La desigualdad en España: un enfoque de género.

Mercedes Prieto Alaiz*

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales.

Universidad de Valladolid.

Avenida Valle de Esgueva, 6

47011 Valladolid

prietoal@eaee.uva.es

* La autora agradece el apoyo financiero del Ministerio de Trabajo y Asuntos Sociales (Instituto de la Mujer) correspondiente al programa sectorial de Estudios de la mujeres y del género dentro del III Plan Nacional de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico.

1. Introducción.

La diferencia en el nivel de renta entre los hombres y las mujeres ha sido uno de los fenómenos más analizados en la literatura económica. Sin embargo, poca atención se ha prestado a las diferencias en el nivel de desigualdad que presentan las distribuciones de los dos sexos. Precisamente, este trabajo trata de analizar si la distribución de la renta de los hombres presenta mayor, menor o igual desigualdad que la de las mujeres.

Una forma de analizar las diferencias distributivas entre ambos géneros es examinar si existen diferencias estadísticamente significativas entre distintos índices de desigualdad. Consecuentemente, requeriría realizar tantos contrastes como índices considerados. Otra forma, que simplifica la anterior, es contrastar si existen diferencias estadísticamente significativas entre las curvas de Lorenz de hombres y mujeres Este es el camino seguido en esta investigación cuya estructura es la siguiente. En la sección 2, se aclararán ciertos conceptos como la renta y la unidad de análisis utilizadas referidas a la Encuesta de Presupuestos Familiares 1990-19991 que ha sido la fuente de información empleada. En la sección 3, definiremos el dominio en sentido de la curva de Lorenz y su relación con la desigualdad.

Existen dos enfoques para contrastar si una distribución domina en sentido de la Curva de Lorenz a otra: Uno indirecto y otro directo (ver, Maasumi 1994, p.214). El enfoque indirecto consiste, básicamente, en ajustar una distribución paramétrica a los datos y en expresar la hipótesis de interés como una función de los parámetros de la distribución que mejor se ajuste a los datos. El enfoque directo no precisa de la estimación previa de la función de distribución de la renta (más detalles sobre el enfoque directo se puede encontrar en Maasumi, 1994). Se ha adoptado el primer enfoque, puesto que se simplifica considerablemente el análisis. En la sección 4, se tratan los aspectos más relevantes de la inferencia estadística paramétrica en la DPR.

Finalmente, en la sección 5, se presentan los resultados y, en la sección 6, se señalan las conclusiones obtenidas.

2. Algunas aclaraciones conceptuales.

En esta sección se determinarán ciertos aspectos metodológicos que pueden influenciar los resultados obtenidos teniendo como referencia la Encuesta de Presupuestos Familiares (EPF) del año 90-91. En particular, se concretará qué se entiende por renta, cuál va a ser la unidad de análisis en este estudio y qué escalas de equivalencia se utilizarán.

El análisis de la distribución de la renta resulta de interés, entre otras cosas, por su directa relación con la distribución del bienestar económico. Dado que el bienestar económico de los individuos es una variable que no es directamente observable, se ha asociado con tres variables que resumen de forma adecuada la posición económica de los individuos y que, por ende, son medibles: la riqueza, el gasto y la renta. La riqueza ha sido la variable menos usada dada la dificultad que entraña su valoración (Ver Naredo ,1993). Así, generalmente la controversia se establece entre la renta y el gasto.

Ruiz-Castillo (1987, pp22-23) sostiene que " el consumo actual es un indicador mucho mejor de la posición a largo plazo" del individuo, ya que las decisiones de consumo en un periodo están mas relacionadas con la renta permanente y, por tanto, menos influenciadas por los vaivenes transitorios de los ingresos corrientes. Por otra parte Atkinson (1983) señala que la renta es un indicador más adecuado de la posición económica, ya que refleja el consumo potencial del individuo, independientemente de si el individuo transforma su renta en consumo o no. Esta controversia adquiere un protagonismo en España, puesto que ambas variables están medidas con deficiencias como ponen de manifiesto Ruiz Castillo (1987), Sanz(1992), Pazos (1994) y Pena (1996). A lo largo de este articulo, se ha optado por utilizar los datos de renta , dado que se considera la variable primaria en el análisis de la desigualdad. No obstante, hay que advertir de los problemas de ocultación que tienen los datos de renta procedentes de la EPF y que de pueden distorsionar la realidad que se trata de analizar.

Los componentes de la renta que se han considerado son los asociados a los ingresos totales del hogar en la EPF (ver, Merediz y Pena 1996, p. 217) y que se corresponden con los de la magnitud económica renta disponibles, esto es, la cantidad de dinero "que les queda a los individuos después de los procesos redistributivos que se desarrollan en las sociedades modernas para corregir o modificar las reglas del mercado" en palabras de Pena (1996, p. xxii).

En cuanto a la unidad de análisis, se tiene que señalar que se ha mantenido la unidad de análisis de la EPF, a saber, el hogar. Esto implica que para realizar este estudio de género se ha dividido la muestra total de 21155, entre los hogares encabezados por hombres (17404) y mujeres(3749)[i]. La elección de unidades de análisis más pequeñas, como la persona o la familia, provoca el problema de cómo distribuir el montante de renta total del hogar a unidades de análisis más pequeñas. Como no se disponen de información sobre las transferencias dentro del hogar se ha preferido mantener el hogar como unidad de análisis.

Sin embargo, esta opción plantea una cuestión adicional al tener que comparar rentas que proceden de hogares de diferente composición: ¿se pueden considerar como iguales dos hogares con unos ingresos, por ejemplo, de 1000 euros, si unos de ellos es un hogar unipersonal y el otro está compuesto por dos adultos y un niño?. Si la respuesta es afirmativa, entonces la definición de la renta no estará influenciada por la composición del hogar y , por lo tanto, la variable a utilizar sería la renta total del hogar. Sin embargo, si la respuesta es negativa, la definición de la renta del hogar se verá afectada por la composición del mismo. La variable que refleja de forma más sencilla otras características del hogar, además de la renta, es la renta per capita. Esto es,

$$X_p = \frac{X}{T}$$

donde X_p es la renta per del hogar, X es la renta total del hogar y T es el tamaño del hogar. La ventaja de usar la renta per capita es la sencillez de su definición. No obstante, como Coulter y otros (1992) señalan, la renta per capita no tiene en cuanta que el coste marginal de un miembro adicional puede variar cuando el tamaño del hogar varía.

Otra forma de reflejar no sólo las características del hogar, sino también las economías de escala generadas por el tamaño son las escalas de equivalencia. Las escalas de equivalencia son una medida de la renta relativa requerida por los hogares de diferente composición para mantener su posición económica o utilidad inalterada. En función de las escalas de equivalencia, se define la renta equivalente, X_e, como,

$$X_e = \frac{X}{m(T, E_1,..,E_j,..)}$$

donde X es la renta total del hogar y $m(T, E_1,\ldots, E_j,..)$ es la escala de equivalencia función del tamaño del ,T y de ciertas características de los mimos ($E_{1,\ldots}$ $E_{j\ldots}$). La EPF introduce la escala de la OCDE que es la que se utilizará en este trabajo. Los pesos dados a cada uno de los miembros son 1.0 para el primer adulto del hogar, 0.7 para el resto de los adultos y 0.5 para cualquier miembro menor de 14 años.

No existe un acuerdo generalizado sobre cómo incorporar la composición de los hogares en la definición de renta y, como Coulter y otros (1992) señalan, se debería utilizar una gama de definiciones con el fin de analizar la sensibilidad de los resultados a la definición de la renta. Con tal fin, en este trabajo se utilizan tres conceptos de renta: la renta total, la renta per capita y la renta total ponderada por las escalas de la OCDE también llamada renta-OCDE.

3. La curva de Lorenz y el dominio en sentido de la curva de Lorenz.

Se considera que la distribución de la renta se puede representar por un elemento del conjunto de funciones de distribución continuas:

$$\Phi := \left\{ F : \Re_+ \to [0,1] \right\}$$

donde $\Re_+ := [0,\infty)$. La función de densidad es $f(x) = \dfrac{d(F(x))}{dx}$, la media de F es $\mu_F = \int_0^\infty z dF(z)$ y la inversa de la función de distribución es $F^{-1}(t) = \inf_x \left\{ x | F(x) \geq t \right\}$ para $t \in [0,1]$.

La *curva de Lorenz* relaciona la proporción acumulada de las unidades receptoras de renta con la proporción de renta acumulada por dichas unidades ordenadas de forma creciente, es decir,

$$L_F(p) = \frac{1}{\mu_F} \int_0^p z F^{-1}(t) dt$$

para $p \in [0,1]$ (ver, Gastwirth ,1971); es una función creciente, continua y convexa en p, con L(0; F)=0 y L(1; F)=1[ii].

La curva de Lorenz tiene una interpretación directa en términos de desigualdad. Si todos los individuos tuvieran la misma renta (igualdad total), la distribución de la renta sería degenerada en el punto μ_F, es decir, $F^{-1}(p) = \mu_F$, para $p \in [0,1]$. Esto implicaría que la curva de Lorenz coincidiría con p, (L(p,F)=p es llamada línea igualitaria). Consecuentemente, cuanto más cercana esté la curva de Lorenz a la línea igualitaria, menor desigualdad habrá. Así, dadas dos distribuciones, F y G $\in \Phi$, la distribución F presenta menos desigualdad que la G si la curva de Lorenz de F está por encima de la de G. Si las curvas de Lorenz se cortan, no se pueden obtener conclusiones definitivas sobre el nivel de desigualdad que presenta F con respecto a G.

La posición relativa de las curvas de Lorenz de dos distribuciones es lo que define el dominio en el sentido de Lorenz. Así, diremos que *la distribución F domina, en sentido de la curva de Lorenz, a G* , $F \geq_L G$, *si* $L(p,F) \geq L(p,G)$ *para* $\forall p \in [0,1]$ *con* $L(p,F) \neq L(p,G)$ *para algún* $p \in [0,1]$.

El tipo de desigualdad que mide la curva de Lorenz está caracterizado por dos rasgos. En primer lugar, la desigualdad es relativa, ya que es independiente de la renta media. En segundo lugar, el dominio en el sentido de la curva de Lorenz es equivalente al principio de transferencias de Pigou- Dalton (ver Nygard y Sändstrom, 1981, p.70)[iii]

La ordenación del dominio en el sentido de la curva de Lorenz es el mismo que el que establece los índices de desigualdad que son independientes de la media y cumplen el principio de transferencias. En otros términos, si $F \geq_L G$ implica que $I(F) < I(G)$, para cualquier índice de desigualdad, I(.), que cumple estas dos propiedades (ver Lambert, 1993, p.116). Esta relación es importante, ya que los índices más habituales, como el índice de Gini, el coeficiente de variación, la familia de índices de Atkinson y la familia de desigualdad de entropía generalizada satisfacen las dos propiedades mencionadas.

4. Inferencia estadística: un enfoque paramétrico.

Como se ha señalado anteriormente, el enfoque seguido para contrastar el dominio en sentido de la curva de Lorenz de la distribución de la renta de los hombres sobre la de las mujeres es un enfoque indirecto basado en la tradición de la estadística paramétrica.

Se considera que la muestra de la renta de los hombres ($x_{1,\ldots,}x_n$), viene generada por F y el la muestra de la renta de las mujeres ($y_{1,\ldots,}y_n$) viene que se supone generadas por G. Nuestro objetivo es contrastar si la curva de Lorenz de F es la misma que la de G, frente a la hipótesis de que F domina, en sentido de la curva de Lorenz, a G, es decir,

$$\begin{aligned} &H_{o`} : L_F(p) = L_G(p) \qquad \forall p \in [0,1] \\ &H_{1`} : L_F(p) > L_G(p) \quad \text{para algún } p \in [0,1] \end{aligned} \tag{1}$$

La inferencia estadística paramétrica es el marco en el que vamos a realizar este contraste. En términos generales, este enfoque, que Maasumi (1994) califica como indirecto, precisa, como paso previo, la estimación de una serie de parámetros determinantes de la función de distribución de la renta.

Si los estimadores tienen "buenas" propiedades y la función estimada se ajusta bien a los datos, este enfoque permite simplificar cualquier análisis basado en la DPR, ya que toda la información sobre la misma se sintetiza en un número limitado de parámetros. En nuestro caso, permitirá expresar la hipótesis de interés como una función de los parámetros de la distribución elegida. Sin embargo, la desventaja, como Maasumi (1994) señala, es que las conclusiones que se obtienen son vulnerables a posibles errores de especificación, especialmente, si la distribución paramétrica elegida se ajusta mal a los datos en los extremos inferior y superior.

Consecuentemente, la modelización paramétrica de la DPR entraña la elección no sólo de formas funcionales que sean, a priori, apropiadas para la distribución de renta, sino también métodos de estimación que garanticen buenas propiedades para los estimadores, técnicas de bondad del ajuste que cuantifiquen la diferencia entre la función ajustada y la distribución empírica y contrastes de hipótesis que permitan la elección entre diferentes formas funcionales. A continuación, expondremos algunas consideraciones sobre estos aspectos de la modelización paramétrica que es preciso tener en cuenta.

El enfoque paramétrico asume que la distribución de la renta puede ser representada por un elemento del conjunto de distribuciones continuas, perfectamente especificada, salvo un vector de orden (px1) de parámetros desconocidos, θ, es decir, por un miembro de

$$\Psi := \left\{ F_\theta, \theta \in \Theta \right\}$$

donde $\Psi \subset \Phi$ y $\Theta \subset \Re^p$ es el espacio paramétrico. $f(x;\theta)$ es la función de densidad de F_θ.

El primer paso en la modelización paramétrica consiste en elegir, entre todas las funciones de distribución continuas con representación paramétrica, aquellas distribuciones que reúnan una serie de propiedades deseables para el caso de la renta. Algunas de estas propiedades son la asimetría a la derecha, la convergencia a la ley de Pareto, la parquedad en la especificación y el origen económico de la formulación[iv]. Esta última propiedad se ha destacado en los trabajos más recientes que persiguen la especificación de funciones cada vez más flexibles que comprendan el mayor número posible de distribuciones, como casos especiales.

Unas de las formas más utilizadas por sus buenos resultados en la modelización de la distribución de la renta es la distribución Singh Maddala (SM)(ver Singh and Maddala, 1976) cuya función de densidad viene dada por

$$f^{SM}(y;a,b,q) = \frac{ab^{-a}qy^{a-1}}{\left(1+\left(y/b\right)^a\right)^{1+q}} \qquad (2)$$

donde y>0 y a, b y q>0 $q = (a,b,q)^T$

Una de las ventajas de esta función de distribución está en que es una de las funciones que mejor se ajusta a los datos de renta en España (ver Prieto y Pena, 2000). También, se puede citar que incluye entre otras funciones como la distribución log-logística y que la forma funcional de la distribución SM tiene forma cerrada.

Una vez elegida una función, el siguiente paso es la estimación del vector de parámetros desconocidos. Uno de los procedimientos más utilizados por las buenas propiedades de los estimadores es el método de máxima verosimilitud (ver, por ejemplo, Zacks, 1981).

Una propiedad de los estimadores máximo verosímiles que nos interesa resaltar es la propiedad de la invarianza. Así, sea H (θ) un vector de orden (kx1), formado por k funciones continuas del vector paramétrico, es decir, $H(\theta)=[h_1(\theta),\ldots,h_k(\theta)]^T$. Si estimador máximo verosímil de θ es $\hat{\theta}$, el estimador máximo verosímil de $H(\theta)$ es $H(\hat{\theta})$. Por tanto, $H(\hat{\theta})$ es un estimador consistente y asintóticamente eficiente, con distribución asintótica determinada por

$$\sqrt{n}(H(\hat{\theta})-H(\theta)) \xrightarrow{a} N(0,\Omega) \qquad (5)$$

donde la matriz de varianzas y covarianzas asintótica de $H(\hat{\theta})$, Ω, se puede expresar como

$$\Omega = D^T \Sigma D$$

donde D es una matriz de orden (kxp) cuyos elementos son de la forma

$$D_{ij} = \left[\frac{\partial h_i(\theta)}{\partial \theta_j}\right] \quad \begin{matrix} i=1,\ldots k \\ j=1,\ldots,p \end{matrix}$$

y Σ la matriz de varianzas y covarianzas asintótica de $\hat{\theta}$. Un estimador consistente de Ω es $\hat{\Omega} = \hat{D}^T\hat{\Sigma}\hat{D}$ con $\hat{D}$ obtenida al sustituir θ por $\hat{\theta}$.

Esta propiedad resulta especialmente útil para deducir las propiedades de los estimadores de las herramientas utilizadas en la medición de la desigualdad, ya que la mayoría se pueden expresar como funciones de los parámetros.

Concluido el proceso de modelización, la hipótesis de interés (1) se puede expresar como una función de los parámetros. Sea F_θ la distribución de renta de los hombres y $G_{\theta'}$ la distribución corregida, tales que F_θ es un caso particular de $G_{\theta'}$ o $G_{\theta'}$ es un caso particular de. La hipótesis (1) se puede formular como

$$\begin{aligned} &H_o: H(\theta_F) = H(\theta_G) \\ &H_1: H(\theta_F) > H(\theta_G) \quad \text{o} \quad H(\theta_F) < H(\theta_G) \end{aligned} \qquad (6)$$

donde H() el vector formado por las $r \leq p$ funciones de los parámetros que determinan el dominio en sentido de la Curva de Lorenz. El estadístico a utilizar sería,

$$\frac{\sqrt{n}i^T\left(H_F(\hat{q}_F)-H_G(\hat{q}_G)\right)}{\sqrt{i^T\hat{\Omega}_{F*G}i}} \xrightarrow{H_o}_a N(0,1) \qquad (7)$$

donde ι es un vector columna formado por r unos y $\hat{\Omega}_{F+G} = \left(\hat{D}^T_{H_F}\hat{\Sigma}_F\hat{D}_{H_F}\right) + \left(\hat{D}^T_{H_G}\hat{\Sigma}_G\hat{D}_{H_G}\right)$.

5. Resultados.

La tabla 1 proporciona os resultados de las estimaciones de la distribución SM para los datos de renta total , para lo de la renta per capita y para los de la renta OCDE. En dichas tablas se muestra el valor de los estimadores máximo verosímiles[v], el error estándar de los estimadores entre paréntesis[vi] y el valor del logaritmo de la función de verosimilitud(ℓ) evaluado en el estimador máximo verosímil,.

	Renta Total		Renta per-cápita		Renta-OCDE	
	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres	Hombres	Mujeres
a	2.8770 (0.0320)	2.4835 (0.0625)	3.4587 (0.0405)	3.2468 (0.0821)	3.4587 (0.0405)	3.2468 (0.0821)
b	2.1881 (0.0359)	1.2166 (0.0449)	0.7260 (0.0090)	0.7663 (0.0216)	0.7260 (0.0090)	0.7663 (0.0216)
Q	1.2754 (0.0391)	0.9333 (0.0541)	0.9336 (0.0252)	0.9237 (0.0535)	0.9336 (0.0252)	0.9237 (0.0535)
ℓ	-26289.47	-5037.96	-8643.10	-2342.46	-8643.10	-2342.46

ℓ : valor del logaritmo natural de la función de verosimilitud en el máximo

Tabla 1: Modelización paramétrica de la distribución de la renta total, renta per capita y renta-OCDE.

Las hipótesis (6) se pueden concretar ahora, expresándolas como una función de los parámetros de la distribución S-M aprovechando los resultados de Wilfling y Krämer (1993). Estos autores proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para el dominio en sentido Lorenz entre dos distribuciones Singh-Maddala. Así, dos distribuciones Singh-Maddala F_θ y $G_{\theta'}$ con parámetros θ=(a,b,q) y θ'=(a',b',q'), $F_\theta \geq_L G_{\theta'}$ si y sólo si a>a' y aq>a'q'. Esto significa que la hipótesis a contrastar es:

$$H_o : \begin{pmatrix} a \\ aq \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ dq \end{pmatrix} \qquad H_1 : \begin{pmatrix} a \\ aq \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a' \\ a'q' \end{pmatrix}$$

El valor de estadístico (7) para el caso de la renta total es 4.1, para el de la renta per capita es 3.3 y para el de renta OCDE es de 2.9. lo que implica rechazar la hipótesis nula. En otras palabras la evidencia empírica nos muestra que la distribución de los hombres domina en sentido de la curva de Lorenz a la de las mujeres y, por lo tanto, que la distribución de la renta de las mujeres presenta mayor desigualdad. Además este resultado es independiente del concepto de renta utilizado.

6. Conclusiones.

El objetivo de este artículo ha sido analizar las diferencias en el nivel de desigualdad entre la distribución de la renta de los hombres y el de las mujeres. Con este fin, se ha contrastado, desde una perspectiva paramétrica, el dominio en sentido de la curva de Lorenz de la distribución generada por los datos de renta de los hogares encabezados por hombres y por mujeres procedentes de la EPF del año 1990-91.

Se ha utilizado la distribución Singh-Maddala para ajustar ambos conjuntos de datos dada la flexibilidad de dicha curva y los buenos resultados que ha proporcionado dicha función, en términos de bondad del ajuste, en el caso español.

La evidencia empírica apunta a que la distribución de los hombres domina, en sentido de la curva de Lorenz, a la de las mujeres. Por tanto, existen diferencias significativas entre el nivel de desigualdad de la distribución de la renta de los hombres y el de las mujeres, siendo menor en la primera distribución.

Bibliografía

Atkinson, A.B (1983).: On the measurement of inequality. *Journal of Economic Theory* 2, 244-63.Traducido en Hacienda Pública Española,61, 217-233.

Coulter, F, Cowell, F. y Jenkins, S. (1992). Differences in Needs and the Assesment of Income Distribution. *Bulletin of Economic Research*, pp.47-124.

Dagum, C. (1977): A new model of personal income distribution: specification and estimation, *Economiee Appliqée* 30, 413-437.

Gastwirth, J.L. (1971): A General Definition of the Lorenz Curve. *Econometrica* 39, 1037-1039.

Kakwani, W.C (1980): *Income Inequality and Poverty. Methods of Estimation and Policy Applications.* World Bank Research Publication

Lambert, P.J. (1993): *The Distribution and Redistribution of Income* Segunda Edición. Manchester University Press.

Maasumi, E. (1994): Empirical analysis of inequality and welfare en P. Schmidt y H. Pesaran (eds.), *Handbook of Applied Microeconomics*.

Merediz, A. y B. Pena (1996): La Cuenta de los Hogares en 1973,1980 y 1990, por Autonomías, Categorías Socioprofesionales y Clases de Hábitat en

Pena, B., J. Callealta, J.M. Casas, A. Merediz y J. Núñez,J *Distribución Personal de la Renta en España*. Ed. Pirámide. Madrid. Cap.III.

Naredo, J.M.(1993): Composición y Distribución de la Riqueza de los Hogares Españoles. *Actas del I Symposio sobre la Igualdad y Distribución de la Renta y la Riqueza*. Argentaria. Madrid

Nygard, F. y A. Sandstrom (1981): *Measuring Income Inequality.* University of Stockholm.

Pazos, M. (1994): Variabilidad Semanal de los Gastos en la EPF. *Estadística Española*, 137, 431-444.

Pena, J.B (1996): Prólogo de la Distribución Personal de la Renta en España en Pena,J.B., Callealta,J., Casas,J.M., Merediz,A. y Núñez,J *Distribución Personal de la Renta en España*. Ed. Pirámide. Madrid.

Pena,J.B., J. Callealta, J.M. Casas, A. Merediz y J. Núñez (1996): *Distribución Personal de la Renta en España*. Ed. Pirámide. Madrid.

Prieto, M. y Pena B. (2000): Repercusiones de la ocultación de la renta sobre la medición de la desigualdad. Estudios de Economía Aplicada,15 pp.153-172.

Ruiz-Castillo, J. (1987): La Medición de la Pobreza y de la Desigualdad en España. *Estudios Económicos* no. 42. Banco de España. Madrid.

Sanz, B (1992): La Encuesta de Presupuestos Familiares 1990-1991. *Situación*, 2-3, 151-166.

Singh, S. K. and G. S. Maddala (1976): A Function for the size distribution of income *Econometrica* 44, 963-970.

Wilfling, B. y W. Kramer (1993): The Lorenz-Ordering of Singh-Maddala Income Distributions. *Economics Letters*, 43, 53-57.

Zacks,S. (1981). *Parametric Statistical Inference: Basic Theory and Modern Approaches*. Pergemon Press

---

[i] Se considera cabeza de familia como la persona con mayor nivel de ingresos.
[ii] En Kakwani (1980, p.89) y Nygard y Sändstrom (181, pp. 150-157) se analizan detalladamente éstas y otras propiedades.
[iii] El tratamiento continuo de la distribución de la renta asume implícitamente la propiedad de simetría, que es necesaria, en el caso discreto, para que el principio de transferencias sea equivalente al dominio en sentido de la curva de Lorenz
[iv] Una revisión de estas propiedades se puede encontrar en Dagum, (1977) y Pena et. Al. (1996).
[v] Los problemas de optimización que se plantean para obtener los estimadores máximo verosímiles de los parámetros de las distribuciones analizadas son no lineales. Por tanto, fue necesario la aplicación de algún algoritmo de optimización numérica que en nuestro caso fue el de Newton- Raphson. Los criterios de convergencia establecidos fueron dos: que la diferencia entre los valores de los estimadores en dos iteraciones consecutivas fuera de 10^{-6} y que las condiciones de primer orden fueran menores que 10^{-2}. El programa fue diseñado en lenguaje C.

[vivi] El error estándar de un elemento $\hat{\theta}_i$ de $\hat{\theta}$ se ha calculado $s.e.(\hat{\theta}_i) = \sqrt{\frac{\hat{\Sigma}_{ii}}{n}}$, donde $\hat{\Sigma}_{ii}$ es el valor del elemento i de la diagonal principal del estimador de la matriz de varianzas y covarianzas asintótica $\hat{\Sigma}$.