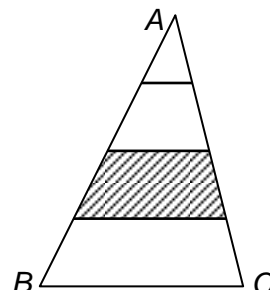


PRUEBA POR EQUIPOS 1º y 2º de E.S.O. (45 minutos)

1. En el triángulo ABC dibujamos tres paralelas a la base BC que dividen a la altura sobre dicho lado en cuatro partes iguales. Si el área del trapecio rayado es 35 cm^2 , calcula el área de dicho triángulo.



2. Las tangentes exteriores a dos circunferencias de radios 3 y 14 forman un ángulo de 60° . ¿A qué distancia están sus centros?

3. La tabla adjunta muestra algunos datos del último campeonato de pesca celebrado en el lago de la Casa de Campo.

| | | | | | | | | |
|--|---|---|---|----|-----|----|----|----|
| Número de peces pescados (n) | 0 | 1 | 2 | 3 | ... | 13 | 14 | 15 |
| Número de participantes que pescaron n peces | 9 | 5 | 7 | 23 | ... | 5 | 2 | 1 |

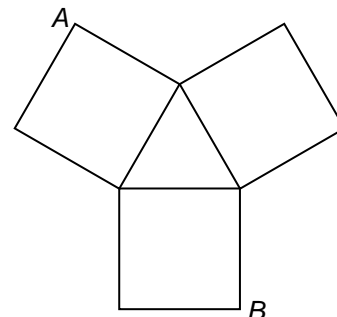
Como puedes observar hubo 9 participantes que no pescaron nada, 5 pescaron un único pez, etc. En la prensa local que cubría el evento se pudo leer al día siguiente:

- *El ganador obtuvo 15 peces*
- *La media de los que pescaron 3 o más peces fue de 6 peces.*
- *La media de los que pescaron menos de 13 peces fue de 5 peces.*

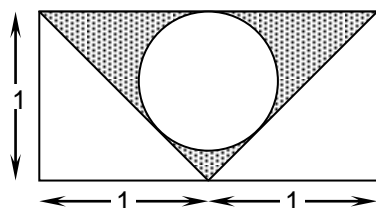
¿Cuál fue el número total de peces capturados?

PRUEBA POR EQUIPOS 3º y 4º de E.S.O. (45 minutos)

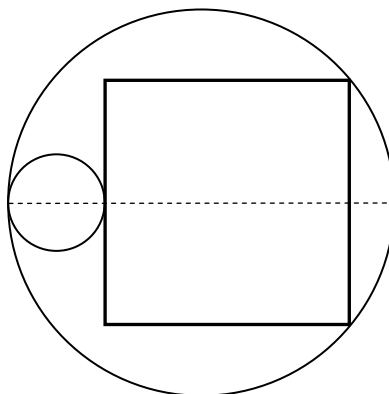
1. Sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero se construye un cuadrado, como indica la figura. Si el lado del triángulo es 10, ¿cuál es la distancia entre los vértices *A* y *B*?



2. Calcula el área de la zona sombreada



3. En el dibujo de la figura hay dos circunferencias tangentes interiores. El diámetro de la pequeña es 10 y el radio de la grande es 20. El cuadrado tangente a circunferencia pequeña tiene dos vértices en la circunferencia grande y su centro está alineado con los centros de las circunferencias. Calcula el lado del cuadrado y expresa el resultado en la forma $m + n\sqrt{t}$ con m , n y t enteros y n lo más grande posible.



XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

23 de noviembre de 2013

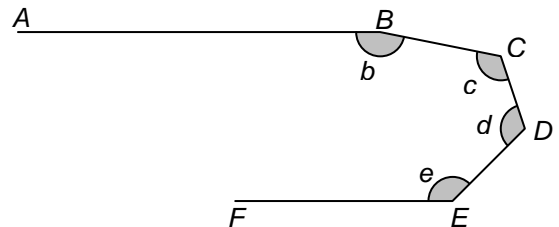
PRUEBA POR EQUIPOS Bachillerato. (45 minutos)

1. Sean f y g dos funciones cuyas gráficas son dos rectas. Si para todo número real x se verifica que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, $f(0) = 4$ y $g(5) = 61$, calcula $f(2013)$.
2. Calcula el máximo común divisor de todos los enteros de la forma $n^5 - 5n^3 + 4n$ para cualquier entero $n > 2$.
3. La sucesión 3, 15, 24, 48, 63, ... está formada por los enteros positivos que son múltiplos de 3 y una unidad menor que un cuadrado perfecto. ¿Cuál es el resto de la división entre 1000 del término que ocupa el lugar 2013º en dicha sucesión?

PRUEBA INDIVIDUAL 1º y 2º de E.S.O. (90 minutos)

1. Calcula el menor número de cinco cifras "pqrst", todas diferentes, que sea divisible por 3, 4, 5 y 7. (ten en cuenta que p no puede ser cero)

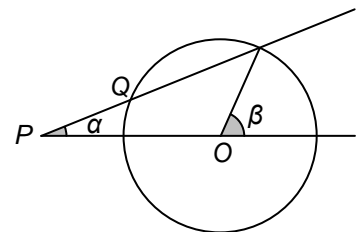
2. La recta que pasa por A y B es paralela a la que pasa por F y E . Si b , c , d y e son las medidas de los ángulos marcados, calcula la suma $b + c + d + e$.



3. El cuadrado que observas es "mágico", es decir, la suma de los números de las tres filas, las tres columnas y las dos diagonales es la misma. Si los nueve números del cuadrado mágico son los números pares comprendidos entre 11 y 29, ¿cuánto vale el producto $a \cdot b \cdot c$? Completa el cuadrado con esos números cuando $c < b$.

| | | |
|-------------|-----|-------------|
| x | y | $a - c$ |
| $a - b - c$ | a | $a + b + c$ |
| z | u | v |

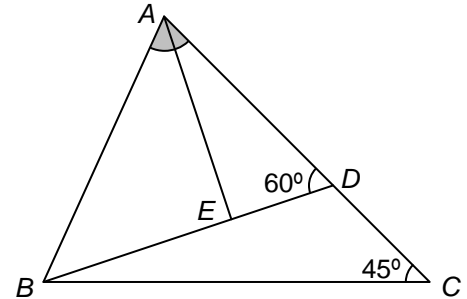
4. En un Instituto hay 144 estudiantes en 2º de ESO. En 1º de ESO hay un 25% de estudiantes más que en 3º de ESO, o sea, si en 3º hubiera 20, en 1º habría $20 + 25\%$ de $20 = 25$. En 2º de ESO hay un 10% menos que en 1º y el 20% del total de estudiantes de la ESO son de 4º. ¿Cuántos estudiantes hay entre los cuatro cursos de ESO de ese Instituto?
5. En esta figura el segmento PQ es igual que el radio de la circunferencia de centro O . Si el ángulo β mide 66° , ¿cuánto mide el ángulo α ?



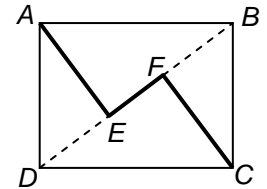
PRUEBA INDIVIDUAL 3º y 4º de E.S.O. (90 minutos)

1. Encuentra todas las parejas de enteros positivos a y b tales que $5a - ab = 9b^2$.

2. En el triángulo ABC de la figura, que no está hecha a escala, $AD = 2$, $DC = 1$ y E es el pie de la perpendicular desde A a la recta BD . Si el ángulo $\hat{ACB} = 45^\circ$ y el ángulo $\hat{ADE} = 60^\circ$, calcula el valor del ángulo \hat{BAC} marcado en la figura.

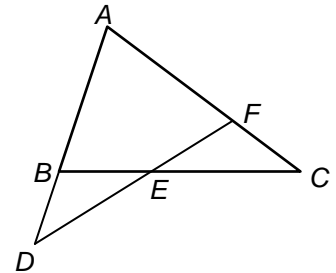


3. En el rectángulo $ABCD$ de dimensiones 8 y 6, los puntos E y F son los pies de las perpendiculares desde A y C sobre la diagonal BD . Calcula la longitud de la línea quebrada $AEFC$.



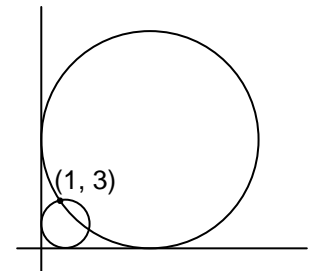
4. Si a y b son enteros positivos tales que $a \cdot b = 10!$, prueba que $a + b$ siempre es mayor que 3744.

5. En el triángulo ABC de la figura, que no está hecho a escala, prolongamos el lado AB hasta el punto D . Desde D trazamos una recta que corta a los lados BC y AC en los puntos E y F , respectivamente, verificándose que $AB = AE = AF$ y que $FE = FC$. Demuestra que $AD = FD$.



PRUEBA INDIVIDUAL Bachillerato (90 minutos)

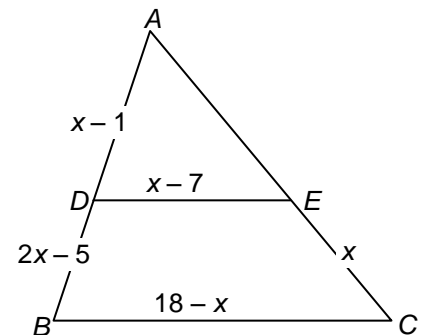
1. Dos circunferencias distintas son tangentes a los ejes de coordenadas y ambas pasan por el punto $(1, 3)$. ¿Cuál es la suma de sus radios?



2. Calcula el menor entero n , mayor que 2000, tal que los números

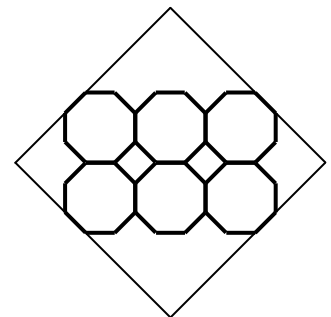
$$\frac{3n+4}{5}, \frac{4n+5}{3}, \frac{5n+3}{4}$$
 sean enteros.

3. En el triángulo ABC de la figura, que no está hecho a escala, la recta DE es paralela al lado BC . Encuentra, si existen, los valores de x que hacen que los segmentos señalados tengan las longitudes que se indican.



4. Calcula la pendiente de la recta que, pasando por el origen, corta a la parábola $5y = 2x^2 - 6x + 10$ en dos puntos cuyas abscisas suman 2013.

5. En el cuadrado $ABCD$ de la figura hay seis octógonos regulares iguales, de lado 2, que comparten un lado con los octógonos colindantes. Cada uno de los octógonos de los extremos tiene un lado sobre un lado del cuadrado. Calcula el área del cuadrado y expresa el resultado en la forma $m + n\sqrt{2}$.

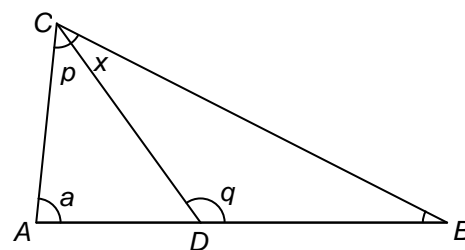


PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)**1º y 2º de ESO.-**

1A.- Si escribimos el máximo común divisor de 720 y 1080 en la forma $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, calcula $a + b + c$.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

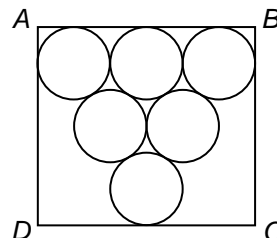
1B.- Sea "T" la respuesta del problema 2B
¿Cuál es el menor entero positivo N que verifica $(T + 4) \cdot N$ es el cubo de un número entero?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de Bachillerato)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C y n la suma de los dígitos de T.
En el triángulo ABC el ángulo a es mayor que 70° y su medida (en grados sexagesimales) viene dada por el número cuyas cifras son n y $\frac{n}{2}$. D es un punto del lado AB tal que $DC = DB$ y el ángulo q es el triple del ángulo p . ¿Cuál es la medida del ángulo x ?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)



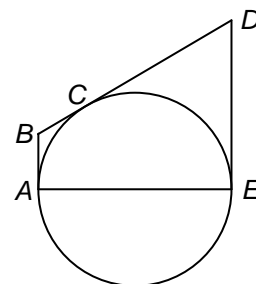
PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)**3º y 4º de ESO.-**

- 2A.-** Sea "T" la respuesta del problema 3A y p el producto de las cifras de T. En el rectángulo $ABCD$ de la figura, con $AB = p$, hay seis circunferencias tangentes entre sí y a los lados del rectángulo, como muestra la figura. Calcula BC y expresa la solución como $r\sqrt{3} + s$ con r y s enteros. **(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)**



- 2B.-** Estoy pensando en un número positivo. Si le sumo 7, divido esta suma entre 3, resto 3 a lo que me queda y finalmente elevo al cuadrado el número obtenido resulta 16. ¿En qué número estoy pensando?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

- 2C.-** Sea "T" la respuesta del problema 3C. La longitud del diámetro AE de la circunferencia de la figura es T. Si BA , ED , y BD son tangentes a dicha circunferencia en los puntos A , E y C , respectivamente, y $BD = 50$, calcula el área del trapecio $ABDE$.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)



PRUEBA POR RELEVOS (60 minutos)**Bachillerato.-****3A.-** Sea "T" la respuesta del problema 1A.

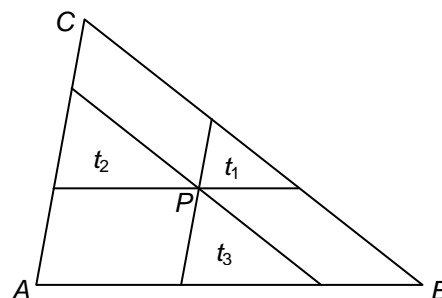
¿Cuántos cuadrados perfectos, sin contar el cero, son menores que 10^T y múltiplos de 24?
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

3B.- Sea "T" la respuesta del problema 1B.

En el interior del triángulo ABC elegimos un punto P por el que trazamos paralelas a los lados y resultan los triángulos t_1 , t_2 y t_3

de áreas $\frac{T}{3}$, $\frac{3T}{4}$ y $(4T + 1)$, respectivamente. ¿Cuál es el área del triángulo ABC ?

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

**3C.-** Calcula cuántos enteros n hay que verifican que $2^4 < 8^n < 16^{32}$.

(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)