
sumas	20	40	230	120	20	0	0	0.48

Cuadro 1:

donde  $Y$  es el gasto semanal de las familias, y  $X$  es su ingreso semanal.

Además se sabe que las varianzas y covarianzas muestrales son:

$$T \cdot s_y^2 = 124, \quad T \cdot s_x^2 = 40, \quad T \cdot s_{xy} = 70,$$

donde  $T$  es el tamaño muestral.

Suponga que plantea el siguiente modelo

$$Y_i = a + bx_i + U_i,$$

donde  $U_i$  son otros factores que afectan al consumo familiar distintos de sus ingresos. Se sabe que la distribución conjunta de dichos factores es:

$$U \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}),$$

donde  $\mathbf{I}$  es una matriz identidad de orden 5, y  $\sigma^2$  es la varianza de  $U_i$ , cuyo valor es desconocido.

(a) Estime por MCO los parámetros del modelo.

*Solución:*

<sup>1</sup>Al finalizar entregue estas paginas dentro de dicho cuadernillo

1. Por una parte:

$$\hat{b} = \frac{\widehat{\sigma_{XY}}}{\widehat{\sigma_X^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{70}{124} = 0.56$$

por otra, las medias muestrales son

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{5} = \frac{20}{5} = 4; \quad \bar{y} = \frac{\sum y_i}{5} = \frac{40}{5} = 8;$$

por lo que

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = 4 - 0.56 \cdot 8 = -0.516.$$

Fin **ejercicio 1**

(b) Estime por MCO los parámetros del modelo pero dando un intervalo de confianza del 95 %.

*Solución:* El estimador MCO se distribuye Normal con esperanza igual al verdadero valor de los parámetros estimados, y varianza desconocida.

▪ (**Parámetro a**) Buscamos los valores  $A$  y  $B$  tales que

$$P \left( A \leq \frac{(\hat{a}-a)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2 \sum x_i^2}{T \sum (x_i - \bar{x})^2}}} \leq B \right) = (1 - \alpha)$$

Donde  $\frac{(\hat{a}-a)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2 \sum x_i^2}{T \sum (x_i - \bar{x})^2}}}$  se distribuye como una  $t$  de Student con  $T-2$  grados de libertad, y  $\hat{s}^2$  es

el estimador de la cuasi-varianza muestral. Por tanto  $A$  y  $B$  son los valores que aparecen en las tablas, y que determinan un intervalo centrado en cero con una probabilidad asociada del 95 %; es decir,  $A = -3.182$ , y  $B = 3.182$ , y  $\hat{s}^2 = 0.48/(T - 2) = 0.16$ . Así pues,

$$\begin{aligned} P \left( -3.182 \leq \frac{(-0.52-a)}{\sqrt{\frac{0.16 \cdot 120}{5 \cdot 124}}} \leq 3.182 \right) &= 0.95 \\ P \left( -3.182 \cdot \sqrt{0.03} \leq (-0.52 - a) \leq 3.182 \cdot \sqrt{0.03} \right) &= 0.95 \\ P \left( -0.52 + 3.182 \cdot \sqrt{0.03} \geq a \geq -0.52 - 3.182 \cdot \sqrt{0.03} \right) &= 0.95, \end{aligned}$$

es decir,

$$a \in [-1.078, 0.046]$$

con probabilidad 0.95

▪ (**Parámetro b**) Del mismo modo, buscamos los valores  $A$  y  $B$  tales que

$$P \left( A \leq \frac{(\hat{b}-b)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}} \leq B \right) = (1 - \alpha)$$

Donde  $\frac{(\hat{b}-b)}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}}}$  se distribuye como una  $t$  de Student con  $T-2$  grados de libertad; por tanto

$$\begin{aligned} P \left( -3.182 \leq \frac{(0.56-b)}{\sqrt{\frac{0.16}{124}}} \leq 3.182 \right) &= 0.95 \\ P \left( -3.182 \cdot \sqrt{0.0013} \leq (0.56 - b) \leq 3.182 \cdot \sqrt{0.0013} \right) &= 0.95 \\ P \left( 0.56 + 3.182 \cdot \sqrt{0.0013} \geq b \geq 0.56 - 3.182 \cdot \sqrt{0.0013} \right) &= 0.95, \end{aligned}$$

es decir,

$$b \in [0.449, 0.679]$$

con probabilidad 0.95

Fin **ejercicio 1**

- (c) Contraste la hipótesis de que “la propensión marginal es igual a uno” frente a “es menor que uno” con un nivel de significación del 10%. ¿Cuál es el p-valor de la estimación del “de la propensión marginal estimada”?

*Solución:* Las hipótesis son:

$$H_0 : b = 1$$

$$H_1 : b < 1$$

La región crítica de una sola cola es

$$RC = \left\{ \mathbf{x} \mid \frac{\hat{b} - 1}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}} < k \right\},$$

donde  $k$  es el valor de la tabla para una  $t$  de Student de tres grados de libertad, ya que el estadístico de la parte izquierda de la desigualdad tiene dicha distribución. Para  $\alpha = 0.1$ , tenemos que  $k = t_{3,0.1} = -1.638$  sustituyendo tenemos que

$$\frac{0.56 - 1}{\sqrt{0.0013}} = -338 < k = t_{3,0.1} = -1.638$$

por lo que rechazamos  $H_0$ .

El  $p$ -valor es la probabilidad de

$$\begin{aligned} P(\hat{b} \leq 0.56 \mid H_0) &= P\left( \frac{\hat{b} - b}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}} \leq \frac{0.56 - b}{\sqrt{\frac{\hat{s}^2}{\sum(x_i - \bar{x})^2}}} \mid H_0 \right) \\ &= P\left( W \leq \frac{0.56 - 1}{\sqrt{0.0013}} = -338 \right) \simeq 0, \end{aligned}$$

donde  $W$  se distribuye como una  $t$  de Student con tres grados de libertad. Fin **ejercicio 1**

- (d) ¿Cuál es la familia que más ha gastado respecto al nivel esperado, dados su ingresos? ¿y la que menos?

*Solución:* La familia  $D$  es la que más ha gastado (5) respecto al nivel esperado (4.56)

La familia  $B$  es la que menos ha gastado (3) respecto al nivel esperado (3.44)

Fin **ejercicio 1**

- (e) ¿Cuál es el gasto esperado para una familia que tuviera unos ingresos semanales iguales a 2?

*Solución:* Según el modelo estimado, una familia con ingresos de 2 debería gastar

$$\hat{Y} = -0.52 + 0.56 \cdot 2 = 0.6$$

Fin **ejercicio 1**

**Ejercicio 2.** Sea una población  $X$  que se distribuye  $N(\mu, 2)$ . Queremos llevar a cabo el siguiente contraste;  $H_0: \mu = 0$  frente a  $H_1: \mu = 0.5$  con  $\alpha = 0.05$  (a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 20). Disponemos de dos regiones críticas:  $RC_1 = \{\mathbf{x} \mid \bar{x} > k_1\}$  y  $RC_2 = \{\mathbf{x} \mid \frac{x_1 + x_2}{2} > k_2\}$ , donde  $x_1$  y  $x_2$  son los dos primeros elementos de la muestra. [Pista: recuerde que la  $X_1$  y  $X_2$  son elementos de la muestra aleatoria simple, y como tales son independientes e idénticamente distribuidos]

- (a) Halle el valor de  $k_1$  y  $k_2$  para que ambas regiones críticas posean el mismo nivel de significación  $\alpha$ . Dado que ambos contrastes tienen el mismo nivel de significación, ¿esto implica que ambos son igualmente adecuados para realizar el contraste?

*Solución:* Primero necesito conocer la distribución de los estadísticos:

El primero es la media muestral, de la que sabemos que

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1),$$

donde  $\sigma = \sqrt{2}$ , y  $n = 20$ .

El segundo también es una media; la única diferencia es que  $n = 2$ .

Por tanto, buscamos por una parte  $k_1$  tal que

$$P\left(\frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} > \frac{k_1 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} \mid H_0\right) = 0.05.$$

Es decir,  $P\left(Z > \frac{k_1}{0.316}\right) = 0.05$ , donde  $Z \sim N(0, 1)$  por lo que  $\frac{k_1}{0.316} = 1.64$  y  $k_1 = 0.5186$

Por otra parte buscamos  $k_2$  tal que

$$P\left(\frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} > \frac{k_2 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} \mid H_0\right) = 0.05$$

ya que por  $H_0$   $\mu = 0$ . Es decir,  $P\left(Z > \frac{k_2}{1}\right) = 0.05$  ó  $k_2 = 1.64$

Estos valores para  $k_1$  y  $k_2$  garantizan que ambos contrastes tienen una probabilidad del 5% de cometer el error tipo I (rechazar  $H_0$  cuando ésta es cierta). Pero no sabemos cual es la probabilidad de cometer el error tipo II. Por lo que no podemos saber todavía que contraste es más adecuado. Fin **ejercicio 2**

- (b) Calcule la potencia de ambos contrastes ¿Que podemos decir acerca de la idoneidad de ambas regiones críticas?

*Solución:* Buscamos la probabilidad de rechazar  $H_0$  cuando  $H_1$  es cierta, es decir

$$P\left(\frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} > \frac{0.5186 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{20}} \mid H_1\right).$$

Es decir,  $P\left(Z > \frac{0.5186 - 0.5}{0.316}\right) = P(Z > 0.05886)$  que es igual a  $1 - P(Z < 0.05886) = 1 - 0.5199 = 0.48$

Por otra parte, la potencia del segundo contraste es

$$P\left(\frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} > \frac{1.64 - \mu}{\sqrt{2}/\sqrt{2}} \mid H_1\right)$$

Es decir,  $P\left(Z > \frac{1.64 - 0.5}{1}\right) = P(Z > 1.14)$  que es igual a  $1 - P(Z < 1.14) = 1 - 0.8729 = 0.1271$

El primer contraste es mucho mejor que el segundo, ya que teniendo ambos el mismo nivel crítico, el primer contraste es más potente (menor probabilidad de cometer el error tipo II). Fin **ejercicio 2**

- (c) ¿Variaría su respuesta a los apartados anteriores si aumentara el tamaño muestral?

*Solución:* Al incrementar el tamaño muestral, el segundo contraste no se ve afectado; veamos que pasa con el primero.

$$P\left(\frac{\hat{x} - \mu}{\sqrt{2}/n} > \frac{0.5186 - \mu}{\sqrt{2}/n} \mid H_1\right) = P\left(Z > \frac{0.5186 - 0.5}{\sqrt{2}/n}\right);$$

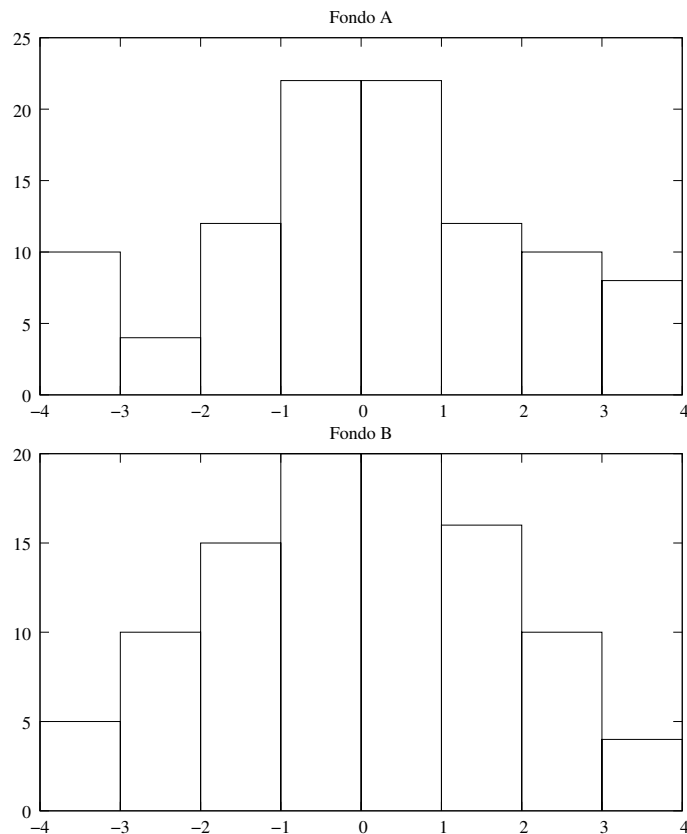
por tanto, cuanto mayor es  $n$ , menor es el número que queda a la derecha de la desigualdad y, por tanto, mayor es la probabilidad. Así pues, a mayor muestra mayor potencia del primer contraste, sin que varíe la potencia del segundo. Fin **ejercicio 2**

**Ejercicio 3.** Suponga que durante 100 días medimos la rentabilidad de dos fondos de inversión tecnológicos ofrecidos por dos entidades financieras distintas, la entidad *A* y la entidad *B*. Se definen intervalos de rentabilidades (menos de  $-3\%$ , entre  $-3\%$  y menos de  $-2\%$ , ..., entre dos y tres por ciento, y más de tres por ciento). En la siguiente tabla figura el número de días que cada fondo ha arrojado una determinada rentabilidad.

	$< -3$	$[-3; -2)$	$[-2; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$> 3$
A	10	4	12	22	22	12	10	8
B	5	10	15	20	20	16	10	4

- (a) Dibuje el histograma de frecuencias (relativas) de ambos Fondos y comente sus principales similitudes y diferencias.

*Solución:*



A la vista de los histogramas, se aprecia que el fondo B tiene una distribución simétrica y menos dispersa que la del fondo A (pero esto es una observación sobre la muestra; en realidad desconocemos las características de la distribución teórica de la que provienen los datos).

Fin **ejercicio 3**

- (b) Realice un contraste de homogeneidad de Kolmogorov-Smirnov. ¿Podemos concluir que ambos Fondos tienen idéntica distribución a lo largo del periodo muestral considerado?

*Solución:* Las funciones de distribución empíricas y sus diferencias son:

	$< -3$	$< -2$	$< -1$	$< 0$	$< 1$	$< 2$	$< 3$	$< \infty$
$F_A$	0.1	0.14	0.26	0.48	0.7	0.82	0.92	1
$F_B$	0.05	0.15	0.30	0.50	0.7	0.86	0.96	1
Dif.	0.05	0.01	0.04	0.02	0.0	0.04	0.04	0

Por tanto, el estadístico  $D = \max |F_A - F_B|$  toma el valor 0.05

El nivel crítico (para un nivel de significación del 5%) según las tablas es:

$$1.22 \cdot \sqrt{\frac{200}{10000}} = 0.1725$$

Así pues, con un nivel de significación del 5% NO podemos rechazar  $H_0$ : *idéntica distribución*.

Fin **ejercicio 3**

- (c) Realice un contraste Chi-cuadrado para discutir si los rendimientos del Fondo A se distribuyen de manera normal con media cero y varianza 1.

*Solución:* Necesitamos las frecuencias teóricas u esperadas bajo  $H_0$ ; que podemos calcular a partir de las tablas de la Normal del siguiente modo

- La primera celda es  $(P(Z) < -3) \cdot 100 = (1 - P(Z) < 3) \cdot 100 = 0.13$
- La segunda es  $[(P(Z) < -2) - (P(Z) < -3)] \cdot 100 = 2.15$
- La tercera es  $[(P(Z) < -1) - (P(Z) < -2)] \cdot 100 = 13.59$
- La cuarta es  $[(P(Z) < 0) - (P(Z) < -1)] \cdot 100 = 34.13$
- ...
- La última es  $(P(Z) > 3) \cdot 100 = (1 - P(Z) < 3) \cdot 100 = 0.13$

donde las frecuencias que faltan son iguales a las ya calculadas por ser la distribución  $N(0, 1)$  simétrica respecto al cero.

	$< -3$	$[-3; -2)$	$[-2; -1)$	$[-1; 0)$	$[0; 1)$	$[1; 2)$	$[2; 3)$	$> 3$
$T_i$	0.13	2.15	13.59	34.13	34.13	13.59	2.15	0.13

Por tanto

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^6 \frac{(O_i - T_i)^2}{T_i} = \frac{(10 - 0.13)^2}{0.13} + \frac{(4 - 2.15)^2}{2.15} + \dots$$

que es claramente superior a 14.1, valor tabulado de una  $\chi^2$  con  $8-1=7$  grados de libertad para un nivel de significación del 5%; por lo que rechazamos  $H_0$ : *distribución normal* con dicho nivel de significación.

Fin **ejercicio 3**

- (d) A luz de los resultados de los apartados anteriores, sin realizar ningún contraste adicional ¿qué podría afirmar acerca de la distribución de los rendimientos del Fondo B?

*Solución:* Podemos aventurarnos a suponer que el fondo B es una muestra que también proviene de una distribución normal.

Fin **ejercicio 3**

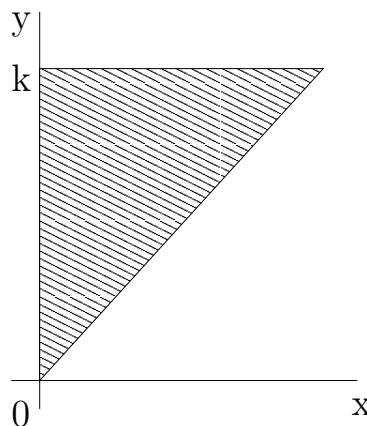
**Ejercicio 4.** Sean  $X$  e  $Y$  con función de densidad uniforme igual a 2 en el triángulo  $0 \leq x \leq y \leq k$ , es decir,

$$f_{XY}(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 \leq x \leq y \leq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcule

- (a) El valor de  $k$  para que  $f_{XY}(x, y)$  sea un función de densidad

*Solución:* El soporte es



Por ser la distribución uniforme sobre el soporte triangular, la doble integral coincide con el volumen del “quesito” sobre dicho soporte, que debe ser igual a uno. El volumen es igual en este caso (distribución uniforme) a la superficie del triángulo multiplicada por la altura de la función, que es 2. Por tanto  $superficie \times altura = superficie \times 2 = 1$  de donde sabemos que la superficie es  $1/2$ . Puesto que la superficie de un triángulo es base por altura dividido por dos. Y en este caso base y altura son iguales a  $k$ , necesariamente  $k = 1$ .

Otra forma de calcular más general es

$$\begin{aligned} \int_0^k \int_x^k 2dydx &= \int_0^k [2y]_x^k = \int_0^k 2k - 2xdx = \\ &= [2kx - x^2]_0^k = 2k^2 - k^2 = k^2 = 1 \end{aligned}$$

de donde  $k = 1$ .

Fin ejercicio 4

- (b) Las funciones marginales de  $X$  e  $Y$

Solución:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_x^1 2dy = 2(1-x); \text{ para } x \in [0, 1] \\ f_Y(y) &= \int_0^y 2dx = 2y; \text{ para } y \in [0, 1] \end{aligned}$$

Fin ejercicio 4

- (c) La esperanza y varianza de  $X$

Solución: Por una parte

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 x \cdot 2(1-x)dx = \left[ x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Por otra

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^1 x^2 \cdot 2(1-x) dx = 2 \int_0^1 x^2 - x^3 dx \\ &= 2 \left[ \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Así pues

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{18}}$$

Fin ejercicio 4

- (d) Las funciones de densidad condicionadas  $f_{Y|X}(y|x)$  y  $f_{X|Y}(x|y)$

Solución:

$$\begin{aligned} f_{X|Y}(x|y) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{1}{y}; \text{ para } 0 \leq x \leq y \\ f_{Y|X}(y|x) &= \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{1-x}; \text{ para } x \leq y \leq 1 \end{aligned}$$

Fin ejercicio 4

- (e) La función de regresión
- $E_{Y|X}(Y|x)$

*Solución:*

$$\begin{aligned} E_{Y|X}(Y|x) &= \int_x^1 \frac{y}{1-x} dy = \frac{1}{1-x} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_x^1 \\ &= \frac{1}{1-x} \left[ \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2} \right] = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1-x^2}{2} \\ &= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{(1-x)(1+x)}{2} = \boxed{\frac{1+x}{2}}; \quad x \leq y \leq 1; \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Fin ejercicio 4

- (f) ¿Cuál es el soporte de la esperanza condicionada,
- $E(Y|X)$
- ?

*Solución:*  $y \in [1/2, 1]$ .

Fin ejercicio 4

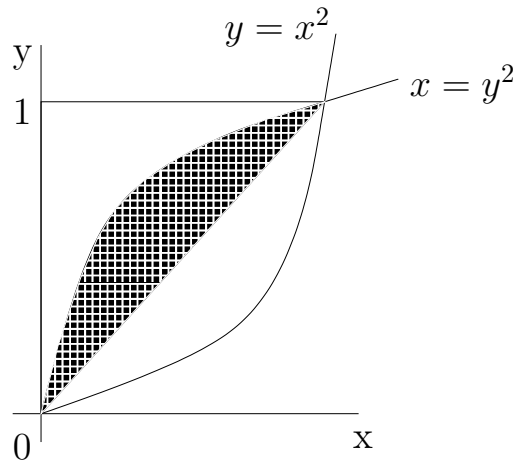
- (g)
- $P(X > \frac{1}{2} | Y = y)$
- para cualquier valor factible de
- $y$

*Solución:*

$$\begin{aligned} P\left(X > \frac{1}{2} \mid Y = y\right) &= \int_{1/2}^y f_{X|Y}(x|y) dx = \int_{1/2}^y \frac{1}{y} dx \\ &= \begin{cases} \frac{y - \frac{1}{2}}{y}, & \frac{1}{2} < y < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Fin ejercicio 4

- (h)
- $P(Y < X^2, X < Y^2)$

*Solución:* El área a integrar es

es decir

$$\begin{aligned} P(Y < X^2, X < Y^2) &= \int_0^1 \int_{y^2}^y 2 dx dy = \int_0^1 [2x]_{y^2}^y dy = \\ &= \int_0^1 2y - 2y^2 dy = \left[ y^2 - \frac{2y^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

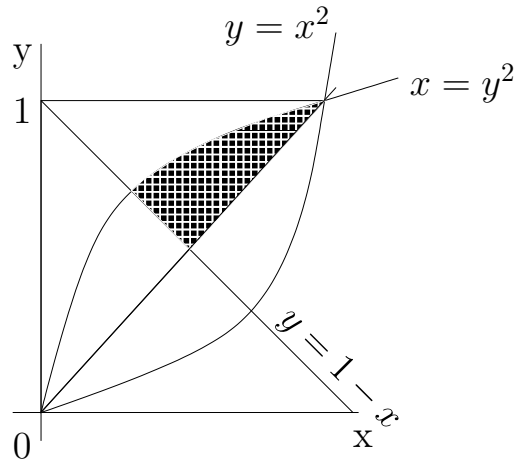
Fin ejercicio 4

- (i) Sin realizar más cálculos, podría decir cual es la probabilidad de

$$P(Y < X^2, X < Y^2, Y > 1 - X)$$

(con decir en que proporción es mayor, menor (o igual) a la anterior probabilidad es suficiente)

¿Y si  $f_{XY}(x, y)$  no fuera uniforme?*Solución:* El área a integrar es



que es exactamente la mitad del área anterior, por lo tanto, la probabilidad es exactamente la mitad de la calculada en el apartado anterior.

Si la función de densidad no fuera uniforme, la mitad del área no implicaría necesariamente mitad de la probabilidad, ya que habrá zonas con elevada densidad de probabilidad respecto a otras. Fin **ejercicio 4**

### Preguntas cortas (0.5 puntos por pregunta)

Las siguientes cuestiones deben ser respondidas en el **recuadro** que queda a continuación de cada pregunta.

**Ejercicio 5.** Sean dos variables aleatorias discretas,  $(X, Y)$ , que reflejan la siguiente información:  $X = 1$  si se da un shock positivo de demanda en la economía y  $X = -1$  si el shock es negativo;  $Y = 1$  si el salario real sube,  $Y = -1$  si el salario real baja e  $Y = 0$  si se mantiene. La rigidez salarial implica que los salarios reales no se ven afectados por shocks de demanda. Según la siguiente tabla de probabilidades conjuntas, ¿podríamos afirmar que los salarios reales son rígidos en esta economía?

$P_{XY}(x, y)$		$Y$		
		-1	0	1
$X$	-1	1/18	3/18	2/18
	1	2/18	6/18	4/18

*Solución:* Salarios rígidos significa que  $X$  e  $Y$  son independientes, es decir, que  $P_{XY}(x, y) = P_X(x) \cdot P_Y(y)$  para todo  $x$  e  $y$ . Puesto que las funciones de cuantía marginales son:

$$P_X(x) = \begin{cases} 6/18 & \text{si } X = -1 \\ 12/18 & \text{si } X = 1 \end{cases}, \text{ y } P_Y(y) = \begin{cases} 3/18 & \text{si } Y = -1 \\ 9/18 & \text{si } Y = 0 \\ 6/18 & \text{si } Y = 1 \end{cases}; \text{ cuyo producto coincide con la}$$

función de cuantía conjunta; **los salarios reales son rígidos**

Fin **ejercicio 5**

**Ejercicio 6.** La siguiente tabla de contingencia muestra la información recogida por una encuesta sobre la intención de voto en las próximas elecciones europeas. La variable  $X$  toma valor 1 si su intención es votar a un partido de centro-izquierdas y 0 si su intención es votar a un partido de centro-derechas; la variable  $Y$  es igual a 1 si es hombre y 0 si es mujer. Queremos contrastar si la intención de voto depende del sexo de los votantes mediante un contraste Chi-cuadrado. ¿Cuáles serían las frecuencias teóricas absolutas para llevar a cabo este contraste?

X/Y	mujer	hombre
centro-derechas	50	75
centro-izquierdas	65	80

*Solución:* Debemos estimar las probabilidades teóricas de ser hombre o mujer, y votar centro-derecha o centro-izquierda, sabiendo que la población total son 270 individuos.

$$P(H) = (75 + 80)/270 = 0.574; \text{ por lo que } P(M) = 1 - P(H) = 0.426$$

$$P(C-D) = (50 + 75)/270 = 0.463; \text{ por lo que } P(C-I) = 1 - P(C-D) = 0.537$$

Si ambas variables son independientes, en teoría la función de cuantía conjunta debería ser igual al producto de las marginales (y la tabla teórica igual a la función de cuantía conjunta multiplicada por 270)

X/Y	mujer	hombre
centro-derechas	$P(M) \cdot P(C-D) \cdot 270 = 53.254$	$P(H) \cdot P(C-D) \cdot 270 = 71.756$
centro-izquierdas	$P(M) \cdot P(C-I) \cdot 270 = 61.766$	$P(H) \cdot P(C-I) \cdot 270 = 83.224$

Fin ejercicio 6

**Ejercicio 7.** La función generatriz de momentos de una Gamma  $(\lambda, a)$  es  $M(t) = \frac{1}{(1-\frac{1}{\lambda}t)^a}$ , definida para  $t < \lambda$ . Demuestre que  $E(X) = a/\lambda$  y que  $\text{Var}(X) = a/\lambda^2$ .

*Solución:*

$$E(X) = \left. \frac{\partial M(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{a}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-(a+1)} \right|_{t=0} = \boxed{\frac{a}{\lambda} \cdot 1}$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \left. \frac{\partial^2 M(t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} - \left( \left. \frac{\partial M(t)}{\partial t} \right|_{t=0} \right)^2 =$$

$$= \frac{a(a+1)}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\lambda}t\right)^{-(a+2)} \Big|_{t=0} - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \frac{a^2 + a}{\lambda^2} \cdot 1 - \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2 = \boxed{\frac{a}{\lambda^2}}$$

Fin ejercicio 7

**Ejercicio 8.** Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

Si se rechaza  $H_0$  con un nivel de significación  $\alpha = 0.05$  también se rechaza  $H_0$  con un nivel de significación  $\alpha = 0.10$

*Solución: Verdadero:* la región crítica asociada al nivel de significación del 10% contiene a la del 5%; por lo tanto si se ha “caído” en la región del 5%, entonces también se ha “caído” en la del 10%.

Fin ejercicio 8

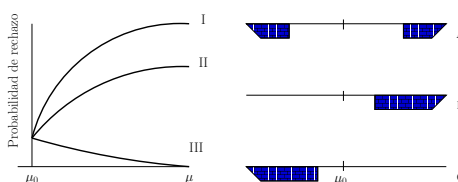
**Ejercicio 9.** Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Suponga que tiene una muestra de tamaño  $n$  y desea contrastar  $H_0: \mu = \mu_0$  frente a  $H_1: \mu > \mu_0$ . Se definen tres regiones críticas A), B) y C) con nivel de significación  $\alpha$ .

$$A) RC_A = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_2 \text{ ó } \bar{x} < k_3\}$$

$$B) RC_B = \{x \text{ tales que: } \bar{x} > k_1\}$$

$$C) RC_C = \{x \text{ tales que: } \bar{x} < k_4\}$$

Dichas regiones aparecen representadas en la parte derecha de la figura.



Asocie cada una de las funciones potencia I), II) y III) (de la izquierda) con una de las regiones críticas A), B) o C).

*Solución:* La I) con la B); la II) con la A); la III) con la C).

Fin ejercicio 9

**Ejercicio 10.** Sea  $(X, Y)$  normal bivalente con vector de medias  $(1, 2)$  y matriz de varianzas-covarianzas  $\begin{pmatrix} 1 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 2 \end{pmatrix}$ . ¿Cuanto vale  $P(X - Y > 0)$  si  $\sigma_{XY} = 0$ ? ¿Y si  $\sigma_{XY} = 0.5$ ?

*Solución:* Sea  $W = X - Y$ . Por ser  $W$  diferencia de variables normales, tiene distribución normal

$$W \sim N(\mu_X - \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 - 2\sigma_{XY})$$

$$1. \quad W \sim N(1 - 2, 1 + 2 - 2 \cdot 0) \sim N(-1, 3)$$

$$P(W > 0) = P\left(\frac{W+1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1 - P(Z \leq 0.577) = 1 - 0.719 = 0.281$$

$$2. \quad W \sim N(1 - 2, 1 + 2 - 2 \cdot 0.5) \sim N(-1, 2)$$

$$P(W > 0) = P\left(\frac{W+1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1 - P(Z \leq 0.707) = 1 - 0.761 = 0.239$$

donde  $Z \sim N(0, 1)$ .

Fin **ejercicio 10**

**Ejercicio 11.** Demuestre que en el modelo de regresión simple  $Y_t = a + bx_t + U_t$  el supuesto  $E_{U_t|X}(U_t | \mathbf{x}) = 0$  implica  $E_{U_t|X}(Y_t | \mathbf{x}) = a + bx_t$ ; donde los regresores son no-estocásticos, y  $U$  es la perturbación aleatoria del modelo.

*Solución:* Ya que

$$\begin{aligned} E_{U_t|X}(Y_t | \mathbf{x}) &= E_{U_t|X}(a + bx_t + U_t | \mathbf{x}) \\ &= a + bx_t + E_{U_t|X}(U_t | \mathbf{x}) && \text{pues } a, b, \text{ y } x_t \text{ son ctes} \\ &= a + bx_t && \text{por el supuesto: } E_{U_t|X}(U_t | \mathbf{x}) = 0 \end{aligned}$$

Fin **ejercicio 11**

**Ejercicio 12.** Sean  $X$  e  $Y$  dos variables aleatorias discretas. Si  $E_{Y|X}(Y | 1) = 1$  y además  $\text{Var}_{Y|X}(Y | 1) = 0$ . ¿Cual es el valor de  $P_{Y|X}(1 | 1)$ ? ¿y el valor de  $P_{Y|X}(2 | 1)$ ? Justifique su respuesta.

*Solución:* Que  $\text{Var}_{Y|X}(Y | 1) = 0$  implica que cuando  $X = 1$ , la variable aleatoria  $Y$  es degenerada, es decir, toma un valor constante. Puesto que  $E_{Y|X}(Y | 1) = 1$ , dicho valor es uno. Por lo tanto  $P_{Y|X}(1 | 1)$  necesariamente es igual a 1. De esto se deduce que la probabilidad de que  $Y$  tome un valor distinto de 1 condicionado a  $X=1$  es cero; en particular  $P_{Y|X}(2 | 1) = 0$ . Fin **ejercicio 12**

## Formulas de posible utilidad

**Transformación de variables** Sea  $f_X(x)$  en el soporte  $\mathbb{R}_X = (a, b)$ . Sea  $Y = h(X)$ , entonces  $f_Y(y) = \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right| \cdot f_X(h^{-1}(y))$ ; en el soporte  $\mathbb{R}_Y = (h(a), h(b))$ ; donde  $h^{-1}(\cdot)$  es la *función inversa* de  $h(\cdot)$ , es decir  $h^{-1}(h(x)) = x$ .

**Función generatriz de momentos conjunta** del vector aleatorio  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  evaluada en el vector  $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ :  $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = M_{X_1, \dots, X_n}(t_1, \dots, t_n) = E(e^{t_1 X_1 + \dots + t_n X_n})$

## Aproximación lineal a la esperanza condicional

$$E(Y|X = x) \approx g^*(x) = E(Y) - E(X) \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} + \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\text{Var}(X)} \cdot x; \quad \forall x \in \mathbb{R}_X.$$

**Varianza condicional de la normal bivalente:**  $\text{Var}_{Y|X}(Y | x) = \sigma_Y^2 - \frac{(\sigma_{XY})^2}{\sigma_X^2} = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$ ,

**Modelo de regresión lineal** Sea el modelo  $Y_t = a + bX_t + U_t$ , donde  $(\mathbf{U} | \mathbf{X}) \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ ; y  $t = 1, 2, \dots, T$ . Sean  $\hat{a}$  y  $\hat{b}$  los estimadores MCO de  $a$  y  $b$ . Entonces

$$\hat{a} \sim N\left(a, \frac{\sigma^2 \sum x_t^2}{T \sum (x_t - \bar{x})^2}\right); \quad \hat{b} \sim N\left(b, \frac{\sigma^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right).$$

**Distribuciones de funciones de variables aleatorias** si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ,  $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$  y  $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$  con muestras de tamaños  $n, n_1$  y  $n_2$  respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} &\sim N(0, 1); & \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} &\sim N(0, 1) \\ \frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\mathfrak{s}^2/n}} &\sim t_{n-1}; & \frac{(n-1)\mathfrak{s}^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{n-1}^2; & \frac{\mathfrak{s}_1^2/\sigma_1^2}{\mathfrak{s}_2^2/\sigma_2^2} &\sim F_{n_1-1, n_2-1} \\ & & \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{(n_1-1)\mathfrak{s}_1^2 + (n_2-1)\mathfrak{s}_2^2}{n_1+n_2-2} \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} &\sim t_{n_1+n_2-2}, & \text{si } \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \end{aligned}$$

donde  $\mathfrak{s}^2$  denota la *cuasivarianza* muestral  $\left(\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}\right)$ .

**Proporciones**  $\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \stackrel{a}{\sim} N(0, 1)$ . Con muestras de tamaños  $n$  y  $m$ :

$$\frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{(n+m)\hat{p}_T(1-\hat{p}_T)}{n \cdot m}}} \stackrel{a}{\underset{H_0}{\sim}} N(0, 1); \quad \text{donde } \hat{p}_T = \frac{n\hat{p}_1 + m\hat{p}_2}{n+m}; \quad H_0: p_1 = p_2$$

**Contraste de Jarque-Bera**  $JB = n \left[ \frac{AS^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24} \right] \sim \chi_{(2)}^2$

**Contrste Chi cuadrado**  $\sum_{i=1}^k \frac{(T_i - O_i)^2}{T_i} \stackrel{a}{\sim} \chi^2$ , donde  $T_i$  y  $O_i$  son, respectivamente las  $i$ -ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

**Kolmogorov-Smirnov para una sola muestra:**  $D_n = \sup |F_n(x) - F(x)|$ , donde  $F_n(x)$  es la función de distribución empírica (o muestral), y  $F(x)$  es la función de distribución de  $H_0$ .

Tamaño muestral	nivel de significación				
	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
8	0.3583	0.4096	0.4543	0.5065	0.5418
9	0.3391	0.3875	0.4300	0.4796	0.5133
10	0.3226	0.3687	0.4092	0.4566	0.4889
> 40	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

**Kolmogorov-Smirnov para dos muestras:**  $D_n = \sup |F_1(x) - F_2(x)|$ . Cuando  $n_1$  y  $n_2$  son grandes; y donde  $F_1(x)$  y  $F_2(x)$  son funciones de distribución empíricas (o muestrales)

$$\text{Nivel crítico: } D_{\alpha, n_1, n_2} \approx k \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}},$$

donde  $k = 1.07; 1.22; 1.52$ ; para  $\alpha$  igual a 10%, 5% y 1% respectivamente.

Probabilidad acumulada desde  $-\infty$  hasta  $z$  para  $Z \sim N(0, 1)$

$z$	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	<b>0.5000</b>	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	<b>0.5987</b>	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	<b>0.6985</b>	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	<b>0.7486</b>	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	<b>0.7995</b>	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	<b>0.8508</b>	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	<b>0.8997</b>	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	<b>0.9495</b>	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	<b>0.9750</b>	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	<b>0.9898</b>	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Puntos porcentuales de la **fun. distribución**  $t$  de STUDENT con  $\nu$  grados de libertad

$\nu$	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
$\infty$	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

$\nu$	Puntos porcentuales de la <b>fun. distribución</b> CHI-CUADRADO con $\nu$ grados de libertad										
	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179