

Capítulo 2: Skewness and kurtosis in VaR estimation

Laura García Jorcano

Doctorado en Banca y Finanzas Cuantitativas

Madrid, 17 de marzo de 2015

Literatura previa - 1/3

Diversos trabajos han documentado la existencia de asimetría y de curtosis en las series financieras y la necesidad de utilizar distribuciones no gaussianas para estimar el VaR.

- Para capturar la curtosis se ha utilizado, frecuentemente y de forma satisfactoria, la distribución t-Student.
- Para capturar la asimetría se han utilizado diferentes distribuciones: la distribución t-Student asimétrica de Hansen (1994), la distribución t-generalizada asimétrica de Theodossiou (1998), la distribución t-Student asimétrica de Fernández & Steel (1998), la distribución t-Student asimétrica de Lambert y Laurent (2001)...
- Otras formas de introducir la asimetría y la curtosis en la estimación del VaR: expansión Gram-Charlier, Cornish-Fisher,...

Literatura previa - 2/3

Sobre estimación y validación del VaR en contextos no gaussianos y/o con modelos GARCH no estándar:

- Benito, S. (2013): Evidencia que la asimetría y la curtosis en las distribuciones financieras son cambiantes en el tiempo y responden asimétricamente a shocks de diferente tamaño y signo. Sugiere modelar dichos comportamientos dinámicos con la especificación de modelos GARCH asimétricos.
- Abad, P. y Benito, S. (2013): Trabajan con diferentes índices de mercado, teniendo en cuenta el método de cálculo del VaR, el modelo utilizado para el cálculo de la varianza condicional y una serie de backtesting que dichos modelos deben pasar satisfactoriamente, deciden que el VaR calculado por el método paramétrico con modelo EGARCH con distribución t-Student es el más adecuado para recoger el riesgo que se produce en la cola de la distribución.

Literatura previa - 3/3

- Giot & Laurent (2003) utilizan modelos APARCH con distribución t-Student asimétrica (Lambert & Laurent) en la estimación del VaR para índices y activos de renta variable.
- Hay diversos trabajos que han extendido estos modelos para estimar el VaR a otros activos de renta variable (Diamandis, Drakos, Kouretas y Zarangas, 2011), a commodities (Giot & Laurent, 2003) y a datos de alta frecuencia (Shao, Lian & Yin, 2009).
- Otros trabajos han utilizado otros test de validación del VaR: Test de cobertura condicional de Christoffersen (2000) y/o Dynamic Quantile de Engle & Manganelli (2004).
- Otros han ampliado a modelos fraccionalmente integrados (Mabrouk & Saadi, 2012).

Objetivo - 1/2

¿Cómo afecta a la estimación del VaR la asimetría y la curtosis que presentan las series financieras?

Aportación:

- Mercado español de renta variable: IBEX 35.
- Aplicación simulada de mixturas de dos normales para analizar el efecto de la asimetría y de la curtosis en la estimación del VaR.
- Comparación de los resultados obtenidos con el VaR con los obtenidos con otra medida de riesgo, el Expected Shortfall.

Objetivo - 2/2

Para intentar responder a esta pregunta,

- Se toman datos diarios del mercado de renta variable (índices) para un determinado periodo muestral.
- Se aplica el método paramétrico de varianza-covarianza para diferentes niveles de confianza y para un horizonte temporal de un día.
- Se trabaja con ambas colas de la distribución para recoger tanto las posiciones largas como las posiciones cortas en el mercado.
- Se utilizan diferentes modelos paramétricos univariantes de la clase ARCH cuyos errores siguen diversas funciones de distribución.
- Se realiza el Test de cobertura incondicional (Kupiec, 1995) a los VaR dinámicos obtenidos tanto dentro de muestra (in-sample) como fuera de muestra (out-of-sample).

Modelización - Modelo APARCH

El modelo APARCH (Ding, Granger & Engle, 1993) tiene en cuenta los agrupamientos de volatilidad, las colas pesadas y el efecto apalancamiento que presentan las series financieras.

$$y_t = X_t \mathcal{B} + \varepsilon_t \quad t = 1, 2, \dots, T$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t$$

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j (\sigma_{t-j})^\delta$$

El parámetro γ_i refleja el efecto apalancamiento ($-1 < \gamma_i < 1$). Un valor positivo (negativo) de γ_i significa que los shocks pasados negativos (positivos) tienen mayor impacto en la volatilidad condicional actual que los shocks pasados positivos (negativos). El parámetro δ juega el papel de la transformación de Box-Cox de σ_t ($\delta > 0$).

Modelización - La perturbación (z_t) sigue una distribución Skewed t-Student - 1/3

- Fernández & Steel (1998): distribución t-Student sesgada o asimétrica. Consiste en añadir a la distribución t-Student el parámetro de asimetría. Se expresa en términos de moda y dispersión.
- Lambert & Laurent (2001): re-expresaron la función de densidad de la t-Student asimétrica en términos de media y varianza.
- Se supone que $z_t \sim skst(z|\xi, \nu)$.
- El parámetro de asimetría $\xi > 0$ es definido como la relación de masas de probabilidad por encima y por debajo de la media

$$\frac{Pr(z \geq 0|\xi)}{Pr(z < 0|\xi)} = \xi^2$$

Modelización - La perturbación (z_t) sigue una distribución Skewed t-Student - 2/3

La función de densidad de una distribución SKST estandarizada es

- Si $z_t < -\frac{m}{s}$

$$f_1(z|\xi, \nu) = \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}s} s \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{(\nu-2)\pi\sigma_t^2}} \left(1 + \frac{(\xi(sz + m))^2}{\nu-2} \right) \right)^{-\frac{(1+\nu)}{2}}$$

- Si $z_t \geq -\frac{m}{s}$

$$f_2(z|\xi, \nu) = \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}s} s \left(\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{(\nu-2)\pi\sigma_t^2}} \left(1 + \frac{((sz + m)/\xi)^2}{\nu-2} \right) \right)^{-\frac{(1+\nu)}{2}}$$

donde,

$$m = \frac{\Gamma(\frac{\nu-1}{2}) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\xi - \frac{1}{\xi} \right) \quad s^2 = \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1 \right) - m^2$$

Modelización - La perturbación (z_t) sigue una distribución Skewed t-Student - 3/3

$f(z_t|1/\xi, \nu)$ es el espejo de $f(z_t|\xi, \nu)$ con respecto a la media cero.

$$f(z_t|1/\xi, \nu) = f(-z_t|\xi, \nu)$$

- Si $0 < \xi < 1 \rightarrow \ln(\xi) < 0 \rightarrow$ Asimetría negativa.
- Si $\xi = 1 \rightarrow \ln(\xi) = 0 \rightarrow$ No hay asimetría.
- Si $\xi > 1 \rightarrow \ln(\xi) > 0 \rightarrow$ Asimetría positiva.

Modelización - VaR con distribución Skewed t-Student - 1/2

El Value-at-Risk (VaR) que se obtiene para posiciones largas es $\mu_t + skst_{\alpha, \nu, \xi} \sigma_t$ y para posiciones cortas es $\mu_t + skst_{1-\alpha, \nu, \xi} \sigma_t$, siendo $skst_{\alpha, \nu, \xi}$ el cuantil que a la izquierda deja un α % de la distribución t-Student asimétrica y $skst_{1-\alpha, \nu, \xi}$ el cuantil que a la derecha deja un α % de la distribución t-Student asimétrica.

Modelización - VaR con distribución Skewed t-Student - 2/2

Lambert & Laurent (2001) demostraron que la función cuantil $skst_{\alpha,\nu,\xi}^*$ de la función de densidad t-Student asimétrica no estandarizada es

$$skst_{\alpha,\nu,\xi}^* = \begin{cases} \frac{1}{\xi} st_{\alpha,\nu} \left[\frac{\alpha}{2} (1 + \xi^2) \right], & \text{si } \alpha < \frac{1}{1+\xi^2}, \\ -\xi st_{\alpha,\nu} \left[\frac{1-\alpha}{2} (1 + \xi^{-2}) \right], & \text{si } \alpha \geq \frac{1}{1+\xi^2}. \end{cases}$$

donde $st_{\alpha,\nu}$ es la función cuantil de la función de densidad t-Student (varianza unitaria). La función cuantil de la función t-Student asimétrica estandarizada es

$$skst_{\alpha,\nu,\xi} = \frac{skst_{\alpha,\nu,\xi}^* - m}{s}$$

- Si $\ln(\xi) < 0 \rightarrow |skst_{\alpha,\nu,\xi}| > |skst_{1-\alpha,\nu,\xi}|$
- Si $\ln(\xi) > 0 \rightarrow |skst_{\alpha,\nu,\xi}| < |skst_{1-\alpha,\nu,\xi}|$

Una comparación con Giot & Laurent - 1/5

¿Afecta a la conclusión una mejor optimización de la función objetivo?

Una comparación con Giot & Laurent - 2/5

Se realiza un análisis comparativo de los resultados que obtienen Giot & Laurent en su trabajo “Value-at-Risk for long and short trading positions” (2003) en los modelos VaR univariantes (estimación de los parámetros del modelo Skewed Student APARCH y cálculo del VaR in-sample y out-of-sample) para el índice NASDAQ, del que se han tomado un total de 4093 rendimientos diarios, del periodo 11/10/1984 - 21/12/2000, y para el NIKKEI, con un total de 4246 rendimientos diarios, del periodo 04/01/1984 - 21/12/2000. Los rendimientos diarios se definen como $y_t = 100[\ln p_t - \ln p_{t-1}]$, donde p_t son los precios diarios de los índices (Fuente: Yahoo Finance).

Una comparación con Giot & Laurent - 3/5

Los estadísticos descriptivos de los dos índices son

	NASDAQ	NIKKEI
Media muestral	0.05516	0.00710
S.d.muestral	1.26185	1.34714
Asimetría	-0.74128	-0.14595
Exceso curtosis	11.25534	10.15573
Mínimo	-12.04320	-16.13740
Máximo	9.96364	12.42784
$Q^2(10)$	2874.4	590.6445

Una comparación con Giot & Laurent - 4/5

Se estima el modelo AR(2)-Skewed Student APARCH(1,1) para el índice NASDAQ con el software R

	Estimate	Std Error	t value	$Pr(> t)$
μ	0.059251	0.012828	4.6189	0.000004
ϕ_1	0.184745	0.017043	10.8399	0.000000
ϕ_2	-0.024032	0.016225	-1.4812	0.138560
ω	0.015381	0.003786	4.0624	0.000049
α_1	0.126864	0.014414	8.8013	0.000000
γ_1	0.275354	0.056526	4.8713	0.000001
β_1	0.888372	0.014074	63.1220	0.000000
δ	1.119540	0.149549	7.4861	0.000000
ν	6.701625	0.664450	10.0860	0.000000
ξ	0.830878	0.019090	43.5245	0.000000

Una comparación con Giot & Laurent - 5/5

Los parámetros estimados para el índice NIKKEI son

	Estimate	Std Error	t value	$Pr(> t)$
μ	0.033746	0.013865	2.43393	0.014936
ϕ_1	0.015416	0.015416	1.01996	0.307747
ϕ_2	-0.012329	0.015696	-0.78548	0.432175
ω	0.024325	0.004395	5.53464	0.000000
α_1	0.105103	0.010899	9.64375	0.000000
γ_1	0.493053	0.070353	7.00831	0.000000
β_1	0.897018	0.010285	87.22010	0.000000
δ	1.185051	0.134478	8.81222	0.000000
ν	6.504333	0.589197	11.03932	0.000000
ξ	0.947168	0.021094	44.90277	0.000000

Una comparación con Giot & Laurent - Test de Kupiec - 1/7

Se procede a realizar un backtesting para evaluar los modelos utilizados.

- Test de Kupiec (1995).
- Consiste en contar las veces que las pérdidas y/o ganancias exceden el VaR durante un periodo.
- La probabilidad de observar T_1 excesos durante un periodo de T observaciones viene dada por la distribución binomial

$$(1 - p)^{T_0} p^{T_1}$$

Una comparación con Giot & Laurent - Test de Kupiec (in-sample) - 2/7

Kupiec desarrolló el siguiente estadístico

$$LR_{uc} = -2 \ln \left(\frac{(1 - \alpha)^{T_0} \alpha^{T_1}}{(1 - p)^{T_0} p^{T_1}} \right)$$

donde α es la probabilidad teórica, T_1 el número de veces que excedió el límite del VaR en los T días, $T_0 = T - T_1$ y $p = \frac{T_1}{T}$ es la frecuencia con que las pérdidas exceden del VaR; basado en una distribución chi-cuadrado con un grado de libertad.

Todos los modelos se chequean con un nivel del VaR α que va desde 5 % a 0.25 % y su actuación es evaluada calculando el índice de fallos (p) para los rendimientos y_t .

$$H_0 : p = \alpha \quad H_1 : p \neq \alpha$$

Una comparación con G&L - Test de Kupiec (in-sample) - NASDAQ - 3/7

α	5 %	2.5 %	1 %	0.5 %	0.25 %
Nº excep esperadas	205	102	41	20	10
Long position					
RiskMetrics	0.001303**	0**	0**	0**	0**
N APARCH	0.114916	0.000247**	0.000003**	0.000001**	0**
ST APARCH	0.000298**	0.000026**	0.050306	0.075208	0.053248
SKST APARCH	0.600148	0.737875	0.530281	0.917615	0.405903
Short position					
RiskMetrics	0.001167**	0.015051*	0.991229	0.331498	0.264289
N APARCH	0.000007**	0.000606**	0.031229*	0.303485	0.812404
ST APARCH	0.000002**	0.000001**	0.000001**	0.000008**	0.001607**
SKST APARCH	0.600148	0.894245	0.429121	0.303485	0.150846

Una comparación con Giot & Laurent - Test de Kupiec (in-sample) - NIKKEI - 4/7

α	5 %	2.5 %	1 %	0.5 %	0.25 %
Nº excep esperadas	205	102	41	20	10
Long position					
RiskMetrics	0.000443**	0**	0**	0**	0**
N APARCH	0.422248	0.293934	0.004798**	0.046758*	0.000172**
ST APARCH	0.075613	0.505118	0.588442	0.786964	0.479036
SKST APARCH	0.542716	0.832077	0.042505*	0.470457	0.676776
Short position					
RiskMetrics	0.005432**	0.988233	0.015988**	0.000277**	0.000009**
N APARCH	0.000088**	0.031353*	0.324818	0.006169**	0.000026**
ST APARCH	0.002062**	0.023923*	0.483690	0.425020	0.906374
SKST APARCH	0.069244	0.186817	0.698022	0.316149	0.204773

Una comparación con Giot & Laurent - Test de Kupiec (out-of-sample) - 5/7

- La muestra inicial que se utiliza para estimar los parámetros está formada por la muestra completa de datos a excepción de los datos de los últimos cinco años.
- Se utiliza un método recursivo, es decir, en cada iteración se añade un dato más a la muestra inicial y se predice el VaR para el día siguiente. El VaR predicho un día hacia delante es comparado con los rendimientos observados y ambos resultados son guardados para su posterior evaluación con el test de Kupiec.
- Los parámetros del modelo se actualizan cada 50 días.
- Se realizan 1260 predicciones del VaR un día hacia delante, esto es, las correspondientes a cinco años.

Una comparación con G&L - Test de Kupiec (out-of-sample) - NASDAQ - 6/7

α	5 %	2.5 %	1 %	0.5 %	0.25 %
Nº excep esperadas	63	32	13	6	3
Long position					
RiskMetrics	0.034590 *	0.033162 *	0.004112**	0.000140**	0.000033**
N APARCH	0**	0.000009**	0**	0**	0**
ST APARCH	0**	0**	0.001964**	0.019343*	0.153335
SKST APARCH	0.004747**	0.071193	0.509438	0.311108	0.645430
Short position					
RiskMetrics	0.794990	0.927925	0.643327	0.311108	0.336668
N APARCH	0.013494*	0.191680	0.355475	0.089728	0.153335
ST APARCH	0.025568*	0.788227	0.162710	0.141916	0.012020*
SKST APARCH	0**	0.000122**	0.355475	0.783577	0.645430

Una comparación con G&L - Test de Kupiec (out-of-sample) - NIKKEI - 7/7

α	5 %	2.5 %	1 %	0.5 %	0.25 %
Nº excep esperadas	63	32	13	6	3
Long position					
RiskMetrics	0.025568*	0.002073**	0.000905**	0.001193**	0.002122**
N APARCH	0.254879	0.033162*	0.016079*	0.019343*	0.022183*
ST APARCH	0.002235**	0.255689	0.864032	0.783577	0.486602
SKST APARCH	0.034590*	0.427075	0.643327	0.324637	0.156382
Short position					
RiskMetrics	0.109158	0.519890	0.355475	0.089728	0.061707
N APARCH	0.184379	0.647580	0.150843	0.043124*	0.002122**
ST APARCH	0.601411	0.158040	0.910293	0.903859	0.932019
SKST APARCH	0.608654	0.785005	0.236874	0.514662	0.932019

Aplicación simulada

¿Afecta a la conclusión las diferencias en signo y/o en valor de la asimetría y/o el exceso de curtosis de la serie financiera?

Aplicación simulada - Generación de mixturas - 1/3

Si X es una mixtura de n variables aleatorias normales X_i con función de densidad (pdf)

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i f(x|\mu_i, \sigma_i^2)$$

donde, para $i = 1, \dots, n$,

$$f_i(x|\mu_i, \sigma_i^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

$$0 \leq p_i \leq 1, \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

entonces,

Aplicación simulada - Generación de mixturas - 2/3

$$\mu = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i$$

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i (\sigma_i^2 + \mu_i^2) - \mu^2$$

$$sk = \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n p_i (\mu_i - \mu) [3\sigma_i^3 + (\mu_i - \mu)^2]$$

$$k = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n p_i [3\sigma_i^4 + 6(\mu_i - \mu)^2 \sigma_i^2 + (\mu_i - \mu)^4]$$

Aplicación simulada - Generación de mixturas - 3/3

		ASIMETRÍA							
		> 1				< 1			
		+		-		+		-	
CURTOSIS	3	N(0,0.3)-N(3,1); $p_1=0.7$		N(0,0.3)-N(-3,1); $p_1=0.7$		N(0,0.8)-N(3,0.8); $p_1=0.78$		N(0,0.8)-N(-3,0.8); $p_1=0.78$	
		$\mu = 0,9$ $\sigma = 1,5$	$\mu = -0,9$ $\sigma = 1,5$	$\mu = 0,66$ $\sigma = 1,478$	$\mu = -0,66$ $\sigma = 1,478$				
	$sk = 1,214$ $k = 3,045$	$sk = -1,214$ $k = 3,045$	$sk = 0,804$ $k = 2,914$	$sk = -0,804$ $k = 2,914$					
	$\hat{\xi} = 3,13$ $\hat{\nu} = 2,01$	$\hat{\xi} = 0,31$ $\hat{\nu} = 2,01$	$\hat{\xi} = 1,80$ $\hat{\nu} = 20,07$	$\hat{\xi} = 0,54$ $\hat{\nu} = 34,34$					
	> 3	N(0,0.5)-N(3,1); $p_1=0.95$		N(0,0.5)-N(-3,1); $p_1=0.95$		N(0,0.8)-N(3,0.8); $p_1=0.96$		N(0,0.8)-N(-3,0.8); $p_1=0.96$	
		$\mu = 0,15$ $\sigma = 0,845$	$\mu = -0,15$ $\sigma = 0,845$	$\mu = 0,12$ $\sigma = 0,993$	$\mu = -0,12$ $\sigma = 0,993$				
$sk = 2,528$ $k = 11,925$	$sk = -2,528$ $k = 11,925$	$sk = 0,975$ $k = 5,464$	$sk = -0,975$ $k = 5,464$						
$\hat{\xi} = 1,33$ $\hat{\nu} = 2,72$	$\hat{\xi} = 0,74$ $\hat{\nu} = 2,75$	$\hat{\xi} = 1,25$ $\hat{\nu} = 6,12$	$\hat{\xi} = 0,82$ $\hat{\nu} = 5,24$						

Aplicación simulada - Test de Kupiec (out-of-sample) SKST-APARCH - 1/4

α	5%	2.5%	1%	0.5%	0.25%
Nº excep esperadas	63	32	13	6	3
Long position					
$\uparrow sk_{+} y ek \approx 0$	1	0.928294	0.16271	0.141916	0**
$\uparrow sk_{-} y ek \approx 0$	0.006802	0**	0**	0**	0**
$\uparrow sk_{+} y ek > 0$	0.233531	0.000159**	0.000019**	0**	0**
$\uparrow sk_{-} y ek > 0$	0.143	0.101	0**	0.311	0.156
$\downarrow sk_{+} y ek \approx 0$	0.700293	0.333953	0.236874	0.514662	0.336668
$\downarrow sk_{-} y ek \approx 0$	0.079864	0.000059**	0.000019**	0**	0**
$\downarrow sk_{+} y ek > 0$	0.444659	0.405374	0.282739	0.324637	0.156383
$\downarrow sk_{-} y ek > 0$	0.444659	0.0004**	0.000001**	0.043124*	0.486602
Short position					
$\uparrow sk_{+} y ek \approx 0$	0.000001**	0**	0**	0**	0**
$\uparrow sk_{-} y ek \approx 0$	0.796991	0.427075	0.445068	0.044827*	0**
$\uparrow sk_{+} y ek > 0$	0.444659	0.000009**	0**	0.043124*	0.486602
$\uparrow sk_{-} y ek > 0$	0.445	0.07	0**	0**	0**
$\downarrow sk_{+} y ek \approx 0$	0.061135	0.015005*	0**	0**	0**
$\downarrow sk_{-} y ek \approx 0$	0.601411	0.519890	0.643327	0.783577	0.336668
$\downarrow sk_{+} y ek > 0$	0.043354*	0.140699	0.029964*	0.043124*	0**
$\downarrow sk_{-} y ek > 0$	1	0.647583	0.014277*	0.044827*	0**

Aplicación simulada - Test de Kupiec - 2/4

Si la distribución de rendimientos simulada presenta exceso de curtosis y asimetría alta/baja o positiva/negativa, el modelo SKST APARCH es el que mejor modela dicha distribución, tanto en su cola derecha (VaR para posiciones cortas) como en su cola izquierda (VaR para posiciones largas). Esto se observa en los resultados obtenidos en el Test de Kupiec in-sample y en el Test de Kupiec out-of-sample.

Aplicación simulada - Test de Kupiec - 3/4

Si la distribución de rendimientos simulada no presenta exceso de curtosis y presenta alta asimetría positiva o negativa, el modelo SKST APARCH es el único modelo de los estudiados que se ajusta adecuadamente a dicha distribución, es decir el índice de fallos (p) coincide con la probabilidad teórica (α) para un nivel de significación del 5 % elegido para este trabajo.

Aplicación simulada - Test de Kupiec - 4/4

Si la distribución de rendimientos simulada no presenta exceso de curtosis y presenta baja asimetría positiva o negativa, el modelo SKST APARCH no se ajusta tan bien a la misma.

Aplicación real - 1/4

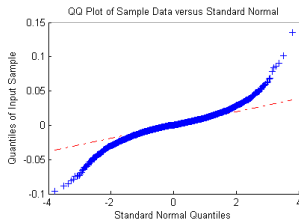
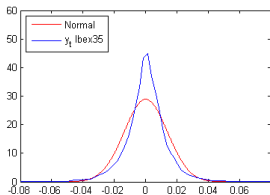
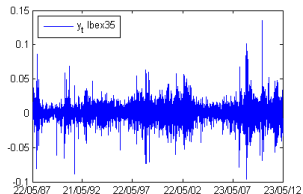
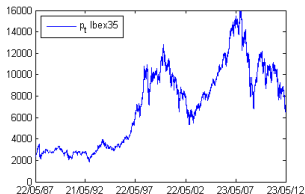
¿Afecta a la conclusión la introducción del periodo de crisis actual?

Aplicación real - 2/4

Las series de rendimientos del índice IBEX 35 para el periodo muestral del 22/05/1987 al 23/05/2012 (6523 datos) y del NASDAQ para el periodo muestral del 22/05/1987 al 20/05/2013 (6781 datos), presentan asimetría negativa y exceso de curtosis.

	IBEX 35	NASDAQ
Media muestral (%)	0.0155	0.0317
Varianza muestral (%)	0.0190	0.0214
Asimetría	-0.1111	-0.2197
Curtosis (exceso)	6.2815	7.5854
Rango (%)	23.0695	25.3024
Mínimo (%)	-9.5859	-12.0478
Máximo (%)	13.4836	13.2546

Aplicación real - 3/4



Aplicación real - 4/4

Cada una de estas series se modela caracterizando la ecuación de la media con modelos ARIMA, para posteriormente caracterizar la ecuación de la varianza con los siguientes modelos:

- Riskmetrics.
- GARCH(1,1) con error que sigue una Normal (N GARCH).
- APARCH(1,1) con error que sigue una Normal (N APARCH).
- APARCH(1,1) con error que sigue una t-Student (ST APARCH).
- APARCH(1,1) con error que sigue una t-Student asimétrica (SKST APARCH).

Aplicación real - Skewed Student APARCH(1,1) - IBEX 35 - 1/4

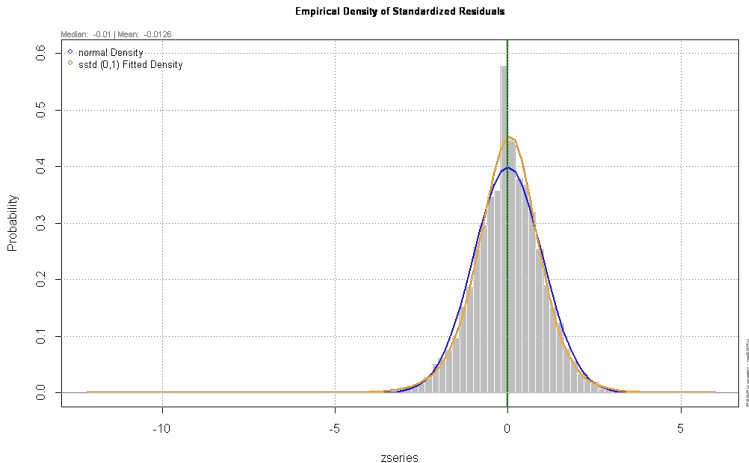
Se estima conjuntamente por Máxima Verosimilitud la estructura MA(1)-Skewed Student APARCH(1,1)

	Estimate	Std Error	t value	$Pr(> t)$
μ	0.000375	0.00013	2.8932	0.003814
θ_1	0.073348	0.012753	5.7516	0.000000
ω	0.000046	0.000026	1.7837	0.074466
α_1	0.086632	0.009784	8.8548	0.000000
γ_1	0.374789	0.057085	6.5654	0.000000
β_1	0.918991	0.009867	93.1423	0.000000
δ	1.259057	0.126187	9.9777	0.000000
ν	7.187694	0.575146	12.4972	0.000000
ξ	0.962364	0.016673	57.7198	0.000000

Aplicación real - Skewed Student APARCH(1,1) - IBEX 35 - 2/4

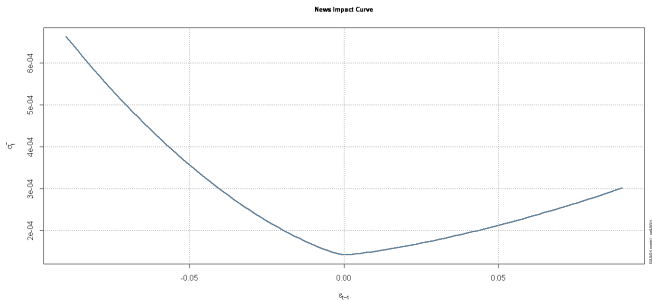
En el siguiente gráfico se recoge la función de densidad empírica de los residuos estandarizados. Es una distribución Skewed t-Student (línea amarilla) que como podemos observar presenta más curtosis que la distribución normal (línea azul) y además presenta asimetría negativa, ya que $\ln(\xi) = \ln(0,962364) = -0,03836 < 0$ o lo que es lo mismo $\xi < 1$.

Aplicación real - Skewed Student APARCH(1,1) - IBEX 35 - 3/4



Aplicación real - Skewed Student APARCH(1,1) - IBEX 35 - 4/4

Se observa que los rendimientos negativos presentan mayor volatilidad que los positivos. Es decir, se recoge el efecto apalancamiento, de ahí que la curva de impacto sea asimétrica.



Aplicación real - Resúmenes - IBEX 35 - 1/2

	Normal	Student	SkStudent
μ	0.000342	0.000609	0.000375
θ_1	0.078928	0.074175	0.073348
ω	0.000044	0.000000	0.000046
α_1	0.074052	0.087464	0.086632
γ_1	0.485941	0.269234	0.374789
β_1	0.915552	0.933325	0.918991
δ	1.396858	1.260005	1.259057
ν		6.568914	7.187694
ξ			0.962364
LogLikelihood	19843.7	20033.89	20062.87
AIC	-6.0822	-6.1486	-6.1490
BIC	-6.0748	-6.1318	-6.1393

Aplicación real - Resúmenes - NASDAQ - 2/2

	Normal	Student	SkStudent
μ	0.000644	0.000787	0.000507
ϕ_1	0.063392	0.071022	0.063251
ω	0.000000	0.000059	0.000056
α_1	0.088585	0.085238	0.08489
γ_1	0.287644	0.456793	0.456316
β_1	0.931350	0.923719	0.923683
δ	1.366807	1.143000	1.165932
ν		6.908796	7.511483
ξ			0.880627
LogLikelihood	20843.08	21052.85	21082.19
AIC	-6.1454	-6.2070	-6.2154
BIC	-6.1384	-6.1990	-6.2063

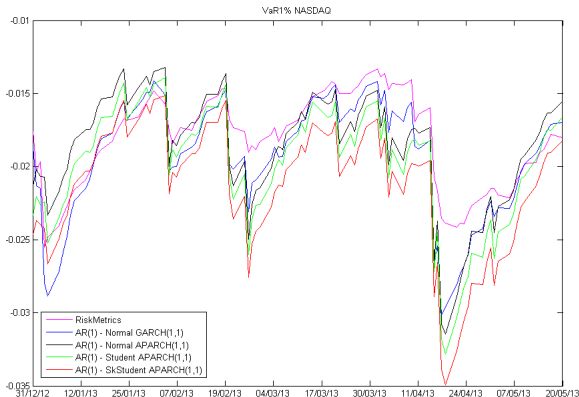
Aplicación real - Test de Kupiec (out-of-sample) - IBEX 35 - 1/2

α	5 %	2.5 %	1 %	0.5 %	0.25 %
Nº excep esperadas	63	32	13	6	3
Long position					
RiskMetrics	0.000113**	0.000035**	0.000173**	0.008125**	0.000574**
N GARCH	0**	0**	0.000029**	0.008125**	0.002122**
N APARCH	0.00028**	0.000122**	0.004112**	0.089728	0.022183**
ST APARCH	0.00001**	0.002073**	0.696948	0.783577	0.932019
SKST APARCH	0.000179**	0.071193	0.910293	0.590073	0.932019
Short position					
RiskMetrics	0.290959	0.107406	0.282739	0.903859	0.336668
N GARCH	1	0.51989	0.696948	0.514662	0.64543
N APARCH	0.430858	0.405374	0.864032	0.903859	0.64543
ST APARCH	0.233531	0.026286*	0.014277*	0.141916	0.932019
SKST APARCH	0.695975	0.223971	0.014277*	0.141916	0.932019

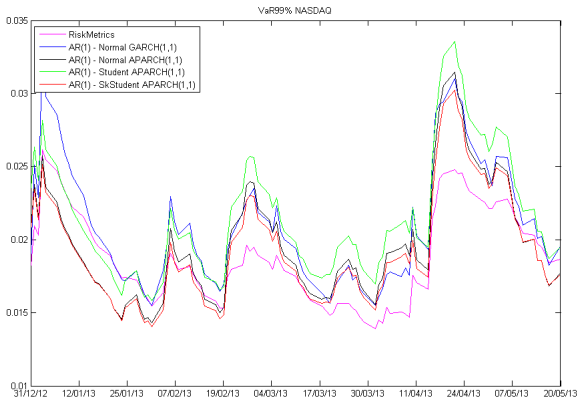
Aplicación real - Test de Kupiec (out-of-sample) - NASDAQ - 2/2

α	5 %	2.5 %	1 %	0.5 %	0.25 %
Nº excep esperadas	63	32	13	6	3
Long position					
RiskMetrics	0.025568*	0.000223**	0.000001**	0**	0**
N GARCH	0.013494*	0.003455**	0.000002**	0.000001**	0.000033**
N APARCH	0.131584	0.001221**	0.000004**	0.000044**	0.000001**
ST APARCH	0.013494*	0.009058**	0.016079*	0.173593	0.153335
SKST APARCH	0.254879	0.140699	0.236874	0.514662	0.932019
Short position					
RiskMetrics	0.356791	0.928294	0.509438	0.783577	0.336668
N GARCH	0.601411	0.927925	0.910293	0.903859	0.932019
N APARCH	0.601411	0.51989	0.910293	0.903859	0.486602
ST APARCH	0.695975	0.223971	0.037411*	0.044827*	0.012020*
SKST APARCH	0.103115	0.427075	0.696948	0.903859	0.486602

Aplicación real - Diferencias VaR - NASDAQ - 1/3



Aplicación real - Diferencias VaR - NASDAQ - 2/3



Aplicación real - Diferencias VaR - 3/3

Diferencias económicas en la estimación del VaR para un bono de nominal 100 mill €.

	IBEX 35		NASDAQ	
	$VaR_1\%$	$VaR_{99\%}$	$VaR_1\%$	$VaR_{99\%}$
SKST-APARCH				
RiskMetrics	374,400 €	205,005 €	454,980 €	75,423 €
N-GARCH	274,885 €	97,936 €	383,974 €	-54,488 €
N-APARCH	287,183 €	156,949 €	364,632 €	-73,298 €
ST-APARCH	9,368 €	-182,069 €	189,032 €	-266,224 €

Aplicación real - Expected Shortfall - 1/2

¿Se obtiene la misma conclusión si se utiliza otra medida de riesgo?

Aplicación real - Expected Shortfall - 2/2

El Expected Shortfall (ES) indica cuál es el valor esperado de la pérdida, condicionada a que ésta sea mayor que el VaR. Para los rendimientos de un activo Y_t , el ES está definido por

$$ES_{\alpha} = E(Y|Y > VaR_{\alpha})$$

En la práctica, el ES puede ser entendido como el promedio de los valores que exceden el VaR con un nivel α . El cálculo del ES, para una distribución continua, está definido por

$$ES_{\alpha} = E(Y|Y > VaR_{\alpha}) = \frac{1}{1 - F_Y(VaR_{\alpha})} \int_{VaR_{\alpha}}^U Y f_Y dy$$

donde U representa el extremo superior de los rendimientos y $F_Y(\cdot)$, $f_Y(\cdot)$ corresponden a la función de distribución y de densidad de los rendimientos, respectivamente.

Aplicación real - Test McNeil & Frey - 1/4

Tiene en cuenta la diferencia entre el rendimiento del próximo día y_{t+1} y el Expected Shortfall estimado en ese momento t , $\widehat{ES}_\alpha^t(Y_{t+1})$, condicionado a que y_{t+1} exceda del $\widehat{VaR}_\alpha^t(Y_{t+1})$.

Los residuos de excedencia son

$$\mathbf{r} = \{r_{t+1}; \text{ para } t | y_{t+1} > \widehat{VaR}_\alpha^t(Y_{t+1})\}$$

donde

$$r_{t+1} = \frac{y_{t+1} - \widehat{ES}_\alpha^t(Y_{t+1})}{\widehat{\sigma}_{t+1}}$$

y $|\mathbf{r}| = m$, donde m es el número de excepciones.

Bajo la hipótesis nula estos residuos deberían comportarse como una muestra i.i.d. de una variable aleatoria con media cero, y bajo la alternativa, con media mayor que cero.

Aplicación real - Test McNeil & Frey - 2/4

El test estadístico es $T = \frac{\bar{r} - \mu_0}{\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{m}}}$ donde $\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_i$, $\mu_0 = 0$ bajo H_0 y $\bar{\sigma} = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (r_i - \bar{r})^2$.

El estadístico t no sigue una distribución estándar por lo que se utiliza bootstrap. (Efron & Tibshirani, 1993).

Se calculan los *shifted residuals* (residuos con media cero)

$$\tilde{r}_i = r_i - \bar{r} + \mu_0, i = 1, 2, \dots, m$$

Se obtienen $N=1000$ remuestras $(\tilde{r}_1^*, \tilde{r}_2^*, \dots, \tilde{r}_m^*)$ y se calcula en cada una de ellas el estadístico

$$T_j^* = \frac{\bar{\tilde{r}}^* - \mu_0}{\frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{m}}}$$

El p-value bajo H_0 es $p - value = \frac{\sum_{j=1}^N \mathbf{1}_{\{T_j^* > T\}}}{N}$

Aplicación real - Test McNeil & Frey - IBEX 35 - 3/4

α	5 %	2.5 %	1 %	0.5 %	0.25 %
Long position					
RiskMetrics	0**	0**	0**	0**	0**
N GARCH	0**	0.0001**	0**	0.00013**	0.00075**
N APARCH	0**	0.00034**	0.00010**	0.00029**	0.00054**
ST APARCH	0.76483	0.42084	0.07323	0.01509*	0.03783*
SKST APARCH	0.85729	0.42833	0.08730	0.03470*	0.07062
Short position					
RiskMetrics	0.03132*	0.05763	0.01726*	0.01291*	0.00552**
N GARCH	0.17341	0.03943*	0.05010	0.023*	0.00442**
N APARCH	0.07701	0.06383	0.05153	0.01404*	0.00847**
ST APARCH	0.99966	0.94694	0.12018	0.08108	0.11680
SKST APARCH	0.99805	0.91791	0.38658	0.06384	0.0893

Aplicación real - Test McNeil & Frey - NASDAQ - 4/4

α	5 %	2.5 %	1 %	0.5 %	0.25 %
Long position					
RiskMetrics	0**	0**	0**	0**	0**
N GARCH	0**	0**	0**	0**	0**
N APARCH	0**	0**	0**	0**	0**
ST APARCH	0.62848	0.47848	0.24166	0.04955*	0.09803
SKST APARCH	0.97874	0.8323	0.13479	0.07011	0.13170
Short position					
RiskMetrics	0.08055	0.16892	0.07100	0.02973*	0.07191
N GARCH	0.2463	0.26519	0.09719	0.08016	0.10866
N APARCH	0.9214	0.50984	0.51839	0.27263	0.42538
ST APARCH	1	1	0.99749	0.99528	0.99678
SKST APARCH	0.99976	0.99955	0.95707	0.90726	0.98899

Aplicación real - Diferencias ES

Diferencias económicas en la estimación del ES para un bono de nominal 100 mill €.

	IBEX 35		NASDAQ	
SKST-APARCH	$ES_{1\%}$	$ES_{99\%}$	$ES_{1\%}$	$ES_{99\%}$
RiskMetrics	716,513 €	489,631 €	826,139 €	277,470 €
N-GARCH	633,204 €	397,852 €	758,716 €	142,522 €
N-APARCH	654,547 €	464,090 €	715,414 €	135,273 €
ST-APARCH	-25,069 €	-277,936 €	233,983 €	-392,690 €

Conclusiones

- El modelo APARCH con distribución t-Student asimétrica es el mejor modelo, de los estudiados, para la estimación del VaR en ambas colas de la distribución, al recoger la asimetría y el exceso de curtosis que presentan las series de rendimientos financieras.
- Respecto al Expected Shortfall, se llega a la misma conclusión tras realizar el Test de McNeil & Frey. El modelo SKST-APARCH es el más adecuado para la estimación del ES en ambas colas de la distribución.
- Si se comparan ambas medidas de riesgo, las pérdidas que se pueden obtener por no utilizar el modelo SKST-APARCH, cuando éste es el adecuado, son mayores con el ES que con el VaR.

Cuestiones abiertas

- Introducir otros activos: renta fija, commodities, tipos de cambio, ...
- Trabajar no sólo con VaR a un día, sino a más de un día.
- Utilizar la distribución t-Student asimétrica en otros modelos de la clase GARCH.
- Incorporar otros procedimientos de validación del VaR: Test de Christoffersen, Dynamic Quantil, Test de Berkowitz ...
- Ampliar a otras medidas de riesgo como Extreme Value Theory.
- ...

Gracias
por su atención