Dpto. de Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid

Examen de Introducción a la Econometría

11 de junio de 2004, 12:00h.
Duración: 2 HORAS y 30 MINUTOS

Apellidos:	Nombre:	DNI:
Profesor/a:		Grupo:

No desgrape las hojas de este cuadernillo

Problemas largos (2 puntos por problema)

Los siguientes problemas deben ser realizados en un **ÚNICO** cuadernillo a parte

(*escriba sus datos personales, grupo y profesor en dicho cuadernillo*[1])

Elija **SÓLO** dos (2) de los tres (3) problemas propuestos.

Ejercicio 1. Sean los siguientes datos:

Familia	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2	$\widehat{y_i}$	$\widehat{e_i}$	$x_i\widehat{e_i}$	$\widehat{e_i}^2$
A	2	4	8	4	1.74	0.26	1.04	0.07
B	3	7	21	9	3.44	-0.44	-3.08	0.19
C	1	3	3	1	1.18	-0.18	-0.54	0.03
D	5	9	45	25	4.56	0.44	3.96	0.19
E	9	17	153	81	9.08	-0.08	-1.36	0.01
sumas	20	40	230	120	20	0	0	0.48

Cuadro 1:

donde Y es el gasto semanal de las familias, y X es su ingreso semanal.

Además se sabe que las varianzas y covarianzas muestrales son:

$$T \cdot s_y^2 = 124, \quad T \cdot s_x^2 = 40, \quad T \cdot s_{xy} = 70,$$

donde T es el tamaño muestral.

Suponga que plantea el siguiente modelo

$$Y_i = a + bx_i + U_i,$$

donde U_i son otros factores que afectan al consumo familiar distintos de sus ingresos. Se sabe que la distribución conjunta de dichos factores es:

$$\boldsymbol{U} \sim N(\mathbf{0},\ \sigma^2\,\mathbf{I}),$$

donde $\mathbf{I}$ es una matriz identidad de orden 5, y σ^2 es la varianza de U_i, cuyo valor es desconocido.

(a) Estime por MCO los parámetros del modelo.

(b) Estime por MCO los parámetros del modelo pero dando un intervalo de confianza del 95 %.

(c) Contraste la hipótesis de que "la propensión marginal es igual a uno" frente a "es menor que uno" con un nivel de significación del 10 %. ¿Cuál es el p-valor de la estimación del "de la propensión marginal estimada"?

[1] Al finalizar entregue estas paginas dentro de dicho cuadernillo

(d) ¿Cuál es la familia que más ha gastado respecto al nivel esperado, dados su ingresos? ¿y la que menos?

(e) ¿Cuál es el gasto esperado para una familia que tuviera unos ingresos semanales iguales a 2?

Ejercicio 2. Sea una población X que se distribuye $N(\mu,\ 2)$. Queremos llevar a cabo el siguiente contraste; H_0: $\mu = 0$ frente a H_1: $\mu = 0.5$ con $\alpha = 0.05$ (a partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 20). Disponemos de dos regiones críticas: $RC_1 = \{\mathbf{x} \mid \overline{\mathbf{x}} > k_1\}$ y $RC_2 = \left\{\mathbf{x} \mid \frac{x_1+x_2}{2} > k_2\right\}$, donde x_1 y x_2 son los dos primeros elementos de la muestra. [Pista: recuerde que la X_1 y X_2 son elementos de la muestra aleatoria simple, y como tales son independientes e idénticamente distribuidos]

(a) Halle el valor de k_1 y k_2 para que ambas regiones críticas posean el mismo nivel de significación α. Dado que ambos contrastes tienen el mismo nivel de significación, ¿esto implica que ambos son igualmente adecuados para realizar el contraste?

(b) Calcule la potencia de ambos contrastes ¿Que podemos decir acerca de la idoneidad de ambas regiones críticas?

(c) ¿Variaría su respuesta a los apartados anteriores si aumentara el tamaño muestral?

Ejercicio 3. Suponga que durante 100 días medimos la rentabilidad de dos fondos de inversión tecnológicos ofrecidos por dos entidades financieras distintas, la entidad A y la entidad B. Se definen intervalos de rentabilidades (menos de $-3\,\%$, entre $-3\,\%$ y menos de $-2\,\%$, ..., entre dos y tres por ciento, y más de tres por ciento). En la siguente tabla figura el número de días que cada fondo ha arrojado una determinanda rentabilidad.

	< -3	$[-3;-2)$	$[-2;-1)$	$[-1;0)$	$[0;1)$	$[1;2)$	$[2;3)$	> 3
A	10	4	12	22	22	12	10	8
B	5	10	15	20	20	16	10	4

(a) Dibuje el histograma de frecuencias (relativas) de ambos Fondos y comente sus principales similitudes y diferencias.

(b) Realice un contraste de homogeneidad de Kolmogorov-Smirnov. ¿Podemos concluir que ambos Fondos tienen idéntica distribución a lo largo del periodo muestral considerado?

(c) Realice un contraste Chi-cuadrado para discutir si los rendimientos del Fondo A se distribuyen de manera normal con media cero y varianza 1.

(d) A luz de los resultados de los apartados anteriores, sin realizar ningún contraste adicional ¿qué podría afirmar acerca de la distribución de los rendimientos del Fondo B?

Ejercicio 4. Sean X e Y con función de densidad uniforme igual a 2 en el triángulo $0 \leq x \leq y \leq k$, es decir,

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{para } 0 \leq x \leq y \leq k \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

Calcule

(a) El valor de k para que $f_{XY}(x,y)$ sea un función de densidad

(b) Las funciones marginales de X e Y

(c) La esperanza y varianza de X

(d) Las funciones de densidad condicionadas $f_{Y|X}(y \mid x)$ y $f_{X|Y}(x \mid y)$

(e) La función de regresión $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid x)$

(f) ¿Cuál es el soporte de la esperanza condicionada, $\mathrm{E}(Y \mid X)$?

(g) $P\left(X > \frac{1}{2} \,\middle|\, Y = y\right)$ para cualquier valor factible de y

(h) $P\left(Y < X^2,\ X < Y^2\right)$

(i) Sin realizar más cálculos, podría decir cual es la probabilidad de

$$P\left(Y < X^2,\ X < Y^2,\ Y > 1 - X\right)$$

(con decir en que proporción es mayor, menor (o igual) a la anterior probabilidad es suficiente) ¿Y si $f_{XY}(x, y)$ no fuera uniforme?

Preguntas cortas **(0.5 puntos por pregunta)**

Las siguientes cuestiones deben ser respondidas en el **recuadro** que queda a continuación de cada pregunta.

Ejercicio 5. Sean dos variables aleatorias discretas, (X,Y), que reflejan la siguiente información: $X = 1$ si se da un shock positivo de demanda en la economía y $X = -1$ si el shock es negativo; $Y = 1$ si el salario real sube, $Y = -1$ si el salario real baja e $Y = 0$ si se mantiene. La rigidez salarial implica que los salarios reales no se ven afectados por shocks de demanda. Según la siguiente tabla de probabilidades conjuntas, ¿podríamos afirmar que los salarios reales son rígidos en esta economía?

$P_{XY}(x, y)$		Y		
		-1	0	1
X	-1	1/18	3/18	2/18
	1	2/18	6/18	4/18

Ejercicio 6. La siguiente tabla de contingencia muestra la información recogida por una encuesta sobre la intención de voto en las próximas elecciones europeas. La variable X toma valor 1 si su intención es votar a un partido de centro-izquierdas y 0 si su intención es votar a un partido de centro-derechas; la variable Y es igual a 1 si es hombre y 0 si es mujer. Queremos contrastar si la intención de voto depende del sexo de los votantes mediante un contraste Chi-cuadrado. ¿Cuáles serían las frecuencias teóricas absolutas para llevar a cabo este contraste?

X/Y	mujer	hombre
centro-derechas	50	75
centro-izquierdas	65	80

Ejercicio 7. La función generatriz de momentos de una Gamma $(\lambda,\ a)$ es $M(t) = \frac{1}{(1-\frac{1}{\lambda}t)^a}$, definida para $t < \lambda$. Demuestre que $\mathrm{E}\,(X) = a/\lambda$ y que $\mathrm{Var}\,(X) = a/\lambda^2$.

Ejercicio 8. Discuta la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación:

> Si se rechaza H_0 con un nivel de significación $\alpha = 0.05$ también se rechaza H_0 con un nivel de significación $\alpha = 0.10$

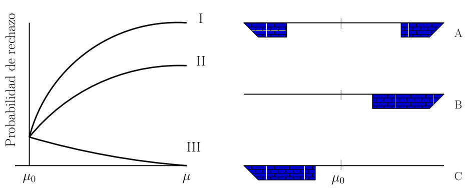
Ejercicio 9. Sea X una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Suponga que tiene una muestra de tamaño n y desea contrastar H_0: $\mu = \mu_0$ frente a H_1: $\mu > \mu_0$. Se definen tres regiones críticas A), B) y C) con nivel de significación α.

A) $RC_A = \{\boldsymbol{x}$ tales que: $\overline{\boldsymbol{x}} > k_2$ ó $\overline{\boldsymbol{x}} < k_3\}$

B) $RC_B = \{\boldsymbol{x}$ tales que: $\overline{\boldsymbol{x}} > k_1\}$

C) $RC_C = \{\boldsymbol{x}$ tales que: $\overline{\boldsymbol{x}} < k_4\}$

Dichas regiones aparecen representadas en la parte derecha de la figura.



Asocie cada una de las funciones potencia I), II) y III) (de la izquierda) con una de las regiones críticas A), B) o C).

Ejercicio 10. Sea (X, Y) normal bivariante con vector de medias $(1,\ 2)$ y matriz de varianzas-covarianzas $\begin{pmatrix} 1 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & 2 \end{pmatrix}$. ¿Cuanto vale $P\,(X - Y > 0)$ si $\sigma_{XY} = 0$? ¿Y si $\sigma_{XY} = 0.5$?

Ejercicio 11. Demuestre que en el modelo de regresión simple $Y_t = a + bx_t + U_t$ el supuesto $\mathrm{E}_{U_t|\mathbf{x}}(U_t \mid \mathbf{x}) = 0$ implica $\mathrm{E}_{U_t|\mathbf{x}}(Y_t \mid \mathbf{x}) = a + bx_t$; donde los regresores son no-estocásticos, y Ues la perturbación aleatoria del modelo.

Ejercicio 12. Sean X e Y dos variables aleatorias discretas. Si $\mathrm{E}_{Y|X}(Y \mid 1) = 1$ y además $\mathrm{Var}_{Y|X}(Y \mid 1) = 0$. ¿Cual es el valor de $P_{Y|X}(1 \mid 1)$? ¿y el valor de $P_{Y|X}(2 \mid 1)$? Justifique su respuesta.

Formulas de posible utilidad

Transformación de variables Sea $f_X(x)$ en el soporte $\mathbb{R}_X = (a, b)$. Sea $Y = h(X)$, entonces $f_Y(y) = \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right| \cdot f_X\left(h^{-1}(y)\right)$; en el soporte $\mathbb{R}_Y = (h(a),\ h(b))$; donde $h^{-1}(\cdot)$ es la *función inversa* de $h(\cdot)$, es decir $h^{-1}(h(x)) = x$.

Función generatriz de momentos conjunta del vector aleatorio $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ evaluada en el vector $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n)$: $M_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = M_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = \mathrm{E}\left(e^{t_1 X_1 + \cdots + t_n X_n}\right)$

Aproximación lineal a la esperanza condicional

$$\mathrm{E}(Y|X = x) \approx g^*(x) = \mathrm{E}(Y) - \mathrm{E}(X)\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)} + \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\mathrm{Var}(X)} \cdot x; \qquad \forall x \in \mathbb{R}_X.$$

Varianza condicional de la normal bivariante: $\mathrm{Var}_{Y|X}(Y \mid x) = \sigma_Y^2 - \frac{(\sigma_{XY})^2}{\sigma_X^2} = \sigma_Y^2(1 - \rho_{XY}^2)$,

Modelo de regresión lineal Sea el modelo $Y_t = a + bX_t + U_t$, donde $(\mathbf{U}|\,\mathbf{X}) \sim N\left(\mathbf{0}\,,\,\sigma^2\,\mathbf{I}\right)$; y $t = 1,\ 2, \ldots, T$. Sean $\widehat{a}$ y $\widehat{b}$ los estimadores MCO de a y b. Entonces

$$\widehat{a} \sim N\left(a\,,\,\frac{\sigma^2 \sum x_t^2}{T\sum(x_t - \overline{x})^2}\right); \qquad \widehat{b} \sim N\left(b\,,\,\frac{\sigma^2}{\sum(x_t - \overline{x})^2}\right).$$

Distribuciones de funciones de variables aleatorias si $X \sim N\left(\mu\,,\,\sigma^2\right)$, $X_1 \sim N\left(\mu_1\,,\,\sigma_1^2\right)$ y $X_2 \sim N\left(\mu_2\,,\,\sigma_2^2\right)$ con muestras de tamaños n, n_1 y n_2 respectivamente:

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N\,(0\,,\,1)\,; \qquad \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N\,(0\,,\,1)$$

$$\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{\mathfrak{s}^2/n}} \sim t_{n-1}; \qquad \frac{(n-1)\mathfrak{s}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}; \qquad \frac{\mathfrak{s}_1^2/\sigma_1^2}{\mathfrak{s}_2^2/\sigma_2^2} \sim F_{n_1-1,n_2-1}$$

$$\frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{(n_1-1)\mathfrak{s}_1^2 + (n_2-1)\mathfrak{s}_2^2}{n_1+n_2-2}\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \sim t_{n_1+n_2-2}, \text{ si } \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

donde $\mathfrak{s}^2$ denota la *cuasivarianza* muestral $\left(\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n-1}\right)$.

Proporciones $\dfrac{\widehat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{a}{\sim} N\,(0\,,\,1)\,.$ Con muestras de tamaños n y m:

$$\frac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{(n+m)\widehat{p_T}(1-\widehat{p_T})}{n \cdot m}}} \underset{H_0}{\overset{a}{\sim}} N\,(0\,,\,1)\,; \quad \text{donde } \widehat{p_T} = \frac{n\widehat{p_1} + m\widehat{p_2}}{n+m}; \ H_0:\ p_1 = p_2$$

Contraste de Jarque-Bera $JB = n\left[\frac{AS^2}{6} + \frac{(K-3)^2}{24}\right] \sim \chi^2_{(2)}$

Contrste Chi cuadrado $\sum_{i=1}^{k} \frac{(T_i - O_i)^2}{T_i} \overset{a}{\sim} \chi^2$, donde T_i y O_i son, respectivamente las i-ésimas frecuencias absolutas esperadas y observadas.

Kolmogorov-Smirnov para una sola muestra: $D_n = \sup|F_n(x) - F(x)|$, donde $F_n(x)$ es la función de distribución empírica (o muestral), y $F(x)$ es la función de distribución de H_0.

	nivel de significación				
Tamaño muestral	0.2	0.1	0.05	0.02	0.01
8	0.3583	0.4096	0.4543	0.5065	0.5418
9	0.3391	0.3875	0.4300	0.4796	0.5133
10	0.3226	0.3687	0.4092	0.4566	0.4889
> 40	$1.07/\sqrt{n}$	$1.22/\sqrt{n}$	$1.36/\sqrt{n}$	$1.52/\sqrt{n}$	$1.63/\sqrt{n}$

Kolmogorov-Smirnov para dos muestras: $D_n = \sup|F_1(x) - F_2(x)|$. Cuando n_1 y n_2 son grandes; y donde $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son funciones de distribución empíricas (o muestrales)

$$\text{Nivel crítico: } D_{\alpha,n_1,n_2} \approx k\sqrt{\frac{n_1+n_2}{n_1 n_2}},$$

donde $k = 1.07;\ 1.22;\ 1.52$; para α igual a $10\,\%$, $5\,\%$ y $1\,\%$ respectivamente.

Probabilidad acumulada desde $-\infty$ hasta z para $Z \sim N(0, 1)$

z	x.x0	x.x1	x.x2	x.x3	x.x4	x.x5	x.x6	x.x7	x.x8	x.x9
0.0	**0.5000**	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	**0.5987**	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	**0.6985**	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	**0.7486**	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	**0.7995**	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	**0.8508**	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	**0.8997**	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	**0.9495**	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	**0.9750**	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	**0.9898**	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

Puntos porcentuales de la **fun. distribución** t de STUDENT con ν grados de libertad

ν	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.325	0.577	1.000	1.376	2.414	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	318.31
2	0.289	0.500	0.816	1.061	1.604	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	22.327
3	0.277	0.476	0.765	0.978	1.423	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.215
4	0.271	0.464	0.741	0.941	1.344	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173
5	0.267	0.457	0.727	0.920	1.301	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893
6	0.265	0.453	0.718	0.906	1.273	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208
7	0.263	0.449	0.711	0.896	1.254	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785
8	0.262	0.447	0.706	0.889	1.240	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	4.501
9	0.261	0.445	0.703	0.883	1.230	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.297
10	0.260	0.444	0.700	0.879	1.221	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144
11	0.260	0.443	0.697	0.876	1.214	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025
12	0.259	0.442	0.695	0.873	1.209	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.930
13	0.259	0.441	0.694	0.870	1.204	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.852
14	0.258	0.440	0.692	0.868	1.200	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787
15	0.258	0.439	0.691	0.866	1.197	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733
16	0.258	0.439	0.690	0.865	1.194	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.686
17	0.257	0.438	0.689	0.863	1.191	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.646
18	0.257	0.438	0.688	0.862	1.189	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.610
19	0.257	0.438	0.688	0.861	1.187	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579
20	0.257	0.437	0.687	0.860	1.185	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552
21	0.257	0.437	0.686	0.859	1.183	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.527
22	0.256	0.437	0.686	0.858	1.182	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505
23	0.256	0.436	0.685	0.858	1.180	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.485
24	0.256	0.436	0.685	0.857	1.179	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467
∞	0.253	0.431	0.674	0.842	1.150	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.090

	Puntos porcentuales de la **fun. distribución** CHI-CUADRADO con ν grados de libertad										
ν	60.0 %	66.7 %	75.0 %	80.0 %	87.5 %	90.0 %	95.0 %	97.5 %	99.0 %	99.5 %	99.9 %
1	0.708	0.936	1.323	1.642	2.354	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828
2	1.833	2.197	2.773	3.219	4.159	4.605	5.991	7.378	9.210	10.597	13.816
3	2.946	3.405	4.108	4.642	5.739	6.251	7.815	9.348	11.345	12.838	16.266
4	4.045	4.579	5.385	5.989	7.214	7.779	9.488	11.143	13.277	14.860	18.467
5	5.132	5.730	6.626	7.289	8.625	9.236	11.070	12.833	15.086	16.750	20.515
6	6.211	6.867	7.841	8.558	9.992	10.645	12.592	14.449	16.812	18.548	22.458
7	7.283	7.992	9.037	9.803	11.326	12.017	14.067	16.013	18.475	20.278	24.322
8	8.351	9.107	10.219	11.030	12.636	13.362	15.507	17.535	20.090	21.955	26.125
9	9.414	10.215	11.389	12.242	13.926	14.684	16.919	19.023	21.666	23.589	27.877
10	10.473	11.317	12.549	13.442	15.198	15.987	18.307	20.483	23.209	25.188	29.588
11	11.530	12.414	13.701	14.631	16.457	17.275	19.675	21.920	24.725	26.757	31.264
12	12.584	13.506	14.845	15.812	17.703	18.549	21.026	23.337	26.217	28.300	32.910
13	13.636	14.595	15.984	16.985	18.939	19.812	22.362	24.736	27.688	29.819	34.528
14	14.685	15.680	17.117	18.151	20.166	21.064	23.685	26.119	29.141	31.319	36.123
15	15.733	16.761	18.245	19.311	21.384	22.307	24.996	27.488	30.578	32.801	37.697
16	16.780	17.840	19.369	20.465	22.595	23.542	26.296	28.845	32.000	34.267	39.252
17	17.824	18.917	20.489	21.615	23.799	24.769	27.587	30.191	33.409	35.718	40.790
18	18.868	19.991	21.605	22.760	24.997	25.989	28.869	31.526	34.805	37.156	42.312
19	19.910	21.063	22.718	23.900	26.189	27.204	30.144	32.852	36.191	38.582	43.820
20	20.951	22.133	23.828	25.038	27.376	28.412	31.410	34.170	37.566	39.997	45.315
21	21.991	23.201	24.935	26.171	28.559	29.615	32.671	35.479	38.932	41.401	46.797
22	23.031	24.268	26.039	27.301	29.737	30.813	33.924	36.781	40.289	42.796	48.268
23	24.069	25.333	27.141	28.429	30.911	32.007	35.172	38.076	41.638	44.181	49.728
24	25.106	26.397	28.241	29.553	32.081	33.196	36.415	39.364	42.980	45.559	51.179